1. 导数和反函数

1.1 使用导数证明反函数存在

> 如果函数f在其定义域(a,b)上可导且满足下方任意一条（或函数f在定义域$[a,b],(a,b],[a,b)$上连续），则f有反函数
>
> 1. 在函数f的定义域上(a,b), 有$f'>0$
> 2. 在函数f的定义域上(a,b), 有$f'<0$
> 3. 在函数f的定义域上(a,b), 有$f'\geq 0$，且对于有限个x，$f'=0$
> 4. 在函数f的定义域上(a,b), 有$f'\leq 0$，且对于有限个x，$f'=0$

需要注意：

1. 如果函数有不连续点或垂直渐近线，则不能使用该方法判断
   - 如$f(x)=tan(x)$，其导数为$sec^2(x)$，恒大于0，但是由于$tan(x)$不满足水平线检测，故而不存在反函数
2. 要求导数为0的点为有限个
   - 考虑该函数：$f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & x<0\\ 1 & 0\leq x<1\\ x^2-2x+2 & 0\leq x\geq 1\end{cases}$

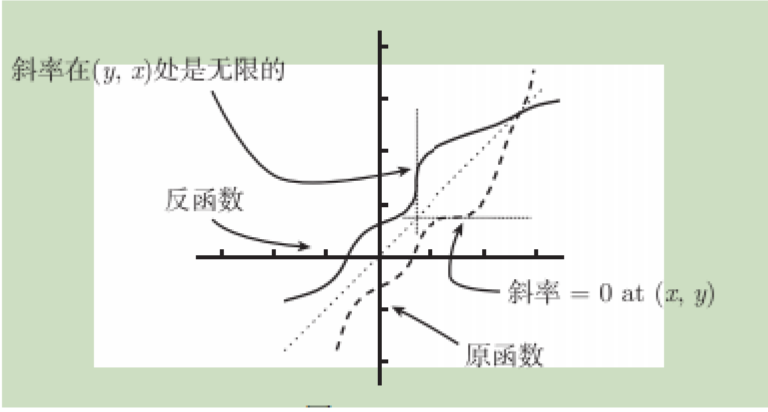
     该函数可导且其导数恒大于0，但是由于在$x\in[0,1)$处不满足水平线检测，所以反函数不存在

1.2 求反函数的导数

- 若有函数$y=f(x)$，其反函数存在，记为$y=f^{-1}(x)$，则其反函数的导数为

> 原函数导数的倒数，只不过原函数的导数需要用$f^{-1}(x)$计算，而非x
>
> $$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}$$
>
> $$\frac{d(f^{-1}(x))}{dx}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

- 需要注意的是，
  - $f'(y)$是将y带入原函数后求导的函数表达式，是以y体现
  - $f'(f^{-1}(x))$是根据上式，并将$x=f(y)$计算得到y关于x的表达时候带入得到
- 原函数处处可导，但是其反函数不一定处处可导
  - 若函数f存在反函数f^{-1}，当原函数f在点(x,y)处为0时，其反函数f^{-1}在该点处导数不存在



- 简单例题
  - 设$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+5x-11$，其反函数$y=f^{-1}(x)$，求$\frac{dy}{dx}$的一般形式，并求$x=-11$的反函数的导数值

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{y^2-2y+5}$

设 $s=-11$. $t=f(s)=\frac{1}{3}t^3-t^2+5t-11$

$\therefore$ $t=0$ 是唯一解

$\frac{dy(y=0)}{dx} = \frac{1}{5}$ ~~也~~即 $(f^{-1})'(-11)=\frac{1}{5}$

  - 设$h(x)=x^3$，求$\frac{dy}{dx}$

$h(x)=x^3$.

令 $y=h(x)$. 则有 $y=x^3$. $x=\sqrt[3]{y}=y^{\frac{1}{3}}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{3y^2}$

$\therefore (h^{-1}(x))'=\frac{1}{3y^2}=\frac{1}{3x^{2/3}}$

  - 设函数f的反函数存在，为f^{-1}，有函数$g(x)=sin(f^{-1}(x))$，已知$f(\pi)=2, f'(\pi)=5$，求$g(2), g'(2)$

$g(2)=\sin(f^{-1}(2))$ $\because f(\pi)=2$. $\therefore f^{-1}(2)=\pi$. $\therefore g(2)=0$

$\cancel{g'}$

$g'(x)=(\sin f^{-1}(x))'$

$=\cos(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))'$

$=\cos(f^{-1}(x))\cdot\frac{1}{f'(y)}$

$=\cos(f^{-1}(x))\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$g'(2)=\cos(f^{-1}(2))\cdot\frac{1}{f'(f^{-1}(2))}$

$\because f^{-1}(2)=\pi$, $f'(\pi)=5$.

$\therefore g'(2)$

$=\cos(\pi)\cdot\frac{1}{f'(\pi)}$

$=-\frac{1}{5}$

1.3 综合例题

$$f(x) = x^2(x-5)^3, \text{并且其定义域为 } [2,\infty).$$

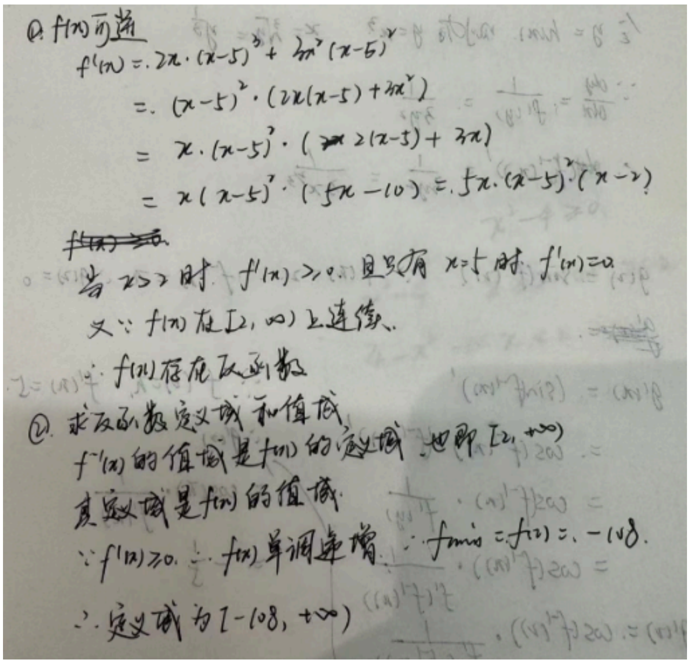
以下是我们想要做的：

(1) 证明 f 可逆;

(2) 求出反函数 f^{-1} 的定义域和值域;

(3) 检验 $f(4) = -16$;

(4) 计算 $(f^{-1})'(-16)$.



① f(x)可逆

$f'(x) = 2x\cdot(x-5)^3 + 3x^2(x-5)^2$

$= (x-5)^2\cdot(2x(x-5)+3x^2)$

$= x\cdot(x-5)^2\cdot(\cancel{2x}\ 2(x-5)+3x)$

$= x(x-5)^2\cdot(5x-10) = 5x\cdot(x-5)^2\cdot(x-2)$

~~f(x)≥0~~

当 $x\geq 2$ 时 $f'(x)\geq 0$，且只有 $x=5$ 时 $f'(x)=0$

又∵ $f(x)$在$[2,\infty)$上连续

∴ $f(x)$存在反函数

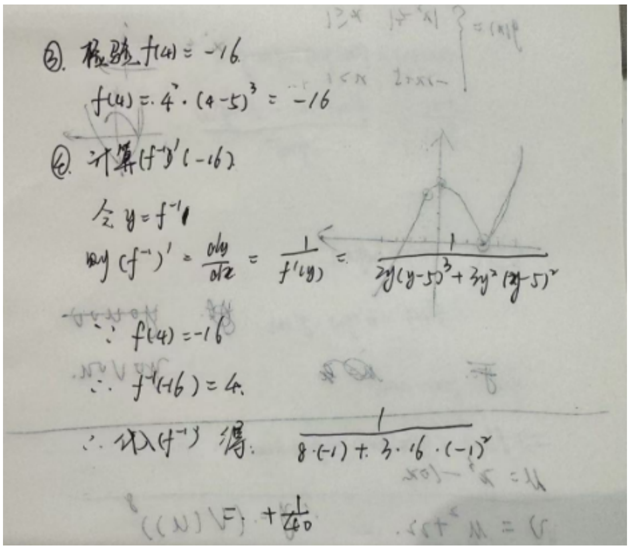
② 求反函数定义域和值域

$f^{-1}(x)$的值域是$f(x)$的定义域，也即$[2,+\infty)$

其定义域是$f(x)$的值域

∵ $f'(x)\geq 0$ ∴ $f(x)$单调递增 ∴ $f_{min} = f(2) = -108$

∴ 定义域为$[-108,+\infty)$



③ 检验 $f(4) = -16$

$f(4) = 4^2\cdot(4-5)^3 = -16$

④ 计算$(f^{-1})'(-16)$

令 $y = f^{-1}$

则 $(f^{-1})' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{2y(y-5)^3+3y^2(y-5)^2}$

∵ $f(4) = -16$

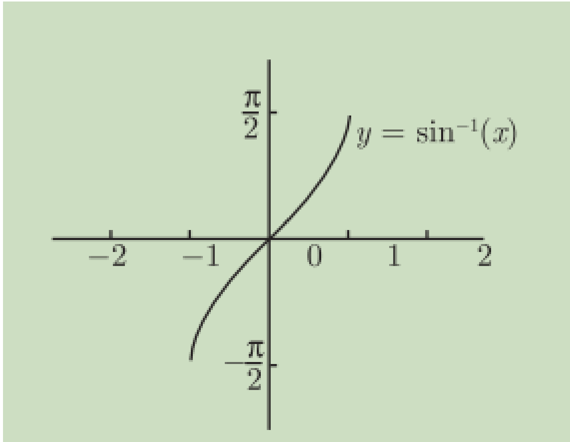
∴ $f^{-1}(-16) = 4$

∴ 代入$(f^{-1})'$ 得 $\frac{1}{8\cdot(-1)+3\cdot 16\cdot(-1)^2}$

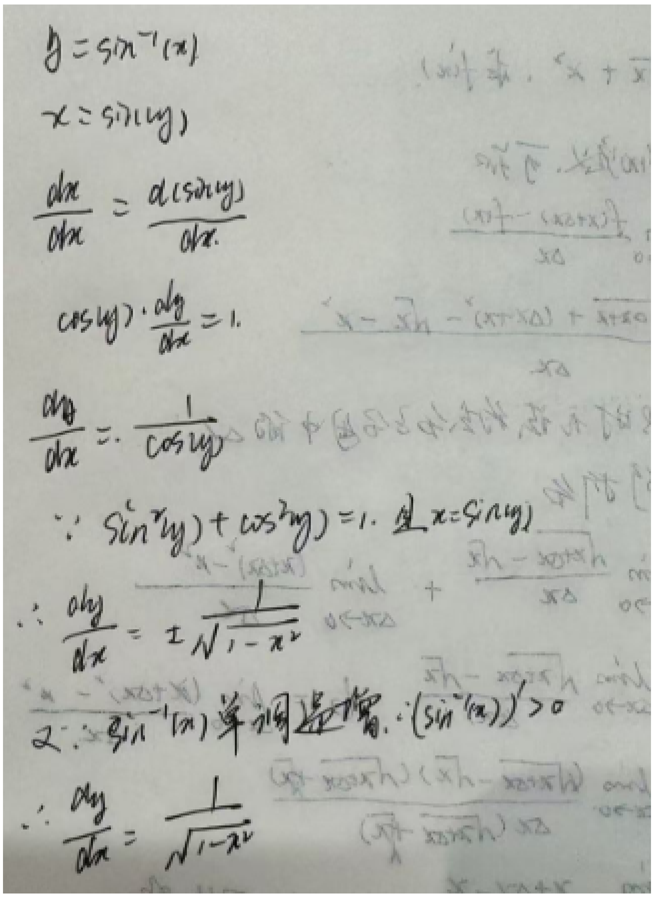
$+\frac{1}{40}$

2. 反三角函数

- 反正弦函数
  - 定义
    - $y = sin^{-1}(x)$
  - 定义域
    - $[-1,1]$

- 值域
  - $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- 奇偶性
  - 奇函数
- 图像
  - 

- 导函数
  - $\frac{d(sin^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (-1, 1)$



$y = sin^{-1}(x)$

$x = sin(y)$

$\frac{dx}{dx} = \frac{d(sin(y))}{dx}$

$cos(y) \cdot \frac{dy}{dx} = 1.$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cos(y)}$

$\because sin^2(y) + cos^2(y) = 1.$ 且 $x = sin(y)$

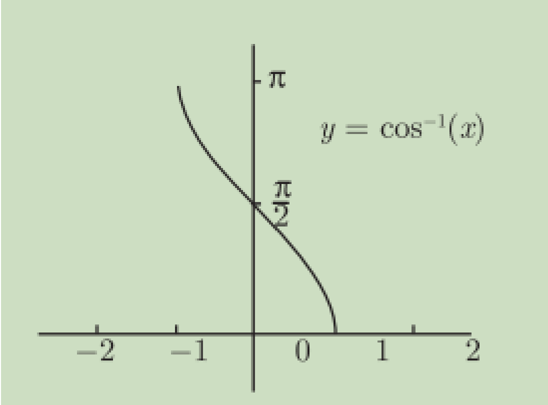
$\therefore \frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

又 $\because sin^{-1}(x)$ 单调递增 $\therefore (sin^{-1}(x))' > 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

反余弦函数

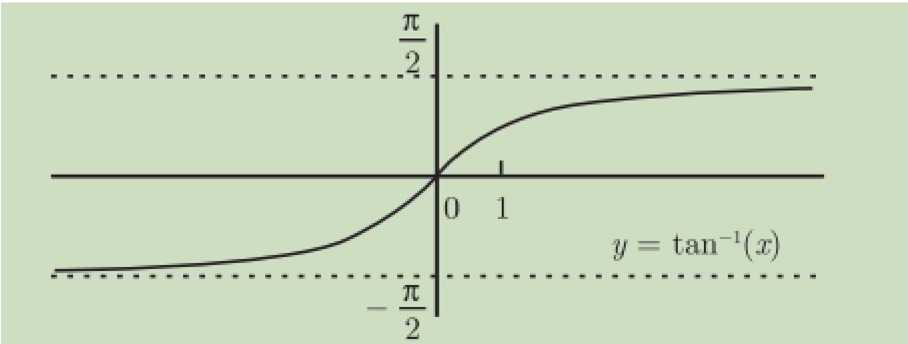
- 定义
  - $y = cos^{-1}(x)$
- 定义域
  - $[-1, 1]$
- 值域
  - $[0, \pi]$

- 奇偶性
  - 非奇非偶
- 图像
  - 

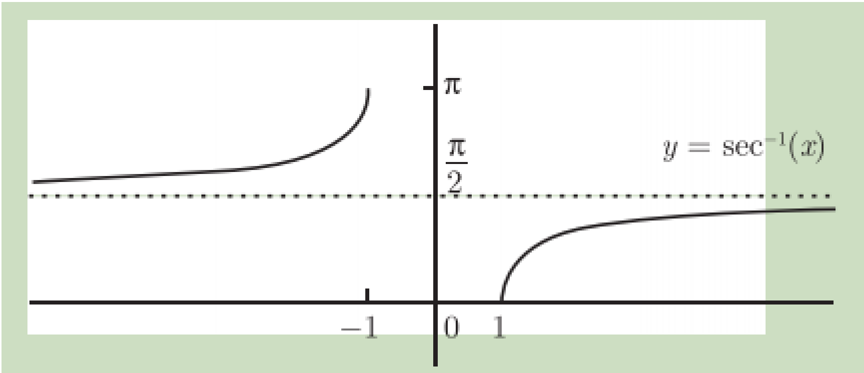
- 导函数
  - $\frac{d(cos^{-1}(x))}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $x \in (-1, 1)$

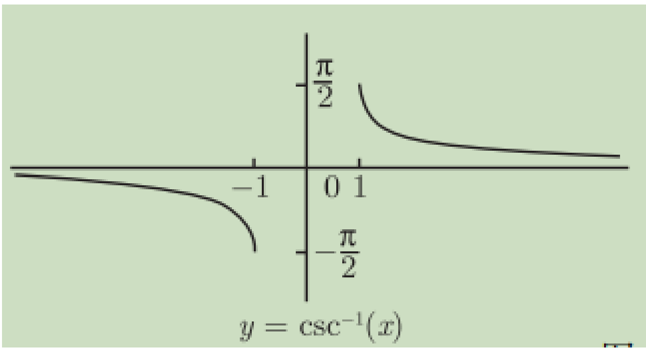
- 反三角函数恒等式

> $sin^{-1}(x) + cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

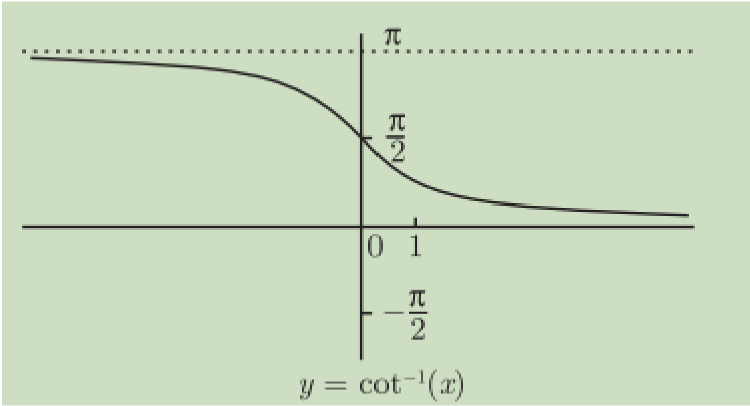
- 反正切函数
  - 定义
    - $y = tan^{-1}(x)$
  - 定义域
    - $\mathbb{R}$
  - 值域
    - $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
  - 奇偶性
    - 奇函数
  - 图像
    - 

  - 导函数
    - $\frac{d(tan^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ $x \in \mathbb{R}$
- 反正割函数
  - 定义
    - $y = sec^{-1}(x)$
  - 定义域
    - $$
  - 值域

    - $$
  - 奇偶性
  - 图像
    - 

  - 导函数
    - $$
- 反余割函数
  - 定义
    - $y = csc^{-1}(x)$
  - 定义域
    - $$
  - 值域
    - $$
  - 奇偶性
  - 图像
    - 

  - 导函数
    - $$
- 反余切函数
  - 定义
    - $y = cot^{-1}(x)$
  - 定义域
    - $$
  - 值域
    - $$
  - 奇偶性
  - 图像

- 

- 导函数
  - $$