

# Extensões de Coordenadas Baricêntricas para Deformação de Malhas

Lis Ingrid Custódio  
Depto. de Matematica  
PUC - Rio  
Rio de Janeiro, Brasil  
www.mat.puc-rio.br/~lisingrid

Thomas Lewiner  
Depto. de Matematica  
PUC - Rio  
Rio de Janeiro, Brasil  
www.mat.puc-rio.br/~tomlew

Sinésio Pesco  
Depto. de Matematica  
PUC - Rio  
Rio de Janeiro, Brasil  
www.mat.puc-rio.br/~sinesio

**Resumo**—Nos últimos anos houve um crescente interesse no uso de poliedros de controle para deformação de superfícies em três dimensões. Os principais métodos propostos representam os pontos da superfície como combinação linear dos elementos do poliedro de controle.

Nesse trabalho<sup>1</sup> propomos uma modificação nas Coordenadas do Valor Médio (CVM) propostas por Floater, de forma a manter a simplicidade de construção e eliminar os problemas causados pelo surgimento de coordenadas negativas em regiões limitadas por poliedros não convexos

**Abstract**—In recent years there has been an increased interest in the use of closed polyhedral cages for surface deformation in three dimensions. The main proposed methods represent the surface points as a linear combination of elements of the cage

In this work, we propose a modification of Mean Value Coordinates (MVC) proposed by Floater, in order to maintain the simplicity of construction and eliminate the problems caused by negative coordinates in regions bounded by non-convex polyhedra

## I. INTRODUÇÃO

Dentre os métodos de deformação de objetos tridimensionais, os que usam poliedros de controle se destacam por permitirem interações rápidas e intuitivas. Essa técnica expressa os pontos do objeto a partir dos vértices do poliedro de controle (um poliedro envolvendo o objeto, cujo número de vértices é consideravelmente menor do que o número de vértices do objeto). Ao deformar o poliedro de controle, obtém-se deformações correspondentes sobre o modelo recalculando cada ponto do objeto a partir das novas posições dos vértices de controle.

Por suas propriedades, algumas técnicas de deformação usam extensões de coordenadas baricêntricas para escrever os pontos do modelo em função dos pontos do poliedro de controle. As coordenadas baricêntricas  $\lambda_i$  de um ponto  $v_0$  no interior de uma região  $P$  (polígonos em  $\mathbb{R}^2$  e poliedros em  $\mathbb{R}^3$ ) com  $n$  vértices, são tais que:

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad e \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = v_0, \quad (1)$$

<sup>1</sup>Esse artigo é uma versão resumida da dissertação de mestrado do primeiro autor. O texto completo pode ser encontrado em: [www.matmidia.mat.puc-rio.br/pdfs/lisingrid\\_msc.pdf](http://www.matmidia.mat.puc-rio.br/pdfs/lisingrid_msc.pdf).

onde  $v_i$  são os vértices da fronteira de  $P$ .

Para simplexos (triângulos em  $\mathbb{R}^2$  e tetraedros em  $\mathbb{R}^3$ ) o sistema de equações (1) tem solução única. Porém, quando temos por exemplo, em  $\mathbb{R}^2$  um polígono com mais de três vértices o sistema de equações (1) se torna *possível e indeterminado*, podendo existir infinitos conjuntos de coordenadas para o ponto  $v_0$ . Observe que o mesmo acontece em  $\mathbb{R}^3$  para poliedros com mais de quatro vértices. Considere uma região  $P$  cuja fronteira  $\partial P$  é formada pelo polígono de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dispostos no sentido anti-horário e  $v_0$  um ponto no interior da região  $P$  (ver figura 1(a)). Podemos interpretar coordenada  $\lambda_i$  do ponto  $v_0$  em relação ao vértice  $v_i$  como sendo a influência do vértice  $v_i$  sobre o ponto  $v_0$ . Ao procurarmos formas de estender coordenadas baricêntricas para não simplexos, procuramos uma forma de propagar a influência de um vértice na fronteira  $\partial P$  da região  $P$  para seu interior, de forma suave. Definindo sobre  $\partial P$  a função  $f$  como sendo a função identidade, procuramos uma função suave  $u$  no interior de  $P$  tal que  $u$  seja igual a  $f$  para todo ponto sobre  $\partial P$ . Essa suavidade é obtida ao impormos que  $u$  seja uma função harmônica. Em outras palavras, procura-se formas de obter uma função  $u$  definida em  $P$ , tal que  $u$  seja solução do *problema de Dirichlet* no interior da região  $P$ , sendo a condição de fronteira a função identidade:

$$\nabla^2 u(v) = 0, \quad v \in \text{int}(P) \quad e \quad u(v) = f(v), \quad v \in \partial P. \quad (2)$$

Nos últimos anos, a generalização de Coordenadas Baricêntricas vem recebendo considerável atenção. Em particular, em 2003 Floater propôs um conjunto de coordenadas baseadas no Teorema do Valor Médio [6], obtendo coordenadas suaves em regiões limitadas por polígonos fechados. Em 2005, Ju et al. [1] e Floater [5] estenderam para três dimensões as coordenadas obtidas por Floater [6].

Uma das desvantagens desses métodos é que em alguns casos observamos o aparecimento de coordenadas negativas que fazem com que as deformações obtidas com as CVM apresentem comportamento indesejado em algumas regiões do modelo. Vamos ilustrar algumas dessas situações na seção III.

Com o objetivo de eliminar esse comportamento inde-

sejado em deformações obtidas com as CVM, propomos um método de construção de coordenadas derivadas do teorema do valor médio, no qual os vértices de controle não exercem influência significativa sobre regiões do modelo não relacionadas a eles, como consequência, as deformações indesejadas causadas pelas coordenadas negativas são evitadas.

Na seção II destacamos as principais características de métodos de deformação usando coordenadas baricêntricas apresentados nos últimos anos. Em seguida, na seção III, apresentamos a construção das CVM propostas por Floater, destacando as causas e consequências das coordenadas negativas. Na seção IV, propomos uma modificação na construção apresentada por Floater, onde substituímos a distância euclidiana pela distância obtida pelo caminho percorrido no interior do poliedro de controle. Apresentamos e comparamos as deformações obtidas com as nossas coordenadas com as deformações obtidas com as Coordenadas do Valor Médio e Coordenadas Harmônicas.

## II. TRABALHOS ANTERIORES

Em 2005 Ju et al. [1] e Floater et al. [5] estenderam para malhas triangulares as coordenadas obtidas por Floater em polígonos [6], uma generalização de coordenadas baricêntricas derivadas do teorema do valor médio para funções harmônicas. As coordenadas obtidas são não negativas apenas para poliedros de controle convexos e no núcleo de poliedros de controle não convexos.

Em 2007 Joshi et al. [2], através da solução numérica da equação de Laplace no interior do poliedro de controle, obteve uma generalização de coordenadas baricêntricas, construindo coordenadas estritamente positivas, denominadas Coordenadas Harmônicas. A solução da equação de Laplace é obtida sobre as células de um gride regular construído de forma a envolver o poliedro de controle. Essa necessidade de discretização do domínio torna a construção das coordenadas um processo lento e que demanda memória.

Também em 2007, Lipman et al. [3] propuseram a construção de coordenadas derivadas do teorema do valor médio estritamente positivas, respeitando a visibilidade de um ponto no interior do poliedro de controle. Desta forma, pontos no interior do poliedro de controle são escritos em função apenas dos pontos de controle visíveis a ele. Todo ponto no interior terá como poliedro de controle um poliedro de controle convexo, evitando assim as coordenadas negativas apresentadas por Ju et al. [1]. O critério de visibilidade do ponto faz com que poliedros de controle diferentes sejam tomados para a obtenção das coordenadas de pontos de um mesmo modelo, fazendo com que, em algumas regiões do modelo, pontos relativamente próximos, tenham poliedros de controle diferentes, comprometendo a suavidade das coordenadas.

Em 2008 Lipman et al. [4] construíram coordenadas motivadas pela terceira identidade de Green, escrevendo um ponto no interior do poliedro de controle em função de seus

vértices e faces. As coordenadas obtidas tornam possível a obtenção de deformações conformes em duas dimensões e quase conformes em três dimensões.

## III. COORDENADAS DO VALOR MÉDIO

Considere  $P$  uma região do plano limitada por um polígono conexo de vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  dispostos no sentido anti-horário, que chamaremos de polígono de controle. Dado um ponto  $v_0$  no interior de  $P$ , denotemos por  $B(v_0, r)$  a bola centrada no ponto  $v_0$  e raio  $r$  (ver figura 1(a)).

A proposta de Floater [6] para determinar  $u(v_0)$  foi usar o fato de funções harmônicas obedecerem o Teorema do Valor Médio no interior de  $P$ .

Embora façamos uso das CVM também em três dimensões, por simplicidade, abordaremos a dedução e análise das coordenadas apenas em duas dimensões. Para mais detalhes sobre a dedução e análise das CVM em três dimensões veja [7].

**Teorema III.1** (Teorema do Valor Médio Circunferencial). *Seja  $P \subset \mathbb{R}^2$  uma região conexa,  $u$  uma função harmônica em  $P$  e  $B = B(v_0, r) \subset P$  com fronteira  $\Gamma$ , então*

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\Gamma} u(v) ds. \quad (3)$$

Considere o triângulo  $T_i = [v_0, v_i, v_{i+1}]$  (ver figura 1) e seja  $\Gamma_i$  o arco de  $\Gamma$  contido em  $T_i$ , assim a equação (3) pode ser escrita da forma

$$u(v_0) = \frac{1}{2\pi r} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} u(v) ds. \quad (4)$$

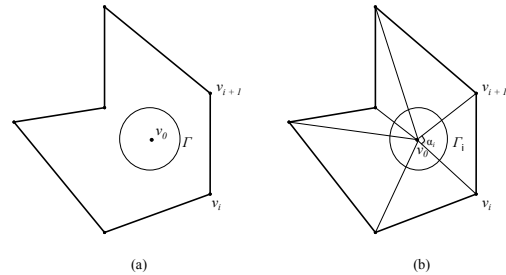


Figura 1. (a) Circunferência  $\Gamma$  centrada em  $v_0$ , no interior de região  $P$ . (b) Triangulação da região  $P$ .

**Lema III.2.** *Se  $f : \Gamma_i \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função linear e  $\alpha_i$  o ângulo com sinal entre os vértice  $v_i$  e  $v_{i+1}$ , então*

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} f(v) ds = & r^2 \tan\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \left( \frac{f(v_i) - f(v_0)}{\|v_i - v_0\|} + \frac{f(v_{i+1}) - f(v_0)}{\|v_{i+1} - v_0\|} \right) \\ & + r\alpha_i f(v_0). \end{aligned} \quad (5)$$

Com o lema III.2 podemos reescrever a equação (4) e obtemos:

$$u(v_0) = \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} u(v_i), \quad w_i = \left( \frac{\tan \frac{\alpha_i}{2} + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} \right). \quad (6)$$

Escrevendo

$$\lambda_i = \frac{w_i}{\sum_{i=1}^n w_i}, \quad (7)$$

temos

$$u(v_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(v_i). \quad (8)$$

Observe que, tomando a função  $u$  como a identidade,  $\lambda_i$  serão as coordenadas baricêntricas do ponto  $v_0$  em relação aos vértices  $v_i$  pertencentes a fronteira da região  $P$ .

#### A. Coordenadas Negativas

Considere agora  $P$  uma região do plano limitada por um polígono não convexo.

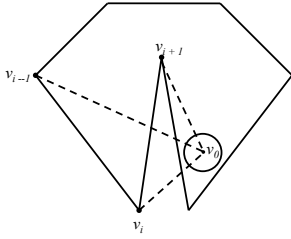


Figura 2. Causa do aparecimento de coordenadas negativas.

Como podemos observar na figura 2, a aresta  $[v_i, v_{i+1}]$  será projetada sobre a circunferência centrada em  $v_0$  com orientação contrária, dessa forma a coordenada  $w_i$ , do vértice  $v_i$  em relação a  $v_0$  antes de ser normalizada será dada por

$$w_i = \left( \frac{\tan(\frac{-\alpha_i}{2}) + \tan \frac{\alpha_{i-1}}{2}}{\|v_i - v_0\|} \right), \quad (9)$$

onde  $\tan(\frac{-\alpha_i}{2}) < 0$  e  $|\tan(\frac{\alpha_{i+1}}{2})| < |\tan(\frac{-\alpha_i}{2})|$ , o que implica  $w_i < 0$ .

#### B. Consequências das coordenadas negativas

Como consequência das coordenadas negativas, as deformações com as coordenadas do valor médio apresentam comportamento indesejado em algumas regiões do modelo, como veremos a seguir.

Na figura 3(a) temos em destaque as regiões de maior influência do vértice de cor laranja, em vermelho a região

com influência positiva e em verde a região com influência negativa. Observe na figura 3(b) que ao movimentarmos os vértices de controle relacionados a perna esquerda do modelo, a região da perna direita onde os vértices vizinhos ao vértice de cor laranja exercem influência negativa movimenta-se na direção contrária, causando uma deformação indesejada. O mesmo efeito pode ser observado na perna esquerda, relacionada a influência negativa dos vértices de controle da perna direita.

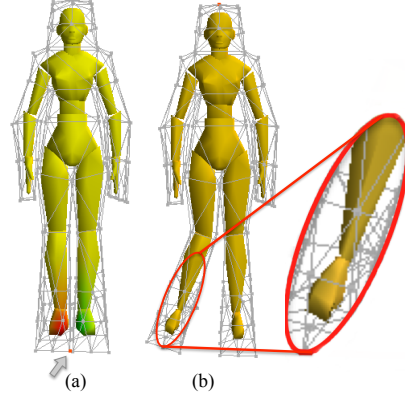


Figura 3. (a) Influência positiva (região vermelha) e negativa (região verde) do vértice laranja. (b) Consequência dos pesos negativos e do uso da distância euclidiana nas coordenadas do valor médio.

O problema das coordenadas negativas é agravado pelo uso da distância euclidiana no cálculo das coordenadas. Ao considerar a distância euclidiana entre vértices do poliedro de controle e pontos do modelo, a visibilidade de um ponto no interior do poliedro de controle não é considerada, fazendo com que vértices do poliedro de controle distantes de  $v_0$  (considerando um caminho tomado no interior do poliedro de controle) estejam tão próximos quanto vértices de controle diretamente relacionados a ele (ver figura 4). Assim, os vértices de controle não diretamente relacionados a uma região do modelo exercem grande influência sobre ela e, como vimos acima, essa influência é dada de forma negativa, causando deformações indesejáveis em algumas regiões do modelo.

#### IV. COORDENADAS DO VALOR MÉDIO MODIFICADAS

Como vimos na seção III-A, as coordenadas do valor médio, para poliedros não convexos, não satisfazem a propriedade de *não negatividade*.

A influência negativa de um vértice é sempre sobre regiões não relacionadas a ele, um exemplo pode ser observado na figura 5.

Propomos uma modificação, que chamaremos de Coordenadas do Valor Médio Modificadas, tal que os vértices de controle não exerçam uma influência significativa sobre regiões do modelo não relacionados a eles, como consequência, as deformações indesejadas apresentadas na seção III-B são evitadas.

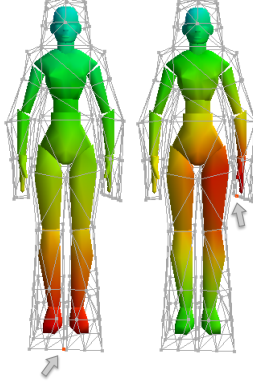


Figura 4. Propagação da distância euclidiana dos vértices de controle, de cor laranja, sobre o modelo.

Apresentamos um processo de construção que não necessita de discretização do domínio e não compromete a suavidade das coordenadas, problemas apresentados na construção das Coordenadas Harmônicas [2] e Coordenadas do Valor Médio positivas [3], respectivamente.

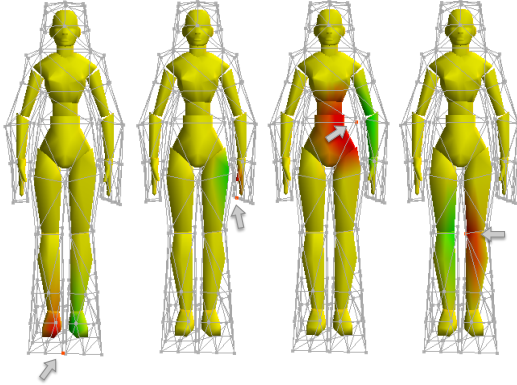


Figura 5. Regiões de influência dos vértices de cor laranja. Variando do vermelho para o amarelo, suas influências positivas e do verde para o amarelo suas influências negativas.

Nossa proposta é considerar, ao invés de distância euclidiana, uma distância relativa ao interior do poliedro de controle, assim a distância de um vértice de controle para um ponto no interior será dada pelo comprimento do caminho percorrido entre eles no interior do poliedro de controle (ver figura 6).

#### A. Distância Interior

Considere  $d$  uma distância mensurada sobre a malha do poliedro de controle e  $d_{ij} = (v_i, v_j)$  as distâncias entre os vértices desta malha. Para definir uma distância no interior do poliedro de controle utilizamos o artigo *Interior Distance Using Barycentric Coordinates* [8], que propaga distâncias mensuradas sobre uma malha para seu interior. Para isso, mergulhamos os vértices  $v_i \in \mathbb{R}^3$  em

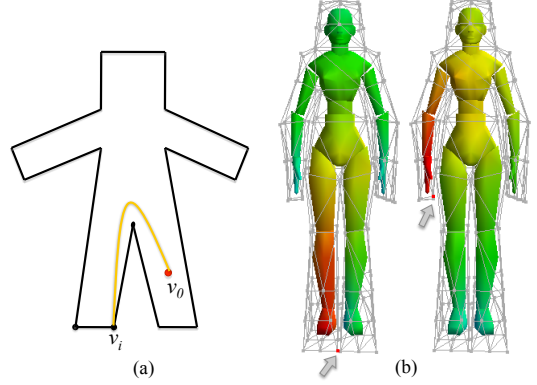


Figura 6. (a) Ilustração do caminho no interior do polígono de controle (b) Propagação da distância interior dos vértices de controle, de cor laranja, sobre o modelo.

um espaço de dimensão maior  $\mathbb{R}^m$  (para algum  $m$ ) através da construção de um mapeamento  $v_i \mapsto v_i^* \in \mathbb{R}^m$  tal que  $\|v_i^* - v_j^*\|_2$  seja igual a distância  $d_{ij}$ . Em seguida, através de coordenadas baricêntricas, estendemos esse mapeamento para o interior da malha. Dados um ponto  $p$  no interior da malha e  $\lambda_i(p), i = 1, \dots, n$  as coordenadas baricêntricas de  $p$  em relação aos vértices da malha (onde  $n$  é o número de vértices da malha), temos  $p \mapsto p^* = \sum_i \lambda_i(p) v_i^*$ . A distância entre dois pontos  $p$  e  $q$  tomada no interior da malha é dada pela distância euclidiana entre suas imagens:

$$\hat{d}(p, q) = \|p^* - q^*\|_2 \quad (10)$$

Dessa forma, a distância interior é expressa em função das coordenadas baricêntricas dos pontos  $p$  e  $q$  e das imagens  $v_i^*$  dos vértices da malha. Tomando  $p^* = \sum_i \lambda_i(p) v_i^*$  e  $q^* = \sum_i \lambda_i(q) v_i^*$ , pela equação (10) temos :

$$\hat{d}^2(p, q) = \langle p^* - q^*, p^* - q^* \rangle \quad (11)$$

$$= \left\langle \sum_i (\lambda_i(p) - \lambda_i(q)) v_i^*, \sum_j (\lambda_j(p) - \lambda_j(q)) v_j^* \right\rangle \quad (12)$$

$$= \sum_{i,j} (\lambda_i(p) - \lambda_i(q)) (\lambda_j(p) - \lambda_j(q)) \langle v_i^*, v_j^* \rangle \quad (13)$$

$$= (\vec{\lambda}(p) - \vec{\lambda}(q))^T A (\vec{\lambda}(p) - \vec{\lambda}(q)), \quad (14)$$

onde  $\vec{\lambda}(p) = (\lambda_1(p), \lambda_2(p), \dots, \lambda_n(p))$  é o vetor coluna dos pesos dos vértices da malha em relação ao ponto  $p$  e a matriz  $A$  é a matriz de Gram dos vértices, sendo cada elemento  $a_{ij} = \langle v_i^*, v_j^* \rangle_{\mathbb{R}^m}$ . Dessa forma, a distância interior de um vértice  $v_i$  do poliedro de controle para um ponto  $p$  em seu interior é dada por  $\hat{d}(v_i, p)$ .

Em nossa implementação optamos por não usar o mergulho explicitamente. Optamos por obter diretamente a matriz  $A$  com o uso de *Multi-Dimensional Scaling (MDS)* [9].

Seja  $D$  a matriz do quadrado das distâncias mensuradas sobre o poliedro de controle,  $D_{ij} = d^2(v_i, v_j)$  e  $I$  a matriz identidade, temos:

$$J = I - \frac{1}{n} \vec{1} \vec{1}^T, \quad (15)$$

onde  $\vec{1}$  é um vetor coluna de 1's.

$$A = -\frac{1}{2} J D J. \quad (16)$$

Por sua simplicidade de implementação, optamos por definir a distância entre os vértices de controle como o menor caminho entre eles, tomado sobre as arestas, como distância a ser propagada para o interior do poliedro de controle. Observe que dessa forma, uma distância entre dois vértices é melhor aproximada de acordo com a malha do poliedro de controle. Também por sua simplicidade de implementação, optamos por usar as coordenadas do valor médio, uma das coordenadas baricêntricas sugeridas por Rustamov et al. [8], como as coordenadas baricêntricas utilizadas para a construção da distância interior.

#### B. Propriedades da distância interior

- **Interpolação:** A distância  $\hat{d}$  obtida no interior da malha interpola a distância  $d$  tomada sobre a malha.
- **Métrica:** Se a matriz de Gram  $A$  é uma matriz definida positiva, então a distância  $\hat{d}$  é uma métrica.
- **Mesma topologia que a distância euclidiana:** Se a matriz de Gram  $A$  é uma matriz definida positiva e as coordenadas baricêntricas são contínuas, então a distância  $\hat{d}$  induz a mesma topologia das curvas isodistantes no interior da malha, que a distância euclidiana.

#### C. Uso de Distância Interior na Construção das Coordenadas do Valor Médio

A influência de um vértice de controle em uma região do modelo é inversamente proporcional a sua distância para essa região. Ao trocarmos a distância  $r_i$  para uma distância  $\hat{r}_i$  tomada no interior do poliedro de controle, fazemos com que  $\hat{r}_i$  seja o comprimento do caminho tomado, no interior do poliedro de controle, do vértice  $v_i$  até o ponto  $v_0$ , aumentando a distância de um vértice de controle para regiões não relacionadas a ele, e consequentemente, diminuindo sua influência sobre elas.

### V. RESULTADOS E COMPARAÇÕES

Com a alteração da distância, pontos de controle não diretamente relacionados a uma região do modelo tornam-se suficientemente distantes dessa região, diminuindo assim sua

influência sobre essa região. Observe na figura 7, onde destacamos pares de vértices de controle e pontos do modelo. Na tabela I podemos comparar a coordenada dos vértices de controle em destaque na figura 7, com relação aos pontos destacados no modelo, com as CVM originais e as nossas coordenadas, e observar a significativa redução de influência dos vértices de controle sobre regiões não relacionadas a eles.

Método	Figura (a)	Figura (b)
MVC	-0.26326	-0.12624
MVC modificadas	-0.07039	-0.02052
Redução	73.26%	83.74%

Tabela I  
TABELA DAS INFLUÊNCIAS DOS PONTOS SELECIONADOS NA FIGURA 7.

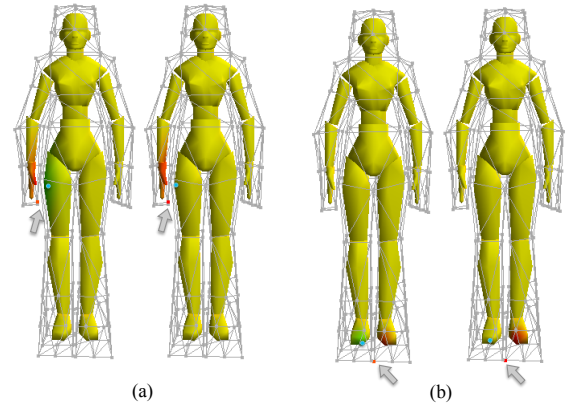


Figura 7. Comparações da influência dos vértices de controle em destaque com as CVM originais e com as nossas coordenadas.

Na figura 8 temos as deformações do modelo mulher robô obtidas por cada método, com os vértices do poliedro de controle na posição original. Optamos por mostrar primeiramente o resultado das deformações com o poliedro de controle na posição original para chamar atenção para algo observado em nossos experimentos, durante a implementação das coordenadas harmônicas. Observe na tabela II que, mesmo sem alteração da posição dos vértices do poliedro de controle, a área do modelo resultante da deformação com as coordenadas harmônicas é alterada. Isso ocorre por que a solução de equação de Laplace é calculada inicialmente sobre as células de um gride, assim a precisão linear do método é garantida apenas sobre as células desse gride. Usamos interpolação trilinear para obter o valor da função sobre os pontos do modelo. Isso faz com que o resultado das deformações esteja diretamente relacionado com o número de células do gride utilizado.

O resultado obtido na deformação com as nossas coordenadas apresenta uma pequena diminuição da área do modelo (0.2%), consequência da escolha da distância do

menor caminho sobre o poliedro de controle ao calcularmos o distância interior.

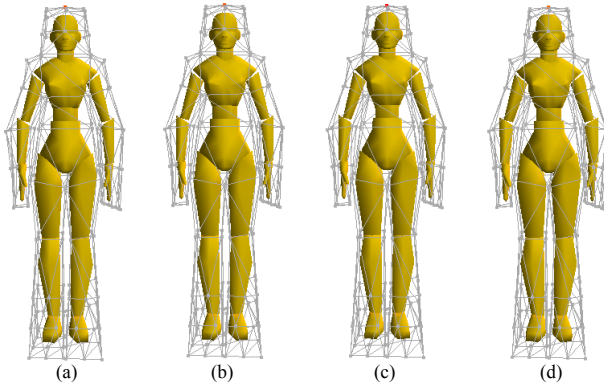


Figura 8. (a) Modelo original. (b) Deformação obtida com as CVM. (c) Deformação obtida com as CVM Modificadas. (d) Deformação obtida com as Coordenadas Harmônicas.

Método	Área
Modelo original	347.176
Coord. Valor Médio	347.176
Coord. Valor Médio Modificadas	346.448
Coord. Harmônicas	360.053
Coord. Green	347.170

Tabela II  
ÁREA DAS DEFORMAÇÕES OBTIDAS NA FIGURA 8.

E finalmente, podemos observar nas figuras 9 e 10 a melhoria nas deformações obtidas com as nossas coordenadas, nas regiões destacadas.

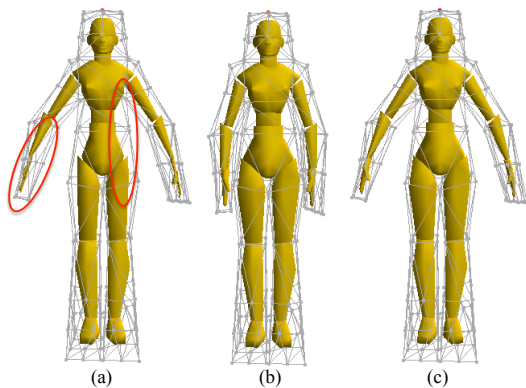


Figura 9. Comparação das deformações obtidas com as CVM originais e as nossas coordenadas.

## VI. CONCLUSÃO

A modificação na construção das coordenadas do valor médio que propomos, mostrou ser uma direção promissora

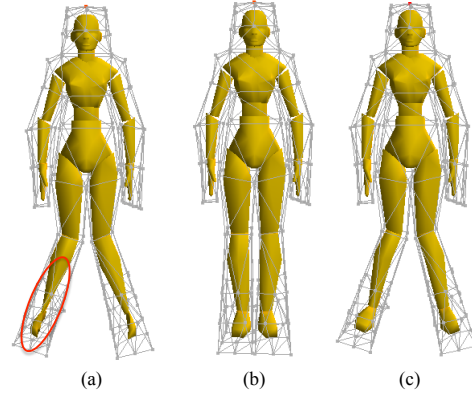


Figura 10. Comparação das deformações obtidas com as CVM originais e as nossas coordenadas.

para a obtenção de coordenadas derivados do teorema do valor médio com deformações livres dos problemas apresentados no método original. O uso da distância interior mostrou-se eficaz em reduzir as deformações indesejadas preservando melhor propriedades globais como área e volume.

## REFERÊNCIAS

- [1] T. Ju, S. Schaefer, and J. Warren, "Mean value coordinates for closed triangular meshes," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 24, no. 3, pp. 561–566, 2005.
- [2] P. Joshi, M. Meyer, T. DeRose, B. Green, and T. Sanocki, "Harmonic coordinates for character articulation," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 26, no. 3, 2007, artigo 71.
- [3] Y. Lipman, J. Kopf, D. Cohen-Or, and D. Levin, "Gpu-assisted positive mean value coordinates for mesh deformation," *Symposium on Geometry Processing*, pp. 117–123, 2007.
- [4] Y. Lipman, D. Levin, and D. Cohen-Or, "Green coordinates," *ACM Transactions on Graphics*, vol. 27, no. 3, 2008, 78.
- [5] M. S. Floater, G. Kos, and M. Reimers, "Mean value coordinates in 3d," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 22, pp. 623–631, 2005.
- [6] M. S. Floater, "Mean value coordinates," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 20, no. 1, pp. 19–27, 2003.
- [7] L. I. Custódio, "Extensões de coordenadas baricênticas para deformação de malhas," Master's thesis, Departamento de Matemática, PUC-Rio, <http://www.matmidia.mat.puc-rio.br/lisingrid/>, 2010.
- [8] R. M. Rustamov, Y. Lipman, and T. Funkhouser, "Interior distance using barycentric coordinates," *Symposium on Geometry Processing*, vol. 28, no. 5, 2009.
- [9] T. Ju, P. Liepa, and J. Warren, "A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 24, no. 3, pp. 161–178, 2007.