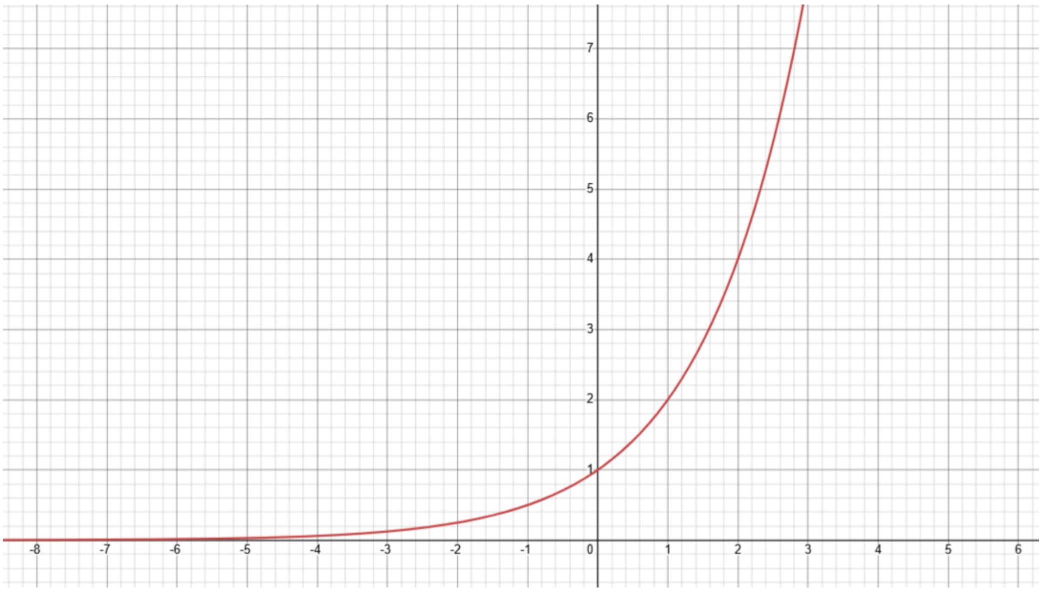
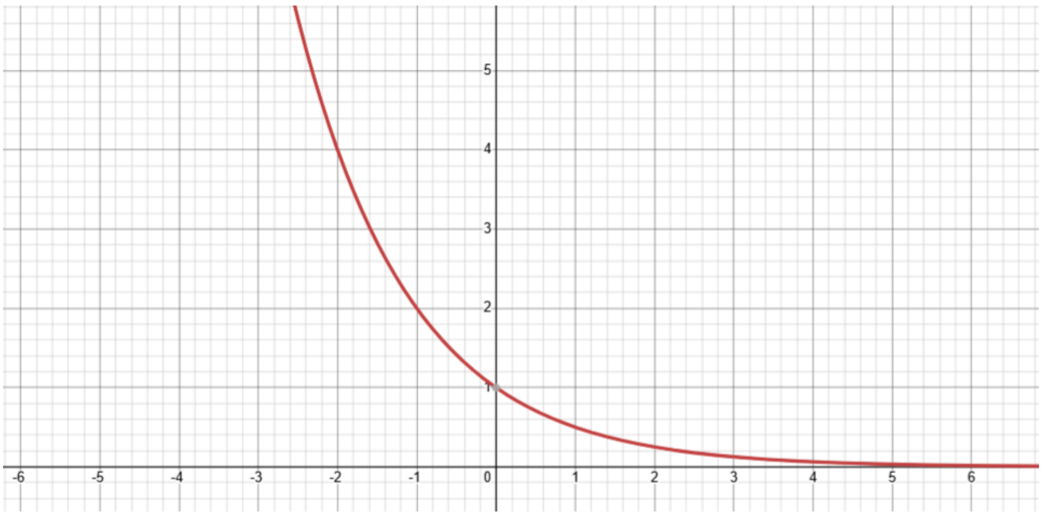
# 1. 基础知识

## 1.1 指数函数

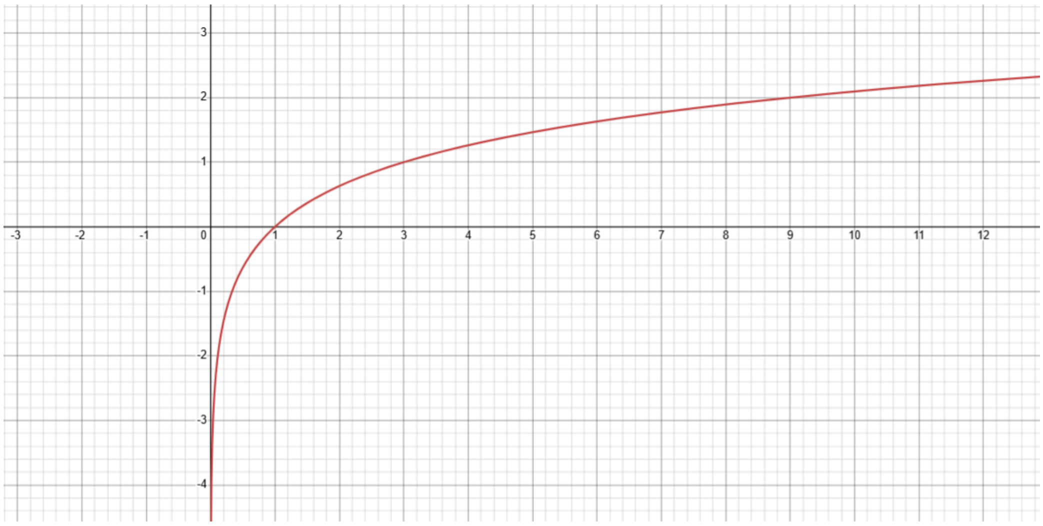
> 形如$f(x) = a^x \quad a > 0$的函数被称为指数函数

- 指数函数法则:
  - $a^0 = 1$
  - $a^1 = a$
  - $a^x a^y = a^{x+y}$
  - $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
  - $(a^x)^y = a^{xy}$
- 指数函数图像 恒在$x$轴上方
  - 当$a > 1$时
    - 

  - 当$a = 1$时
    - 恒为$y = 1$
  - 当$0 < a < 1$时
    - 

## 1.2 对数函数

> 形如$f(x) = log_a(x) \quad a>0$且$a \neq 1, x>0$的函数称为对数函数

- 对数函数法则：
  - $log_a(1) = 0$
  - $log_a(a) = 1$
  - $log_a(xy) = log_a(a) + log_a(b)$
  - $log_a(x/y) = log_a(x) - log_a(y)$
  - $log_a(x^y) = ylog_a(x)$
  - $log_a(x) = \frac{log_c(x)}{log_c(a)}$
- 对数函数图像 恒在$y$轴右侧
  - 当$a>1$时
    - 

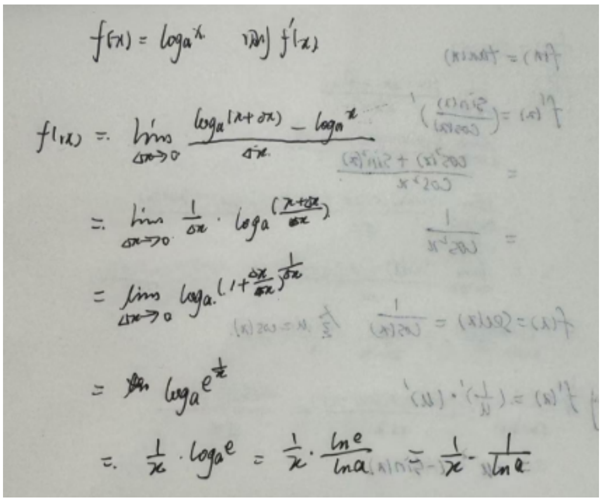
  - 当$0<a<1$时
    - 


# 2. 关于自然底数$e$的两个重要极限

> - $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$
> - $\lim\limits_{h\to 0}(1+hx)^{\frac{1}{h}} = e^x$

# 3. 对数函数和指数函数求导

> $f(x) = log_a(x)$的导数为$\frac{1}{xln(a)}$
>
> $f(x) = a^x$的导数为$a^x ln(a)$



$f(x) = \log_a x$ 则 $f'(x)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

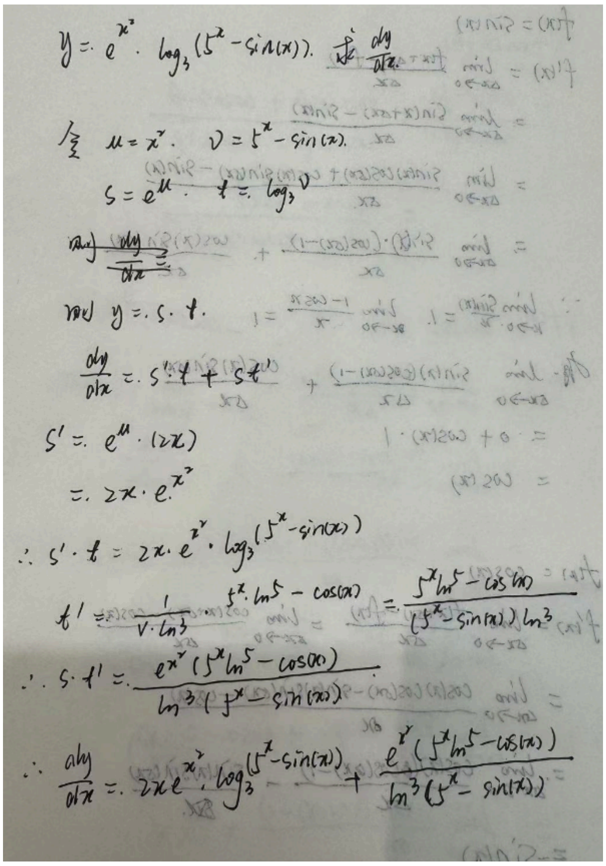
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

$$= \log_a e^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a e = \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

- 例，求$y = e^{x^2} log_3(5^x - sin(x))$的导数



$y = e^{x^2} \cdot \log_3(5^x - \sin(x))$. 求 $\frac{dy}{dx}$

令 $u = x^2$. $v = 5^x - \sin(x)$.

$s = e^u$. $t = \log_3 v$

则 $y = s \cdot t$.

$$\frac{dy}{dx} = s' t + s t'$$

$$s' = e^u \cdot (2x) = 2x \cdot e^{x^2}$$

$$\therefore s' \cdot t = 2x \cdot e^{x^2} \cdot \log_3(5^x - \sin(x))$$

$$t' = \frac{1}{v \cdot \ln 3} \cdot (5^x \cdot \ln 5 - \cos(x)) = \frac{5^x \ln 5 - \cos(x)}{(5^x - \sin(x)) \ln 3}$$

$$\therefore s \cdot t' = \frac{e^{x^2}(5^x \ln 5 - \cos(x))}{\ln 3 \, (5^x - \sin(x))}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x e^{x^2} \cdot \log_3(5^x - \sin(x)) + \frac{e^{x^2}(5^x \ln 5 - \cos(x))}{\ln 3 \, (5^x - \sin(x))}$$

# 4. 对数函数和指数函数的极限

## 4.1 指数函数

### 4.1.1 指数趋于0时的极限

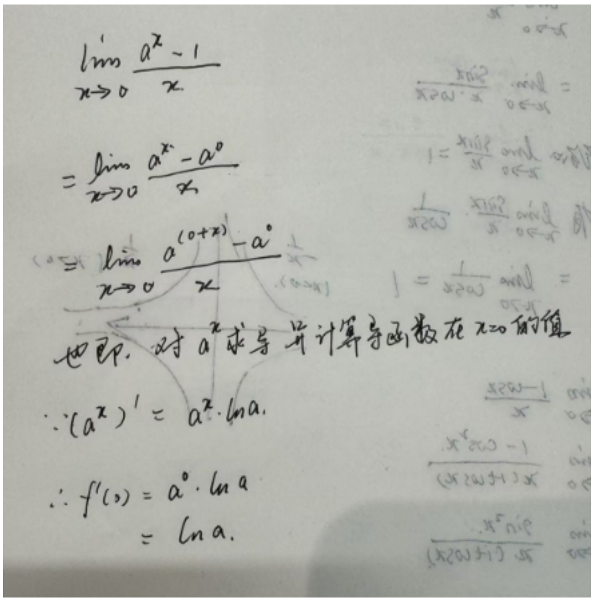
> 指数函数$a^x$当$x$趋近于0时，函数极限为1，也即$\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$

> 需要注意的时，类似三角函数判断是大数还是小数一样，不能单纯的依靠$x \to 0$或$x \to \infty$来判断指数趋近于0，而是要依靠指数的表达式的结果

因此当指数函数本身作为乘法或除法的因子时，可利用该极限进行拆分以便于计算

但是当指数函数作为加减项时，则一般情况下无法拆分，可考虑其他方法

- 重要极限：
  - > $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = ln(a)$
    > 特别的，如果$a = e$，则有
    > $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$
  - 证明




### 4.1.2 指数趋于$\pm\infty$的极限

- $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} r^x = \begin{cases} \infty & r > 1 \\ 1 & r = 1 \\ 0 & 0 \le r < 1 \end{cases}$$

- $x \to -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} r^x = \begin{cases} 0 & r > 1 \\ 1 & r = 1 \\ 0 & \infty \le r < 1 \end{cases}$$

### 4.1.3 指数函数与$x^n$在无穷位置的增长率

- 结论1：
  - 不论$n$有多大，指数函数的趋于无穷的速度都快于多项式函数，也即形如$x^n$的函数
- 结论2：
  - 不论$n$有多大，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x}=0$
- 结论3：
  - $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\text{多项式函数}}{\text{指数为正的大的多项式型的指数函数}}=0$

## 4.2 对数函数 *以下对数函数的底数默认大于1*

### 4.2.1 对数函数在1附近的极限

> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{log_a(x+1)}{x}=\frac{1}{ln(a)}$
>
> 特别的，如果$a=e$，则有
>
> $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(x+1)}{x}=1$
>
> > 证明关键点在于 1）$log_a(1)=0$ 2）求极限实际为求导数

### 4.2.2 对数函数在无穷附近的极限

> $\lim\limits_{x\to\infty}log_a x=\infty$

因为对数函数在$y$轴右侧，所以不需要考虑$-\infty$的情况

### 4.2.3 函数与$x^n$在无穷位置的增长率

- 结论1：
  - 无论$a$有多小，只要$a>0$，对数函数趋于无穷的速度都要慢于$x^a$
- 结论2：
  - 无论$a$有多小，都有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{log_c(x)}{x^a}=0$
- 结论3：
  - 无论$a$有多小，都有$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\text{任何正的多项式型的对数函数}}{\text{具有正次幂的多项式型}}=0$

### 4.2.4 对数函数在0附近的极限

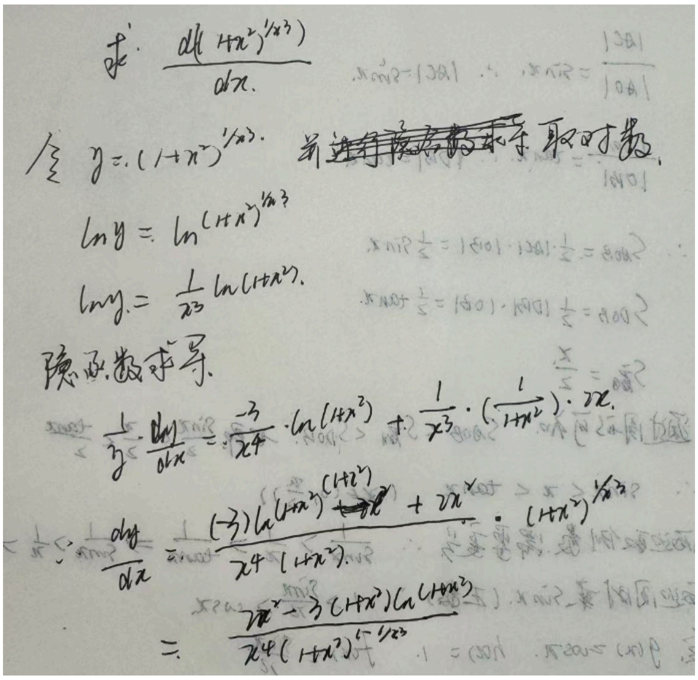
- 结论
  - 对数函数在0附近的增长率较慢，无论$a$有多小，只要$a>0$，都有$\lim\limits_{x\to 0^+}x^a ln(x)=0$
  - 也即，无论$a$有多小，都有
    $\lim\limits_{x\to 0^+}(\text{任何真数趋于0的对数函数})(\text{具有正次幂的非常小的多项式型})=0$

# 5. 取对数求导法

取对数求导，是指针对于形如$y=f(x)^{g(x)}$的函数，或者，涉及到幂函数和指数函数的积和商的函数，进行求导，基本步骤为：

1. 对等式两边进行取(自然)对数，这样指数位置的$g(x)$可以移下来
2. 对等号两边进行隐函数求导，左边的结果总是$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$，右边则是乘积法则，或链式求导法则
3. 对等号两边同时乘以$y$，得到单独的$\frac{dy}{dx}$，并用原始的$f(x)^{g(x)}$替换$y$

- 例1，求$\frac{d((1+x^2)^{\frac{1}{x^3}})}{dx}$



求: $\frac{d(1+x^2)^{1/x^3}}{dx}$

令 $y=(1+x^2)^{1/x^3}$. 并~~进行隐函数求导~~取对数

$\ln y = \ln(1+x^2)^{1/x^3}$

$\ln y = \frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)$

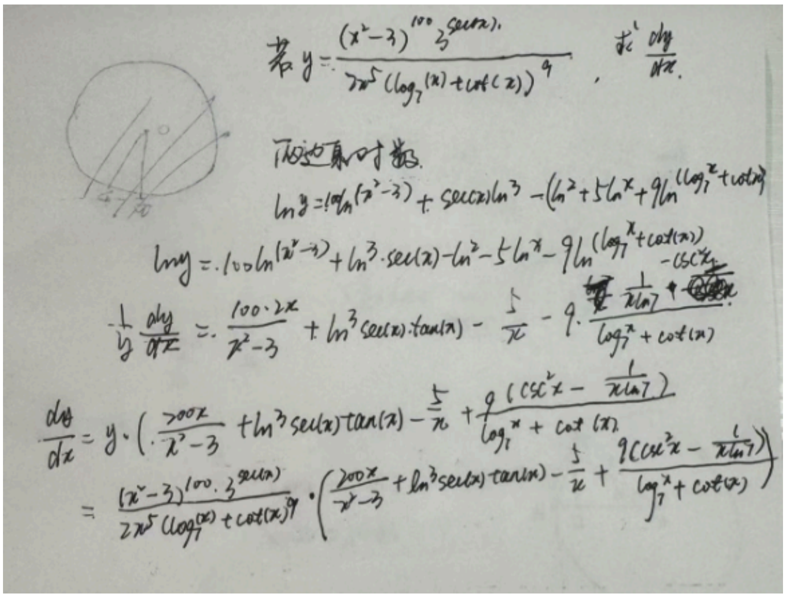
隐函数求导

$\frac{1}{y}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{-3}{x^4}\cdot\ln(1+x^2) + \frac{1}{x^3}\cdot\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot 2x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(-3)\ln(1+x^2)(1+x^2)+2x^2}{x^4(1+x^2)}\cdot(1+x^2)^{1/x^3}$

$= \frac{2x^2-3(1+x^2)\ln(1+x^2)}{x^4(1+x^2)^{1-1/x^3}}$

- 例2，若$y=\frac{(x^2-3)^{100}3^{sec(x)}}{2x^5(log_7(x)-cot(x))^9}$，求$\frac{dy}{dx}$



若 $y=\frac{(x^2-3)^{100}3^{sec(x)}}{2x^5(\log_7(x)+cot(x))^9}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

两边取对数

$\ln y = 100\ln(x^2-3) + sec(x)\ln 3 - (\ln 2 + 5\ln x + 9\ln(\log_7 x + cot x))$

$\ln y = 100\ln(x^2-3) + \ln 3\cdot sec(x) - \ln 2 - 5\ln x - 9\ln(\log_7 x+cot(x))$

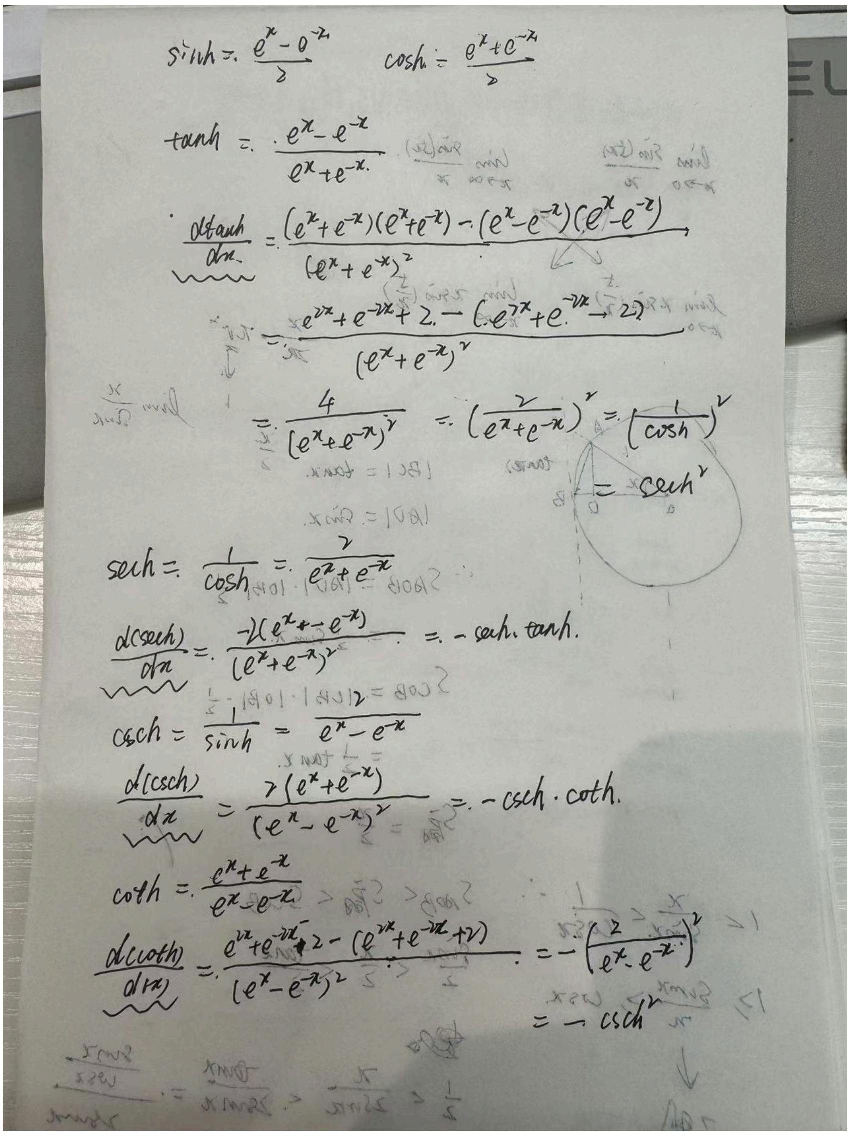
$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{100\cdot 2x}{x^2-3} + \ln 3\, sec(x)tan(x) - \frac{5}{x} - 9\cdot\frac{\frac{1}{x\ln 7} - csc^2 x}{\log_7 x + cot(x)}$

$\frac{dy}{dx} = y\cdot\left(\frac{200x}{x^2-3} + \ln 3\, sec(x)tan(x) - \frac{5}{x} + \frac{9(csc^2 x - \frac{1}{x\ln 7})}{\log_7 x + cot(x)}\right)$

$= \frac{(x^2-3)^{100}\cdot 3^{sec(x)}}{2x^5(\log_7(x)+cot(x))^9}\cdot\left(\frac{200x}{x^2-3}+\ln 3\, sec(x)tan(x) - \frac{5}{x} + \frac{9(csc^2x-\frac{1}{x\ln 7})}{\log_7 x+cot(x)}\right)$

# 5. 双曲函数

- 双曲函数
  - 正弦双曲函数
    - $sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
  - 余弦双曲函数
    - $cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
  - 正割双曲函数
    - $sech(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$
  - 余割双曲函数
    - $csch(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$
  - 正切双曲函数
    - $tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
  - 余切双曲函数
    - $coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
- 双曲函数等式
  - $cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$
  - $1 - tanh^2(x) = sech^2(x)$
- 双曲函数导数
  - 正弦双曲函数
    - $\frac{d}{dx} sinh(x) = cosh(x)$
  - 余弦双曲函数
    - $\frac{d}{dx} cosh(x) = sinh(x)$
  - 正割双曲函数
    - $\frac{d}{dx} sech(x) = -sech(x)tanh(x)$
  - 余割双曲函数
    - $\frac{d}{dx} csch(x) = -csch(x)coth(x)$
  - 正切双曲函数
    - $\frac{d}{dx} tanh(x) = sech^2(x)$
  - 余切双曲函数
    - $\frac{d}{dx} coth(x) = -csch^2(x)$
  - 证明过程



$$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\frac{d\tanh}{dx} = \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x}) - (e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2 - (e^{2x}+e^{-2x}-2)}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2} = \left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cosh}\right)^2 = \operatorname{sech}^2$$

$$\operatorname{sech} = \frac{1}{\cosh} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$$

$$\frac{d(\operatorname{sech})}{dx} = \frac{-2(e^x - e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = -\operatorname{sech}\cdot\tanh$$

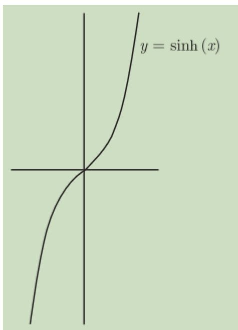
$$\operatorname{csch} = \frac{1}{\sinh} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

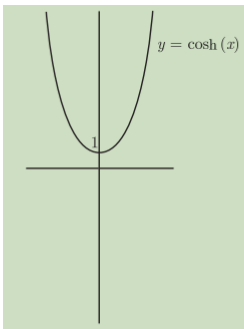
$$\frac{d(\operatorname{csch})}{dx} = \frac{-2(e^x+e^{-x})}{(e^x-e^{-x})^2} = -\operatorname{csch}\cdot\coth$$

$$\coth = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

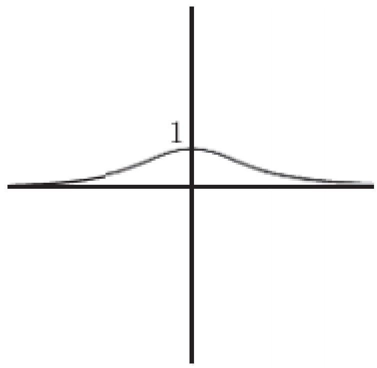
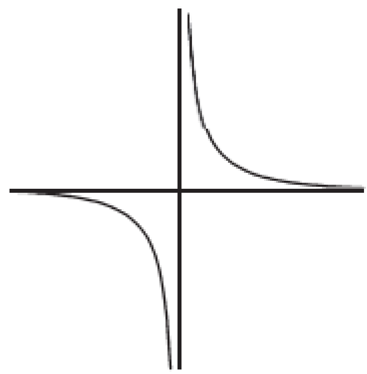
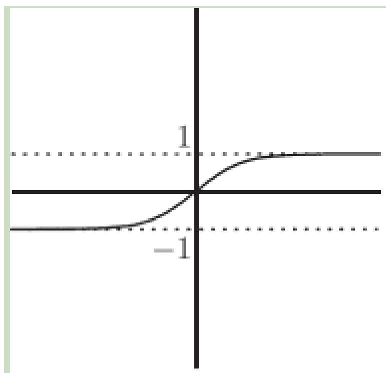
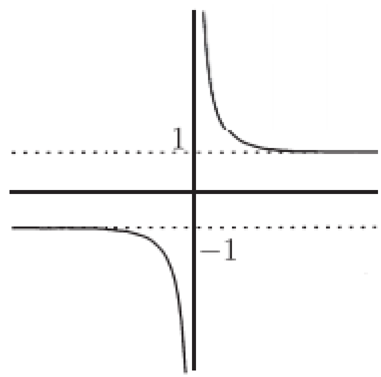
$$\frac{d(\coth)}{dx} = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2 - (e^{2x}+e^{-2x}+2)}{(e^x-e^{-x})^2} = -\left(\frac{2}{e^x-e^{-x}}\right)^2$$

$$= -\operatorname{csch}^2$$

- 双曲函数图像
    - 正弦双曲函数
        - 

    - 余弦双曲函数
        - 

    - 正割双曲函数

    - 
      
      $y = \operatorname{sech}(x)$
  - 余割双曲函数
    - 
      $y = \operatorname{csch}(x)$
  - 正切双曲函数
    - 
      
      $y = \tanh(x)$
  - 余切双曲函数
    - 
      
      $y = \coth(x)$