1. 隐函数求导

1.1 隐函数概念

- 显函数，指的是因变量y**直接表示**为自变量x的函数，也即$y = f(x)$，且显函数对于任意一个定义域内的x，都只有唯一的值对应，也即具有**单值性**
- 隐函数，是相对于显函数而言的
  - 隐函数中的y无法直接显示的表示为$y = f(x)$
  - 通常通过方程来表明自变量和因变量的关系，也即$f(x, y) = 0$
  - 具有多值性，也即对于定义域中的任一个x，可能有多个值与之对应
  - 隐函数求导通常是方程两边同时求导

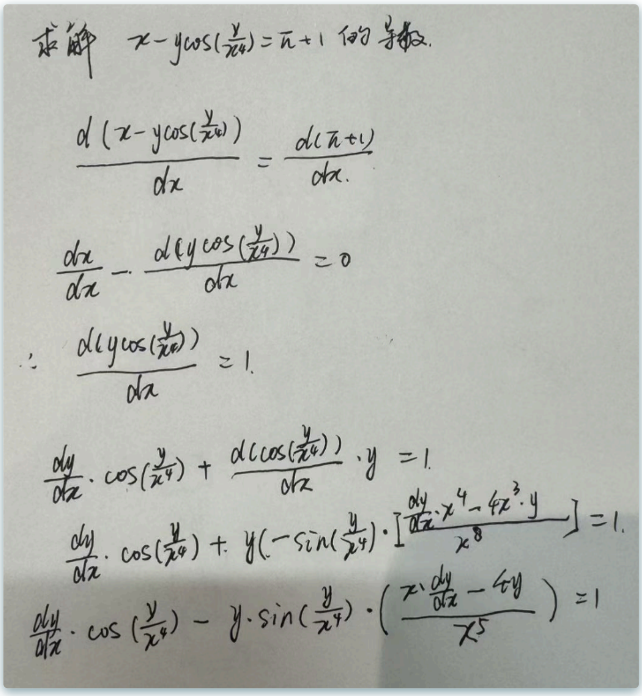
1.2 隐函数求导

> 隐函数求导的结果通常是关于变量x和变量y的表达式，而非用x来表示y

1.2.1 一阶导函数

> 原则：
>
> **对一切求导，并使用链式求导法则，乘积求导法则以及商求导法则**
>
> 最后得到的应该是一个包含$\frac{dy}{dx}$的表达式

- 例1
  - 求解 $x - ycos(\frac{y}{x^4}) = \pi + 1$ 的导数



求解 $x - y\cos(\frac{y}{x^4}) = \pi + 1$ 的导数

$$\frac{d(x - y\cos(\frac{y}{x^4}))}{dx} = \frac{d(\pi+1)}{dx}$$

$$\frac{dx}{dx} - \frac{d(y\cos(\frac{y}{x^4}))}{dx} = 0$$

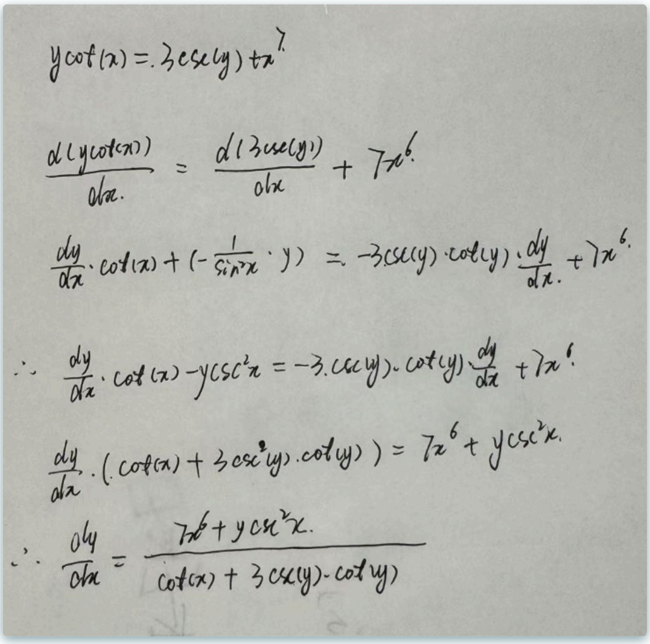
$$\therefore \frac{d(y\cos(\frac{y}{x^4}))}{dx} = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\cos(\frac{y}{x^4}) + \frac{d(\cos(\frac{y}{x^4}))}{dx}\cdot y = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\cos(\frac{y}{x^4}) + y(-\sin(\frac{y}{x^4}))\cdot[\frac{\frac{dy}{dx}\cdot x^4 - 4x^3\cdot y}{x^8}] = 1$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\cos(\frac{y}{x^4}) - y\cdot\sin(\frac{y}{x^4})\cdot(\frac{x\cdot\frac{dy}{dx} - 4y}{x^5}) = 1$$

- 例2
    - 求解$ycot(x) = 3csc(y) + x^7$的导数



$y\cot(x) = 3\csc(y) + x^7$

$$\frac{d(y\cot(x))}{dx} = \frac{d(3\csc(y))}{dx} + 7x^6$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot\cot(x) + (-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot y) = -3\csc(y)\cdot\cot(y)\cdot\frac{dy}{dx} + 7x^6$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\cdot\cot(x) - y\csc^2 x = -3\csc(y)\cdot\cot(y)\frac{dy}{dx} + 7x^6$$

$$\frac{dy}{dx}\cdot(\cot(x) + 3\csc(y)\cdot\cot(y)) = 7x^6 + y\csc^2 x$$

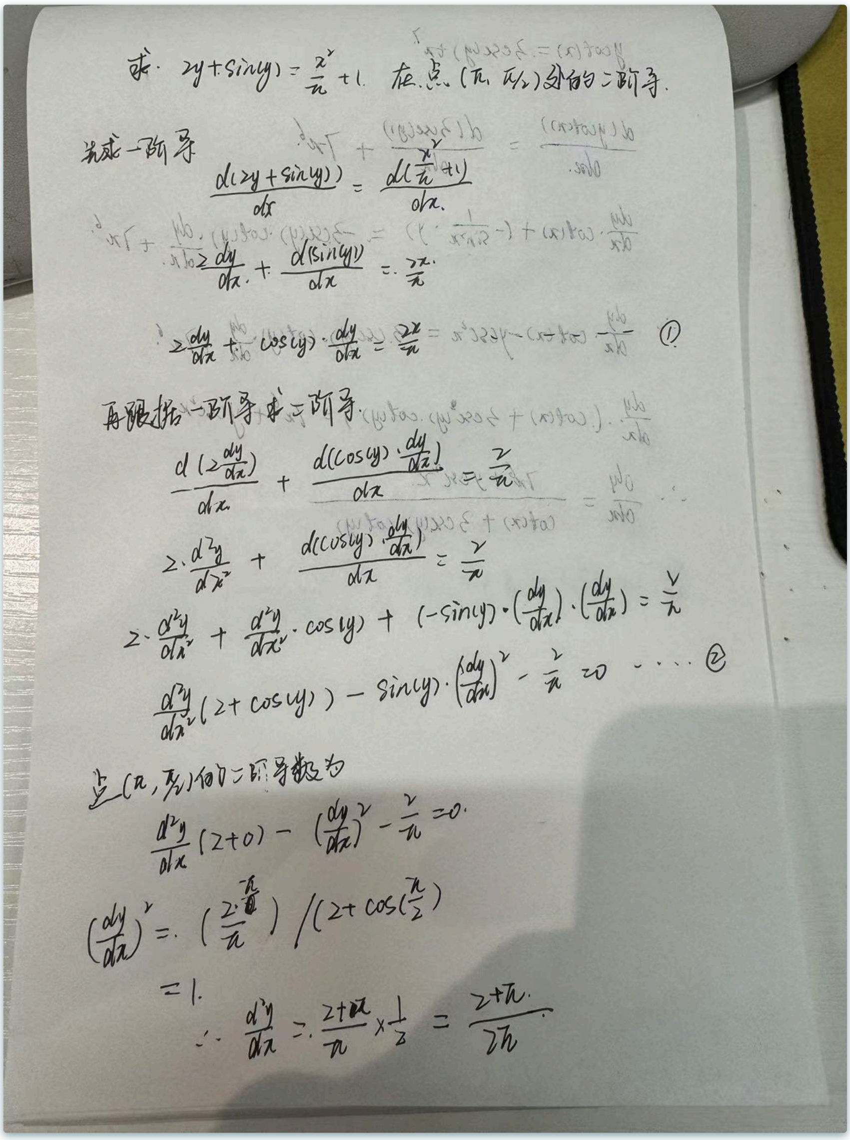
$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{7x^6 + y\csc^2 x}{\cot(x) + 3\csc(y)\cdot\cot(y)}$$

1.2.2 二阶导函数

> 二阶导就是对一阶导函数再次求导
>
> 需要注意的是：
>
> $\frac{d^2y}{dx^2}$表示的是二阶导数
>
> $(\frac{dy}{dx})^2$表示的事一阶导数的平方

- 例1

  - 求解$2y+sin(y)=\frac{x^2}{\pi}+1$曲线上点$(\pi,\frac{\pi}{2})$的二阶导数值



求. $2y+\sin(y)=\frac{x^2}{\pi}+1$ 在点 $(\pi, \pi/2)$ 处的二阶导.

先求一阶导

$$\frac{d(2y+\sin(y))}{dx}=\frac{d(\frac{x^2}{\pi}+1)}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx}+\frac{d(\sin(y))}{dx}=\frac{2x}{\pi}$$

$$2\frac{dy}{dx}+\cos(y)\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\pi} \quad ①$$

再根据一阶导求二阶导

$$\frac{d(2\frac{dy}{dx})}{dx}+\frac{d(\cos(y)\cdot\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{2}{\pi}$$

$$2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d(\cos(y)\cdot\frac{dy}{dx})}{dx}=\frac{2}{\pi}$$

$$2\cdot\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2y}{dx^2}\cdot\cos(y)+(-\sin(y))\cdot(\frac{dy}{dx})\cdot(\frac{dy}{dx})=\frac{2}{\pi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(2+\cos(y))-\sin(y)\cdot(\frac{dy}{dx})^2-\frac{2}{\pi}=0 \quad \cdots\cdots ②$$

点$(\pi,\pi/2)$的二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2}(2+0)-(\frac{dy}{dx})^2-\frac{2}{\pi}=0$$

$$(\frac{dy}{dx})^2=(\frac{2\cdot\pi}{\pi})/(2+\cos(\frac{\pi}{2}))$$

$$=1$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2+\pi}{\pi}\times\frac{1}{2}=\frac{2+\pi}{2\pi}$$

2. 相关变化率