

# 1. 函数

## 1.1 函数的定义与性质

- 函数，是将一个对象转化为另一个对象的规则，也即将一个集合中的每个元素，映射到另一个集合中的唯一元素

术语：

- 定义域：
  - Domain
  - 定义域是指函数可以接受的所有输入值的集合，换句话说，它是函数的自变量可以取的所有值的集合
- 上域：
  - Codomain
  - 上域是指函数输出值所在的集合，但它不一定包含函数的所有实际输出值
  - 上域是函数定义的一部分，一般来说是为了描述函数输出而定义第一个宽泛的范围
  - 值域是上域的一个子集**
- 值域：
  - Range
  - 值域是指函数的所有可能的实际输出值的集合，换句话说，它是函数的因变量可以取的所有值的集合
- 函数的性质
  - 单值性
    - 对于定义域中的每个 $x$ ，函数 $f$ 都有唯一的值 $y$ 与之对应
    - 垂线检验
      - 指的是在平面直角坐标系中，用来检测一个图形是否代表一个函数
      - 如果通过定义域中的任意一点作一条垂直于 $x$ 轴的直线，这条直线与图形最多只有一个交点，那么这个图形代表一个函数。如果有多个交点，则这个图形不表示一个函数。
  - 单调性
    - 单调递增
      - 对于定义域中的任意两个数， $x_1$ 和 $x_2$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，则称函数 $f$ 单调递增
    - 单调递减
      - 对于定义域中的任意两个数， $x_1$ 和 $x_2$ ，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，则称函数 $f$ 单调递减
  - 奇偶性
    - 奇函数
      - 对于定义域中的每个 $x$ ，都有 $f(-x) = -f(x)$ ，则该函数为奇函数
      - 对于一个奇函数，如果0在其定义域内，则必有 $f(0) = 0$
      - 奇函数的图像，关于原点180度对称

- 偶函数
  - 对于定义域中的每个 $x$ ，都有 $f(x) = f(-x)$ ，则该函数为偶函数
  - 偶函数的图像，关于 $y$ 轴对称
- 唯一的既奇又偶的函数  $f(x) = 0$

## 1.2 反函数

- 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $D$ ，值域是 $f(D)$ 。如果对于值域 $f(D)$ 中的每一个 $y$ ，在 $D$ 中**有且只有一个** $x$ 使得 $g(y) = x$ ，则按此对应法则得到了一个定义在 $f(D)$ 上的函数，并把该函数称为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**，记为 $f^{-1}(x)$
- 反函数性质
  - 唯一性
    - 如果一个函数 $f(x)$ 具有反函数，那么他的反函数是唯一的
  - 双射性
    - 只有满足双射性的函数 $f(x)$ ，才具有反函数
    - 单射
      - 指的是对于一个函数 $f(x)$ 的定义域内，任意两个不同的 $x_1$ 和 $x_2$ ，他们的函数值不同
      - 换句话说，定义域中的每个元素映射到值域中的不同元素
    - 满射
      - 指的是对于一个函数 $f(x)$ ，如果他的上域等于值域，则是满射
  - 互逆性
    - 函数 $f$ 和 $f^{-1}$ 互为反函数
  - 值域、定义域交换
    - 函数 $f$ 的定义域是其反函数 $f^{-1}$ 的值域
    - 函数 $f$ 的值域是其反函数 $f^{-1}$ 的定义域
  - 对称性
    - 函数 $f$ 和其反函数 $f^{-1}$ 关于直线 $y = x$ 对称
- 水平线检验
 

通过函数图像，检验函数是否满足单射性，也即对于函数 $f$ 的值域中任一个 $y$ ，是否只有一个 $x$ 满足函数 $f(x) = y$

  - 每一条水平线(通过点 $(0, y)$ )和一个函数的图像相交至多一次, 那么这个函数就有一个反函数. 如果即使只有一条水平线和图像相交多于一次, 那么这个函数就没有反函数

## 1.3 函数图像

### 1.3.1 多项式

多项式函数形如 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$

- $x^i$   $i \in [0, n]$  称为基本项， $a_i$ 称为基本项的系数
- 系数不为0的最大幂指数 $n$ 称为多项式的次数

多项式函数图像的趋势，是由首项系数决定的，设为 $a_n x^n$

则有：

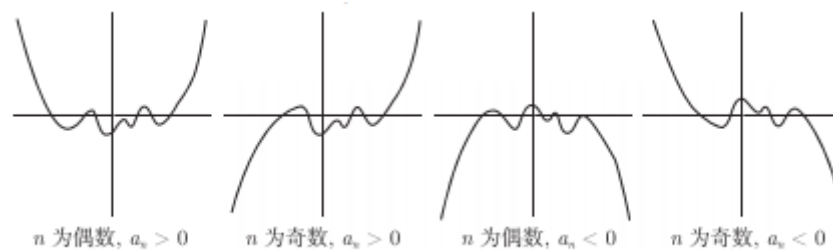


图 1-16

### 1.3.2 有理函数

有理函数，指的是形如  $\frac{p(x)}{q(x)}$  的函数，且  $p(x)$ 、 $q(x)$  为多项式函数

### 1.3.3 指数函数和对数函数

### 1.3.4 三角函数

### 1.3.5 带有绝对值的函数