目录

1. 矩阵的概念

1.1 矩阵的概念

矩阵：$m \times n$个数$a_{ij}(\ i=1,2,3,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$排列成一个$m$行$n$列的数表，称为一个$m \times n$矩阵

同型矩阵：矩阵A和矩阵B是同型矩阵⇔矩阵A和矩阵B的行数相等，列数也相等

矩阵相等：矩阵A和矩阵B相等$\Leftrightarrow A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\text{和}B\text{是同型矩阵；}\\\text{对应位置元素相等}\end{cases}$

1.2 特殊矩阵

- 方阵
  - 行数和列数相等的矩阵，相等的行列数称为阶数
    - $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$
- 行矩阵
  - 只有一行的矩阵，也称为行向量
    - $\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$
- 列矩阵
  - 只有一列的矩阵，也称为列向量
    - $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$
- 零矩阵
  - 元素全为0的矩阵
    - $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$
- 负矩阵
  - 将矩阵A的所有元素取其对应相反数后得到的矩阵，叫做A的负矩阵，记为$-A$
    - $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$，则$-A=\begin{bmatrix}-1&-2\\-3&-4\end{bmatrix}$
- 上三角矩阵
  - 主对角线下方的元素全部为0的方阵
- 下三角矩阵
  - 主对角线上方的元素全部为0的方阵
- 对角矩阵
  - 即使上三角矩阵，又是下三角矩阵，也即主对角线上方，下方元素全部为0的方阵
    - 主对角线元素可以是0

    - 记为$diag(a_1, a_2, ..., a_n)$
- 数量矩阵
    - 主对角线元素是同一个常数的对角矩阵，记为kE
        - $$E_n = \begin{bmatrix} k & & & & \\ & k & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k \end{bmatrix}$$
- 单位矩阵
    - 主对角线元素全为1，其他位置元素全为0的方阵，记为E
        - n阶单位矩阵
        - $$E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

2. 矩阵的加法、减法、数乘

2.1 矩阵的加减法

> 两个同型矩阵相加，就是对应位置的元素相加

> 两个同型矩阵相减，就是对应位置的元素相减

- 加减法运算规律
    - $A + B = B + A$
    - $(A + B) + C = A + (B + C)$
    - $A + O = A$
    - $A + (-A) = O$

- $A - B = A + (-B)$
- $A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$

2.2 矩阵的数乘

数k乘以矩阵A，就是用数k乘以矩阵A里的每个元素

- 注意与行列式数乘的区别
  - 行列式是将某一行/列的公因子提到外边一次
  - 矩阵是将所有元素的公因子提到外边一次
- 运算规律
  - $k(A+B) = kA + kB$
  - $(k+l)A = kA + lA$
  - $k(lA) = (kl)A$
  - $1A = A$
  - $(-1)A = -A$

3. 矩阵的乘法

两个矩阵A、B，如果A的列数，等于B的行数，则A、B可以相乘得到一个新的乘积矩阵AB，乘法规则定义如下：

设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$ ，$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}_{n \times s}$ ，则乘积矩阵

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}_{m \times s}$$

其中，$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，$i=1,2,3,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,s$

1. 只有左边矩阵的列数，等于右边矩阵的行数时，才能相乘
2. 乘积矩阵的行数，等于左边矩阵的行数，乘积矩阵的列数，等于右边矩阵的列数
3. 乘积矩阵的元素，等于左边矩阵的行，乘以右边矩阵的列
    - 乘积矩阵的第i行，第j列元素，等于左边矩阵的第i行，和右边矩阵的第j列元素对应相乘求和

3.1 矩阵乘法不满足的规律

- 矩阵的乘法不满足交换律
    - 当AB，BA都有意义时，AB，BA不一定相等
    - AB有意义，BA不一定有意义
- 矩阵的乘法不满足消去律
    - 若$AB=AC$，且$A\neq O$，推到不出$B=C$
    - 若$BA=CA$，且$A\neq O$，推到不出$B=C$
- 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵
    - 若$AB=O$，推到不出$A=O$或$B=O$
- 第二点和第三点的例子
    - 矩阵$A=\begin{bmatrix}1&0\\2&0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0&0\\2&3\end{bmatrix}$
        - 则$AB=AC=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，且$A\neq 0$，但是$B\neq C$
        - 则$AB=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$，但是$A\neq 0,B\neq 0$

3.2 矩阵乘法满足的规律或性质

- 结合律
    - $(AB)C=A(BC)$

- 分配律 *注意C的左右位置不能动*
  - $(A+B)C=AC+BC$
  - $C(A+B)=CA+CB$
- 数乘与矩阵乘积
  - $k(AB)=(kA)B=A(kB)$
- 单位矩阵与矩阵相乘 *单位矩阵在矩阵乘法中相当于数乘1*
  - $AE=EA=A$
- 数量矩阵与矩阵相乘 *数量矩阵在矩阵乘法中相当于数乘*
  - 数量矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=aE$，则有$AB=aB$
- 两个对角矩阵相乘
  - $\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ & b_2 & & & \\ & & b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & & & \\ & a_2b_2 & & & \\ & & a_3b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_nb_n \end{bmatrix}$
- 行列向量相乘 *顺序不同结果不同*
  - 行向量乘以列向量，结果是一个常数
  - 列向量乘以行向量，结果是一个矩阵
  - 若方阵A的任意两行(列)对应成比例，则方阵A可表示为$\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$
    - 可以选取矩阵的某个首元a_{1i}不为0的列向量α，再选取某个行列向量，并用a_{1i}除以该行向量，得到新行向量β^T，则方阵可化为$\alpha\beta^T$

3.3 矩阵的可交换

> 若矩阵A，B，满足$AB=BA$，则称A和B可交换，否则为不可交换

可交换的矩阵，一定满足：

- 一定是同阶方阵
  - 不是同阶方阵一定不是可交换矩阵
- $AB=BA$
  - AB，BA不相等，一定不是可交互矩阵

单位矩阵E，和任一个同阶方阵可交换

两个同阶对角矩阵可交换

4. 方阵的幂

4.1 方阵的幂的定义

设A为方阵，k为正整数，则A的k次幂的定义为：

$A^k=\underbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}_{k\text{ 个}}$

规定： $A^0=E$

- 只有方阵才有幂！

4.2 方阵的幂的性质

- 设A为方阵，k_1,k_2为非负整数，则有
  - $A^{k_1}A^{k_2}=A^{k_1+k_2}$
  - $(A^{k_1})^{k_2}=A^{k_1k_2}$
- $(lA)^k=l^kA^k, l$为常数，k为正整数

- 若矩阵A，B可交换，则有

> 若A, B不可交换，则该项内容等式均不成立

  - $A^2-B^2=(A-B)(A+B)=(A+B)(A-B)$
  - $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
  - $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$
  - $(A-B)^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$
  - $(A+B)^3=(A+B)(A^2-AB+B^2)$
  - $(AB)^k=A^kB^k$
- 一般有，不要求矩阵A，B可交换
  - $(A+B)(A-B)=A^2+BA-AB-B^2$
  - $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$
  - $(A-B)^2=A^2-AB-BA+B^2$
- 方阵多项式
  - 设$f(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x+a_0$，则有

    $f(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0E$

5. 矩阵的转置

5.1 转置定义

> 将矩阵A的各行依次变为列(或各列依次变为行)后得到的矩阵，即为A的转置矩阵A^T
>
> > A和A^T互为转置矩阵
> >
> > 若A为$m\times n$矩阵，则A^T为$n\times m$矩阵

- 转置矩阵性质

- $(A^T)^T = A$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A-B)^T = A^T - B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
  - 可以推广到m个矩阵积的转置矩阵
  - $(A_1A_2\cdots A_m)^T = A_m^T\cdots A_2^T A_1^T$
- $(A^k)^T = (A^T)^k$

5.2 对称矩阵与反对称矩阵

- 对称矩阵 *必为方阵*

> 如果矩阵A满足$A = A^T$，则称矩阵A为对称矩阵
>
> 也即，第i行等于第i列

> 设矩阵A为n阶方阵，$A = (a_{ij})_{n\times n}$，若$a_{ij} = a_{ji}$ $i = 1,2,3,\cdots,n$; $j = 1,2,3,\cdots,n$，则称矩阵A为对称矩阵

- 对称矩阵的性质
  - 若A，B为同阶对称矩阵，则$A+B$，$A-B$仍为对称矩阵
  - 若A为对称矩阵，则kA，A^m仍为对称矩阵，k为常数，m为正整数
  - 若A，B为同阶对称矩阵，则AB为对称矩阵的充要条件是$AB = BA$
  - 对任意$m\times n$矩阵A，则A^TA, AA^T均为对称矩阵
    - 若A为$m\times n$矩阵，且$AA^T = O$，则$A = O$

2. 【证明】由 $AA^T = O$, 知 AA^T 是 m 阶方阵，且主对角线上元素分别为 $a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \cdots + a_{in}^2 = 0, i = 1,2,\cdots,m$，则 $a_{i1} = a_{i2} = \cdots = a_{in} = 0, i = 1,2,\cdots,m$，所以 $A = O$.

- 反对称矩阵 *必为方阵*

  > 如果矩阵A满足$A^T=-A$，则称矩阵A为反对称矩阵
  >
  > 也即，第i行等于第i列的相反数

  > 设矩阵A为n阶方阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若$a_{ij}=-a_{ji}$ $i=1,2,3,\cdots,n;\ j=1,2,3,\cdots,n$，则称矩阵$A$为反对称矩阵

  > 易知，反对称矩阵的主对角线上的元素均为0

  - 反对称矩阵的性质
    - 若A，B为同阶反对称矩阵，则$A+B$，$A-B$仍为反对称矩阵
    - 若A为反对称矩阵，则kA仍为对称矩阵，k为常数
    - 若A为反对称矩阵，k为正整数，则A^k为$\begin{cases}\text{对称矩阵，} & k\text{偶数}\\ \text{反对称矩阵，} & k\text{奇数}\end{cases}$

6. 方阵的行列式

> 做题时，在写矩阵的行列式前，要知道到底是不是方阵

> 设n阶方阵$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$，则$A$的行列式为$|A|\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$
>
> > 矩阵A的行列式$|A|$为一个数
> >
> > 只有方阵才有行列式

- 方阵行列式的性质
  - $|A^T|=|A^T|=|A|$
  - $|kA|=k^n|A|$

- $|AB| = |A| \cdot |B|$
  - 该条性质的前提，是A, B都是n阶方阵，如果是$|A_{2\times3}B_{3\times2}|$，则不能使用该条性质，因为只有方阵才有行列式，$A_{2\times3}$，$B_{3\times2}$均不是方阵，但是$A_{2\times3}B_{3\times2}$是方阵
- $|A^m| = |A|^m$
- $|E| = 1$
- 若A是奇数阶反对称矩阵，则$|A| = 0$

7. 方阵的伴随矩阵

设$A = (a_{ij})_{n\times n}$，$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式为A_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \cdots, n)$，则矩阵$A$的伴随矩阵$A^*$的定义为

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

- A^*的元素是a_{ij}的代数余子式，是把行的代数余子式放到列上
- 有且只有方阵才有伴随矩阵

- 伴随矩阵的性质
  - 对任意方阵A，有$AA^* = A^*A = |A|E$
    - 伴随矩阵是行的代数余子式放到列上，再结合异乘变零定理，可证
    - 不论A是否可逆，该等式都成立
  - 若A为n阶方阵，则$|A^*| = |A|^{n-1}$
    - 根据第一个定理可知，$AA^* = |A|E$
      两边取行列式，则有，$|AA^*| = \big||A|E\big|$
      等号左边，根据矩阵行列式的性质有，$|AA^*| = |A||A^*|$
      等号右边，根据矩阵行列式的性质有，$\big||A|E\big| = |A|^n|E| = |A|^n$
      将上式两边同时除以$|A|$，（注意到当$|A|$为0时，性质一定成立）
      有，$|A^*| = |A|^{n-1}$
      证毕

        - 不论A是否可逆，该等式都成立
    - 若A为方阵，则$(A^T)^* = (A^*)^T$
    - 若A为n阶方阵，k为常数，则$(kA)^* = k^{n-1}A^*$
        - $(kA)^*$在计算每个代数余子式时，相比较A^*，每个代数余子式都扩大了k^{n-1}倍
    - 若$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则$A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
        - 主对角线位置互换，副对角线取相反数
    - 若A为n阶方阵
        - 当$A^* = A^T$，可推导出元素a_{ij}等于其代数余子式A_{ij}
        - 当元素a_{ij}等于其代数余子式A_{ij}，可推导出$A^* = A^T$
        - 再结合行列式$|A|$等于元素a_{ij}和A_{ij}的和，可以求出相关题目

8. 逆矩阵

> 做题时，在写A^{-1}前，要么题干说了A可逆，要么自己证明了$|A| \neq 0$

- 定义
    - 逆矩阵

    > 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB = BA = E$，则称矩阵A是可逆的，且B是A的逆矩阵，记作A^{-1}

    > 若方阵A可逆，则其逆矩阵唯一，且$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

    > 方阵要么有逆矩阵，要么没有逆矩阵

    - 奇异矩阵

    > 设A为n阶方阵，若$|A| \neq 0$，则称矩阵A是非奇异矩阵，若$|A| = 0$，则称A是奇异矩阵

- 矩阵可逆的判定

> 方阵A可逆的充要条件是A为非奇异矩阵，即$|A| \neq 0$，并且当A可逆时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
>
> > 利用该公式求逆矩阵，称为伴随矩阵法

> 对角矩阵$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$可逆的充要条件是$a_1, a_2, \cdots, a_n$均不为0，且
> $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & & \\ & & \frac{1}{a_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$

> 设A是n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB = E$或$BA = E$，则A可逆，且$A^{-1} = B$

- 可逆矩阵的性质
  - 若方阵A可逆，则其逆矩阵A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$
  - 若方阵A可逆，则
    - A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
    - A^*也可逆，且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
    - k为非零常数，则kA也可逆，且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
    - m为正整数，则A^m也可逆，且$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
  - 若方阵A可逆，则
    - $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
    - $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
  - 若A, B为同阶可逆矩阵，则AB也可逆，且$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
    - 可推广到有限个同阶方阵的情况，即，$(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$

- 解矩阵方程

> 永远不要把矩阵放到分母上

- 若A, B均为可逆矩阵，则矩阵方程，*要注意矩阵乘法的位置*
  - $AX = C$，其解为$X = A^{-1}C$
  - $XA = C$，其解为$X = CA^{-1}$
  - $AXB = C$，其解为$X = A^{-1}CB^{-1}$

589. 重要说明

> - 转置与逆，伴随矩阵与逆，转置与伴随矩阵，可以交换顺序，也即
>   - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
>   - $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
>   - $(A^T)^* = (A^*)^T$
> - 矩阵的幂和矩阵的转置，矩阵的幂和逆矩阵，可以交换顺序
>   - $(A^T)^m = (A^m)^T$
>   - $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

9. 矩阵的初等变换

9.1 矩阵的初等变换

> 初等变换分为初等行变换和初等列变换

- 初等行变换

> 矩阵的以下三种变换，称为矩阵的初等行变换
>
> - 交换矩阵的两行
> - 用数$k \neq 0$乘矩阵某行的全部元素
> - 把矩阵某行的全部元素的l倍，加到另一行对应的元素上

- 初等列变换

> 矩阵的以下三种变换，称为矩阵的初等列变换
>
> - 交换矩阵的两列
> - 用数$k \neq 0$乘矩阵某列的全部元素
> - 把矩阵某列的全部元素的l倍，加到另一列对应的元素上

- 矩阵A经过初等变换得到矩阵B，记为$A \to B$

9.2 矩阵标准型

- 标准形定义 *不一定是方阵*

> 标准形矩阵：元素只有0和1，且矩阵左上角是一个单位矩阵，除此之外的元素都是0

- 标准形变换

> 任何矩阵A都可以经过初等变换，化为标准形矩阵，并称此标准形矩阵为矩阵A的标准形

  - 标准形矩阵中1的个数就是矩阵的秩

9.3 阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵

> 满足下方两个条件的矩阵，称为行阶梯形矩阵
>
> - 如果矩阵有零行，则零行都在非零行下方
> - 任一非零行，从左到右数的第一个非零元素（称为首非零元）所在的列，在这个元素左下方（如果有的话）都是零

> 特别的，若行阶梯形矩阵的首非零元都是1，且首非零元所在列中，其他元素都是0，则此矩阵为行简化阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵变换

> 任何矩阵都可经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵
>
> 任何矩阵都可经过若干次初等行变换化为行简化阶梯形矩阵
>
> 矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行简化阶梯形矩阵

- 如果只用初等行变换，则行阶梯矩阵不是唯一的，但是行简化矩阵一定是唯一的

10. 初等矩阵

10.1 初等矩阵定义

> 由单位矩阵E经过一次初等行或列变换得到的矩阵，称为初等矩阵

- 类型

> $E(ij)$：交换单位矩阵E的第i,j两行，或两列

> $E(i(k))$：用非零数k乘以单位矩阵E的第i行或列

> $E(ij(l))$：把单位矩阵E的第j行的l倍加到第i行

10.2 初等矩阵的性质

- 初等矩阵的行列式都不为0 所有都可逆
  - $E(ij) = -1$ 相当于交换了行列式两行或列，改变一次符号
  - $E(i(k)) = k$ 相当于对角线某个元素扩大了k倍
  - $E(ij(l)) = 1$ 虽然不是对角行列式，但仍是上三角或下三角行列式
- 初等矩阵的转置矩阵仍是同种类型的初等矩阵
  - $E(ij)^T = E(ij)$
  - $E(i(k))^T = E(i(k))$
  - $E(ij(l))^T = E(ji(l))$
- 初等矩阵均可逆，且初等矩阵的逆矩阵仍为同种类型的初等矩阵
  - $E(ij)^{-1} = E(ij)$
  - $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$
  - $E(ij(l))^{-1} = E(ij(-l))$

10.3 初等矩阵与矩阵的初等变换的关系

- 设A为$m \times n$阶矩阵，则

> 对A进行一次初等行变换，等于用同种类型的m阶初等矩阵左乘A，也即，用初等矩阵左乘A，等于对A实施一次相对应的初等行变换

> 对A进行一次初等列变换，等于用同种类型的n阶初等矩阵右乘A，也即，用初等矩阵右乘A，等于对A实施一次相对应的初等列变换

11. 矩阵的等价$\cong$

11.1 矩阵等价定义

若矩阵A可以经过有限次初等变换化为矩阵B，则说A与B等价，记为$A \cong B$

> $A \cong B \Leftrightarrow A \to B$

- *<u>等价矩阵一定是同型矩阵</u>*

11.2 矩阵等价的性质

- 反身性，对任何矩阵A，都有$A \cong A$
- 对称性，若矩阵$A \cong B$，则$B \cong A$
- 传递性，若矩阵$A \cong B$，$B \cong A$，则$A \cong C$

11.3 矩阵等价的结论

1. 任一个矩阵$A_{m\times n}$都和其标准形矩阵$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$等价
2. 矩阵A, B等价的充要条件（都是同型矩阵）
   1. 存在一些列初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$；$Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使$P_1P_2\cdots P_sAQ_1, Q_2\cdots Q_t = B$
   2. 存在可逆矩阵P, Q，使$PAQ = B$
   3. $r(A) = r(B)$
3. 若矩阵$A \cong B$，则
   1. A与B的标准形相同

2. A与B的秩相同，即$r(A)=r(B)$

4. 若A,B为同阶方阵，且$A\cong B$，则，
   1. $|A|=k|B|\ (k\neq 0)$ 由性质2-1，或性质2-2，结合矩阵行列式性质即可知
   2. A,B同时可逆，或同时不可逆 由性质4-1，结合矩阵的行列式为不为0与可逆与否即可知

5. 设A为n阶方阵，则A可逆的充要条件为
   1. $A\cong E$

> - 充分性：
>   - $$\begin{aligned}&A\cong E\rightarrow\\&PAQ=E\rightarrow\\&|PAQ|=k|E|\rightarrow\\&|P|\cdot|A|\cdot|Q|=k|E|\rightarrow\\&\because|Q|\neq 0,|P|\neq 0,|E|\neq 0\rightarrow\\&\therefore|A|\neq 0\rightarrow\\&\therefore A\text{可逆}\end{aligned}$$
> - 必要性：
>   - $$\begin{aligned}&\because A\text{可逆}\rightarrow\\&\therefore|A|\neq 0\rightarrow\\&\because A\cong A\text{的标准型，记为S}\rightarrow\\&\therefore PAQ=S\rightarrow\\&|P|\cdot|A|\cdot|Q|=|S|\rightarrow\\&\because|A|\neq 0\rightarrow\\&\therefore|S|\neq 0\rightarrow\\&\text{矩阵}S\text{的主对角线没有0元素}\rightarrow\\&\therefore\text{标准型矩阵是一个单位阵}\end{aligned}$$

   2. A可以表示为有限个初等矩阵的乘积
      - 可逆矩阵必可表示为有限个初等矩阵的乘积

12. 初等变换法求逆矩阵

12.1 初等行变换求逆矩阵的原理

若A可逆，则A^{-1}也可逆

根据可逆矩阵与初等矩阵的关系，可知，若$P_1\cdots P_s$为初等矩阵则有

$A^{-1}=P_1\cdots P_s\cdots(1)$

也即，$P_1\cdots P_s E=A^{-1}\cdots(2)$

对等式1右乘A，则有$P_1\cdots P_s A=A^{-1}A=E\cdots(3)$

$P_1\cdots P_s A=E$

$P_1\cdots P_s E=A^{-1}$

观察上述两式可知，对A进行同一批初等行变换，可化为E

对E进行同一批初等行变换，可化为A^{-1}

因此，可将A和E拼接为$(A\vdots E)$，进行同样的初等行变换，得到$(E\vdots A^{-1})$

12.2 初等变换法求逆矩阵步骤 *适用于高阶矩阵*

> 先处理第一列，再处理第二列，以此类推

- 利用矩阵A和同阶单位矩阵E，做$n\times 2n$矩阵
- 对$(A\vdots E)$进行初等**行**变换，将其化为**行简化阶梯形矩阵**
  - $(A\vdots E)\xrightarrow{\text{行}}(B\vdots D)$
    - $(B\vdots D)$是行简化阶梯形矩阵
    - 对应的有$A\xrightarrow{\text{行}}B$，$E\xrightarrow{\text{行}}D$
- 结果判定，$\begin{cases}\text{若}B=E,\text{则}A\text{可逆},\text{且}A^{-1}=D\\\text{若}B\neq E,\text{则}A\text{不可逆}\end{cases}$

> 在对$(A\vdots E)$进行初等行变换时，如果过程中发现A对应的左子块的行列式为0，即可终止算法并判断A不可逆

12.3 初等变换法求矩阵方程

- $AX=B$
  - 将A和B拼接为矩阵$(A \vdots B)$
  - 进行初等行变换，当A对应的左子块变为E时，右子块就是X的解
- $XA=B$
  - 将A和B拼接为矩阵$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$
  - 进行初等列变换，当A对应的上子块变为E时，下子块就是X的解

13. 分块矩阵

13.1 分块矩阵的定义

- 定义

> 设A是一个矩阵，将A用若干纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为矩阵A的子块，该过程就是分块过程，分块以后的矩阵A称为分块矩阵

  - 按行分块后，得到的四个行向量称为矩阵A的行向量组
  - 按列分块后，得到的四个列向量称为矩阵A的列向量组
- 特殊的分块矩阵
  - 上三角分块矩阵
    - $\begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix}$其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为方阵
  - 下三角分块矩阵

- $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & A_k \end{bmatrix}$其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为方阵

- 对角分块矩阵
  - $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为方阵

13.2 分块矩阵的运算

13.2.1 分块矩阵的加法和数乘

- 设矩阵$A_{m\times n}$和$B_{m\times n}$按照同一方式分块，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

  - $$A + B = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1t}+B_{1t} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2t}+B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & A_{s2}+B_{s2} & \cdots & A_{st}+B_{st} \end{bmatrix}$$
  - $$kA = A = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1t} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{st} \end{bmatrix}$$

13.2.2 分块矩阵的乘法

- 设矩阵$A_{m\times l}$和$B_{l\times n}$把A, B分块，使得A的列分块和B的行分块相同，也即A的列分块 每个子块的列数，与B的行分块的每个子块的行数，对应相等

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

- $$AB = A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$$
  - 其中，$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \ \ i = 1, 2, \cdots, s; \ j = 1, 2, \cdots, r$
    - A和B因为都是小矩阵，因此顺序不可颠倒
- 特别的，如果A, B是同阶对角分块矩阵，且分块方式相同，$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}$，则
  - $$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_kB_k \end{bmatrix}$$
  - $$A^m = \begin{bmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^m \end{bmatrix}$$ - 设矩阵$A_{m\times l}$和$B_{l\times n}$把A, B分块，使得A的列分块和B的行分块相同，也即A的列分块 每个子块的列数，与B的行分块的每个子块的行数，对应相等

  $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}$$，则
    - $$AB = A = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{sr} \end{bmatrix}$$
      - 其中，$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \ \ i = 1, 2, \cdots, s; \ j = 1, 2, \cdots, r$
        - A和B因为都是小矩阵，因此顺序不可颠倒

- 特别的，如果A,B是同阶对角分块矩阵，且分块方式相同，$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_k \end{bmatrix}$，则
  - $$AB = \begin{bmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_kB_k \end{bmatrix}$$
  - $$A^m = \begin{bmatrix} A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^m \end{bmatrix}$$

13.2.3 分块矩阵的转置

- 分块矩阵的转置，是将各行子块依次转为列子块，并且每个子块内部也要进行转置
- $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}，\text{则} A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

13.2.4 分块矩阵的逆矩阵

- 三角分块矩阵
  - 设A,B为方阵，则，
    - $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$可逆，$\Leftrightarrow A,B$都可逆，且$\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$
    - $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$可逆，$\Leftrightarrow A,B$都可逆，且$\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$
- 对角分块矩阵
  - 设$A_1, A_2, \ldots, A_k$为方阵，则

> ℹ 主对角线分块矩阵的逆矩阵，是主对角线上子块的逆矩阵

- $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$ 可 逆 ， $\Leftrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_k$ 均 可 逆 ， 且 $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1} \end{bmatrix}$

> 副对角线分块矩阵的逆矩阵，是副对角线上子块的逆矩阵，但是要调转顺序

- $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}$ 可 逆 ， $\Leftrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_k$ 均 可 逆 ， 且 $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & \cdots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

13.2.5 分块矩阵的行列式

- 设$A_1, A_2, \ldots, A_k$为方阵，则
  - $\left|\begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix}\right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \cdots \bullet |A_k|$
  - $\left|\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & A_k \end{bmatrix}\right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \cdots \bullet |A_k|$
  - $\left|\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}\right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \cdots \bullet |A_k|$
- 设A为m阶方阵，B为n阶方阵，则
  - $\left|\begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$
  - $\left|\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$

- $\left|\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$

14. 矩阵的秩

14.1 秩的定义

- 矩阵的子式

> 设矩阵$A=(a_{ij})_{mn}$，在A中任取k行k列（$k\le min(m,n)$），位于这些行列交叉点处的k^2个元素，按照他们在A中的相对位置不变，得到的k阶行列式，称为矩阵A的一个k阶子式
>
> - 一阶子式即为元素本身
> - 若A为n阶矩阵，则A的n阶子式即为$|A|$

- 矩阵的秩

> 矩阵A中，非零子式的最高阶数，称为矩阵A的秩，记作$r(A)$
>
> - 零矩阵没有非零子式，规定零矩阵的秩为0
> - 若$A\ne O$，则$r(A)\ge 1$
> - 对任意矩阵$A_{m\times n}$，有$0\le r(A)\le min(m,n)$
>   - 不等式右侧其实说明了$r(A)\le m$，$r(A)\le n$

> 设矩阵$A=(a_{ij})_{mn}$
>
> - 若$r(A)=min(m,n)$，则称矩阵A为满秩矩阵
>   - 若$r(A)=m$，称为行满秩矩阵
>   - 若$r(A)=n$，称为列满秩矩阵
> - 若$r(A)<min(m,n)$，则称矩阵A为降秩矩阵

> 特别的，若A为n阶方阵，若$r(A)=n$，则称A为满秩矩阵，若$r(A)<n$，则称A为降秩矩阵
>
> 可通过定理推出，若A为n阶方阵
>
> - A满秩$\Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$可逆 $\Leftrightarrow A$为非奇异矩阵
> - A降秩$\Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$不可逆 $\Leftrightarrow A$为奇异矩阵

14.2 矩阵的秩相关的结论

1. $r(A)=r(r>0) \Leftrightarrow$矩阵$A$中至少有一个$r$阶子式不等于零，而所有的$r+1$阶子式都为零，或者没有$r+1$阶子式
   - 不仅仅$r+1$阶子全部为0，从$r+1, r+2, min(m,n)$的各阶子式其实都为0，如果存在的话

     可以对$r+2$阶子式按照某行展开，则是各个元素乘以对应的$r+1$阶的代数余子式，但是已经$r+1$阶行列式全部为0，所以全部$r+2$阶子式也全部为0
2. $r(A) \geq r \Leftrightarrow$矩阵$A$中至少有一个$r$阶子式不等于零
3. $r(A)<r \Leftrightarrow$矩阵A中所有r阶子式都为零，其实是r阶以上的全部子式都为零
4. 转置矩阵，负矩阵，数乘矩阵的秩
   1. $r(A)=r(A^T)$ 行列式转置，不影响行列式的值
   2. $r(A)=r(-A)$ $|A|=(-1)^k|A|$，如果$|A|=0$，$|-A|=0$，如果$|A|\neq 0$，$|-A|\neq 0$
   3. $r(A)=r(kA)\ k\neq 0$ $|A|$和$|kA|$始终同时为0，或同时不为0
5. $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$; $r(A)\geq 1 \Leftrightarrow A\neq O$
6. 若$A\neq O$，则A任意两行或两列成比例$\Leftrightarrow r(A)=1$
7. 若A为行阶梯矩阵，则$r(A)=A$中非零行的行数
8. 初等变换不改变矩阵的秩，即若$A\cong B$，有$r(A)=r(B)$
9. 若A,B为同型矩阵，则$A\cong B \Leftrightarrow r(A)=r(B)$

10 若A的标准型为$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$，则$r(A)$等于$D$中1的个数

11 若A,B同为$m\times n$阶矩阵，则$r(A\pm B)\le r(A)+r(B)$

12 若A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times s$阶矩阵，则$r(A)+r(B)-n\le r(AB)\le min(r(A),r(B))$

- 不等式右侧其实说明了$r(AB)\le r(A)$，$r(AB)\le r(B)$

13 若A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times s$阶矩阵，且$AB=O$， 则$r(A)+r(B)\le n$

14 $r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)=r(A^T)$

15 若A为可逆方阵，则$r(AB)=r(B)$ $r(CA)=r(C)$

- A可逆方阵，则可以表示为若干个初等矩阵的乘积，则AB,CA相当于对B,C做初等行/列变换
- 初等变换不改变矩阵的秩

16 若A为n阶方阵$(n\ge 2)$，A^*为A的伴随矩阵，则$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

14.3 求解矩阵的秩

- 定义法

> 若矩阵A中有不等于零的r阶子式，且所有$r+1$阶子式都为零，或者没有$r+1$阶子式，则$r(A)=r$

- 初等变换法

> 利用矩阵的初等行变换，将矩阵化为行阶梯矩阵，则行阶梯矩阵中非零行的行数即为矩阵的秩
>
> 原理：初等变换不改变

- 行列式法

> 若A为n阶方阵，求$|A|$，若$\begin{cases} 若|A| \neq 0 & r(A)=n \\ 若|A|=0 & r(A)<n \end{cases}$

- 利用矩阵秩的结论