1. 二次型及矩阵表示

1.1 二次型基本概念

1.1.1 二次型定义

设含有n个变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$的二次齐次多项式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\ &+a_{22}x_2^2\quad+2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+\quad a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

称为n元二次型，简称二次型，当a_{ij}为实数时，称f为n元实二次型

1.1.2 二次型的矩阵和二次型的秩

- 考虑到$x_ix_j=x_jx_i$，取$a_{ji}=a_{ij}$，则可将上述公式改写为如下形式

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+a_{13}x_1x_3+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\ &+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+a_{23}x_2x_3+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\ &+\cdots\cdots\\ &+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+a_{n3}x_nx_3+\cdots+a_{nn}x_n^2\\ =&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \end{aligned}$$

- 利用矩阵乘法，上述公式又可变为

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) =& x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)\\
&+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)\\
&+\cdots\cdots\\
&+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\\
=&(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11}x_1 & a_{12}x_2 & \cdots & a_{1n}x_n\\ a_{21}x_1 & a_{22}x_2 & \cdots & a_{2n}x_n\\ & \cdots\cdots\cdots & & \\ a_{n1}x_1 & a_{n2}x_2 & \cdots & a_{nn}x_n\end{bmatrix}\\
=&(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

- 若记$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$，则第一个公式可改写为

  $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx$，其中$A$是(???)的系数按顺序排成的对称矩阵

- 称$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x^TAx\ (A^T=A)$是二次型式的矩阵表达式
  - 实对称矩阵A，称为二次型f的矩阵
  - 二次型f，称为实对称矩阵A的二次型
  - *实对称矩阵A的秩，称为二次型f的秩，记为*$r(f)$，*即*$r(f)=r(A)$

- 任给一个二次型，可以唯一确认一个实对称矩阵，反之，任给一个实对称矩阵，可以唯一确认一个二次型，因此n元二次型和n阶对称矩阵之间存在一一对应的关系
  - 二次型的矩阵，必须是对称矩阵，一般的，二次型$f=x^TAx$的矩阵为$\frac{1}{2}(A+A^T)$
- 二次型的矩阵是唯一的，可由f的各项系数确认
  - $a_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$依次是二次型中平方项x_i^2的系数
  - $a_{ij}(i\neq j)$是二次型中交叉项x_ix_j系数的一半
- 二次型矩阵的阶数，等于二次型中变量的个数

1.1.3 二次型的标准型

如果二次型只含平方项x_i^2，不含交叉项x_ix_j，

即形式为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=d_1x_1^2+d_2x_2^2+\cdots+d_nx_n^2$，则称为二次型的一个标准型，其中系数$d_1,\cdots,d_n$为任意实数

- 二次型的标准型对应的矩阵为对角矩阵$\begin{bmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{bmatrix}$
- 二次型的秩，等于标准型中，非零系数的平方项的个数

1.1.4 二次型的规范型

如果二次型的标准型中，系数d_i只能是$1,-1,0$三个数，且整体需要按照$1,-1,0$的顺序出现，则称为二次型的规范型

即形式为$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-z_{p+2}^2-z_r^2$

其中，$r=r(A),p\le r\le n$

- 因为标准型的秩为非零系数的平方项个数

- 二次型的规范型对应的矩阵为对角矩阵，且主对角线元素为$1,-1,0$，即

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O_{n-r} \end{bmatrix}$$

1.1.5 二次型的惯性指数和符号差

- 正惯性指数
  - 二次型的标准型中，正系数平方项的个数p，称为正惯性指数
- 负惯性指数
  - 二次型的标准型中，负系数平方项的个数q，称为负惯性指数
- 符号差

- 正惯性指数与负惯性指数的差，称为符号差

- 性质
  - 二次型的秩，等于正惯性指数和负惯性指数的和，即$p+q$

1.2 二次型的线性变换

- 线性变换
  - 设有两组变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$和$y_1,y_2,\cdots,y_n$，关系式

    $$\begin{cases} x_1 = & c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2 = & c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = & c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$

    称为由x到y的一个线性变换

  - 其矩阵形式为$x=Cy$，C称为线性变换的矩阵，其中，
    - $$x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$
    - $$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$
    - $$y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

- 逆变换
  - 若$|C|\neq 0$，则称$x=Cy$为可逆线性变换，（或满秩，非退化，非奇异），则$y=C^{-1}x$是变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$到$x_1,x_2,\cdots,x_n$的线性变换，并称其为$x=Cy$的逆线性变换，简称逆变换

- 正交变换
  - 若C为正交矩阵，则称线性变换$x=Cy$为正交线性变换，简称正交变换

- 线性变换的乘积

- 若$x=C_1y$是变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到$y_1,y_2,\cdots,y_n$的一个线性变换，$y=C_2z$是变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$到$z_1,z_2,\cdots,z_n$的一个线性变换，则$x=C_1C_2z$称为由变量$x_1,x_2,\cdots,x_n$到$z_1,z_2,\cdots,z_n$的一个线性变换，并称其为$x=C_1y$和$y=C_2z$的乘积，对应矩阵为C_1C_2
- > 线性变换乘积的矩阵，等于各线性变换矩阵的乘积，且可逆线性变换的乘积，仍为可逆线性变换

- 二次型的可逆线性变换

> 二次型的可逆线性变换，是指，将二次型$f(x)=x^TAx$，通过由x到y的可逆线性变换$x=Cy$，将二次型从关于x的函数变为关于y的二次型$g(y)$

- 方法一：
  - 按照线性变换的对照关系，将二次型的方程组中的x_i替换为线性变换中的对应线性表达
- 方法二：
  - 按照二次型的矩阵表达式，将其中的x^T和x，换为线性变换中的$x=Cy$，即$g(y)=y^T(C^TAC)y$

> 二次型经过可逆线性变换，得到的仍是二次型，且秩不变

- > 若二次型$f(x)=x^TAx$经可逆线性变换$x=Cy$化为二次型y^TBy，$B=C^TAC$，则A与B合同

> 若二次型$f(x)=x^TAx$经正交变换$x=Qy$化为二次型y^TBy，$B=Q^TAQ=Q^{-1}AQ$，则A与B合同，且相似

1.3 合同矩阵和合同变换

> 二次型的可逆变换中，涉及到$g(y)=y^TBy$，$B=C^TAC$，其中$B=C^TAC$即为合同

- 合同矩阵

设A,B是n阶矩阵，若存在可逆矩阵C，使得$C^TAC=B$，则称矩阵A与B合同，记为$A\simeq B$，并称由A到B的变换为合同变换，C称为合同变换的矩阵

- 基本性质
  - 反身性，对于任意矩阵A，有$A\simeq A$
  - 对称性，若$A\simeq B$，则$B\simeq A$
  - 传递性，若$A\simeq B,B\simeq C$，则$A\simeq C$
- 重要性质
  - 若$A\simeq B$，则$r(A)=r(B)$，$A\cong B$
  - 若$A\simeq B$，则$A=A^T$的充要条件是$B=B^T$
  - 若$A\simeq B$，则A,B可逆性相同，当A,B都可逆时，$A^{-1}\simeq B^{-1}$
  - 若$A\simeq B$，则$A^T\simeq B^T$

2. 化二次型为标准型

任何一个二次型经过适当的可逆线性变换，都可化为标准型

2.1 化二次型为标准型

2.1.1 配方法

基本原理类似于将二次多项式进行配方

$$
\begin{aligned}
ax^2+bx+c=&a(x^2+\frac{b}{a}x)+c\\
&=a(x^2+2\times\frac{b}{2a}x+(\frac{b}{2a})^2)-a(\frac{b}{2a})^2+c\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}
\end{aligned}
$$

- 配方法步骤
  1. 配方
     - 情况1，如果二次型含有平方项
       - 直接利用完全平方公式，一次一个变量，逐个配方
     - 情况2，如果二次型只含有交叉项，没有平方项
       - 先做辅助变换$\begin{cases} x_i = & y_i + yj \\ x_j = & y_i - y_j \\ x_k = & y_k\ (k \neq i, j) \end{cases}$使其产生平方项，再按照情况1进行配方
  2. 用另外一个变量，代替配方出的每一个平方项里的内容
     - 该过程相当于可逆线性变换，$x = Cy$
     - 情况2涉及到两次线性变换，第一次是为了凑出平方项，将x进行变量替换，第二次是凑出平方项后的线性变换
- 配方法的答案不唯一，标准型不唯一
- > 任何一个n元二次型都可以通过可逆线性变换化为标准型
- > 任何一个n阶实对称矩阵，都合同于一个对角矩阵
  - 因为任意一个二次型$f(x) = x^TAx$，都可以通过可逆线性变换$x = Cy$，化为标准型$g(y) = y^T\Lambda y$，其中$\Lambda = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，这样将$x = Cy$带入$f(x) = x^TAx$，得到$y^T(C^TAC)y$，这样便有$C^TAC = \Lambda$，所以有$A$和$\Lambda$合同
- 对A的合同对角化，就是求可逆矩阵C，使得C^TAC为对角矩阵

2.1.2 初等变换法

> 初等变换法化二次型为标准型，本质上就是实对称矩阵的合同对角化
>
> 基本原理：
>
> - n元二次型$f = x^TAx$经可逆线性变换$x = Cy$，化为标准型$y^T\Lambda y$，则$C^TAC = \Lambda$
> - 因可逆矩阵可以表示为若干个初等矩阵的乘积，即$C = C_1C_2\cdots C_s$，从而有$C_s^TC_{s-1}^T\cdots C_1^TAC_1C_2\cdots C_s = \Lambda$，$EC_1C_2\cdots C_s = C$
> - 因此，构建$2n \times n$矩阵$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$，对整个矩阵施以相应于右乘$C_1, C_2, \cdots, C_s$的初等列变换，只对$A$施以相应于左乘$C_1^T, C_2^T, \cdots, C_s^T$的初等行变换，二者交替进行

- $\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{对}A\text{施以相应的初等行变换}]{\text{对整体施以相应的初等列变换}} \begin{bmatrix} C_s^T C_{s-1}^T \cdots C_1^T A C_1 C_2 \cdots C_s \\ E C_1 C_2 \cdots C_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda \\ C \end{bmatrix}$
- 当A化为对角矩阵Λ时，单位矩阵E化为可逆矩阵C，Λ是标准型的矩阵，C时可逆线性变换的矩阵

- 初等变换法步骤
  1. 构造$2n \times n$矩阵$\begin{bmatrix} A \\ E \end{bmatrix}$
  2. 做初等变换，求C和Λ
     - 对整个矩阵施以相应于右乘$C_1, C_2, \cdots, C_s$的初等列变换
     - 只对A施以相应于左乘$C_1^T, C_2^T, \cdots, C_s^T$的初等行变换
     - 二者交替进行
  3. 写标准型

2.1.3 正交变换法

> 正交变换法化二次型为标准型，本质上就是实对称矩阵的正交相似对角化

> 任何一个n元实二次型$f(x) = x^T A x$（A为实对称矩阵），都可以通过正交变换$x = Qy$（Q为正交矩阵）化为标准型$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$，$\lambda_i$为矩阵$A$的$n$个特征值

- 步骤
  1. 求特征值
     - 写出二次型的矩阵，计算$|\lambda E - A| = 0$的解
  2. 求特征向量
     - 对每个特征值λ_i，解方程组$(\lambda_i E - A)x$，计算出特征向量
  3. 改造特征向量
     - 正交化
     - 单位化
  4. 构造正交矩阵Q
  5. 写出标准型

2.2 化二次型的标准型为规范型

> 二次型的任一标准型，均可通过可逆线性变换，化为规范型

2.2.1 化规范型的方法

设二次型$f(x)=x^TAx$已经化为标准型：（此处的标准型是将系数按照正负分组放置）

$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$

其中，$p\le r\le n$，$d_i>0(i=1,2,\cdots,r)$，r是$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的秩

再令：$\begin{cases} y_i= & \frac{1}{\sqrt{d_i}}z_i \\ y_j= & z_j \end{cases}(i=1,2,\cdots,r;\ j=r+1,\cdots,n)$

2.2.2 惯性定理

> 任意一个n元二次型$f(x)=x^TAx$，一定可以经过线性变换，化为规范型
>
> $z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-z_{p+2}^2-\cdots-z_r^2$
>
> 其中p是二次型的正惯性指数，r是二次型的秩，p,r由二次型矩阵唯一确认

> 任一n阶实对称矩阵A，一定合同于对角矩阵$\begin{bmatrix} E_p & & \\ & -E_{r-p} & \\ & & O \end{bmatrix}$
>
> 其中，r是A的秩，p是A的正惯性指数

> 实对称矩阵A和B合同的充要条件是，他们有相同的秩和相同的正惯性指数

- 等价说法
  - 有相同的秩和负惯性指数
  - 有相同的正惯性指数和相同的负惯性指数
  - 有相同的规范型
  - 正负特征值个数相等
- 推论：
  - 若实对称矩阵A与B相似，则A与B合同

3. 二次型和对称矩阵的有定性

3.1 有定性的概念

- 正定/负定

> 设 n 元二次型 $f(x)=x^TAx\ (A=A^T)$，如果对于任意非零列向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\neq 0$，恒有$f(x)x^TAx>0$(或$<0$)，则称二次型$f(x)=x^TAx$为正/负定二次型，称对称矩阵$A$为正/负定矩阵

- 半正定/半负定

> 设n元二次型$f(x)=x^TAx\ (A=A^T)$，如果对于任意列向量$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，恒有$f(x)x^TAx\geq 0$(或≤ 0)，且存在非零列向量$x_0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)^T\neq 0$，使得$f(x_0)=x_0^TAx_0=0$，则称二次型$f(x)=x^TAx$为半正/负定二次型，称对称矩阵$A$为半正/负定矩阵

- 二次型，或矩阵，的正定/负定，半正定/半负定，统称为二次型或矩阵的有定性，不具备有定性的二次型或矩阵，称为不定的
- 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_1x_1^2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_n^2$ 正定的充要条件是 $a_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$
- 对角矩阵正定的充要条件是主对角线上的元素都大于0

3.2 正定二次型和正定矩阵的判别

> 正定二次型，经过任一可逆线性变换，仍为正定二次型

- 可逆线性变换不改变二次型的定性
- 若A,B是两个合同的实对称矩阵，则A,B具有相同的定性
- 正定的必要条件

> 若对称矩阵A正定，则$|A|>0$

3.2.1 判别法

1. 标准型法

> n 元二次型 $f(x)=x^TAx$ 正定的充分必要条件是，它的标准型为 $d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中，$d_i>0$

2. 惯性指数法

> n元二次型$f(x)=x^TAx$正定的充分必要条件是，它的正惯性指数为n

3. 规范型法

> n元二次型$f(x)=x^TAx$正定的充分必要条件是，它的规范型为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$

4. 与E结合法

> n阶对称矩阵A正定的充分必要条件是，$A\simeq E$，即存在可逆矩阵C，使得 $C^TAC=E$

5. 矩阵分解法

> n阶对称矩阵A正定的充分必要条件是，存在可逆矩阵C，使得$A=C^C$

6. 特征值法

> n阶实对称矩阵A正定的充分必要条件是，A的特征值全大于0

7. 顺序主子式法

> 从二次型或对称矩阵本身直接判定

- 顺序主子式定义
  - 设n阶矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$，由A的第$1,2,\cdots,k$行，及第$1,2,\cdots,k$列交叉位置上的元素构成的k阶子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} k = 1, 2, \cdots, n$$

称为A的k阶顺序主子式，记为$|A_k|$，本质为一个行列式

- 顺序主子式判别

> n阶实对称矩阵A正定的充分必要条件是，A的各阶顺序主子式全大于0

3.3 正定矩阵的性质

1. 若A为正定矩阵，则A必为对角矩阵
2. 若A为正定矩阵，则A的主对角线元素都大于0
3. 若A为正定矩阵，则$|A| > 0$
4. 若A为正定矩阵，则A为可逆矩阵
5. 若A为正定矩阵，则$A^T, A^{-1}, A^*, kA(k > 0), A^k(k$为正整数$)$均为正定矩阵
6. 若A为正定矩阵，B是同阶正定或半正定矩阵，则$A + B$也是正定矩阵

3.4 负定二次型或矩阵的判定

设n元二次型$f(x) = x^T Ax(A^T = A)$，则

$f(x)$或A负定

$\Leftrightarrow -f(x)$或$-A$正定

$\Leftrightarrow$ 标准型为$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2$，其中，$d_i < 0$

$\Leftrightarrow$ 规范型为$-y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2$

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数为n

$\Leftrightarrow A$与$-E$合同，即$A \simeq -E$

$\Leftrightarrow A$的所有特征值均小于零

$\Leftrightarrow A$的所有奇数阶顺序主子式小于零，所有偶数阶顺序主子式大于零

3.5 半正定二次型或矩阵的判定

设n元二次型$f(x)=x^TAx(A^T=A)$，则

$f(x)$或A半正定

$\Leftrightarrow$ 标准型为$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中，$d_i\geq 0$，且至少有一个$d_i=0$

$\Leftrightarrow$ 规范型为$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$，其中r为秩，$r\leq n$

$\Leftrightarrow$ 正惯性指数等于秩，且小于n

$\Leftrightarrow$ A与$\begin{bmatrix} E_r & \\ & O \end{bmatrix}$合同，其中$r$为秩

$\Leftrightarrow$ A的所有特征值均大于或等于零，且至少有一个特征值为零

$\Leftrightarrow$ A的所有主子式均大于或等于零

3.6 半负定二次型或矩阵的判定

设n元二次型$f(x)=xTAx(AT=A)$，则

$f(x)$或A半负定

$\Leftrightarrow$ 标准型为$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$，其中，$d_i\leq 0$，且至少有一个$d_i=0$

$\Leftrightarrow$ 规范型为$-y_1^2-y_2^2-\cdots-y_r^2$，其中$r$为秩，$r\leq n$

$\Leftrightarrow$ 负惯性指数等于秩，且小于n

$\Leftrightarrow$ A与$\begin{bmatrix} -E_r & \\ & O \end{bmatrix}$合同，其中$r$为秩

$\Leftrightarrow$ A的所有特征值均小于或等于零，且至少有一个特征值为零

$\Leftrightarrow$ A的所有奇数阶主子式均小于或等于零，所有偶数阶主子式均大于或等于零