> 连续性和可导性，体现了函数图像的光滑性

1. 连续性

1.1 在某点处连续

> 定理1：
>
> 若$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$，则函数$f$在$x = a$处连续

该定理通过公式$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$说明了三件事情：

- 函数f在$x = a$有定义，也即$f(a)$是存在且有限的
- 双侧极限$\lim\limits_{x \to a} f(x)$是存在且有限的
- 这两个值相等

因此，可以从另外一个角度来定义函数在某点处连续

> 定理2：
>
> 函数$f(x)$在$x = a$处连续，当且仅当
>
> - 函数f在$x = a$有定义，也即$f(a)$是存在且有限的
> - 双侧极限$\lim\limits_{x \to a} f(x)$是存在且有限的
> - 这两个值相等
>
> 他们互为充要条件

若函数$f(x)$在$x = a$处不连续，则称，点$x = a$为函数f的一个不连续点

1.2 在区间上连续

区间上的连续性需要对边界条件进行特殊处理

- 对于开区间

  > 若函数f在区间(a, b)内的每一点都连续，则函数f在该区间连续

- 对于带有闭区间

  > 函数f在区间$[a, b]$内连续，当且仅当
  >
  > - 函数f在区间(a, b)内的每一点都连续
  > - 函数f在点$x = a$处右连续，也即，右极限存在且有限；且$f(a)$存在，也即$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
  > - 函数f在点$x = b$处左连续，也即，左极限存在且有限；且$f(b)$存在，也即$\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$

1.3 连续函数的运算

- 在某点连续

  > 若函数f和g在$x = a$处连续，那么$f+g, f-g, fg, f/g, f \circ g$也都是连续的

  注意，除法时g不能为0

- 在定义域区间范围

  > 若函数f在区间I_1内连续，函数g在区间I_2内连续，$I = I_1 \bigcap I_2$，则
  > $f+g, f-g, fg, f/g, f \circ g$在区间$I$上连续

  注意，除法时g不能为0

1.4 常见的连续函数

- 多项式函数为连续函数
- 指数函数为连续函数
- 对数函数为连续函数
- 三角函数为连续函数

1.5 介值定理

> - 介值定理：
>   - 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a) \neq f(b)$，若$f(a) = A$，$f(b) = B$，则对于A与B之间的人一个数C，在开区间(a,b)内，至少有一个点c，使得
>
> $$f(c) = C \qquad a < c < b$$
> - 零点定理：
>   - 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$和$f(b)$异号，在开区间(a,b)内，至少有一个点c，使得
>
> $$f(c) = 0$$

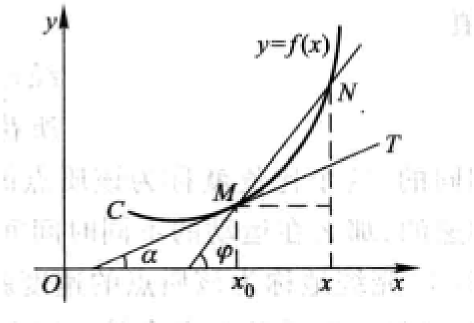
1.6 连续函数的最大值和最小值

> 在闭区间上连续的函数，在该区间上有界，且一定能取到该函数的最大值和最小值
>
> - 若在开区间连续，或在闭区间内有断点(不连续)，则无法确定函数在区间范围内有最大值/最小值

2. 可导性

2.1 切线

> 切线的定义：
>
> 设曲线C及C上的一点M，在点M外，另取C上一点N，做割线MN，当点N沿着曲线C趋于点M时，如果割线MN绕点M旋转而区域极限位置MT，则直线MT称为曲线C在点M处的切线
>
> 极限位置的含义是，只要弦长$|MN|$趋近于0，$\angle NMT$也趋于0



2.2 导数

> - 函数f上不同点的切线，具有不同斜率，也即，切线的斜率是关于x的函数，这个函数称为f的导函数，记为f'
> - 设Δx是x的一个增量，若极限值
>
> $$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
>
>   存在，则称函数$f(x)$在点x处可导，该极限值即为该点的导数

f'可以有不同写法：

- $f'(x)=\frac{dy}{dx}$
- $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$

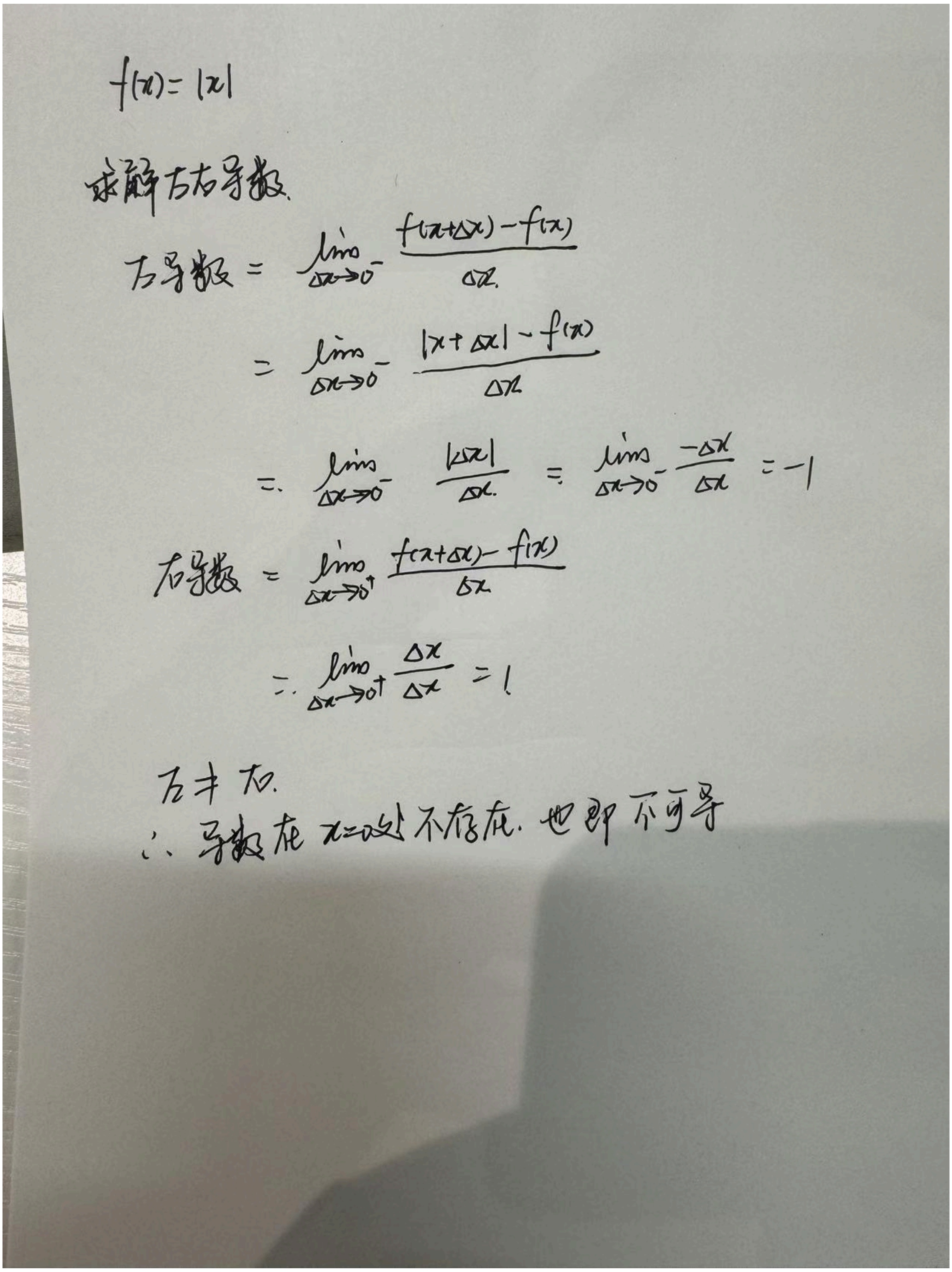
2.2.1 可导判断

判断导数是否存在，或者，判断函数在某点是否可导，需要查看导数定义
$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$的极限是否存在

极限存在的前提是左右极限存在且相同，因此可以通过类似的方法，求解左导数和右导数，判断两者是否相同来确定极限是否存在，进而确定是否可导

> - 左导数
>
> $$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
>
> - 右导数
>
> $$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

- 判断函数$f(x)=|x|$在$x=0$处是否可导



$f(x)=|x|$

求解左右导数.

$$左导数 = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|x+\Delta x|-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$右导数 = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

左 $\neq$ 右.

$\therefore$ 导数在 $x=0$ 处不存在. 也即不可导

3. 可导性和连续性

> 如果一个函数f在x上可导，那么必在x上连续
>
> 也即，可导必连续，连续未必可导

$f(x)$在x_0处可导 则必在x_0处连续、试证。

若要证明$f(x)$在x_0处连续、需证明$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$中.等号左右

存在且相等.

因为$x\to x_0$表示很小的改动 因此令$h=x-x_0$.

则待证变为$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

因为导数存在. 可知.$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$存在.

I: 进一步可知.$f(x_0+h)$和$f(x_0)$存在.

接下来证明相等.

$\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot h\right)=f'(x)=0.=\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)$

因为$f(x_0)$和h无关.

所以$\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)-f(x_0)=0.$

II. $\therefore \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0)$

综合 I. II. 证毕