

1. 映射和函数

1.1 映射

- 映射

设 X 、 Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f ，使得对 X 中每个元素 x ，按照法则 f ，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的一个映射，记作：

$$f: X \rightarrow Y$$

- 其中：

- 元素 y 称为元素 x 在映射 f 下的像，记作 $f(x)$ ，也即 $y = f(x)$
- 元素 x 称为元素 y 在映射 f 下的原像
- 集合 X ，集合 Y ，和映射法则 f 是构成映射的三大要素

- 定义域：

- 集合 X 称为映射 f 的定义域，记作 D_f ，也即 $D_f = X$

- 值域：

- X 中所有元素的像组成的集合称为映射 f 的值域，记作 R_f 或 $f(X)$
- 也即， $R_f = f(X) = \{f(x) | x \in X\}$
- 注意， $R_f \subset Y$ ，不一定 $R_f = Y$

-

- 映射的类型

- 满射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射，如果 $R_f = Y$ ，也即， Y 中任一个元素 y 都是 X 中某个元素的像，则称 f 是从 X 到 Y 上的映射，也称为满射

- 单射

设 f 是从集合 X 到集合 Y 的一个映射，若对集合 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$ ，他们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$ ，则称 f 为 X 到 Y 的单射

- 双射

若一个映射 f 即是单射，又是满射，则称为一一映射或双射

- 逆映射

设 f 是 X 到 Y 的单射，则有定义可知，对于每个 $y \in R_f$ ，有唯一的 $x \in X$ ，适合 $f(x) = y$ ，于是，可以定义一个新的映射 g ，即

$$g: R_f \rightarrow X$$

对每个 $y \in R_f$ ，规定 $g(y) = x$ ， x 满足 $f(x) = y$ ，则新映射 g 称为 f 的逆映射，记作 f^{-1}

定义域 $D_{f^{-1}} = R_f$ ，值域 $R_{f^{-1}} = X$

- 只有单射才有逆映射，否则从 $g(y) = x$ 可能出现多个 x 值，导致不符合映射定义

- 复合映射

设有两个映射,

$g: X \rightarrow Y_1, f: Y_2 \rightarrow Z$, 其中 $Y_1 \subset Y_2$

则由映射 g 和 f 确定了一个从 $X \rightarrow Z$ 的映射, 该映射称为复合映射, 表示将每个 $x \in X$, 映射为 $f(g(x)) \in Z$

复合映射记为 $f \circ g$, 也即 $f \circ g: X \rightarrow Z, (f \circ g)(x) = f(g(x)), x \in X$

- 构成复合映射的条件: \circ 符号右侧映射的值域, 在符号左侧映射的定义域内
- 复合映射的书写顺序与映射实际顺序相反, 即, 如果是 $f \circ g \circ h$, 则先是映射 $h(x)$, 再是 $g(h(x))$, 最后是 $f(g(h(x)))$

1.2 函数

1. 函数的定义

设数集 $D \subset \mathbb{R}$, 则称映射 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在数集 D 上的函数, 记为 $y = f(x), x \in D$

- x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为定义域, 记为 D_f , 也即 $D = D_f$
- 构成函数的要素: 定义域 D_f 和对应法则 f
 - 因为函数本身是从实数集映射到实数集的映射

函数的定义中, 每个 $x \in D$, 按照对应法则 f , 总有唯一确定的值 y 与 x 对应, 这个值称为函数 f 在 x 处的函数值, 记为 $f(x)$, 也即 $y = f(x)$

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$

符号 f 与 $f(x)$

- 通常来说, f 表示自变量和因变量之间的对应法则, $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值
- 但通常为了叙述方便, 常用 $y = f(x) \quad x \in D$ 来表示定义在数集 D 上的函数, 此时 $f(x)$ 表示由它确定的函数 f

2. 函数的性质

- 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$

如果存在数 K_1 , 使得 $f(x) \leq K_1$ 对任意的 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界, K_1 是函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界

如果存在数 K_2 , 使得 $f(x) \geq K_2$ 对任意的 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界, K_2 是函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界

如果存在正数 M , 使得 $|f(x)| \leq M$ 对任意的 $x \in X$ 都成立, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界

如果对于任意正数 M , 总存在 $x_1 \in X$ 使得 $|f(x_1)| > M$, 则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界

如果对于整个定义域, 上述成立, 则成为全局有界/无界

函数 $f(x)$ 在 X 上有界 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界

- 单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 区间 $I \subset D$, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2

当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递增的

当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调递减的

单调, 特指不包含等于

单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数

◦ 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D 关于原点对称

如果对于任意 $x \in D$, 有 $f(-x) = f(x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为偶函数, 关于 y 轴对称

如果对于任意 $x \in D$, 有 $-f(x) = f(-x)$ 恒成立, 则称 $f(x)$ 为奇函数, 关于原点对称

奇偶性不具有可加性

◦ 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在一个正数 l , 使得对于任意 $x \in D$, 有 $x \pm l \in D$, 且 $f(x+l) = f(x)$ 恒成立

则称函数 $f(x)$ 为周期函数, l 称为函数 $f(x)$ 的周期

通常周期函数的周期, 指的是最小正周期

■ 并非每个函数都有最小正周期

■ 狄利克雷函数,
$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^C \end{cases}$$

■ 任何正有理数 r 都是周期, 故而不存在最小正周期

3. 反函数和复合函数

◦ 反函数

设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射, 则存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$, 称 f^{-1} 为函数 f 的反函数

对于每个 $y \in f(D)$, 有唯一的 $x \in D$, 有 $f^{-1}(y) = x$

反函数和其直接函数, 关于 $y = x$ 对称

若直接函数是单调函数, 则其反函数也是单调函数, 且单调性相同

◦ 复合函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D_f , 函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g , 且其值域 $R_g \subset D_f$, 则下式确定的函数

$$y = f[g(x)], \quad x \in D_g$$

称为由函数 $u = g(x)$ 和函数 $y = f(x)$ 构成的复合函数, 定义域为 D_g

构成复合函数的条件是, \circ 右侧的函数的值域, 在 \circ 左侧的函数的定义域内

$$f \circ g \text{ 要求 } R_g \subset D_f$$

$f \circ g$ 表示由函数 $g(x)$ 和函数 $f(x)$ 复合而来, 按照先 g 后 f 的次序复合

4. 初等函数

◦ 基本初等函数

- 幂函数, $y = x^\mu, \mu \in R$ 是常数
- 指数函数, $y = a^x, a > 0$ 且 $a \neq 1$
- 对数函数, $y = \log_a(x), a > 0$ 且 $a \neq 1$
- 三角函数, $\text{trig}(x)$

- 反三角函数, $\arctrig(x)$ 或 $\text{trig}^{-1}(x)$
- 初等函数

通过基本初等函数, 和常数, 经过有限次的四则运算, 和有限次的函数复合所构成, 并可由一个式子表示的函数, 称为初等函数

2. 数列的极限

2.1 数列极限的定义

数列

如果按照**某一法则**, 对每个 $n \in N_+$, 对应一个确定的实数 x_n , 将这些实数按照下标从小到大的顺序排列得到的序列, 称为数列, 记为 $\{x_n\}$

x_n 称为一般项或通项, 通常用公式表示

数列的极限

设 $\{x_n\}$ 是一个数列, 如果存在常数 a , 对于任意给定的正数 ε (不论多么小), 总存在正整数 N , 使得 $n > N$ 时, 不等式

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

都成立, 那么就称**常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限**, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 或称 $\{x_n\}$ **收敛于 a** , 记为 $x_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$

- 如果不存在这样的常数 a , 则说明数列 $\{x_n\}$ 是发散的, 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不存在 **DNE**
- 正数 ε 可以任意给定是重要前提, 这样 $|x_n - a| < \varepsilon$ 才可以表达出 x_n 与 a **无限接近**的意思
- 正整数 N 是和 ε 相关的, 随着 ε 的给定而确定
- $|x_n - a| < \varepsilon$ 表示的内容
 - 极限表示的是 $\{x_n\}$ 无限接近值 a , 也即两者相差**几乎为0**, 所以 $|x_n - a|$ 任意小, 因此可以使用 $\forall \varepsilon > 0, |x_n - a| < \varepsilon$

数列极限符号表达

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \text{正整数 } N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon$$

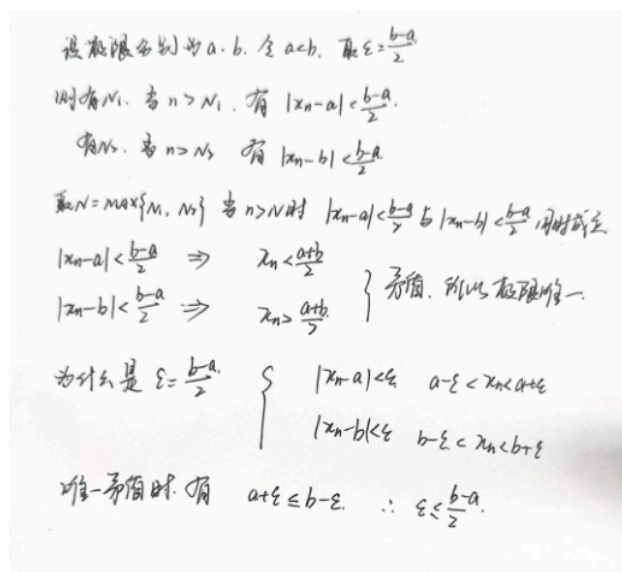
数列极限的几何意义

当 $n > N$ 时, 所有的 x_n 的点都落在数轴上的开区间 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 内

2.2 收敛数列的性质

1. 极限的唯一性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么极限唯一



2. 收敛数列的有界性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛, 那么数列 $\{x_n\}$ 一定有界

◦ 数列有界的定义

对于数列 $\{x_n\}$, 如果存在一个正整数 M , 使得对于一切 $\{x_n\}$ 都满足不等式

$$|x_n| \leq M$$

则称数列 $\{x_n\}$ 有界, 如果这样的正整数 M 不存在, 则称数列 $\{x_n\}$ 无界

3. 收敛数列的保号性

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 且 $a > 0$ (或 $a < 0$), 则存在正整数 N , 当 $n > N$ 时, 都有 $x_n > 0$ (或 $x_n < 0$)

保号性推论

如果数列 $\{x_n\}$ 从某项起有 $x_n \geq 0$ (或 $x_n \leq 0$), 且数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么有 $a \geq 0$ (或 $a \leq 0$)

4. 收敛数列与其子数列间的关系

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a , 那么他的任一子数列也收敛, 且也收敛于 a

- 如果一个数列 $\{x_n\}$ 的两个子数列收敛于不同值, 则可知原数列 $\{x_n\}$ 是发散的
- 如果数列 $\{x_n\}$ 是发散的, 但其子数列可能是收敛的

◦ 子数列定义

从数列 $\{x_n\}$ 中任意抽取无限多项, 且保持这些项在原数列 $\{x_n\}$ 中的先后次序, 这样得到的新数列, 就称为原数列 $\{x_n\}$ 的子数列

3. 函数的极限

3.1 函数极限的定义

- 自变量 x 趋于有限值 x_0

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论他多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则常数 A 叫做函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 或

$f(x) \rightarrow A$, 当 $x \rightarrow x_0$ 时

○ 定义中指明 $0 < |x - x_0| < \delta$, 说明

■ $x \neq x_0$, 这说明函数在 x_0 处有没有极限, 和 $f(x)$ 在 x_0 处有无定义没有关系

■ δ 表示的是 x_0 邻域半径, 表示了 x 和 x_0 的接近程度

○ $|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示的内容

■ 极限表示的是 $f(x)$ 无限接近值 A , 也即两者相差几乎为0, 所以 $|f(x) - A|$ 任意小, 因此可以使用 $\forall \varepsilon > 0, |f(x) - A| < \varepsilon$

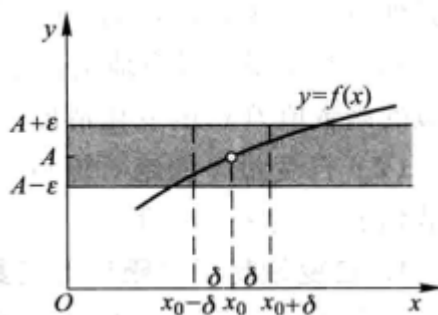
○ δ 是由 ε 控制的, 给定了 ε , 就可以找到一个对应的正数 δ , 也因此, 不需要要求 δ 像 ε 那样, 有无论多小的限制

○ $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的几何意义

■ 对于给定的常数 A 和任意正数 ε , 在 y 轴做两条平行于 x 轴的水平线, 在水平线之间的区域, 就是我们希望接近于 A 的范围

■ 根据给定的范围, 在点 x_0 附近可以找到一个 δ 邻域, $(x - \delta, x + \delta)$, 此处说明 δ 是由 ε 控制的

■ 因此当函数 $f(x)$ 上的点, 其横坐标落到 $(x - \delta, x + \delta)$ 且 $x \neq x_0$ 时, 这些点的纵坐标就会落在水平线区域内, 也即满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$



• 单侧极限

○ 左右极限统称为单侧极限

○ 左极限

■ 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论他多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足 $-\delta < x - x_0 < 0$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则常数 A 叫做函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$, 或

$f(x) \rightarrow A$, 当 $x \rightarrow x_0^-$ 时

○ 右极限

- 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论他多么小), 总存在正数 δ , 使得当 x 满足 $0 < x - x_0 < \delta$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

则常数 A 叫做函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow x_0^+$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$, 或

$$f(x) \rightarrow A, \text{ 当 } x \rightarrow x_0^+ \text{ 时}$$

- 函数 $f(x)$, 在 $x \rightarrow x_0$ 时极限存在的充要条件是: **左右极限存在且相等**

- 自变量 x 的绝对值 $|x|$ 趋于无穷大

- 设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义, 如果存在常数 A , 对任意给定的正数 ε (不论他多么小), 总存在正数 X , 使得当 $|x| > X$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式

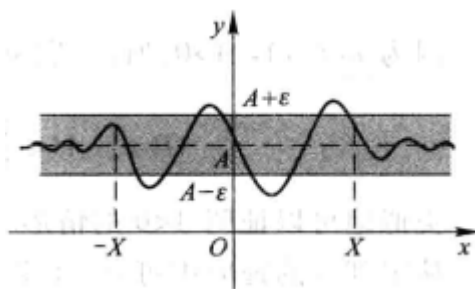
$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

那么常数 A 叫做函数 $f(x)$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时的极限, 记作 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 或

$$f(x) \rightarrow A, \text{ 当 } x \rightarrow \infty \text{ 时}$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 的几何意义

- 对于给定的常数 A 和任意正数 ε , 在 y 轴做两条平行于 x 轴的水平线, 在水平线之间的区域, 就是我们希望接近于 A 的范围
- 根据 ε 可以找到一个正数 X , 使得对于所有 $|x| > X$, 函数 $f(x)$ 的值都会落在水平线之间的区域



3.2 函数极限的性质

仅给出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 的形式, 但对 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 也成立

1. 函数极限唯一性

如果函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, 那么极限唯一

2. 函数极限局部有界性

如果函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, 那么存在正常数 M 和 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x)| \leq M$

3. 函数极限局部保号性

如果函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A > 0$ (或 $A < 0$), 那么存在正常数 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $f(x) > 0$, 或 $f(x) < 0$

如果函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 且 $A \neq 0$, 那么就存在 x_0 的某一去心邻域 $\dot{U}(x_0)$

当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$ 时, 有 $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

如果在 x_0 的某个去心邻域内 $f(x) \geq 0$, 或有 $f(x) \leq 0$, 且当 $x \rightarrow x_0$ 时, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, 那么 $A \geq 0$, 或 $A \leq 0$

4. 函数极限与数列极限的关系

如果函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 存在, $\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内, 任意收敛于 x_0 的数列, 且满足 $x_n \neq x_0$

那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

4. 无穷大和无穷小

无穷大/无穷小, 指的均是函数, 而不是具体的值

• 无穷小

如果函数 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$ 时的极限为0, 那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷小

◦ 无穷小QA

■ Q: 为什么0是无穷小而不是负数?

■ A: 根据无穷小的定义可知, 是当自变量 $x \rightarrow x_0$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时, 函数的极限为0, 根据极限的定义, 极限为0是指 $|f(x) - 0| < \varepsilon$, 也即 $|f(x)| < \varepsilon$, 含有绝对值, 因此以0为无穷小的标准

■ Q: 无穷小是值还是函数?

■ A: 无穷小是函数, 具体的值, 无法体现对任意的 ε , 都有 $|f(x)| < \varepsilon$

◦ 无穷小与极限存在

在自变量的同一变化过程 $x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$ 中, 函数 $f(x)$ 具有极限 A 的充要条件是, $f(x) = A + \alpha$, α 是无穷小

• 无穷大

设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义), 如果对于任意给定的正数 M (无论 M 多么大), 总存在正数 δ , (或正数 X), 只要 x 适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ (或 $|x| > X$), 对应的函数值总满足不等式

$$|f(x)| > M$$

那么称函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$, 或 $x \rightarrow \infty$ 时的无穷大

按照极限定义, 无穷大的函数, 极限是不存在的, 但为了叙述方便, 也可以称函数的极限是无穷大, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 或, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

◦ 无穷大与无穷小

在自变量的同一变化过程中, 如果 $f(x)$ 为无穷大, 那么 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷小; 如果 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大

5. 极限运算法则

- 使用极限运算法则, 可以求解部分函数的极限

- 针对 $x \rightarrow x_0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 都成立

- 定理1

- 两个无穷小的和仍是无穷小

- 推论

- 有限个无穷小的和仍是无穷小

- 定理2

- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小

- 推论1

- 常数与无穷小的乘积是无穷小

- 推论2

- 有限个无穷小的乘积是无穷小

- 定理3

- 如果 $\lim f(x) = A$, $\lim g(x) = B$, 则有

- $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
- $\lim[f(x) \times g(x)] = \lim f(x) \times \lim g(x) = A \times B$
- 若 $B \neq 0$, $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$

- 推论1

- 如果 $f(x)$ 的极限存在, 而 c 为常数, 那么 $\lim[cf(x)] = c \lim f(x)$

- 推论2

- 如果 $f(x)$ 的极限存在, 而 n 是正整数, 那么 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

- 定理4

- 设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = B$, 则有

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A + B$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \times y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \times B$
- 若 $B \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{A}{B}$

- 定理5

- 如果 $\varphi(x) \geq \psi(x)$, 且 $\lim \varphi(x) = A$, $\lim \psi(x) = B$, 那么 $A \geq B$

- 定理6

- 设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$ 复合而来, 且 $f[g(x)]$ 在 x_0 的某一去心邻域内有定义

$$\text{若 } \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0, \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$$

且存在 $\delta_0 > 0$, 当 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$ 时, 有 $g(x) \neq u_0$, 那么

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$$

- 极限求解方法之一

涉及多项式, 和有理分式的极限

- 当 $x \rightarrow x_0$ 时
 - 如果是多项式函数的极限，可以将 x_0 带入函数直接计算出极限
 - 如果是有理分式的极限，且分母带入 x_0 后不为 0，可以将 x_0 带入函数直接计算出极限
 - 如果分母为 0
 - 先考虑约分是否可以计算出极限
 - 再考虑如果分母为 0，分子不为 0，则其倒数的极限为 0，也即无穷小，根据无穷小的性质，可推断原有理分式极限为 ∞
 - 都不可以考虑其他方法
- 当 $x \rightarrow \infty$ 时
 - 如果是有理分式的极限，根据分子分母中，系数非零的最高次项的次数，进行判断
 - 分子次数 < 分母次数，极限为 0
 - 分子次数 = 分母次数，极限为分子分母中最高次项的系数之比
 - 分子次数 > 分母次数，极限为 ∞

6. 极限存在准则 与 两个重要极限

1. 准则一 夹逼定理

如果数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 满足以下条件

- 从某项起，即 $\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$ ，当 $n > n_0$ 时，有 $\{y_n\} \leq \{x_n\} \leq \{z_n\}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$

那么数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，且也为 a

如果函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 满足以下条件

- 对 $x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r)$ (或 $|x| > X$)，有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} g(x) = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x) = A$ 或 $\lim_{n \rightarrow x_0} g(x) = A$, $\lim_{n \rightarrow x_0} h(x) = A$

那么函数 $f(x)$ 的极限存在，且也为 A

2. 准则二 单调有界数列必有极限

充分条件

如果数列 $\{x_n\}$ 单调且有界，那么数列 $\{x_n\}$ 一定有极限，也即一定收敛

此处的单调是广义的，包含等号

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个左邻域内单调且有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的左极限必定存在

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个右邻域内单调且有界，则 $f(x)$ 在 x_0 的右极限必定存在

设 X 是任意大的正数，函数 $f(x)$ 在 $x > X$ 的区间上单调且有界，则 $f(x)$ 在 $x \rightarrow +\infty$ 的极限必定存在

设 X 是任意大的正数，函数 $f(x)$ 在 $x < -X$ 的区间上单调且有界，则 $f(x)$ 在 $x \rightarrow -\infty$ 的极限必定存在

3. 柯西极限存在准则(柯西审敛原理)

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是：

对于任意给定的正数 ε ，存在正整数 N ，使得当 $n > N$ ， $n > N$ 时，有

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

可以推广到函数极限存在的充要条件

- 两个重要极限

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$

- 更一般的形式

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

- $\lim_{h \rightarrow 0} (1 + hx)^{\frac{1}{h}} = e^x$

7. 无穷小比较

- 两个无穷小的和/差/积都是无穷小，但对于商，会存在等于0， ∞ ， $c \neq 0$ 的情形

- 比值为0，说明分子趋于零的速度快于分母趋于零的速度
 - 比值为 ∞ ，说明分母趋于零的速度快于分子趋于零的速度
 - 比值为1，说明分子分母趋于零的速度快慢相仿

- 无穷小比值相关定理

- α, β 都是同一个自变量变化过程中的无穷小，且 $\alpha \neq 0$ ， $\lim \frac{\beta}{\alpha}$ 也是同一自变量变化过程中的极限

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$ ，那么就说 β 是比 α 高阶的无穷小，记作 $\beta = o(\alpha)$

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$ ，那么就说 β 是比 α 低阶的无穷小

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$ ，那么就说 β 与 α 同阶的无穷小

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0, k > 0$ ，那么就说 β 是关于 α 的 k 阶无穷小

如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$ ，那么就说 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\beta \sim \alpha$

等价无穷小具有如下性质

- 自反性， $\alpha \sim \alpha$
 - 对称性，若 $\alpha \sim \beta$ ，则 $\beta \sim \alpha$
 - 传递性，若 $\alpha \sim \beta, \beta \sim \gamma$ ，则 $\alpha \sim \gamma$

- 定理一：

β 和 α 是等价无穷小的充要条件是， $\beta = \alpha + o(\alpha)$

- 定理二：

设 $\alpha \sim \tilde{\alpha}, \beta \sim \tilde{\beta}$ ，且极限 $\lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$ 存在，则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}}$$

- 常见等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时有如下等价无穷小

- $\sin(x) \sim x$
- $\tan(x) \sim x$
- $\arcsin(x) \sim x$
- $\arctan(x) \sim x$
- $1 - \cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2$
- $\sec(x) - 1 \sim \frac{1}{2}x^2$
- $e^x - 1 \sim x$
- $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

■ 证明过程

证明当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x}$$

根据二项式 $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$

约分后极限为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n}x}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x} - 1)(\sqrt[n]{1+x}^{n-1} + \sqrt[n]{1+x}^{n-2} + \dots + 1)}{\frac{1}{n}x \cdot (\sqrt[n]{1+x}^{n-1} + \sqrt[n]{1+x}^{n-2} + \dots + 1)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{1}{n}x (\sqrt[n]{1+x}^{n-1} + \sqrt[n]{1+x}^{n-2} + \dots + 1)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{n}{\sqrt[n]{1+x}^{n-1} + \sqrt[n]{1+x}^{n-2} + \dots + 1}$$
$$= \frac{n}{1+1+\dots+1} = 1$$

$\therefore \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n}x$

8. 函数的连续性和间断点

- 增量变量的描述
 - 变量从一个初值变到终值, 终值与初值的差就叫做变量的增量, 记作 Δx , 变量可任取
 - 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是有定义的, 则, 函数的增量, 指的是自变量 x 在该邻域内, 从 x_0 变到 $x_0 + \Delta x$ 时, 函数值 $f(x)$ 相应的从 $f(x_0)$ 变到 $f(x_0 + \Delta x)$, 将此变化记为 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$
- 在某点 x_0 处连续
 - 增量表示法

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$, 则

称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续

○ 函数表示法

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义, 如果 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数

$y = f(x)$ 在点 x_0 连续

■ 变化过程:

■ 令 $x = x_0 + \Delta x$, 所以当 $\Delta x \rightarrow 0$, 意味着 $x \rightarrow x_0$

■ $\Delta y = f(x) - f(x_0)$, 所以有 $f(x) = f(x_0) + \Delta y$, 所以当 $\Delta y \rightarrow 0$, 意味着 $f(x) \rightarrow f(x_0)$

○ $\varepsilon - \delta$ 表示法

$f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

○ 左右连续

左连续

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0^-)$ 存在, 且等于 $f(x_0)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处左连续

右连续

如果 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0^+)$ 存在, 且等于 $f(x_0)$, 那么就说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续

○ 连续的三个条件

■ 函数在 x_0 有定义

■ 函数当 $x \rightarrow x_0$ 的极限存在

■ 函数值与极限值相等

○ 连续的几何意义

■ 函数图像在 x_0 的某一邻域内, 是连成一片的, 没有跳跃, 空洞或断裂

■ 可以从左到右画过 x_0 点, 不需要抬笔

● 在区间上连续

在区间上每个点都连续的函数, 叫做在该区间上的连续函数

如果区间包括端点, 则说, 在左端点上连续, 指的是右连续, 在右端点上连续, 指的是左连续

○ 几何意义

■ 区间上连续的函数的图像, 是一条连续而不间断的曲线

● 函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义, 在此前提下, 如果函数 $f(x)$ 有下述情况之一, 则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点

○ 在 $x = x_0$ 处无定义

○ 在 $x = x_0$ 处虽有定义, 但极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在

- 在 $x = x_0$ 处虽有定义, 且极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 虽存在, 但极限值不等于函数值, 也即

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

- 间断点分类

- 第一类间断点, 左右极限存在, 但不满足连续性条件

- 可去间断点, 指的是左右极限存在且相等, 但函数值未定义或不等于极限, 可通过重新定义函数在该点的值来消除不连续

- $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, 在点 $x = 1$ 无定义, 左右极限存在且相等, 因此可以补充定义, 消除不连续, 所以点 $x = 1$ 是 $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ 的可去间断点

- 跳跃间断点, 指的是左右极限存在, 但不相等, 函数值可以定义也可以未定义

- $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ x+1 & x > 0. \end{cases}$ 在点 $x = 0$ 处左右极限存在但不相等, 且产生了跳跃现象, 因此 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点

- 第二类间断点, 除了第一类的间断点外都称为第二类间断点, 也即左右极限至少一个不存在

- 无穷间断点, 左右极限中至少一个趋于无穷

- $y = \tan(x)$, 点 $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ 是 $y = \tan(x)$ 的无穷间断点

- 震荡间断点, 左右极限不存在, 且函数无限震荡

- $y = \sin(\frac{1}{x})$, 点 $x = 0$ 是函数的震荡间断点, 因为在 $x = 0$ 处无定义, 且函数值在 $[-1, 1]$ 之间无限震荡

9. 连续函数的运算与初等函数的连续性

- 连续函数的和/差/积/商的连续性

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则他们的和差 $f \pm g$, 积 $f \times g$, 商 $\frac{f}{g}(g(x_0) \neq 0)$ 也都在点 x_0 处连续

- 反函数和复合函数的连续性

- 反函数的连续性

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增或递减, 且连续, 那么其反函数 $f^{-1}(x)$ 在对应的区间 $I_y = \{y | y = f(x), x \in I\}$ 上单调递增或递减, 且连续

- 连续的复合函数求极限

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$ 复合而来, $\overset{\circ}{U}(x_0) \subset I_{f \circ g}$, 若

$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = u_0$, 而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续, 则有

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = f(u_0)$$

说明对连续的复合函数求极限时, 可以做代换 $u = g(x)$, 那么复合函数求极限就变换为了求 $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u)$, 其中 $u = u_0$

或

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[g(x)] = f[\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)]$$

说明对连续的符合函数求极限时，函数符号 f 可以与连续符号 $\lim_{x \rightarrow x_0}$ 做交换

- 复合函数连续性传导

设函数 $y = f[g(x)]$ 是由函数 $u = g(x)$ 和 $y = f(u)$ 复合而来， $U(x_0) \subset I_{f \circ g}$ ，若函数 $g(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，且 $u_0 = g(x_0)$ ，而函数 $y = f(u)$ 在 $u = u_0$ 处连续，则有复合函数 $y = f[g(x)]$ 在 $x = x_0$ 处连续

- 初等函数的连续性

基本初等函数，在其定义域内，都是连续的

一切初等函数，在其定义区间内，都是连续的

10. 闭区间上连续函数的性质

- 函数在闭区间上连续

函数在开区间 (a, b) 内连续，在右端点 b 左连续，在左端点 a 右连续，则说函数在闭区间 $[a, b]$ 上连续

10.1 有界性与最大值、最小值定理

- 最大值、最小值概念

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果有 $x_0 \in I$ ，对于任一 $x \in I$ 都有

$f(x) \leq f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数在区间 I 上的最大值

$f(x) \geq f(x_0)$ ，则称 $f(x_0)$ 是函数在区间 I 上的最小值

- 根据定义，线性函数在开区间 (a, b) 内是没有最大值、最小值的，因为可以无限趋近于端点找到任一小的或者大的值

- 有界性与最值定理

在闭区间上连续的函数，在该闭区间上有界，且一定能取到该函数的最大值和最小值

- 注意：

- 闭区间上连续，意味着没有任何间断点
- 如果在开区间内连续，或在闭区间上有间断点，那么函数在该区间不一定有界，也不一定有最大值、最小值
 - $y = \tan(x)$ 在开区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内连续，但函数在该开区间内无界，且无最大值、最小值
 - $y = \begin{cases} -x + 1, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ -x + 3, & 1 < x \leq 2. \end{cases}$ 在闭区间 $[0, 2]$ 上有间断点 $x = 1$ ，因此虽然该函数在闭区间 $[0, 2]$ 上有界，但是没有最大值最小值

10.2 零点定理与介值定理

- 零点定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，也即 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，在开区间 (a, b) 内，至少有一个点 ξ ，使得 $f(\xi) = 0$

- 介值定理

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 若 $f(a) = A$, $f(b) = B$, 则对于 A 与 B 之间的任一个数 C , 在开区间 (a, b) 内, 至少有一个点 ξ , 使得 $f(\xi) = C$, ($a < \xi < b$)

- 推论

在闭区间上连续的函数 $f(x)$ 的值域, 为闭区间 $[m, M]$, 其中, m 与 M 依次是函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上的最小值和最大值

10.3 一致连续性

- 一致连续性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于任意给定的正数 ε , 总存在正数 δ , 使得对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2 , 当 $|x_1 - x_2| < \delta$ 时, 有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, 那么称函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续

- 一致连续时, δ 只与任意给定的 ε 有关, 而与具体的点无关
 - 一致连续是普通连续的加强形式
 - 一致连续性表明, 函数的连续性在整个区间上是均匀的, 也即, 函数值的变化不会因为某些点的位置而变得过于激烈
- 普通连续时, δ 不仅与任意给定的 ε 有关, 还与具体的点 x_0 有关

- 一致连续性定理

如果函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 那么它在该区间上一致连续

- 函数的Lipschitz条件-利普希茨条件

设函数 $f(x)$ 对于闭区间 $[a, b]$ 上任意两点 x_1, x_2 , 恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < L|x_1 - x_2|$, 其中 L 为正常数, 则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 其实一致连续

→ 函数的 Lipschitz 条件 → 一致连续

6. 设 $f(x)$ 对区间 $[a, b]$ 上任意两点 x, y 恒有 $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$.

L 为正常数, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$. 证: 至少有一点 $\xi \in (a, b)$ 有 $f(\xi) = 0$.

证: 任取 $x_0 \in (a, b)$. $\forall \varepsilon > 0$. 取 $\delta < \min\{\frac{\varepsilon}{L}, x_0 - a, b - x_0\}$.

δ 取这么小的原因:

当 x_0 趋近 a 或 b 如果只取 $\frac{\varepsilon}{L}$, 会导致超出定义域.
则由定义可知, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta$$

考察 $L\delta$ 与 ε 的关系:

若 δ 取 $\frac{\varepsilon}{L}$, 则 $L\delta = \varepsilon$.

若 δ 不取 $\frac{\varepsilon}{L}$, 则 $L\delta < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

$$\therefore |f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| < L\delta \leq \varepsilon.$$

$\therefore f(x)$ 在 x_0 连续. 又 $\because x_0$ 的任意性. $\therefore f(x)$ 在 (a, b) 内连续.

当 $x_0 = a$ 或 $x_0 = b$. 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$. 则 $x \in [a, a + \delta)$, 或 $(b - \delta, b]$

$$\text{则 } |f(x) - f(a)| \leq L|x - a| < L\delta = \varepsilon.$$

$x_0 = b$ 同理.

$\therefore f(x)$ 在 a 和 b 上连续. $\therefore f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

\therefore 零点定理可证至少有一点 ξ , 使 $f(\xi) = 0$. $\xi \in (a, b)$