1. 特征值与特征向量的定义和关系

1.1 特征值和特征向量的定义

> 设A为n阶方阵，α为n维非零列向量，λ为数，若$A\alpha=\lambda\alpha$，则称λ为方阵A的特征值，α为方阵A的对应于特征值λ的特征向量

- 矩阵A必须是方阵，否则等号两边矩阵乘积后的矩阵形状不同
- 特征值λ是一个数，可能为0
- 特征向量α是非零列向量

1.2 特征值和特征向量的关系

1. 一个特征值可以对应多个特征向量

   > 若α是矩阵A对应特征值λ的特征向量，则$k\alpha\ (k\neq 0)$也是矩阵A对应特征值λ的特征向量

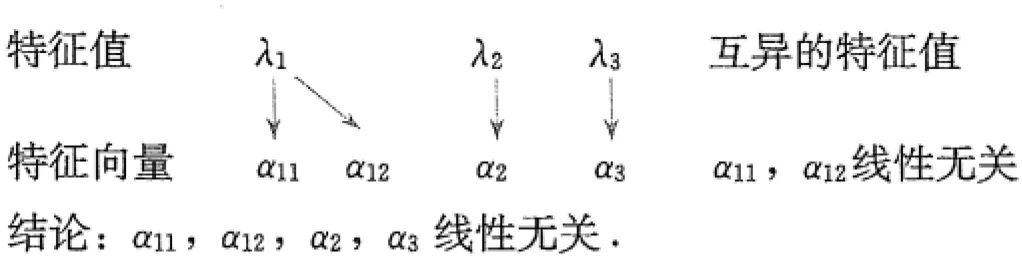
   > 给定方阵A，若α_1,α_2都是对应于特征值λ的特征向量，则$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2\neq 0$也是对应于特征值$\lambda$的特征向量

2. 一个特征向量只能对应于一个特征值

   > 给定方阵A，特征向量α只能属于一个特征值

2. 特征值与特征向量的性质

1. n阶方阵A在复数域内必有n个特征值
2. n阶矩阵A与其转置矩阵A^T有相同的特征多项式，进而有相同的特征值，但特征向量一般不同
3. 设n阶矩阵A的n个特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则
    1. $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$，其中$a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$记为$tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，称为矩阵$A$的迹
    2. $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$
4.
    1. n阶矩阵A可逆$\xLeftrightarrow{\text{充要条件}}A$的所有特征值都不为0
    2. n阶矩阵A不可逆$\xLeftrightarrow{\text{充要条件}}A$的特征值至少有一个为0
5. 矩阵A的对应于不同特征值的特征向量线性无关
6. 矩阵A的对应于不同特征值的线性无关的特征向量，合起来得到的特征向量组仍线性无关



7.
    1. 若λ是矩阵A的k重特征值，则A对应于特征值λ的线性无关的特征向量的个数不超过k个
    2. 若λ是A的单特征值，则A对应于特征值λ的线性无关的特征向量的个数有且只有1个
    3. n阶矩阵A线性无关的特征向量的个数最多为n
8. 若λ是矩阵A的特征值，对应的特征向量为α，则

矩阵	A	A^m	kA	$A+E$	$f(A)$	$A^2+2A+3E$	A^{-1}	A^*
特征值	λ	λ^m	$k\lambda$	$\lambda+1$	$f(\lambda)$	$\lambda^2+2\lambda+3$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{\lvert A\rvert}{\lambda}$
特征向量	α	α	α	α	α	α	α	α

- 推论

> 若λ是矩阵A的特征值，$f(x)$为一多项式且$f(A)=0$，则$f(\lambda)=0$

9. 设矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$且$r(A)=1$，则A的特征值为$\lambda_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$，$\lambda_2=\lambda_3=\cdots=\lambda_n=0$

3. 特征值与特征向量的求法

3.1 特征值的求法

> $A\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow\lambda\alpha-A\alpha=0\Rightarrow(\lambda E-A)\alpha=0$
>
> 因为α为非零向量，所以$(\lambda E-A)\alpha=0$有非零解，需要$|\lambda E-A|=0$
>
> 也即，求解特征值，就是求解$|\lambda E-A|=0$

1. 基本概念
   - 特征矩阵：$\lambda E-A$
   - 特征多项式：$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\alpha_{11} & -\alpha_{12} & \cdots & -\alpha_{1n}\\ -\alpha_{21} & \lambda-\alpha_{22} & \cdots & -\alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\alpha_{n1} & -\alpha_{n2} & \cdots & \lambda-\alpha_{nn}\end{vmatrix}$，也可称为特征行列式
   - 特征方程：$|\lambda E-A|=0$
   - 特征值，就是特征方程的根
   - 单特征值：指的是特征值作为特征方程的解，在解中只出现一次
   - 重特征值：指的是特征值作为特征方程的解，在解中出现多次，出现几次就叫几重特征值
2. 求解特征值的步骤
   1. 写出特征矩阵$\lambda E-A$
      - 注意，λ只在主对角线出现，A的各个元素取相反数

2. 写出特征多项式$|\lambda E - A|$
3. 解特征方程$|\lambda E - A| = 0$
    1. A为2阶矩阵，可直接计算
    2. A为对角形，上/下三角形矩阵，也可直接计算
    3. 特征行列式$|\lambda E - A|$的零元素较多，按某一行/列展开
    4. 特征行列式$|\lambda E - A|$的行和/列和相等
    5. 特征行列式$|\lambda E - A|$中有对应相等或者为相反数，可抵消

3.2 特征向量的求法

> 求特征向量，就是求齐次线性方程组$(\lambda E - A)x = 0$的非零解，其中x表示的解向量就是α

4. 相似矩阵的概念和性质

4.1 相似矩阵的概念

> 设A和B都是n阶方阵，若存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$，则称A与B相似，或称B是A的相似矩阵，记为$A \sim B$

> 特别的，如果矩阵A能与对角矩阵相似，则称A可对角化

- 相似矩阵的前提是同阶方阵
- 单位矩阵E和数量矩阵kE只能与自己相似

4.2 相似矩阵的性质

1. 相似的矩阵必等价，即$A \sim B \Rightarrow A \cong B$
    - 注意，反之不成立，即$A \cong B \nRightarrow A \sim B$
    - 进而可知，相似矩阵具有等价矩阵的三个性质
        - 反身性 $A \sim A$
        - 对称性 若$A \sim B$，则$B \sim A$
        - 传递性 若$A \sim B, B \sim C$， 则$A \sim C$
    - 常用运算表达式
        - $P^{-1}ABP = P^{-1}AEBP = P^{-1}A(PP^{-1})BP = (P^{-1}AP)(P^{-1}BP)$
        - $P^{-1}(kA + lB)P = (P^{-1}kA + P^{-1}lB)P = kP^{-1}AP + lP^{-1}BP$，其中$k, l$为任意常数
2. 若$A \sim B$，则
    1. $r(A) = r(B)$
        - 相似矩阵必等价， 等价矩阵有相同的秩
    2. A与B有相同的特征行列式，即$|\lambda E - A| = |\lambda E - B|$，进而有相同的特征值
        - 逆命题不成立，不能说有相同特征值的两个矩阵相似
    3. $|A| = |B|$，$tr(A) = tr(B)$
        - 通过第二点可证
    4. $|A|$和$|B|$同时为0，或同时不为0，且同时可逆或不可逆
    5. 当A, B均可逆时，有$A^{-1} \sim B^{-1}$，$A^* \sim B^*$
    6. $A^m \sim B^m$，其中m为正整数
    7. $A^T \sim B^T$
    8. $kA \sim kB$，$A + kE \sim B + kE$　$f(A) \sim f(B)$，其中k为常数，$f(x)$是关于x的多项式

5. 矩阵的对角化

可以通过判断矩阵是否可以对角化，使用对角矩阵研究原矩阵的一些性质

- 如何判断是否可以对角化
- 若可以对角化，求可逆矩阵P
- 求对角矩阵Λ

5.1 矩阵与对角矩阵相似的条件

n阶矩阵A可对角化$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量

若n阶矩阵A有n个互异的特征值，则A可对角化

n阶矩阵A可对角化

$\Leftrightarrow$ A的每个重特征根对应的线性无关的特征向量的个数恰好等于该特征值的重数

$\Leftrightarrow$ 对于A的任一s重特征值λ，齐次线性方程组$(\lambda E-A)x=0$的基础解系含有s个向量

$\Leftrightarrow$ 对于A的任一s重特征值λ，有$n-r(\lambda E-A)=s$

$\Leftrightarrow$ 对于A的任一s重特征值λ，有$r(\lambda E-A)=n-s$

- 判断A能否相似于对角形矩阵，以三阶矩阵为例
  1. 3阶方阵A，有3个互异的特征值，必可对角化
  2. 3阶方阵A，有二重根λ_1,λ_2和单根λ_3
     - 对于二重根λ_1,λ_2，若$(\lambda_1 E-A)x=0$的基础解系中有2个线性无关的特征向量，则可以对角化
     - 对于二重根λ_1,λ_2，若$(\lambda_1 E-A)x=0$的基础解系中有1个线性无关的特征向量，则无法对角化
  3. 3阶方阵A，有三重跟$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$
     - $(\lambda_1 E-A)x=0$的基础解系中有3个线性无关的特征向量，则可以对角化
     - $(\lambda_1 E-A)x=0$的基础解系中有2个线性无关的特征向量，则无法对角化

- $(\lambda_1 E - A)x = 0$的基础解系中有1个线性无关的特征向量，则无法对角化

5.2 可逆矩阵 P 及对角矩阵 Λ 的求法

1. 求出A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$
2. 对每一个特征值λ_i，设其重数为s_i，则对应其次线性方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$的基础解系，有s_i个向量$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{s_i}$组成，即$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{s_i}$为$\lambda_i$对应的线性无关的特征向量
3. 令$P = (\xi_{11}, \xi_{12}, \cdots, \xi_{1s_1}，\xi_{21}, \xi_{22}, \cdots, \xi_{2s_2}，\cdots，\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{is_i})$，则$P$为可逆矩阵
4. $$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & \\ & & & \lambda_2 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & \lambda_t & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & \lambda_t \end{bmatrix}$$

> 其中$\xi_{i1}, \xi_{i2}, \cdots, \xi_{is_i}$要和$\lambda_i$一一对应

5.1 矩阵对角化应用-反求矩阵 A 及 A 的高次幂

> 若矩阵A可对角化，则存在可逆矩阵P及对角矩阵Λ，有$P^{-1}AP = \Lambda$
>
> 进而有：
>
> - $A = P\Lambda P^{-1}$
> - $A^m = P\Lambda^m P^{-1}$

6. 向量的内积

6.1 向量内积

n维列向量$\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$的内积为，$(\alpha, \beta) = \alpha^T\beta = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

n维行向量 $\alpha = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n], \beta = [y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n]$的内积为

$(\alpha, \beta) = \alpha\beta^T = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$

- 性质
  1. 非负性：$(\alpha, \alpha) \geq 0$，且若$(\alpha, \alpha) = 0$，则有$\alpha = 0$
  2. 对称性：$(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$
  3. 齐次性：$(k\alpha, \beta) = k(\alpha, \beta)$
  4. 分配性：
     1. $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = (\alpha_1, \beta) + (\alpha_2, \beta)$
     2. $(\alpha, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha, \beta_1) + (\alpha, \beta_2)$
     3. $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2) = (\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_1, \beta_2) + (\alpha_2, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2)$

6.2 长度

设$\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则称$\|\alpha\| = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$为$\alpha$的长度，或称为模，范数

- 特别的，长度为1的向量称为单位向量
  - 设α为n维单位列向量，则$\alpha^T\alpha = 1$
- 向量α的单位化

> 在R^n中任一非零向量α，令$\beta=\frac{1}{\|\alpha\|}\alpha$，则$\beta$为一单位向量，该过程称为向量$\alpha$的单位化

- 性质
  - 非负性：$\|\alpha\|\geq 0$，且$\|\alpha\|=0 \Leftrightarrow \alpha=0$
  - 齐次性：$\|k\alpha\|=|k|\cdot\|\alpha\|$
  - 三角不等式：$\|\alpha+\beta\|\leq\|\alpha\|+\|\beta\|$
  - 柯西-施瓦茨不等式
    - $|(\alpha,\beta)|\leq\|\alpha\|\cdot\|\beta\|$
      - 等号成立时，α和β线性相关，也即$\alpha=k\beta$
    - 向量的内积，可以表示为$(\alpha,\beta)=\|\alpha\|\cdot\|\beta\|\cdot cos\theta$，其中$\theta$是$\alpha,\beta$的夹角
    - 几何意义：
      - 两个向量的内积的绝对值不会超过它们长度的乘积。等号成立时，两个向量方向相同或相反

> 当$\alpha\neq 0,\beta\neq 0$，称$\theta=arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\cdot\|\beta\|}\ (0\leq\theta\leq\pi)$为向量$\alpha$与$\beta$的夹角

- 规定：零向量与任意向量的夹角为$\frac{\pi}{2}$

> 当夹角$\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow cos\theta=0\Rightarrow(\alpha,\beta)=0$时，称向量$\alpha$与$\beta$正交或垂直

6.3 正交

- 向量正交

  > 若向量α和向量β的内积为0，即$(\alpha,\beta)=0$，则称向量β与β正交，记作$\alpha\perp\beta$

  - 零向量与任意向量都正交
  - *只有零向量与本身正交*
- 正交向量组

  > 两两正交的非零向量组，称为正交向量组

- 由一个零向量，组成的向量组，是正交向量组
- 标准正交向量组

> 每个向量均为单位向量的正交向量组，称为标准正交向量组，或单位正交向量组

- 性质

> 正交向量组必线性无关，反之，无法确定线性无关的向量组是正交向量组

证明：

1. 假设存在一组系数 $c_1, c_2, \ldots, c_k$，使得

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k = 0.$$

2. 对上式两边与任意一个向量 v_i 取内积：

$$\langle c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k, v_i \rangle = \langle 0, v_i \rangle.$$

3. 根据内积的线性性质，展开左边：

$$c_1 \langle v_1, v_i \rangle + c_2 \langle v_2, v_i \rangle + \cdots + c_k \langle v_k, v_i \rangle = 0.$$

4. 由于 $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 是正交向量组，$\langle v_j, v_i \rangle = 0$ 当 $j \neq i$，因此上式化简为：

$$c_i \langle v_i, v_i \rangle = 0.$$

5. 因为 $v_i \neq 0$，所以 $\langle v_i, v_i \rangle > 0$，因此：

$$c_i = 0.$$

6. 对每个 $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ 都可以进行类似推导，得到：

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0.$$

结论：

根据线性无关的定义，$\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ 是线性无关的。

- 施密特正交化方法
  - 目的：由一个线性无关的向量组，构造一个与其等价的正交向量组
  - 步骤
    - 设向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$线性无关
    1. 正交化

       令

       - $\beta_1 = \alpha_1$

- $\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1$
- $\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$
- $\cdots\cdots$
- $\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}$

> 则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$是与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的正交向量组

2. 单位化

   令

- $\gamma_1=\frac{\beta_1}{\|\beta_1\|}$
- $\gamma_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}$
- $\gamma_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}$
- $\cdots\cdots$
- $\gamma_s=\frac{\beta_s}{\|\beta_s\|}$

> 则$\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$是与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$等价的标准正交向量组

6.4 正交矩阵

> 满足$A\cdot A^T=E$的n阶矩阵A称为正交矩阵

- 性质
  1. 若A为正交矩阵，则有
     1. $A\cdot A^T=A^T\cdot A=E$
     2. $|A|=\pm1$
     3. A可逆，且$A^{-1}=A^T$
     4. A^T,A^{-1},A^*均为正交矩阵
     5. A的行向量组，列向量组均为标准正交向量组
  1. 若λ是正交矩阵A的特征值，则$\frac{1}{\lambda}$也是其特征值
  2. 若A,B均为正交矩阵，则AB也为正交矩阵

3. 保内积性
    - 若A为正交矩阵，则$(A\alpha, A\beta) = (\alpha, \beta)$
4. 保长度性
    - 若A为正交矩阵，则$\|A\alpha\| = \|\alpha\|$

7. 实对称矩阵的对角化

> 实对称矩阵一定可以对角化，对角化指的是存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = \Lambda$，其中Λ为对角矩阵

7.1 实对称矩阵的概念和性质

- 正交相似

  > 设A, B为两个n阶方阵，如果存在一个正交矩阵Q，使得$Q^{-1}AQ = B$，则称A, B正交相似

  - 正交相似的两个矩阵必定相似，反之不成立
  - 定义可改为$Q^TAQ = B$，因为Q是正交矩阵，有$Q^T = Q^{-1}$
  - 若A, B正交相似，且A为对称矩阵，则B也是对称矩阵
- 实对称矩阵

  > 所有元素均为实数的对称矩阵，称为实对称矩阵

  - 实对称矩阵的特征值和特征向量的独有性质
    1. 实对称矩阵的特征值均为实数，特征向量均为实向量
    2. 实对称矩阵的，对应于不同特征值的特征向量正交
    3. 设A为n阶实对称矩阵，则对于A的任一s重特征值λ，有$r(\lambda E - A) = n - s$

4. 实对称矩阵对应于s重特征值的线性无关的特征向量恰有s个
5. n阶实对称矩阵必有n个线性无关的特征向量
6. 实对称矩阵一定可以对角化
7. 实对称矩阵与对角矩阵正交相似

7.2 实对称矩阵的对角化

1. 求解特征值
    - 由$|\lambda E - A| = 0$，得到A的全部特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$
2. 求解特征向量
    - 对特征值λ_i，解齐次线性方程组$(\lambda_i E - A)x = 0$，得到n个线性无关的特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$
3. 构造可逆矩阵及对角矩阵
    1. 使用可逆矩阵，直接构造$P = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，则$P^{-1}AP = \Lambda$
    2. 使用正交矩阵
        1. 正交化：将特征向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$正交化得到$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$
            - 如果特征向量已经正交，则不需要额外的正交化步骤，否则需要正交化
        2. 单位化：将正交化向量组$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$单位化得到$\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$，则正交矩阵$Q = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)$，有$Q^{-1}AQ = \Lambda$