# 1. 三角函数的极限

对于三角函数求极限，需要判断是在非常小的数上**取**三角函数，如，$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x}$，还是在非常大的数上**取**三角函数，如，$\lim_{x\to\infty}\frac{sin(5x)}{x}$

> 需要注意的是，非常大和非常小是**相对于三角函数里的数字**而言，并不能依靠$x\to 0$，$x\to\infty$来简单判断是非常小或非常大
>
> 如：
>
> $\lim_{x\to 0} x sin(\frac{5}{x})$ 当$x\to 0$时，$sin$内是非常大的数
>
> $\lim_{x\to\infty} x sin(\frac{5}{x})$ 当$x\to\infty$时，$sin$内是非常小的数

## 1.1 小数的情况

> 重要极限(红色)：
>
> $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$　　$\lim_{x\to 0} sin(x)=0$
>
> $\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x}=1$　　$\lim_{x\to 0} tax(x)=0$
>
> $\lim_{x\to 0}\frac{cos(x)}{x}=DNF$　　$\lim_{x\to 0} cos(x)=1$
>
> $\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x}=0$　　$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=1/2$

### 1.1.1 $\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}=1$

- 说明了一个重要的情况，虽然当$x\to 0$时，$sin(x)$和$x$都趋近于0，但是两者趋近程度是类似的，所以虽然$\frac{sin(x)}{x}$不等于1，但其极限值为1

> 当$x$非常小时，$sin(x)$表现的就像$x$，**这个情况只在乘积或商的情形下才成立**

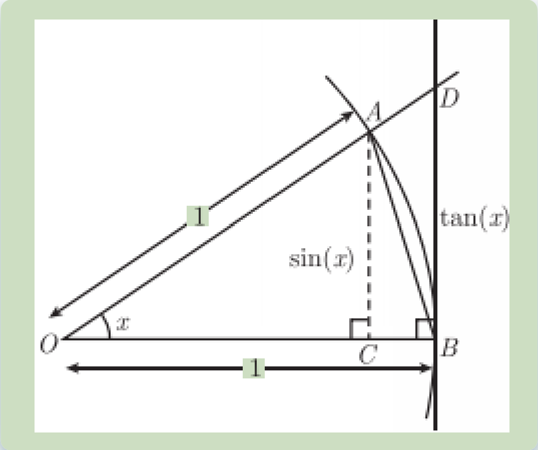
- 对于$x + sin(x)$或$x - sin(x)$时不能认为两者相等然后认为表达式为0

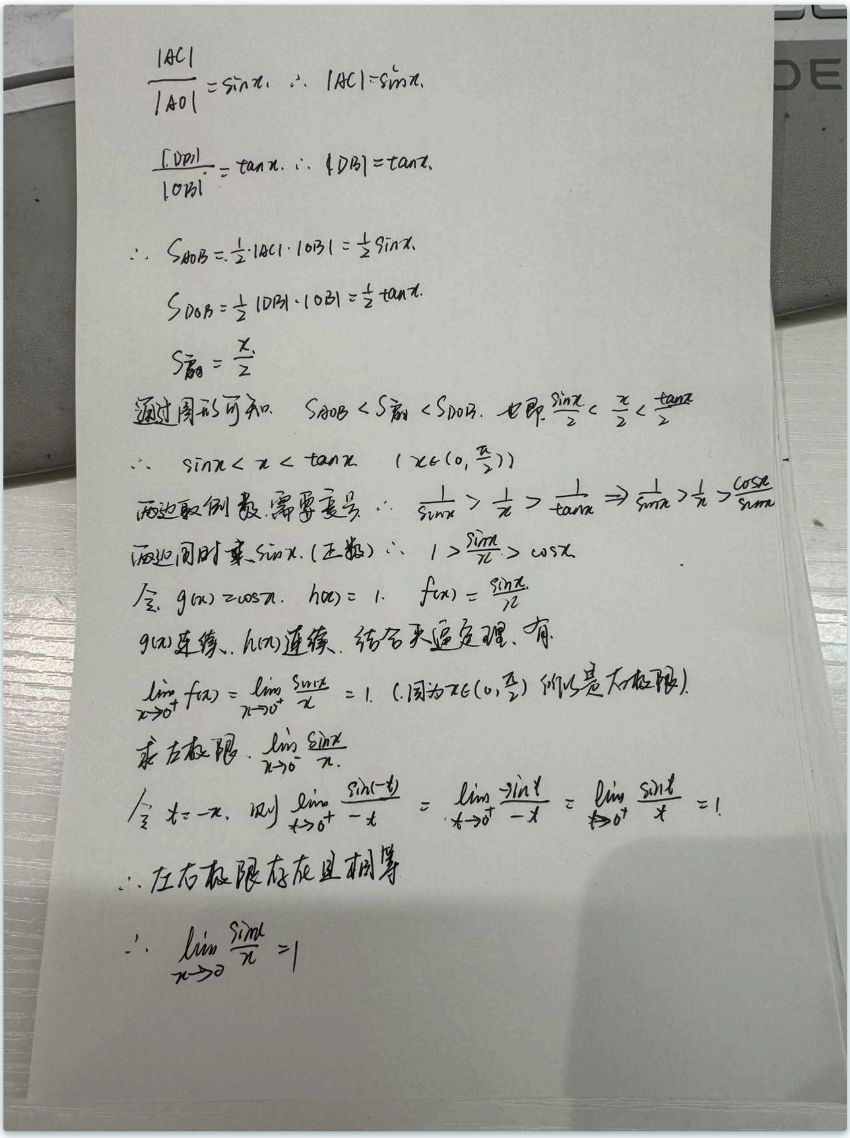
- 证明

以半径为1绘制圆，取圆心角为$x$，以弧度计量，延长OA，并做点B的切线，与延长线相交于D，过A做垂直于OB的垂线，垂足为C

前置知识点：

$$S_{扇} = \frac{x}{2\pi}\pi r^2 = \frac{xr^2}{2}$$





$\frac{|AC|}{|AO|} = \sin x$. $\therefore$ $|AC| = \sin x$.

$\frac{|DB|}{|OB|} = \tan x$. $\therefore$ $|DB| = \tan x$.

$\therefore$ $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \sin x$.

$S_{DOB} = \frac{1}{2} |DB| \cdot |OB| = \frac{1}{2} \tan x$.

$S_{扇} = \frac{x}{2}$

通过图形可知. $S_{AOB} < S_{扇} < S_{DOB}$. 也即 $\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$

$\therefore$ $\sin x < x < \tan x$ $(x \in (0, \frac{\pi}{2}))$

两边取倒数,需要变号 $\therefore$ $\frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x} \Rightarrow \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$

两边同时乘 $\sin x$.(正数) $\therefore$ $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

令 $g(x) = \cos x$. $h(x) = 1$. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

$g(x)$ 连续. $h(x)$ 连续. 结合夹逼定理. 有

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. (因为 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 所以是右极限)

求左极限. $\lim_{x \to 0^-} \frac{\sin x}{x}$.

令 $t = -x$. 则 $\lim_{t \to 0^+} \frac{\sin(-t)}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{-\sin t}{-t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$

$\therefore$ 左右极限存在且相等

$\therefore$ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

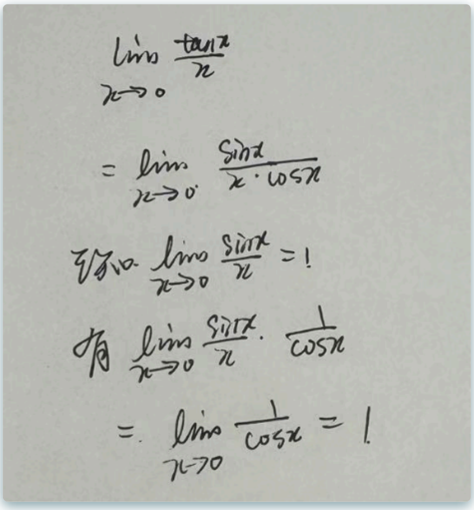
- 重要不等式

> $$sin(x) < x < tan(x)$$

### 1.1.2 $\lim_{x \to 0} \frac{tan(x)}{x} = 1$

- 证明

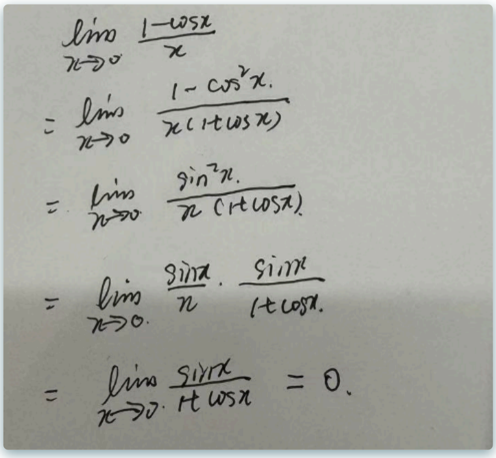
H3



$$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}$$
已知 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$
有 $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$$

### 1.1.3 $\lim_{x\to0}\frac{1-cos(x)}{x}=0$

- 证明



$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{1+\cos x}=0.$$

## 1.2 大数情况

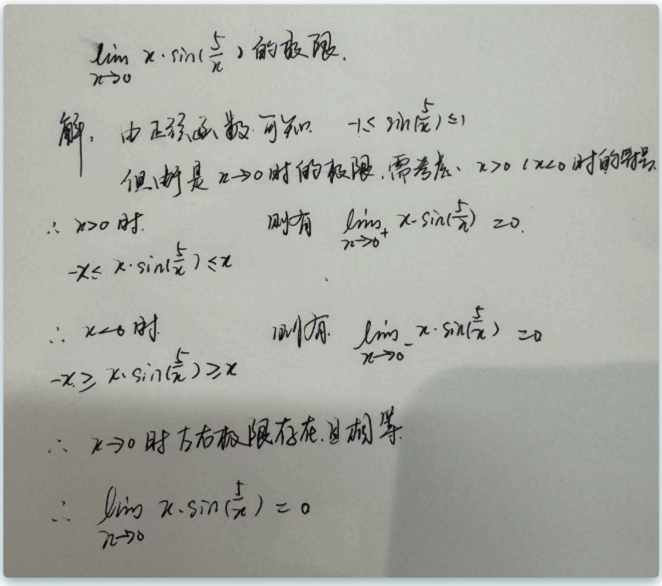
- 对于大数情况，要考虑三角函数所处的位置
  - 如果在多项式中，仅仅是**加减**一个$sin(x)$或$cos(x)$，可以看做他们比$x$的**任意正次幂次**数要低，可以忽略并按照多项式的方法求解极限，唯一的例外是如果多项式中其他的最高次幂是0的时候
  - 如果在多项式中，$sin(x)$或$cos(x)$是$x$的系数，那么此时三角函数非常重要，一般通过**夹逼定理**进行极限的求取

- > 一般性原理，对于任意的**正**指数$\alpha$，有

$$\lim_{x \to \infty} \frac{sin(\text{任何东西})}{x^{\alpha}} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{cos(\text{任何东西})}{x^{\alpha}} = 0$$

- 求 $\lim\limits_{x \to \infty} xsin(\frac{5}{x})$的极限




## 1.3 其他情况

前面提到的都是$x \to 0$或$x \to \infty$的情况，那么如果是其他情况，要怎么计算三角函数的极限呢

> 一般采取**换元法**
>
> 也即，如果是$x \to \frac{\pi}{2}$，那么令$t = x - \frac{\pi}{2}$，则可以从$x$趋近于$\frac{\pi}{2}$，改为$t$趋近于0
>
> 然后再结合**三角恒等式**进行计算

# 2. 三角函数的导数

## 2.1 三角函数的导数

### 2.1.1 导数

H3

- $f(x) = sin(x)$的导数

> $f' = cos(x)$

- $f(x) = cos(x)$的导数

> $f' = -sin(x)$

- $f(x) = tan(x)$的导数

> $f' = sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$

- $f(x) = sec(x)$的导数

> $f' = sec(x)tan(x) = \frac{1}{cos(x)}tan(x) = \frac{sin(x)}{cos^2(x)}$

- $f(x) = csc(x)$的导数

> $f' = -csc(x)cot(x) = -\frac{1}{sin(x)}cot(x) = -\frac{cos(x)}{sin^2(x)}$

- $f(x) = cot(x)$的导数

> $f' = -csc^2(x) = -\frac{1}{sin^2(x)}$

### 2.1.2 证明

- $f(x) = sin(x)$

H3

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) + \cos(x)\sin(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)\cdot(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$\because \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1. \quad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 1$$

则 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x)(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} + \frac{\cos(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= 0 + \cos(x) \cdot 1$$

$$= \cos(x)$$

- $f(x) = cos(x)$

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x+\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)\sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x)(\cos(\Delta x) - 1)}{\Delta x} - \frac{\sin(x)\sin(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\sin(x)$$

- $f(x) = tan(x)$

$$f(x) = \tan(x)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)'$$

$$= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x}$$

- $f(x) = sec(x)$

$$f(x) = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$ 令 $u = \cos(x)$.

则 $$f'(x) = \left(\frac{1}{u}\right)' \cdot (u)'$$

$$= -u^{-2} \cdot (-\sin(x))$$

$$= \cos^{-2}(x) \cdot \sin(x).$$

$$= \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \cdot \tan(x) = \cancel{\cos(x)}\, \sec(x) \cdot \tan(x)$$

- $f(x) = csc(x)$

$f(x) = csc(x) = \frac{1}{sin(x)}$ 令 $u = sin(x)$.

则 $f' \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$= \frac{-1}{sin^2(x)} \cdot cos(x)$

$= -cot(x) \cdot \frac{1}{sin(x)}$

$= -csc(x) \cdot cot(x)$

- $f(x) = cot(x)$

$f(x) = cot(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}$

$f'(x) = \frac{-sin(x)sin(x) - cos(x)cos(x)}{sin^2(x)}$

$= \frac{1}{-sin^2(x)}$