1. 函数

1.1 函数的定义与性质

- 函数，是将一个对象转化为另一个对象的规则，也即将一个集合中的每个元素，映射到另一个集合中的唯一元素

> 术语：
>
> - 定义域：
>   - Domain
>   - 定义域是指函数可以接受的所有输入值的集合，换句话说，它是函数的自变量可以取的所有值的集合
> - 上域：
>   - Codomain
>   - 上域是指函数输出值所在的集合，但它不一定包含函数的所有实际输出值
>   - 上域是函数定义的一部分，一般来说是为了描述函数输出而定义第一个宽泛的范围
>   - **值域是上域的一个子集**
> - 值域：
>   - Range
>   - 值域是指函数的所有可能的实际输出值的集合，换句话说，它是函数的因变量可以取的所有值的集合

- 函数的性质
    - 单值性
        - 对于定义域中的每个x, 函数f都有唯一的值y与之对应
        - 垂线检验
            - 指的是在平面直角坐标系中，用来检测一个图形是否代表一个函数
            - 如果通过定义域中的任意一点作一条垂直于x轴的直线，这条直线与图形最多只有一个交点，那么这个图形代表一个函数。如果有多个交点，则这个图形不表示一个函数。
        - 单调性
            - 单调递增
                - 对于定义域中的任意两个数，x_1和x_2, 当x_1<x_2时，有$f(x_1) \leq f(x_2)$，则称函数f单调递增
            - 单调递减
                - 对于定义域中的任意两个数，x_1和x_2, 当x_1<x_2时，有$f(x_1) \geq f(x_2)$，则称函数f单调递减
    - 奇偶性
        - 奇函数
            - 对于定义域中的每个x， 都有$f(-x) = -f(x)$，则该函数为奇函数
            - 对于一个奇函数，如果0在其定义域内，则必有$f(0) = 0$
            - 奇函数的图像，关于原点180度对称

        - 偶函数
            - 对于定义域中的每个x，都有$f(x)=f(-x)$，则该函数为偶函数
            - 偶函数的图像，关于y轴对称
        - 唯一的既奇又偶的函数 $f(x)=0$

1.2 反函数

- 设函数$y=f(x)$的定义域是D，值域是$f(D)$。如果对于值域$f(D)$中的每一个y，在D中有且只有一个x使得$g(y)=x$，则按此对应法则得到了一个定义在$f(D)$上的函数，并把该函数称为函数$y=f(x)$的**反函数**，记为$f^{-1}(x)$
- 反函数性质
    - 唯一性
        - 如果一个函数$f(x)$具有反函数，那么他的反函数是唯一的
    - 双射性
        - 只有满足双射性的函数$f(x)$，才具有反函数
            - 单射
                - 指的是对于一个函数$f(x)$的定义域内，任意两个不同的 x_1和x_2，他们的函数值不同
                - 换句话说，定义域中的每个元素映射到值域中的不同元素
            - 满射
                - 指的是对于一个函数$f(x)$，如果他的上域等于值域，则是满射
    - 互逆性
        - 函数f和f^{-1}互为反函数
    - 值域、定义域交换
        - 函数f的定义域是其反函数$f^{-1}的值域
        - 函数f的值域是其反函数$f^{-1}的定义域
    - 对称性
        - 函数f和其反函数f^{-1}关于直线$y=x$对称
- 水平线检验

  > 通过函数图像，检验函数是否满足单射性，也即对于函数f的值域中任一个y，是否只有一个x满足函数$f(x)=y$

    - 每一条水平线(通过点$(0,y)$)和一个函数的图像相交至多一次, 那么这个函数就有一个反函数. 如果即使只有一条水平线和图像相交多于一次, 那么这个函数就没有反函数

1.3 函数图像

1.3.1 多项式

多项式函数形如$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_2x^2+a_1x^1+a_0x^0$

> - x^i $i\in[0,n]$ 称为基本项，a_i称为基本项的系数
> - 系数不为0的最大幂指数n称为多项式的次数

多项式函数图像的趋势，是由首项系数决定的，设为a_nx^n

则有:

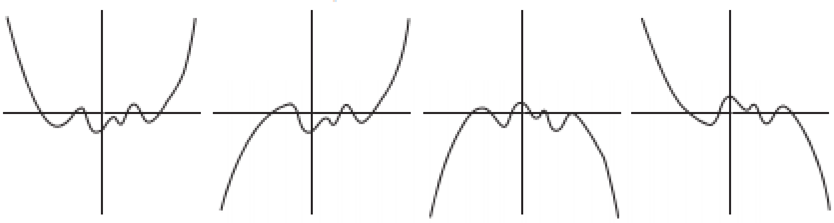

图 1-16

1.3.2 有理函数

有理函数，指的是形如$\frac{p(x)}{q(x)}$的函数，且$p(x)$、$q(x)$为多项式函数

1.3.3 指数函数和对数函数

1.3.4 三角函数

1.3.5 带有绝对值的函数