1. 函数的极值

1.1 全局极值和局部极值

- 全局极值
  - 如果当$x=a$时，$f(a)$是函数整个定义域内的最大值或最小值，则称为全局最大值/最小值
- 局部极值
  - 在包含a的某小段区间内，在$x=a$时，$f(a)$是最大值或最小值，则称为局部最大值/最小值

1.2 极值定理

- 临界点
  - 临界点，指的是当函数f的导数在$x=c$处导数为0或导数不存在时，点c即是临界点

> 极值定理
>
> 设函数f定义在开区间(a,b)内，且点c在(a,b)内．如果点c为函数的局部最大值或最小值，那么点c为该函数的临界点，也即，$f'(c)=0$或不存在
>
> > - 可以说开区间内极值只能出现在临界点，但是不可以说临界点一定是局部极值
> > - 如果是闭区间，那么局部极值只可能出现在区间端点，或者临界点

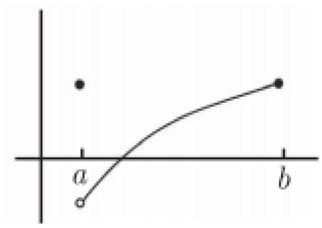
1.3 求解全局最大值/最小值

1. 找到$f'(x)$，并列出在区间(a,b)中导数不存在或者为0的点
2. 将区间端点，如果是闭区间，放入第一步的列表
3. 计算每一个点，
4. 找出最大值和对应的x的值，和最小值

2. 罗尔定理

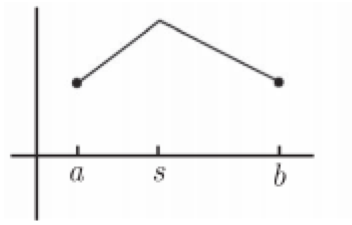
> 如果函数f在闭区间$[a,b]$内连续，在开区间(a,b)内可导，如果$f(a)=f(b)$，则在开区间(a,b)内至少存在一点c，使得$f'(c)=0$

- 罗尔定理成立的三个前提
  - 函数在闭区间内连续
    - 不成立的情况
      - 函数在点a处不连续

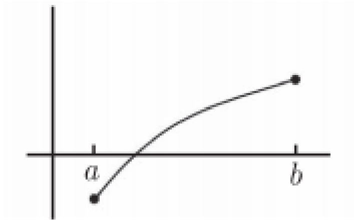


  - 函数在开区间内可导
    - 不成立的情况

- 函数在点s处不可导



- 区间端点值相等
  - 不成立情况
    - 端点值不相等



3. 中值定理

> 如果函数f在闭区间$[a,b]$内连续，在开区间(a,b)内可导, 则在开区间(a,b)内至少存在一点c，使得
>
> $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
>
> 成立条件和罗尔定理类似，但是没有要求端点值相等

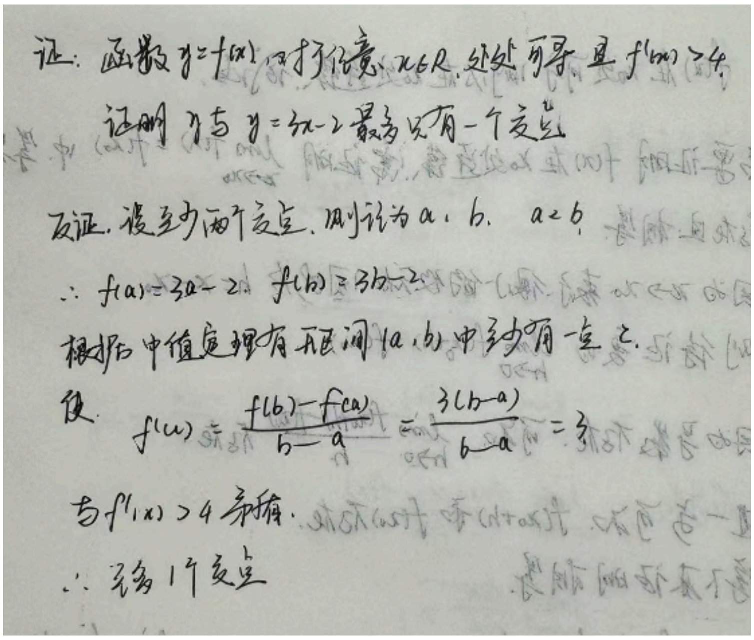
- 中值定理的推论

  > 1. 如果对于定义域(a,b)内所有的x，都有$f'(x)=0$, 那么函数f在开区间(a,b)内为常数函数

  > 2. 如果对于任意实数x都有$f'(x)=g'(x)$，则有$f(x)=g(x)+C$

  > 3. 如果函数f的导函数始终为正，那么该函数为增函数，如果始终为负，那么该函数为减函数

- 例题
  - 对于所有实数x处处可导，且$f'>4$的函数$y=f(x)$，试证该函数与函数$y=3x-2$最多只有一个交点



证：函数 $y=f(x)$ 对于任意 $x\in R$ 处处可导 且 $f'(x)>4$

证明 f 与 $y=3x-2$ 最多只有一个交点

反证. 设至少两个交点. 则记为 a，b. $a<b$

$\therefore f(a)=3a-2 \quad f(b)=3b-2$

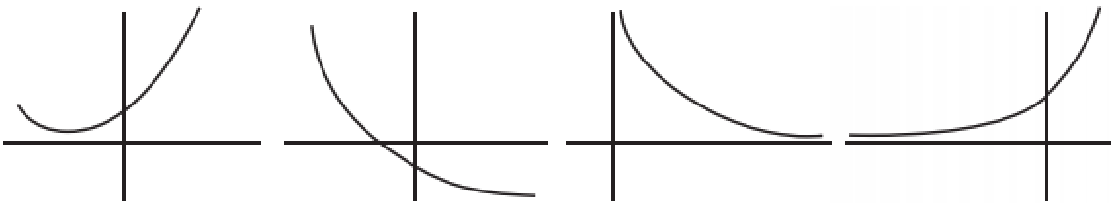
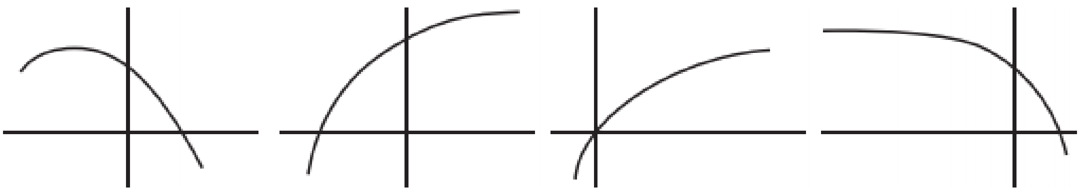
根据中值定理有开区间 (a,b) 中至少有一点 c.

使 $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=\dfrac{3(b-a)}{b-a}=3$

与 $f'(x)>4$ 矛盾.

$\therefore$ 至多1个交点

4. 二阶导数和图像

> 二阶导数体现了函数的凹凸性
>
> 当$f''>0$时，f'为增函数，可能从负增到正，可能从负增到0，可能从0增到正，凹向上
>
> 
>
> 当$f''<0$时，f'为减函数，可能从正减到负，可能从0减到负，可能从正减到0，凹向下
>
> 

- 对于在$x=c$处改变了函数的凹凸性，该点称之为拐点
  - 如果点c是拐点，则有$f''(c)=0$
  - 但是$f''(c)=0$并不意味着该点时拐点

5. 对导数为0零点的分类

当函数在点c处有$f'(c)=0$，可以明确知道，该点c是一个临界点

可能存在的情况是：

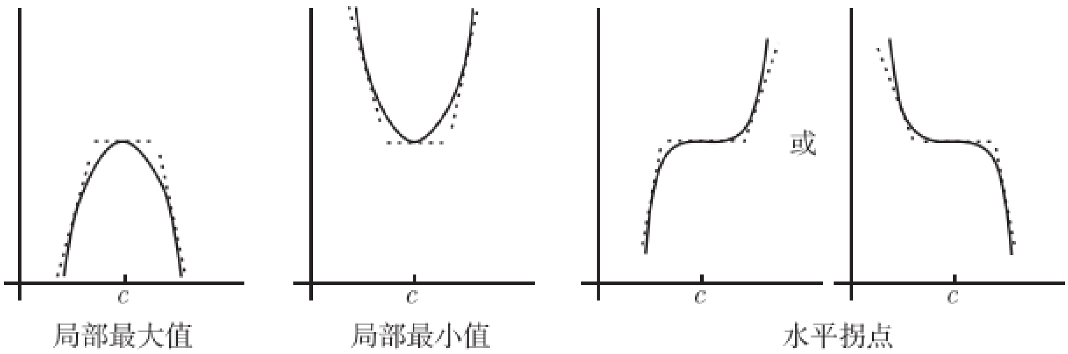
- 该点是局部最大值点
- 该点是局部最小值点
- 该点是水平拐点

可以通过一次导数和二次导数判断具体是哪种情况

5.1 一次导数

设点c处有$f'(c)=0$

- 如果从左往右通过点c，f'的符号从正变负，说明点c是局部最大值点
- 如果从左往右通过点c，f'的符号从负变正，说明点c是局部最小值点
- 如果从左往右通过点c，f'的符号没有变化，说明点c是水平拐点



5.2 二次导数

设点c处有$f'(c)=0$

- 如果$f''(c)<0$，说明点c是局部最大值
- 如果$f''(c)>0$，说明点c是局部最小值
- 如果$f''(c)=0$，则无法判断
  - 无法判断的情况