Lista 2

Integração Numérica e Resolução de Sistema de Equações Lineares

1.
Calcule as integrais a seguir pela regra dos Trapézios e pela de Simpson, usando quatro e seis divisões de [a, b].

Compare os resultados:

a) $\int_1^2 e^x \, dx$

b) $\int_1^4 \sqrt{x} \, dx$

c) $\int_2^{14} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

2.
Usando as integrais do exercício anterior com quantas divisões do intervalo, no mínimo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}?

3.
Calcule o valor aproximado de $\int_0^{0.6} \frac{dx}{1 + x}$ com três casas decimais de precisão usando

a) Simpson

b) Trapézios.

4.
Qual o erro máximo cometido na aproximação de $\int_0^4 (3x^3 - 3x + 1)dx$ pela regra de Simpson com quatro subintervalos?

Calcule por Trapézios e compare os resultados.

5.
Determinar h, a distância entre x_i e x_{i+1}, para que se possa avaliar $\int_0^{\pi/2} \cos(x)dx$ com erro inferior a $\varepsilon = 10^{-3}$ pela regra de Simpson.

6.

A regra dos Retângulos repetida é obtida quando aproximamos f(x), em cada subintervalo, por um polinômio de interpolação de grau zero. Encontre a regra dos Retângulos bem como a expressão do erro, fazendo:

a) $p_0^j(x) = f(x_{j-1})$ $j = 1, 2, ..., m$

b) $p_0^j(x) = f(\frac{x_{j-1} + x_j}{2})$ $j = 1, 2, ..., m.$

Esta é a regra do Ponto Médio e é uma fórmula aberta de Newton-Cotes.

7.

Seja o problema:

Interpolar a função sen(x) sobre $[0, \pi/4]$ usando um polinômio de grau 2 e integrar esta função, neste intervalo, usando a regra 1/3 de Simpson.

Qual deve ser o menor número m de subintervalos em $[0, \frac{\pi}{4}]$ para se garantir um erro menor que 10^{-4} tanto na integração quanto na interpolação?

8.

Dada a tabela:

x	0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
f(x)	1.0	1.2408	1.5735	2.0333	2.6965	3.7183

e sabendo que a regra 1/3 de Simpson é, em geral, mais precisa que a regra dos Trapézios, qual seria o modo mais adequado de calcular $I = \int_0^1 f(x)\,dx$, usando a tabela acima? Aplique este processo para determinar I.

9.

Calcule, pela regra dos Trapézios e de Simpson, cada uma das integrais abaixo, com erro menor do que ε dado:

a) $\int_0^{\pi} e^{sen(x)}\,dx$; $\varepsilon = 2 \times 10^{-2}$.

b) $\int_1^{\pi/2} (sen(x))^{1/2}\,dx$; $\varepsilon = 10^{-4}$.

10.

Usando a regra de Simpson, calcule o valor de $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ com precisão de 4 casas decimais. Compare o resultado com o valor de ln(2).

11.

Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da Eliminação de Gauss:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

12.

Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss (trabalhe com três casas decimais):

a)

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ -6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + x_4 = -9 \\ 9x_1 - 6x_2 + 19x_3 + x_4 = 23 \\ 6x_1 - 4x_2 - 6x_3 + 15x_4 = 11 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 0.252x_1 + 0.36x_2 + 0.12x_3 = 7 \\ 0.112x_1 + 0.16x_2 + 0.24x_3 = 8 \\ 0.147x_1 + 0.21x_2 + 0.25x_3 = 9 \end{cases}$$

13.

O cálculo do determinante de matrizes quadradas pode ser feito usando o método da Eliminação de Gauss.

a) Deduza o método.

b) Aplique-o no cálculo do determinante das matrizes dos exercícios 11 e 12.

14.

Demonstre que, se no início da etapa k do método da Eliminação de Gauss tivermos $a_{kk}^{(k-1)} = a_{(k+1)k}^{(k-1)} = \dots = a_{nk}^{(k-1)} = 0$, então $\det(A) = 0$ e conseqüentemente A não é inversível. ($a_{ij}^{(k-1)}$ é o elemento da posição ij no início da etapa k.)

15.

Podemos encontrar a fatoração LU de A diretamente, usando simplesmente a definição de produto de matrizes. Esquemas deste tipo são conhecidos como esquemas compactos, e o equivalente à fatoração A = LU com L triangular inferior com diagonal unitária e U triangular superior é chamado de *redução de Doolittle.*

Supondo que a fatoração LU de A seja possível, de uma forma única,

a) multiplique a primeira linha de L pela j-ésima coluna de U e iguale a a_{1j}. Verifique que desta forma obtém-se o elemento u_{1j};

b) repita o item (*a*), multiplicando agora a i-ésima linha de L pela primeira coluna de U, e igualando a a_{i1} será possível obter l_{i1};

16.

Calcule a fatoração LU de A, se possível:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

17.

a) Mostre que resolver AX = B, onde A é matriz n × n, X e B são matrizes n × m, é o mesmo que resolver m sistemas do tipo Ax = b, onde A é matriz n × n, x e b, vetores n × 1.

b) Usando o item (*a*), verifique que A^{-1} pode ser obtida através de resolução de n sistemas lineares.

c) Entre o método da Eliminação de Gauss e a fatoração LU, qual o mais indicado para o cálculo de A^{-1}?

d) Aplique o método escolhido no item (*c*) para obter a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

19.

Mostre que, se A é matriz não singular e A = LU, então $A = LD\overline{U}$, onde D é matriz diagonal e $\overline{U}$ matriz triangular superior com diagonal unitária.

20.

Se A = LDU, como fica a resolução de Ax = b?

21.
Trabalhando com arredondamento para dois dígitos significativos em todas as operações, resolva o sistema linear abaixo pelo método da Eliminação de Gauss, sem e com pivoteamento parcial. Discuta seus resultados:

$$\begin{cases} 16x_1 + 5x_2 = 21 \\ 3x_1 + 2.5x_2 = 5.5 \end{cases}$$

Refaça o exercício usando truncamento para dois dígitos significativos.

22.
Em cada caso abaixo resolva, se possível, pelo método de Gauss-Seidel:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

23.
Considere o sistema linear cuja matriz dos coeficientes é a matriz esparsa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 20 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

a) Ache a solução por inspeção.

b) Faça mudanças de linhas na matriz original para facilitar a aplicação do método da Eliminação de Gauss. O que você pode concluir, de uma maneira geral?

c) Aplique o método de Gauss-Seidel ao sistema. Comente seu desempenho.

d) Faça uma comparação da utilização de métodos diretos e iterativos na resolução de sistemas lineares esparsos.