1. 向量的概念及线性运算

1.1 向量的定义

由n个数$a_1, a_2, \cdots, a_n$组成的有序数组$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$，称为向量，此时称向量$\alpha$为$n$维向量

- 其中，
  - 数a_i称为向量的第i个分量
  - 分量的个数，称为向量的维数

n维向量，分为行向量和列向量

- 行向量：有序数组排列成行的形式，是一个$1 \times n$的矩阵
- 列向量：有序数组排列成列的形式，是一个$n \times 1$的矩阵

- 零向量

  所有分量全为0的向量，记为0

- 负向量

  将每个分量都取相反数得到的向量

- 向量的转置

  类比矩阵的转置

- 向量的相等

  两个同种类型的向量相等⇔相同位置的分量相等

1.2 向量的线性运算

向量的加法运算和数乘，称之为向量的线性运算

- 向量的加减

  设两个n维向量，$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

  - 则向量α和β的加法定义为：$\alpha+\beta=(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$
  - 则向量α和β的减法定义为（结合向量加法和负向量）：$\alpha-\beta=(a_1-b_1,a_2-b_2,\cdots,a_n-b_n)$

- 向量的数乘

  设向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$k$是一个常数，则数$k$与向量$\alpha$的乘法定义为

  $k\alpha=(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)$

- 向量线性运算满足的规律

  设α,β,γ为同型的n维向量，0为同型零向量，k,l为实数

  - 交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha$
  - 结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
  - $\alpha+0=0+\alpha=\alpha$
  - $\alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$
  - $1\cdot\alpha=\alpha$
  - $(kl)\alpha=k(l\alpha)=l(k\alpha)$
  - $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$
  - $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

2. 向量的线性组合与线性表示

2.1 向量的线性组合与线性表示的定义

设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是一组$n$维向量，$k_1, k_2, \cdots, k_m$是一组常数，则称

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的一个线性组合

$k_1, k_2, \cdots, k_m$称为组合系数

设$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$是$n$维向量，若存在常数$k_1, k_2, \cdots, k_m$，使得关系式

$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$成立，则称$\beta$是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$的线性组合，也称，$\beta$可由向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示

2.2 向量的线性组合与线性表示的判定

- 通过线性方程组判定

  判断β是否是向量组$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的线性组合，等同于判断一个线性方程组是否有解，且有解时，该解即为组合系数

  - 线性方程组：$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$
    - 当$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是行向量时，则系数矩阵$A = \alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T$，方程组可写为$Ax = \beta^T$
    - 当$\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$是列向量时，则系数矩阵$A = \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，方程组可写为$Ax = \beta$
  - β是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的线性组合 $\Leftrightarrow$ 方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$有解
  - β不是$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$的线性组合 $\Leftrightarrow$ 方程组$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$无解
- 通过秩
  - 若 $\beta, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 行 向 量 ， 记 矩 阵 $A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T)$ ，$B = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \cdots, \alpha_n^T, \beta^T)$

- 若 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是列向量，记矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta)$

> β是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的线性组合 $\Leftrightarrow r(A)=r(B)$
>
> β不是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$的线性组合 $\Leftrightarrow r(A)\neq r(B)$

2.3 向量的线性组合与线性表示的结论

- 零向量是任意向量组的线性组合
- 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$中的任一向量$\alpha_i\ (1\le i\le n)$，均可由本向量组线性表示
- 任一n维向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，都可由$n$维基本单位向量组线性表示，且表示方式唯一，组合系数即为对应的分量

> n维基本单位向量组$\varepsilon_1=(1,0,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,0,\cdots,1)$

3. 向量组的等价

3.1 向量组等价的定义

> 设有两个向量组$A=\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$\beta=\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，若向量组$A$中的每个向量都可用向量组$B$线性表示，则称向量组$A$可由向量组$B$线性表示，若向量组$A$与向量组$B$能够互相线性表示，则称向量组$A$和向量组$B$等价

3.2 向量组等价的性质

- 反身性：任一向量组与其本身等价
- 对称性：若向量组A等价于向量组B，则向量组B等价于向量组A

- 传递性：若向量组A等价于向量组B，向量组B等价于向量组C，则向量组A等价于向量组C
- 若A,B,C均为n阶方阵，且$AB=C$，则有
  - C的列向量组可由A的列向量组表示，当B可逆时，二者等价
  - C的行向量组可由B的行向量组表示，当A可逆时，二者等价

3.3 向量组等价的判定

- 由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$构造矩阵
  - 行向量：$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T)$， $B=(\beta_1^T,\beta_2^T,\cdots,\beta_n^T)$
  - 列向量：$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$， $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$

> 向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示$\Leftrightarrow$矩阵$A$的秩等于矩阵$(A,B)$的秩，即$r(A)=r(A,B)$

> 向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$可由向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，则$r(B)\le r(A)$

> 向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$和向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$等价$\Leftrightarrow$ $r(A)=r(B)=r(A,B)$

4. 向量组的线性相关性

4.1 向量组的线性相关/无关的定义

> 给定向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，如果存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$，
>
> 使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$成立

则称向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关，$k_1,k_2,\cdots,k_n$称为一组相关系数，否则，称向量组线性无关

4.2 向量组的线性相关/无关的性质与结论

1. 一个向量α线性相关$\Leftrightarrow \alpha=0$，一个向量α线性无关$\Leftrightarrow\ \alpha=0$
   - 若向量α线性相关，意味着有非零的k，使得$k\alpha=0$，所以只能有$\alpha=0$
   - 若向量α线性无关，意味着只有当$k=0$时，$k\alpha=0$，所以只能有$\alpha\neq 0$
2. 两个向量线性相关$\Leftrightarrow$两个向量对应的分量成比例
   - $k_1\alpha+k_2\beta=0\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{k_2}{k_1}$
3. 如果向量组中有一部分向量（称为部分组）线性相关，则该向量组线性相关
   - 可令不在部分组内的向量的系数为0
4. 若向量组中有两个向量成比例，则向量组必线性相关
   - 结合性质2和性质3易知
5. 若向量组线性无关，则其任一部分组也不线性相关
6. 含有零向量的向量组必线性相关
   - 令零向量的系数为1，其他向量的系数为0
7. n维单位坐标向量必线性无关
8. 设r维向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的$r+l$维接长向量，则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性无关
9. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$是$r$维向量，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的$r+l$维接长向量，若$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$线性相关，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$也线性相关

4.3 向量组的线性相关/无关的判定

- 定义法

> 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性相关$\Leftrightarrow$齐次线性方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$有非零解

向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n=0$只有零解

- 矩阵秩法

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，构造矩阵$A$，并求出矩阵$A$的秩

如果$r(A)<n$，则向量组线性相关，

如果$r(A)=n$，则向量组线性无关，

其中n为向量组内向量的个数

- 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为行向量，则$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T)$
- 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为列向量，则$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

- 行列式法 *适用于向量组中，向量个数等于维度数的场景*

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$n$个$n$维向量，

- 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为行向量，则$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T)$
- 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为列向量，则$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$

可知A为n阶方阵，则

$|A|=0$时，向量组线性相关

$|A|\neq 0$时，向量组线性无关

4.4 矩阵的行/列向量组的线性相关与矩阵的秩的关系

设A为$m\times n$阶矩阵，则

- 行向量组
  - 线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<m$
  - 线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=m$
- 列向量组
  - 线性相关 $\Leftrightarrow r(A)<n$

- 线性无关 $\Leftrightarrow r(A)=n$

设A为n阶方阵，则

- A的行/列向量组线性相关$\Leftrightarrow r(A)<n \Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow A$不可逆
- A的行/列向量组线性无关$\Leftrightarrow r(A)=n \Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow A$可逆

4.5 向量组的线性相关、线性无关与线性表示的关系

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性相关的充要条件是，其中，至少有一个向量，是其他$m-1$个向量的线性组合

向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\ (m\geq 2)$线性无关的充要条件是，向量组中任一向量，都不能由其他$m-1$个向量线性表示

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性相关，则$\beta$可由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，且表示法唯一

若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关，而向量$\beta$不能由向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示，则向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$线性无关

设有两个向量组：$(I)\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，$(II)\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，若向量组$(I)$线性无关，且向量$(I)$可由向量组$(II)$线性表示，则$r\leq s$

设有两个向量组：$(I)\ \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，$(II)\ \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，若向量组$(I)$可由向量组$(II)$线性表示，且$r>s$，则向量组$(I)$必线性相关

- 若$(I),(II)$均线性无关，且$(I),(II)$可互相线性表示，则$r=s$
- 若向量组所含向量的个数大于向量的维数，则该向量组线性相关

5. 极大线性无关组

5.1 定义

如果向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的部分组$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$满足：

1. $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关
2. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中任一向量都可由$\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表示
    - 条件2可更换为
        - 向量组中任一$r+1$个向量（如果有的话）都线性相关
        - 向量组中任意多于r个向量（如果有的话）都线性相关

5.2 极大线性无关组的性质和结论

1. 零向量组没有极大线性无关组
2. 线性无关的向量组，其极大线性无关组为向量组本身
3. 向量组的极大线性无关组可能不唯一
4. 向量组和它的任一极大线性无关组等价
5. 同一向量组的两个极大线性无关组等价， 且所含向量个数相等
6. 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则向量组(I)的极大线性无关组可由向量组(II)的极大线性无关组线性表示
7. 等价的向量组，其极大线性无关组也等价

5.3 极大线性无关组的求法 - 矩阵初等变换法

求向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组，并将其余向量用极大线性无关组表示出来，其步骤如下：

1. 构造矩阵A
    - 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为列向量，则矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

- 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为列向量，则矩阵$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T)$

2. 对矩阵A进行初等行变换，化为行阶梯矩阵B，则B的首非零元素所在的列，对应于向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$中的向量，即为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的一个极大线性无关组
3. 再对行阶梯矩阵B进行初等行变换，化为行简化阶梯矩阵C，则C中列向量的线性关系即为A中列向量的线性关系，也即$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的线性关系

6. 向量组的秩

6.1 向量组秩的定义

> 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的任一极大线性无关组中所含向量的个数，称为向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$的秩，记为$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$

- 规定，零向量组的秩为0

6.2 向量组秩的性质和结论

1. 向量组的秩是唯一的，等于极大线性无关组中所含向量个数
2. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=s$ 因为行阶梯矩阵没有零行，所以根据矩阵初等变换求向量组的极大线性无关组，此时全部变量都属于极大线性无关组

   向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关$\Leftrightarrow r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$
3. 若向量组(I)可由向量组(II)线性表示，则$r(I)\le r(II)$
4. 等价的向量组的秩相等
5. 向量组的秩$\le$向量的个数；

   向量组的秩$\le$向量的维数
6. 若向量组的秩为r，则向量组中必有r个向量线性无关，而任意多于r个向量都线性相关

7. 若向量组的秩为$r(r>0)$，则任意含r个向量的线性无关的部分组都是向量组的极大线性无关组

6.3 向量组秩的求法

> 根据矩阵的秩等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩，将求向量组的秩转为求矩阵的秩

1. 构造矩阵A
   - 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为列向量，则矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$
   - 若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$为列向量，则矩阵$A=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_s^T)$
2. 求矩阵A的秩$r(A)$，而$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$