1. 根据定义求导

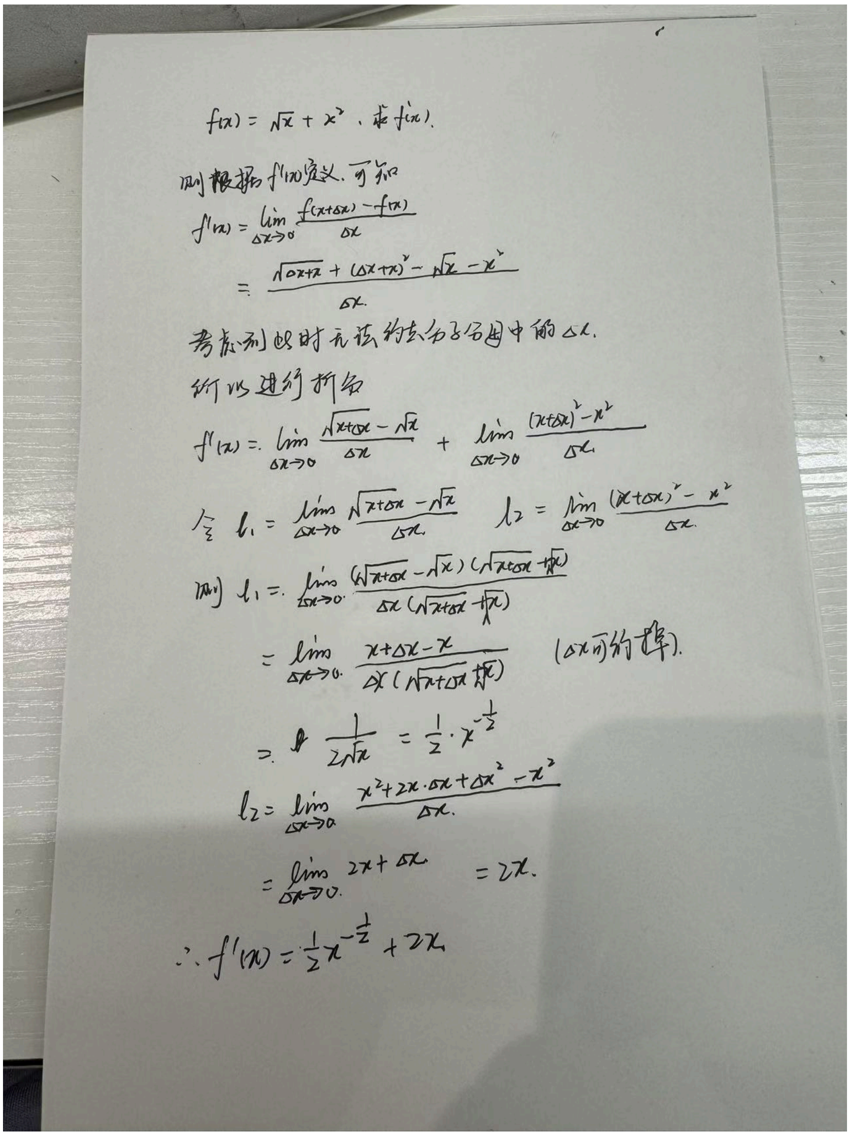
导数的定义如下：

> $f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

那么一般情况下可以根据导数定义进行导函数的求解

需要注意的是，当$\Delta x \to 0$时，带入定义后可能出现不定式，也即*出现$\frac{0}{0}$或$\frac{c}{0} \quad c \neq 0$的场景，此时不能简单的将$\Delta x$消掉*

- 例，求$f(x) = \sqrt{x} + x^2$的导数
- 解



2. 更好的求导方法

2.1 函数的常数倍的导数

常数倍函数的导数，是指形如$f(x)=Cg(x) \quad C$为常数的函数

> $f(x)=Cg(x)$的导数为$f\prime=Cg'$

2.2 函数和与函数差的导数

> $f(x)=u(x)+v(x)$的导数为$f'=u'+v'$
>
> $f(x)=u(x)-v(x)$的导数为$f'=u'-v'$

2.3 根据乘积法则求积函数的导数

- 乘积法则 - 以函数形式体现

  > 设$f(x)=h(x)g(x)$，则
  >
  > $$f'=h'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

- 乘积法则 - 以dx形式体现

  > 设$y=uv$，u和v是关于x的函数，则
  >
  > $$\frac{y}{x}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$$

- 如果函数乘积多于两个，速记方法，以dx形式体现

  > 乘积出现几次，就将乘积相加几次，然后逐个替换乘积中的函数为其导数

  - 例子
    - 设$y=uvw$，uvw是关于x的函数，则

      $$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}vw+u\frac{dv}{dx}w+uv\frac{dw}{dx}$$

2.4 根据商法则求商函数的导数

- 商法则 - 以函数形式体现

  > 设$f(x)=\frac{h(x)}{g(x)}$，则
  >
  > $$f'=\frac{h'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

- 商法则 - 以dx形式体现

  > 设$y=\frac{u}{v}$，u和v是关于x的函数，则
  >
  > $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{du}{dx}v-\frac{dv}{dx}u}{v^2}$$

2.5 通过链式求导法则求复合函数的导数

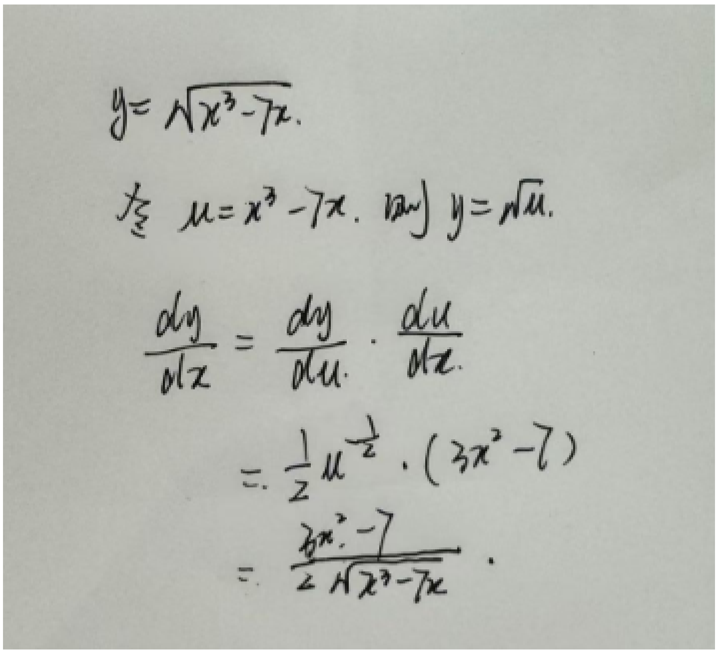
- 链式求导法则 - 以函数形式体现

> 设$f(x)=h(g(x))$，则
> $$f'=h'(g(x)g'(x)$$

- 链式求导法则 - 以dx形式体现

> 设y是u的函数，u是x的函数，则
> $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

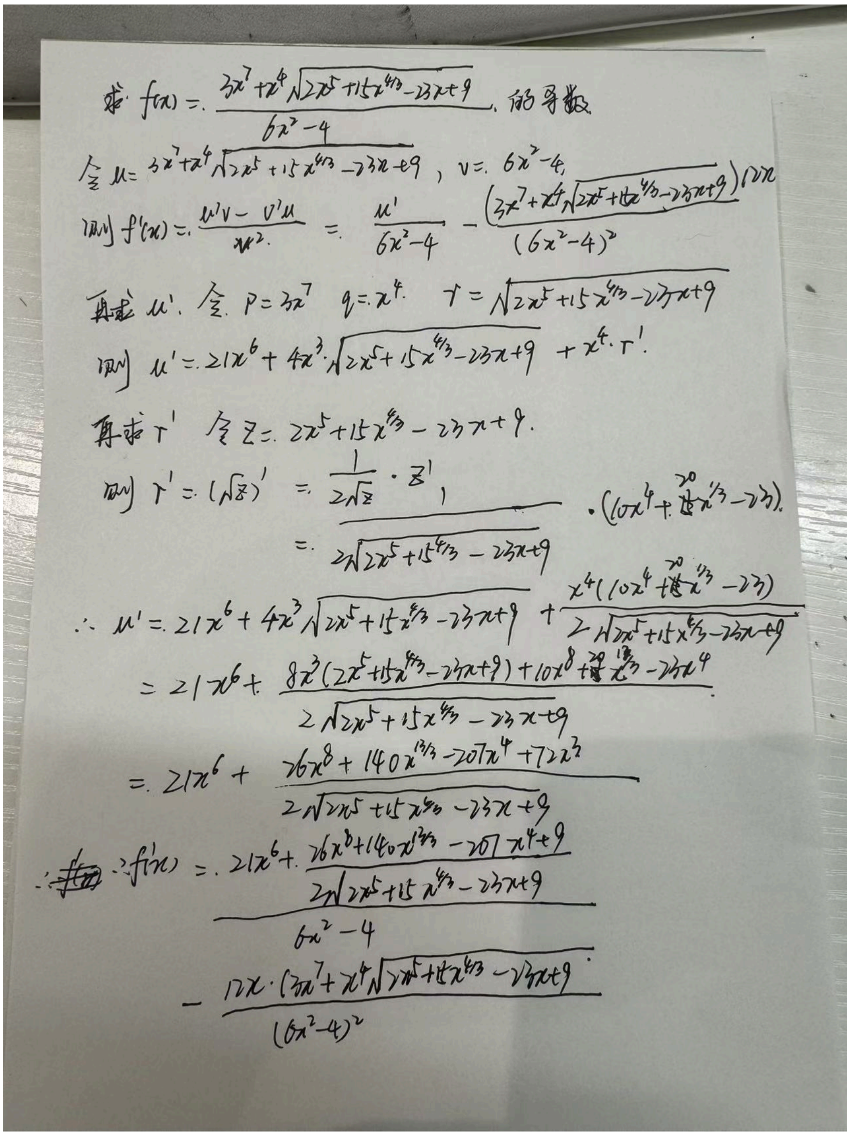
- 链式求导法则可以看成按照函数复合的逆方向进行逐个求导并乘积，外层求导时内部函数不变
    - 例 求函数$y=\sqrt{x^3-7x}$的导数



2.6 复杂函数求导例题

- 函数$f(x)=\frac{3x^7+x^4\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}{6x^2-4}$的导数

解：



求 $f(x)=\dfrac{3x^7+x^4\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}{6x^2-4}$ 的导数

令 $u=3x^7+x^4\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}$，$v=6x^2-4$，

则 $f'(x)=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}=\dfrac{u'}{6x^2-4}-\dfrac{(3x^7+x^4\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9})12x}{(6x^2-4)^2}$

再求 u'. 令 $p=3x^7$ $q=x^4$ $r=\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}$

则 $u'=21x^6+4x^3\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}+x^4\cdot r'$

再求 r' 令 $z=2x^5+15x^{4/3}-23x+9$.

则 $r'=(\sqrt{z})'=\dfrac{1}{2\sqrt{z}}\cdot z'$

$=\dfrac{1}{2\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}\cdot(10x^4+20x^{1/3}-23)$

$\therefore u'=21x^6+4x^3\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}+\dfrac{x^4(10x^4+20x^{1/3}-23)}{2\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}$

$=21x^6+\dfrac{8x^3(2x^5+15x^{4/3}-23x+9)+10x^8+20x^{13/3}-23x^4}{2\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}$

$=21x^6+\dfrac{26x^8+140x^{13/3}-207x^4+72x^3}{2\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}$

$\therefore f'(x)=\dfrac{21x^6+\dfrac{26x^8+140x^{13/3}-207x^4+9}{2\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9}}}{6x^2-4}-\dfrac{12x\cdot(3x^7+x^4\sqrt{2x^5+15x^{4/3}-23x+9})}{(6x^2-4)^2}$

3. 求解切线方程

1. 先求解出给定函数的导函数，带入给定的点，计算出斜率
2. 再根据给定的点和函数，算出切线上的点
3. 根据切线过的点和斜率，即可算出切线方程

4. 分段函数的导数

> 检验分段函数在分段点上，以及如果包含绝对值，要考虑绝对值中分段的点，是否可导，需要做以下校验：
>
> - 分段函数在检验点上是否相等 $\Rightarrow$ 验证连续性
> - 分段函数的导数在检验点上是否相等 $\Rightarrow$ 验证可导性

- 例 判断如下函数在分段点上是否可导

$$y=\begin{cases}|x^2-4| & x\le 1\\ -2x+5 & x>0\end{cases}$$

- 解

由于函数带有绝对值、因此需去掉后再分析.

$$y=\begin{cases}|x^2-4| & x\le 1.\\ -2x+5 & x>1.\end{cases}$$

则 $$y=\begin{cases}x^2-4 & x\le -2.\\ 4-x^2 & -2<x\le 1\\ -2x+5 & x>1.\end{cases}$$

∴ 需验证 $x=-2$ 和 $x=1$ 处的连续性和可导性.

$x=-2$ 时

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = 0.$ $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$

∴ $x=-2$ 时连续.

$$\lim_{\Delta x\to -2^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -4.$$

$$\lim_{\Delta x\to -2^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 4.$$

∴ $x=-2$ 时不可导

$x=1$ 时.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 3.$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3.$

$$\lim_{\Delta x\to 1^-}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -2.$$

$$\lim_{\Delta x\to 1^+}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -2.$$

∴ $x=1$ 时可导