1. 映射和函数

1.1 映射

- 映射

> **设X、Y是两个非空集合，如果存在一个法则f，使得对X中每个元素x，按照法则f，在Y中有唯一确定的元素y与之对应，则称f为从X到Y的一个映射，记作：**
>
> $f:X\to Y$

> - 其中：
>   - 元素y称为元素x在映射f下的**像**，记作$f(x)$，也即$y=f(x)$
>   - 元素x称为元素y在映射f下的**原像**
>   - 集合X，集合Y，和映射法则f是构成映射的三大要素
> - 定义域：
>   - 集合X称为映射f的定义域，记作D_f，也即$D_f=X$
> - 值域：
>   - *X中所有元素的像组成的集合*称为映射f的值域，记作R_f或$f(X)$
>   - 也即，$R_f=f(X)=f(x)|x\in X$
>   - 注意，$R_f\subset Y$，不一定$R_f=Y$
> -

- 映射的类型
  - 满射

  > 设f是从集合X到集合Y的一个映射，如果$R_f=Y$，也即，Y中任一个元素y都是X中某个元素的像，则称f是从X到Y**上**的映射，也称为**满射**

  - 单射

  > 设f是从集合X到集合Y的一个映射，若对集合X中任意两个不同元素$x_1\neq x_2$，他们的像$f(x_1)\neq f(x_2)$，则称f为X到Y的**单射**

  - 双射

  > 若一个映射f即是单射，又是满射，则称为一一映射或**双射**

- 逆映射

> 设f是X到Y的**单射**，则有定义可知，对于每个$y\in R_f$，有唯一的$x\in X$，适合$f(x)=y$，于是，可以定义一个新的映射g，即
>
> $g:R_f\to X$
>
> 对每个$y\in R_f$，规定$g(y)=x$，x瞒住$f(x)=y$，则新映射g称为f的逆映射，记作f^{-1}
>
> 定义域$D_{f^{-1}}=R_f$，值域$R_{f^{-1}}=X$
>
> - 只有单射才有逆映射，否则从$g(y)=x$可能出现多个x值，导致不符合映射定义

- 复合映射

> 设有两个映射，
>
> $g: X \to Y_1$，$f: Y_2 \to Z$，其中$Y_1 \subset Y_2$
>
> 则由映射g和f确定了一个从$X \to Z$的映射，该映射称为复合映射，表示将每个$x \in X$，映射为$f(g(x)) \in Z$
>
> 复合映射记为$f \circ g$，也即$f \circ g: X \to Z$，$(f \circ g)(x) = f(g(x))$，$x \in X$
>
> - 构成复合映射的条件：$\circ$符号右侧映射的值域，在符号左侧映射的定义域内
> - 复合映射的书写顺序与映射实际顺序相反，即，如果是$f \circ g \circ h$，则先是映射$h(x)$，再是$g(h(x))$，最后是$f(g(h(x)))$

1.2 函数

1. 函数的定义

> 设数集$D \subset R$，则称映射$f: D \to R$为定义在数集D上的函数，记为$y = f(x)$，$x \in D$
>
> - x称为自变量，y称为因变量，D称为定义域，记为D_f，也即$D = D_f$
> - 构成函数的要素：定义域D_f和对应法则f
>   - 因为函数本身是从实数集映射到实数集的映射

> 函数的定义中，每个$x \in D$，按照对应法则f，总有唯一确定的值y与x对应，这个值称为函数f在x处的函数值，记为$f(x)$，也即$y = f(x)$
>
> 函数值$f(x)$的全体所构成的集合称为函数f的值域，记作R_f或$f(D)$

> 符号f与$f(x)$
>
> - 通常来说，f表示自变量和因变量之间的对应法则，$f(x)$表示与自变量x对应的函数值
> - 但通常为了叙述方便，常用$y = f(x) \quad x \in D$来表示定义在数集D上的函数，此时$f(x)$表示由它确定的函数f

2. 函数的性质

- 有界性

  > 设函数$f(x)$的定义域为D，数集$X \subset D$
  >
  > 如果存在数K_1，使得$f(x) \le K_1$对任意的$x \in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有上界，K_1是函数$f(x)$在X上的一个上界
  >
  > 如果存在数K_2，使得$f(x) \ge K_2$对任意的$x \in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有下界，K_2是函数$f(x)$在X上的一个下界
  >
  > 如果存在正数M，使得$|f(x)| \le M$对任意的$x \in X$都成立，则称函数$f(x)$在X上有界
  >
  > 如果对于任意正数M，总存在$x_1 \in X$使得$|f(x)| > M$，则称函数$f(x)$在X上无界

  > 如果对于整个定义域，上述成立，则成为全局有界/无界

  > 函数$f(x)$在X上有界 $\Leftrightarrow$ $f(x)$在X上既有上界又有下界

- 单调性

  > 设函数$f(x)$的定义域为D，区间$I \subset D$，如果对于区间I上任意两点x_1, x_2
  >
  > 当$x_1 < x_2$时，恒有$f(x_1) < f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间I上是单调递增的
  >
  > 当$x_1 < x_2$时，恒有$f(x_1) > f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间I上是单调递减的

> 单调，特指不包含等于
>
> 单调递增函数和单调递减函数统称为单调函数

- 奇偶性

  > 设函数$f(x)$的定义域为D关于原点对撑
  >
  > 如果对于任意$x \in D$，有$f(-x) = f(x)$恒成立，则称$f(x)$为偶函数，关于y轴对称
  >
  > 如果对于任意$x \in D$，有$-f(x) = f(-x)$恒成立，则称$f(x)$为奇函数，关于原点对称

  > *奇偶性不具有可加性*

- 周期性

  > 设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个正数l，使得对于任意$x \in D$，有$x \pm l \in D$，且$f(x+l) = f(x)$恒成立
  >
  > 则称函数$f(x)$为周期函数，l称为函数$f(x)$的周期

  > 通常周期函数的周期，指的是最小正周期
  >
  > - 并非每个函数都有最小正周期
  >   - 狄利克雷函数，$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^C \end{cases}$
  >   - 任何正有理数r都是周期，故而不存在最小正周期

3. 反函数和复合函数

   - 反函数

     > 设函数$f: D \to f(D)$是单射，则存在逆映射$f^{-1}: f(D) \to D$，称f^{-1}为函数f的反函数
     >
     > 对于每个$y \in f(y)$，有唯一的$x \in D$，有$f^{-1}(y) = x$

     > 反函数和其直接函数，关于$y = x$对称

     > **若直接函数是单调函数，则其反函数也是单调函数，且单调性相同**

   - 复合函数

     > 设函数$y = f(x)$的定义域为D_f，函数$u = g(x)$的定义域为D_g，且其值域$R_g \subset D_f$，则下式确定的函数
     >
     > $y = f[g(x)], \quad x \in D_g$
     >
     > 称为由函数$u = g(x)$和函数$y = f(x)$构成的复合函数，定义域为D_g

     > 构成复合函数的条件是，$\circ$右侧的函数的值域，在$\circ$左侧的函数的定义域内
     >
     > $f \circ g$要求$R_g \subset D_f$

     > $f \circ g$表示由函数$g(x)$和函数$f(x)$复合而来，按照先g后f的次序复合

4. 初等函数

   - 基本初等函数
     - 幂函数，$y = x^\mu, \mu \in R$是常数
     - 指数函数，$y = a^x$，$a > 0$且$a \neq 1$
     - 对数函数，$y = log_a(x)$，$a > 0$且$a \neq 1$
     - 三角函数，$trig(x)$

        - 反三角函数，$arctrig(x)$或$trig^{-1}(x)$
    - 初等函数

      > 通过基本初等函数，和常数，经过有限次的四则运算，和有限次的函数复合所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数

2. 数列的极限

2.1 数列极限的定义

> 数列
>
> 如果按照某一法则，对每个$n \in N_+$，对应一个确定的实数x_n，将这些实数按照下标从小到大的顺序排列得到的序列，称为数列，记为$\{x_n\}$
>
> x_n称为一般项或通项，通常用公式表示

> 数列的极限
>
> 设$\{x_n\}$是一个数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ε(不论多么小)，总存在正整数N，使得$n > N$时，不等式
>
> $|x_n - a| < \varepsilon$
>
> 都成立，那么就称**常数a是数列$\{x_n\}$的极限**，记为$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$，或**称$\{x_n\}$收敛于$a$**，记为$x_n \to a \ (n \to \infty)$
>
> - 如果不存在这样的常数a，则说明数列$\{x_n\}$是发散的，或$\lim\limits_{n \to \infty} x_n$不存在$DNE$
> - 正数ε可以任意给定是重要前提，这样$|x_n - a| < \varepsilon$才可以表达出x_n与a无限接近的意思
> - 正整数N是和ε相关的，随着ε的给定而确定

- $|x_n - a| < \varepsilon$表示的内容
    - 极限表示的是$\{x_n\}$无限接近值a，也即两者相差几乎为0，所以$|x_n - a|$任意小，因此可以使用$\forall \varepsilon > 0, \ |x_n - a| < \varepsilon$

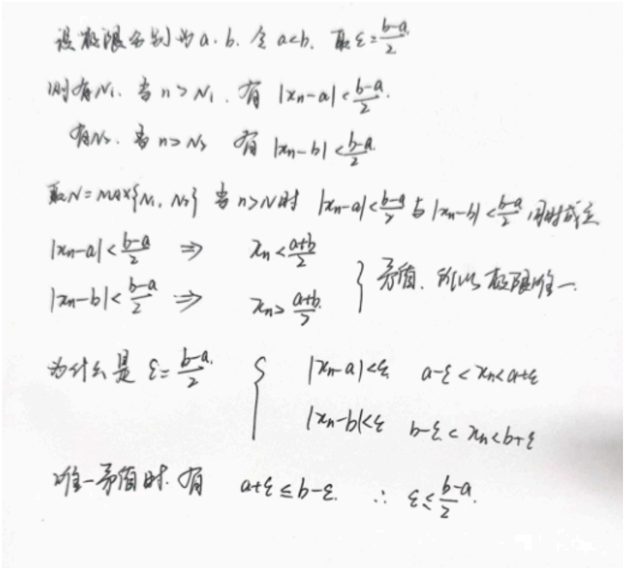
> 数列极限符号表达
>
> $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$\exists$正整数$N$，当$n > N$时，有$|x_n - a| < \varepsilon$

> 数列极限的几何意义
>
> 当$n > N$时，所有的x_n的点都落在数轴上的开区间$(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$内

2.2 收敛数列的性质

1. 极限的唯一性

   > 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么极限唯一



设极限分别为a、b，令$a<b$，取$\varepsilon=\frac{b-a}{2}$

则有N_1，当$n>N_1$，有$|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$

有N_2，当$n>N_2$ 有$|x_n-b|<\frac{b-a}{2}$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$ 当$n>N$时 $|x_n-a|<\frac{b-a}{2}$ 与 $|x_n-b|<\frac{b-a}{2}$ 同时成立

$|x_n-a|<\frac{b-a}{2} \Rightarrow x_n<\frac{a+b}{2}$

$|x_n-b|<\frac{b-a}{2} \Rightarrow x_n>\frac{a+b}{2}$

矛盾，所以极限唯一

为什么是 $\varepsilon=\frac{b-a}{2}$

$|x_n-a|<\varepsilon \quad a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$

$|x_n-b|<\varepsilon \quad b-\varepsilon<x_n<b+\varepsilon$

唯一矛盾时 有 $a+\varepsilon\le b-\varepsilon$ $\therefore \varepsilon<\frac{b-a}{2}$

2. 收敛数列的有界性

> 如果数列$\{x_n\}$收敛，那么数列$\{x_n\}$一定有界

- 数列有界的定义

  > 对于数列$\{x_n\}$，如果存在一个正整数M，使得对于一切$\{x_n\}$都满足不等式
  >
  > $|x_n| \le M$
  >
  > 则称数列$\{x_n\}$有界，如果这样的正整数M不存在，则称数列$\{x_n\}$无界

3. 收敛数列的保号性

> 如果数列$\{x_n\}$收敛于a，或$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且$a>0(或a<0)$，则存在正整数$N$，当$n>N$时，都有$x_n>0(或x_n<0)$

> 保号性推论
>
> 如果数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n \ge 0(或x_n \le 0)$，且数列$\{x_n\}$收敛于a，那么有$a \ge 0(或a \le 0)$

4. 收敛数列与其子数列间的关系

> 如果数列$\{x_n\}$收敛于a，那么他的任一子数列也收敛，且也收敛于a
>
> - 如果一个数列$\{x_n\}$的两个子数列收敛于不同值，则可知原数列$\{x_n\}$是发散的
> - 如果数列$\{x_n\}$是发散的，但其子数列可能是收敛的

- 子数列定义

  > 从数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项，且保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序，这样得到的新数列，就称为原数列$\{x_n\}$的子数列

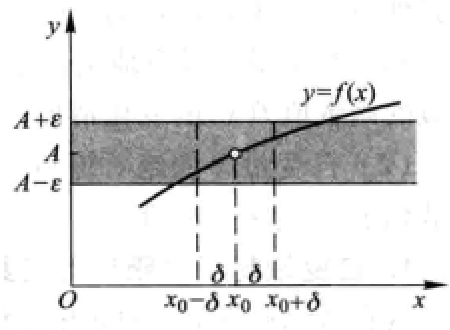
3. 函数的极限

3.1 函数极限的定义

- 自变量x趋于有限值x_0

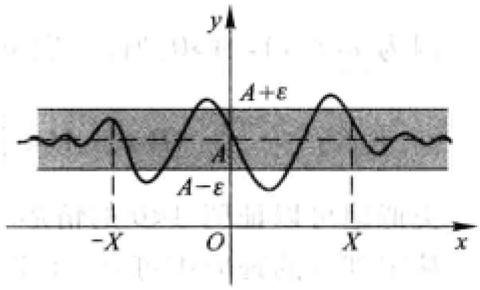
> 设函数$f(x)$在点x_0的某一***去心邻域***内有定义，如果存在常数A，对任意给定的正数ε(不论他多么小)，总存在正数δ，使得当x满足$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$**都**满足不等式
> $|f(x)-A|<\varepsilon$
> 则常数A叫做函数$f(x)$，当$x\to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，或
> $f(x)\to A$，当$x\to x_0$时

- 定义中指明$0<|x-x_0|<\delta$，说明
  - $x\neq x_0$，这说明函数在x_0处有没有极限，和$f(x)$在x_0处有无定义没有关系
  - δ表示的是x_0邻域半径，表示了x和x_0的接近程度
- $|f(x)-A|<\varepsilon$表示的内容
  - 极限表示的是$f(x)$无限接近值A，也即两者相差几乎为0，所以$|f(x)-A|$任意小，因此可以使用$\forall\varepsilon>0$，$|f(x)-A|<\varepsilon$
- δ是由ε控制的，给定了ε，就可以找到一个对应的正数δ，也因此，不需要要求δ像ε那样，有**无论多小**的限制
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的几何意义

  > - 对于给定的常数A和任意正数ε，在y轴做两条平行于x轴的水平线，在水平线之间的区域，就是我们希望接近于A的范围
  > - 根据给定的范围，在点x_0附近可以找到一个δ邻域，$(x-\delta,x+\delta)$，此处说明δ是由ε控制的
  > - 因此当函数$f(x)$上的点，其横坐标落到$(x-\delta,x+delta)$且$x\neq x_0$时，这些点的纵坐标就会落在水平线区域内，也即满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$
  >
  > 
  >

- 单侧极限
  - 左右极限统称为单侧极限
  - 左极限
    - > 设函数$f(x)$在点x_0的某一***去心邻域***内有定义，如果存在常数A，对任意给定的正数ε(不论他多么小)，总存在正数δ，使得当x满足$-\delta<x-x_0<0$时，对应的函数值$f(x)$**都**满足不等式
      > $|f(x)-A|<\varepsilon$
      > 则常数A叫做函数$f(x)$，当$x\to x_0^-$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，或
      > $f(x)\to A$，当$x\to x_0^-$时
  - 右极限

- > 设函数$f(x)$在点x_0的某一***去心邻域***内有定义，如果存在常数A，对任意给定的正数ε(不论他多么小)，总存在正数δ，使得当x满足$0 < x - x_0 < \delta$时，对应的函数值$f(x)$**都**满足不等式
  >
  > $|f(x) - A| < \varepsilon$
  >
  > 则常数A叫做函数$f(x)$，当$x \to x_0^+$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$，或
  >
  > $f(x) \to A$，当$x \to x_0^+$时

- 函数$f(x)$，在$x \to x_0$时极限存在的充要条件是：**左右极限存在且相等**
- 自变量x的绝对值$|x|$趋于无穷大
  - > 设函数$f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数A，对任意给定的正数ε(不论他多么小)，总存在正数X，使得当$|x| > X$时，对应的函数值$f(x)$都满足不等式
    >
    > $|f(x) - A| < \varepsilon$
    >
    > 那么常数A叫做函数$f(x)$，当$x \to \infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$，或
    >
    > $f(x) \to A$，当$x \to \infty$时
  - $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$的几何意义
    > - 对于给定的常数A和任意正数ε，在y轴做两条平行于x轴的水平线，在水平线之间的区域，就是我们希望接近于A的范围
    > - 根据ε可以找到一个正数X，使得对于所有$|x| > X$，函数$f(x)$的值都会落在水平线之间的区域
    >
    > 
    >

3.2 函数极限的性质

> 仅给出$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$的形式，但对$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$也成立

1. 函数极限唯一性

   > 如果函数极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$存在，那么极限唯一

2. 函数极限局部有界性

   > 如果函数极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$存在，那么存在正常数$M$和$\delta$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，$|f(x)| \le M$

3. 函数极限局部保号性

   > 如果函数极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且$A > 0$(，或$A < 0$)，那么存在正常数$\delta$，使得当$0 < |x - x_0| < \delta$时，$f(x) > 0$，或$f(x) < 0$

   > 如果函数极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且$A \neq 0$，那么就存在$x_0$的某一去心邻域$\mathring{U}(x_0)$

> 当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$时，有$|f(x)| > \frac{|A|}{2}$

> 如果在x_0的某个去心邻域内$f(x) \geq 0$，或有$f(x) \leq 0$，且当$x \to x_0$时，且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，那么$A \geq 0$，或$A \leq 0$

4. 函数极限与数列极限的关系

> 如果函数极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$存在，$\{x_n\}$为函数$f(x)$的定义域内，任意收敛于$x_0$的数列，且满足$x_n \neq x_0$
>
> 那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

4. 无穷大和无穷小

> 无穷大/无穷小，指的均是函数，而不是具体的值

- 无穷小

  > 如果函数$f(x)$当$x \to x_0$，或$x \to \infty$时的极限为0，那么称函数$f(x)$为当$x \to x_0$，或$x \to \infty$时的无穷小

  - 无穷小QA
    - Q: 为什么0是无穷小而不是负数?
      - A: 根据无穷小的定义可知，是当自变量$x \to x_0$或$x \to \infty$时，函数的极限为0，根据极限的定义，极限为0是指$|f(x) - 0| < \varepsilon$，也即$|f(x)| < \varepsilon$，含有绝对值，因此以0为无穷小的标准
    - Q: 无穷小是值还是函数?
      - A: 无穷小是函数，具体的值，无法体现对任意的ε，都有$|f(x)| < \epsilon$
  - **无穷小与极限存在**

    > *在自变量的同一变化过程*$x \to x_0$，或$x \to \infty$中，函数$f(x)$具有极限A的充要条件是，$f(x) = A + \alpha$，α是无穷小

- 无穷大

  > 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义)，如果对于任意给定的正数M(无论M多么大)，总存在正数δ，(或正数X)，只要x适合不等式$0 < |x - x_0| < \delta$ (或$|x| > X$)，对应的函数值总满足不等式
  >
  > $|f(x)| > M$
  >
  > 那么称函数$f(x)$为当$x \to x_0$，或$x \to \infty$时的无穷大

  > 按照极限定义，无穷大的函数，极限是不存在的，但为了叙述方便，也可以称函数的极限是无穷大，$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$，或，$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

  - **无穷大与无穷小**

    > *在自变量的同一变化过程*中，如果$f(x)$为无穷大，那么$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；如果$f(x)$为无穷小，且$f(x) \neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大

5. 极限运算法则

- 使用极限运算法则，可以求解部分函数的极限

- 针对$x \to x_0$和$x \to \infty$都成立

> - 定理1
>   - 两个无穷小的**和**仍是无穷小
> - 推论
>   - 有限个无穷小的和仍是无穷小

> - 定理2
>   - 有界函数与无穷小的**乘积**是无穷小
> - 推论1
>   - 常数与无穷小的乘积是无穷小
> - 推论2
>   - 有限个无穷小的乘积是无穷小

> - 定理3
>   - 如果$\lim f(x) = A$、$\lim g(x) = B$，则有
>   - $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$
>   - $\lim[f(x) \times g(x)] = \lim f(x) \times \lim g(x) = A \times B$
>   - 若$B \neq 0$，$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{A}{B}$
> - 推论1
>   - 如果$f(x)$的极限存在，而c为常数，那么$\lim[cf(x)] = c\lim f(x)$
> - 推论2
>   - 如果$f(x)$的极限存在，而n是正整数，那么$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

> - 定理4
>   - 设有数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，如果$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = A$、$\lim\limits_{n \to \infty} y_n = B$，则有
>   - $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \pm \lim\limits_{n \to \infty} y_n = A \pm B$
>   - $\lim\limits_{n \to \infty}(x_n \times y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} x_n \times \lim\limits_{n \to \infty} y_n = A \times B$
>   - 若$B \neq 0$，$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$

> - 定理5
>   - 如果$\varphi(x) \geq \psi(x)$，且$\lim \varphi(x) = A$，$\lim \psi(x) = B$，那么$A \geq B$

> - 定理6
>   - 设函数$y = f[g(x)]$是由函数$u = g(x)$和$y = f(u)$复合而来，且$f[g(x)]$在x_0的某一去心邻域内有定义
>
>   若$\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$，$\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$
>
>   且存在$\delta_0 > 0$，当$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, \delta_0)$时，有$g(x) \neq u_0$，那么
>
> $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$

- 极限求解方法 之一

> 涉及多项式，和有理分式的极限

- 当$x \to x_0$时
  - 如果是多项式函数的极限，可以将x_0带入函数直接计算出极限
  - 如果是有理分式的极限，且分母带入x_0后不为0，可以将x_0带入函数直接计算出极限
    - 如果分母为0
      - 先考虑约分是否可以计算出极限
      - 再考虑如果分母为0，分子不为0，则其倒数的极限为0，也即无穷小，根据无穷小的性质，可推断原有理分式极限为∞
      - 都不可以考虑其他方法
- 当$x \to \infty$时
  - 如果是有理分式的极限，根据分子分母中，系数非零的最高次项的次数，进行判断
    - 分子次数 $<$ 分母次数，极限为0
    - 分子次数 $=$ 分母次数，极限为分子分母中最高次项的系数之比
    - 分子次数 $>$ 分母次数，极限为∞

6. 极限存在准则 与 两个重要极限

1. 准则一　　**夹逼定理**

> 如果数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$满足以下条件
>
> - 从某项起，即$\exists n_0 \in \mathbb{N}^+$，当$n > n_0$时，有$\{y_n\} \le \{x_n\} \le \{z_n\}$
> - $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$
>
> 那么数列$\{x_n\}$的极限存在，且也为a

> 如果函数$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$满足以下条件
>
> - 对$x \in \overset{\circ}{U}(x_0, r)$(或$|x| > X$)，有$g(x) \le f(x) \le h(x)$
> - $\lim\limits_{n\to\infty} g(x) = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} h(x) = A$ 或 $\lim\limits_{n\to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{n\to x_0} h(x) = A$
>
> 那么函数$f(x)$的极限存在，且也为A

2. 准则二　　**单调有界数列必有极限**

   充分条件

> 如果数列$\{x_n\}$单调且有界，那么数列$\{x_n\}$一定有极限，也即一定收敛
>
> *此处的单调是广义的，包含等号*

> 设函数$f(x)$在点x_0的某个左邻域内单调且有界，则$f(x)$在x_0的左极限必定存在
>
> 设函数$f(x)$在点x_0的某个右邻域内单调且有界，则$f(x)$在x_0的右极限必定存在
>
> 设X是任意大的正数，函数$f(x)$在$x > X$的区间上单调且有界，则$f(x)$在$x \to +\infty$的极限必定存在
>
> 设X是任意大的正数，函数$f(x)$在$x < -X$的区间上单调且有界，则$f(x)$在$x \to -\infty$的极限必定存在

3. 柯西极限存在准则(柯西审敛原理)

> 数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是：
> 对于任意给定的正数ε，存在正整数N，使得当$n > N$， $n > N$时，有
> $|x_n - x_m| < \varepsilon$
> 可以推广到函数极限存在的充要条件

- 两个重要极限
  - $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$
  - $\lim\limits_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$
    - 更一般的形式
      - $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$
      - $\lim\limits_{h \to 0} (1 + hx)^{\frac{1}{h}} = e^x$

7. 无穷小比较

- 两个无穷小的和/差/积都是无穷小，但对于商，会存在等于0，∞，$c\ c \neq 0$的情形
  - 比值为0，说明分子趋于零的速度快于分母趋于零的速度
  - 比值为∞，说明分母趋于零的速度快于分子趋于零的速度
  - 比值为1，说明分子分母趋于零的速度快慢相仿
- 无穷小比值相关定理
  - α, β都是同一个自变量变化过程中的无穷小，且$\alpha \neq 0$，$\lim \frac{\beta}{\alpha}$也是同一自变量变化过程中的极限

> 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，那么就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小，记作$\beta = o(\alpha)$

> 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$，那么就说$\beta$是比$\alpha$低阶的无穷小

> 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = c\ \ c \neq 0$，那么就说$\beta$与$\alpha$同阶的无穷小

> 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c\ \ c \neq 0,\ \ k > 0$，那么就说$\beta$是关于$\alpha$的$k$阶无穷小

> 如果$\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，那么就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记作$\beta \sim \alpha$
>
> > 等价无穷小具有如下性质
> >
> > - 自反性，$\alpha \sim \alpha$
> > - 对称性，若$\alpha \sim \beta$， 则$\beta \sim \alpha$
> > - 传递性，若$\alpha \sim \beta$，$\beta \sim \gamma$，则$\alpha \sim \gamma$

- 定理一：

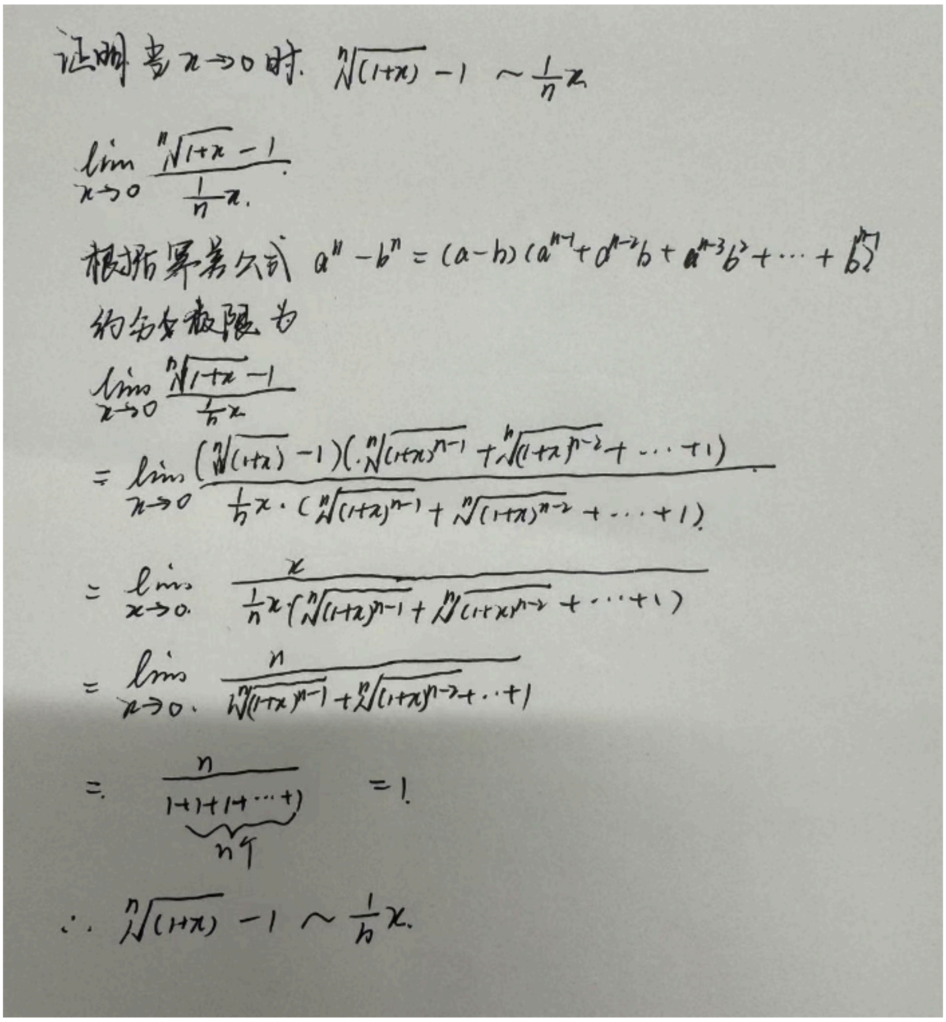
> β和α是等价无穷小的充要条件是，$\beta = \alpha + o(\alpha)$

- 定理二：

> 设$\alpha \sim \widetilde{\alpha}$，$\beta \sim \widetilde{\beta}$， 且极限$\lim \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}$存在，则
>
> $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\widetilde{\beta}}{\widetilde{\alpha}}$

- 常见等价无穷小

> 当$x \to 0$时有如下等价无穷下

- $sin(x) \sim x$
- $tan(x) \sim x$
- $arcsin(x) \sim x$
- $arctan(x) \sim x$
- $1-cos(x) \sim \frac{1}{2}x^2$
- $sec(x)-1 \sim \frac{1}{2}x^2$
- $e^x-1 \sim x$
- $a^x-1 \sim xln(a)$
- $\sqrt[n]{1+x}-1 \sim \frac{1}{n}x$
  - 证明过程
    - 

证明当$x \to 0$时. $\sqrt[n]{(1+x)}-1 \sim \frac{1}{n}x$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$$

根据幂差公式 $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1})$

约分分母极限为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[n]{(1+x)}-1)(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}{\frac{1}{n}x\cdot(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\frac{1}{n}x(\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{n}{\sqrt[n]{(1+x)^{n-1}}+\sqrt[n]{(1+x)^{n-2}}+\cdots+1}$$

$$=\frac{n}{\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{n个}}=1$$

$\therefore \sqrt[n]{(1+x)}-1 \sim \frac{1}{n}x$

8. 函数的连续性和间断点

- 增量变量的描述
  - 变量从一个初值变到终值，终值与初值的差就叫做变量的增量，记作Δx，变量可任取
  - 设函数$f(x)$在x_0的某邻域内是有定义的，则，函数的增量，指的是自变量x在该邻域内，从x_0变到$x_0+\Delta x$时，函数值$f(x)$相应的从$f(x_0)$变到$f(x_0+\Delta x)$，将此变化记为$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$
- 在某点x_0处连续
  - 增量表示法

> 设函数$f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，如果$\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=0$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$连续

- 函数表示法

  > 设函数$f(x)$在点x_0的某一领域内有定义，如果$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$连续

  - 变化过程：
    - 令$x=x_0+\Delta x$，所以当$\Delta x \to 0$，意味着$x \to x_0$
    - $\Delta y=f(x)-f(x_0)$，所以有$f(x)=f(x_0)+\Delta y$，所以当$\Delta y \to 0$，意味着$f(x) \to f(x_0)$
- $\varepsilon-\delta$表示法

  > $f(x)$在点x_0处连续$\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

- 左右连续

  > 左连续
  >
  > 如果$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=f(x_0^-)$存在，且等于$f(x_0)$，那么就说函数$f(x)$在点$x_0$处左连续

  > 右连续
  > 如果$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)=f(x_0^+)$存在，且等于$f(x_0)$，那么就说函数$f(x)$在点$x_0$处右连续

- 连续的三个条件
  - 函数在x_0有定义
  - 函数当想$x \to x_0$的极限存在
  - 函数值与极限值相等
- 连续的几何意义
  - 函数图像在x_0的某一邻域内，是连成一片的，没有跳跃，空洞或断裂
  - 可以从左到右画过x_0点，不需要抬笔

- 在区间上连续

  > 在区间上每个点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数
  >
  > 如果区间包括端点，则说，在左端点上连续，指的是右连续，在右端点上连续，指的是左连续

  - 几何意义
    - 区间上连续的函数的图像，是一条连续而不间断的曲线
- 函数的间断点

  > 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，在此前提下，如果函数$f(x)$有下述情况之一，则函数$f(x)$在点x_0处不连续，点x_0称为函数$f(x)$的不连续点或间断点
  >
  > - 在$x=x_0$处无定义
  > - 在$x=x_0$处虽有定义，但极限$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在

> - 在$x=x_0$处虽有定义，且极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$虽存在，但极限值不等于函数值，也即$\lim_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$

- 间断点分类
  - 第一类间断点，左右极限存在，但不满足连续性条件
    - 可去间断点，指的是左右极限存在且相等，但函数值未定义或不等于极限，可通过重新定义函数在该点的值来消除不连续
      - $y=\frac{x^2-1}{x-1}$，在点$x=1$无定义，左右极限存在且相等，因此可以补充定义，消除不连续，所以点$x=1$是$y=\frac{x^2-1}{x-1}$的可去间断点
    - 跳跃间断点，指的是左右极限存在，但不相等，函数值可以定义也可以未定义
      - $f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1 & x>0.\end{cases}$，在点$x=0$处左右极限存在但不相等，且产生了跳跃现象，因此$x=0$是$f(x)$的跳跃间断点
  - 第二类间断点，除了第一类的间断点外都称为第二类间断点，也即左右极限至少一个不存在
    - 无穷间断点，左右极限中至少一个趋于无穷
      - $y=tan(x)$，点$x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ k\in\mathbb{Z}$是$y=tan(x)$的无穷间断点
    - 震荡间断点，左右极限不存在，且函数无限震荡
      - $y=sin(\frac{1}{x})$，点$x=0$是函数的震荡间断点，因为在$x=0$处无定义，且函数值在$[-1,1]$之间无限震荡

9. 连续函数的运算 与 初等函数的连续性

- 连续函数的和/差/积/商的连续性

> 设函数$f(x)$和$g(x)$在点x_0处连续，则他们的和差$f\pm g$，积$f\times g$，商$\frac{f}{g}(g(x_0)\neq 0)$也都在点$x_0$处连续

- 反函数和复合函数的连续性
  - 反函数的连续性

  > 如果函数$f(x)$在区间I上单调递增或递减，且连续，那么其反函数$f^{-1}(x)$在对应的区间$I_y=y|y=f(x)$，$x\in I_x$上单调递增或递减，且连续

  - 连续的复合函数求极限

  > 设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$和$y=f(u)$复合而来，$\overset{\circ}{U}(x_0)\subset I_{f\circ g}$，若$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$处连续，则有
  > $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=\lim_{u\to u_0} f(u)=f(u_0)$
  >
  > > 说明对连续的符合函数求极限时，可以做代换$u=g(x)$，那么复合函数求极限就变换为了求$\lim_{u\to u_0} f(u)$，其中$u=u_0$
  >
  > 或
  > $\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f[\lim_{x\to x_0} g(x)]$

> > 说明对连续的符合函数求极限时，函数符号f可以与连续符号$\displaystyle \lim_{x \to x_0}做交换

- 复合函数连续性传导

  > 设函数$y=f[g(x)]$是由函数$u=g(x)$和$y=f(u)$复合而来，$U(x_0)\subset I_{f\circ g}$，若函数$g(x)$在$x=x_0$处连续，且$u_0=g(u)$，而函数$y=f(u)$在$u=u_0$处连续，则有复合函数$y=f[g(x)]$在$x=x_0$处连续

- 初等函数的连续性

> 基本初等函数，在其定义域内，都是连续的

> 一切初等函数，在其定义区间内，都是连续的

10. 闭区间上连续函数的性质

- 函数在闭区间上连续

> 函数在开区间(a,b)内连续，在右端点b左连续，在左端点a右连续，则说函数在闭区间$[a,b]$上连续

10.1 有界性与最大值、最小值定理

- 最大值、最小值概念

> 设函数$f(x)$在区间I上有定义，如果有$x_0\in I$，对于任一$x\in I$都有
>
> $f(x)\le f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数在区间I上的最大值
>
> $f(x)\ge f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数在区间I上的最小值

- 根据定义，*线性函数在开区间(a,b)内是没有最大值、最小值的*，因为可以无限趋近于端点找到任一小的或者大的值

- 有界性与最值定理

> 在闭区间上连续的函数，在该闭区间上有界，且一定能取到该函数的最大值和最小值

- 注意：
  - 闭区间上连续，意味着没有任何间断点
  - 如果在开区间内连续，或在闭区间上有间断点，那么函数在该区间不一定有界，也不一定有最大值、最小值
    - $y=tan(x)$在开区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$内连续，但函数在该开区间内无界，且无最大值、最小值
    - $y=\begin{cases}-x+1, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ -x+3, & 1<x\le 2.\end{cases}$ 在闭区间$[0,2]$上有间断点$x=1$，因此虽然该函数在闭区间$[0,2]$上有界，但是没有最大值最小值

10.2 零点定理与介值定理

- 零点定理

> 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)$和$f(b)$异号，也即$f(a)\cdot f(b)<0$，在开区间(a,b)内，至少有一个点ξ，使得
>
> $f(\xi)=0$

- 介值定理

> 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a) \neq f(b)$，若$f(a)=A$，$f(b)=B$，则对于A与B之间的任一个数C，在开区间(a,b)内，至少有一个点ξ，使得
> $f(\xi)=C$，$(a<\xi<b)$

- 推论

> 在闭区间上连续的函数$f(x)$的值域，为闭区间$[m,M]$，其中，m与M依次是函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上的最小值和最大值

10.3 一致连续性

- 一致连续性

> 设函数$f(x)$在区间I上有定义，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于区间I上任意两点x_1、x_2，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有
> $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，
> 那么称函数$f(x)$在区间I上一致连续

  - 一致连续时，δ只与任意给定的ε有关，而与具体的点无关
    - 一致连续是普通连续的加强形式
    - 一致连续性表明，函数的连续性在整个区间上是均匀的，也即，函数值的变化不会因为某些点的位置而变得过于激烈
  - 普通连续时，δ不仅与任意给定的ε有关，还与具体的点x_0有关
- 一致连续性定理

> 如果函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，那么它在该区间上一致连续

- 函数的Lipschitz条件-利普希茨条件

> 设函数$f(x)$对于闭区间$[a,b]$上任意两点x_1，x_2，恒有$|f(x_1)-f(x_2)|<L|x_1-x_2|$，其中$L$为正常数，则函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，其实一致连续

→ 函数的 Lipschitz 条件 → 一致连续.

6. 设 $f(x)$ 对闭区间 $[a,b]$ 上任两点 x, y 满足 $|f(x)-f(y)| \le L|x-y|$. L 为正常数. 且 $f(a)\cdot f(b)<0$. 证: 至少有一点 $\xi \in (a,b)$ 有 $f(\xi)=0$

证: 任取 $x_0 \in (a,b)$. $\forall \varepsilon>0$. 取 $\delta \le \mathrm{MIN}\{\frac{\varepsilon}{L}, x_0-a, b-x_0\}$.

δ 取三者最小的原因:

当 x_0 趋于 a 或 b. 如果只取 $\frac{\varepsilon}{L}$, 会导致超出定义域

则由定义可知. 当 $|x-x_0|<\delta$ 时. 有.

$|f(x)-f(x_0)| \le L|x-x_0| \le L\delta$

考虑 $L\delta$ 与 ε 的关系.

若 δ 取 $\frac{\varepsilon}{L}$. 则 $L\delta=\varepsilon$.

若 δ 不取 $\frac{\varepsilon}{L}$. 则 $L\delta < L\cdot\frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$.

$\therefore |f(x)-f(x_0)| \le L|x-x_0| < L\delta \le \varepsilon$.

$\therefore f(x)$ 在 x_0 连续. 又 $\because x_0$ 的任意性. $\therefore f(x)$ 在 (a,b) 内连续

当 $x_0=a$. 或 $x_0=b$. 取 $\delta=\frac{\varepsilon}{L}$. 则 $x\in[a,a+\delta)$, 或 $(b-\delta,b]$

则 $|f(x)-f(a)| \le L|x-a| < L\delta = \varepsilon$.

$x_0=b$ 同理.

$\therefore f(x)$ 在 a, 和 b 上连续. $\therefore f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续.

$\therefore$ 零点定理可证至少有一点 ξ, 使 $f(\xi)=0$. $\xi\in(a,b)$