# 1. 基础知识

## 1.1 弧度与度

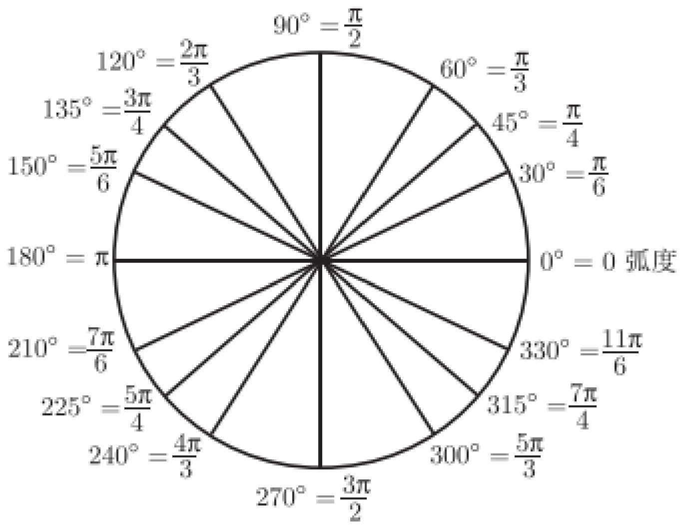
- 弧度和度，都是用来衡量角大小的单位
  - 度，是将完整的圆平均分为360， 每一份都是1度，记为$1^\circ$
  - 弧度，是指在一个半径为$r$的圆中，弧长$s$对应的角的大小，记为$\theta$，单位为$rad$
    - 一个圆的$360^\circ$等于$2\pi$弧度
    - 常用弧度
      - $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$
      - $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$
      - $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$
      - $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$
- 弧度与度换算
  - 记弧度为$\theta$，度为$d$，则有
    - $\theta = d \times \frac{\pi}{180}$
    - $d = \theta \times \frac{180}{\pi}$
    - 

图 2-2

## 1.2 基本三角函数 $[0, \frac{\pi}{2}]$

在直角三角形中，除直角外的一角，记为$\theta$，则有

- 正弦 $sin(\theta) = \frac{对边}{斜边}$
- 余弦 $cos(\theta) = \frac{邻边}{斜边}$
- 正切 $tan(\theta) = \frac{对边}{邻边}$
- 正割 $csc(\theta) = \frac{1}{sin(\theta)}$
- 余割 $sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)}$
- 余切 $cot(\theta) = \frac{1}{tan(\theta)}$

## 1.3 扩展到$[0, 2\pi]$的三角函数

- 参考角
  - 一般来说，$\theta$的参考角，是在表示$\theta$的射线和$x$轴之间最小的角
- ASTC方法
  - 指的是将坐标轴从右上逆时针开始，每个象限内为正数的三角函数(正弦、余弦、正切)
    - A 表示第一象限内，三个都是正数
    - S 表示第二象限内，$sin$为正数
    - T 表示第三象限内，$tan$为正数
    - C 表示第四象限内，$cos$为正数

## 1.4 $[0, 2\pi]$以外的三角函数

- 减去$2\pi$的倍数即可，或者求补角

## 1.5 函数图像

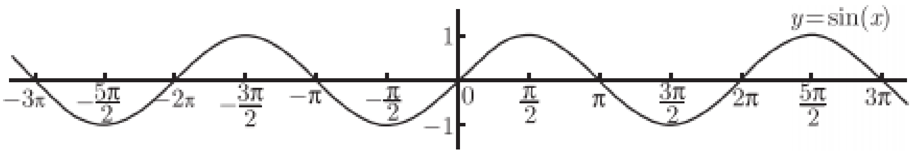
- 三角函数的函数图像是周期性的，其中$sin$、$cos$、$csc$、$sec$是以$2\pi$为周期的函数，$tan$、$cot$是以$\pi$为周期的函数
- $sin$、$csc$、$tan$、$cot$是奇函数
- $cos$、$sec$是偶函数
  - 

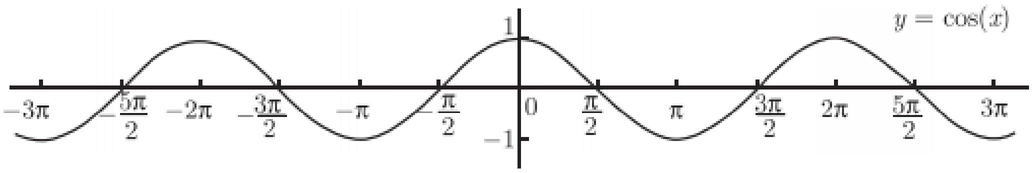

    图 2-15
  - 


    图 2-17

◦

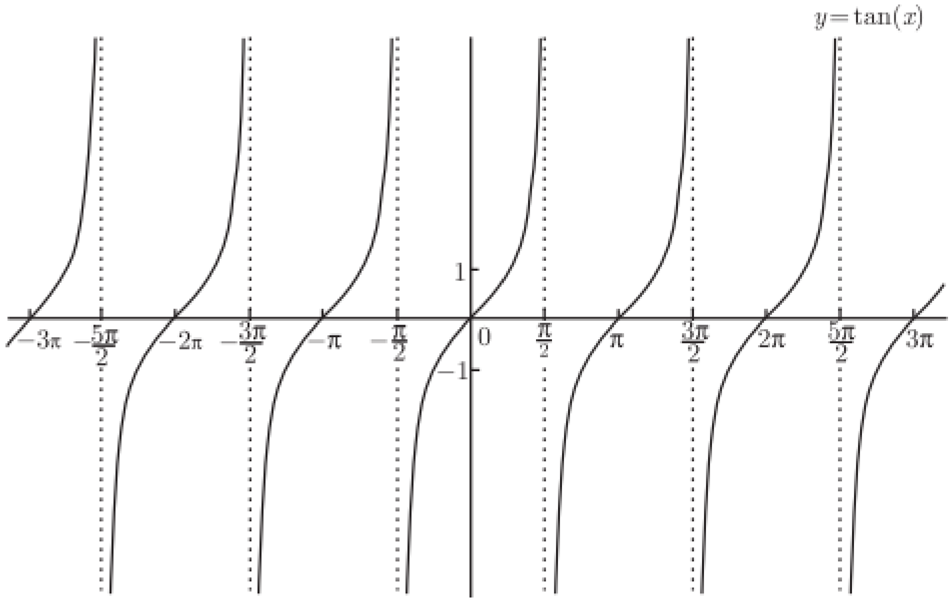



图　2-19

◦

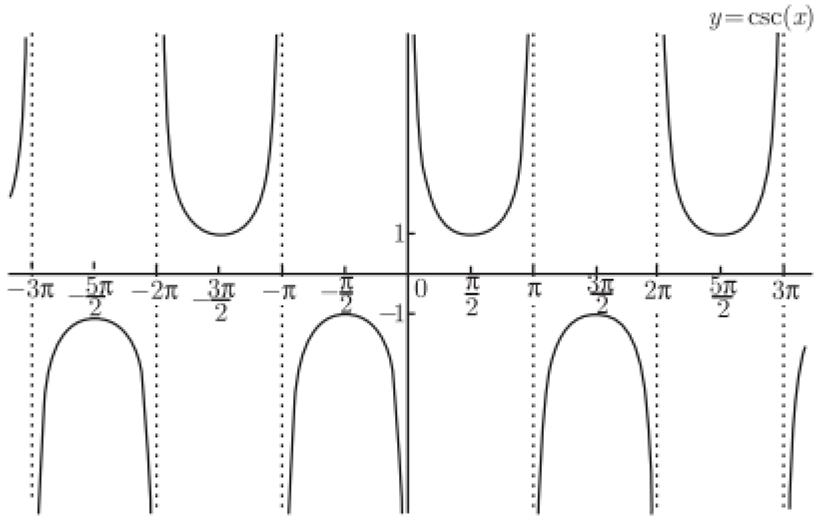



图　2-21

◦

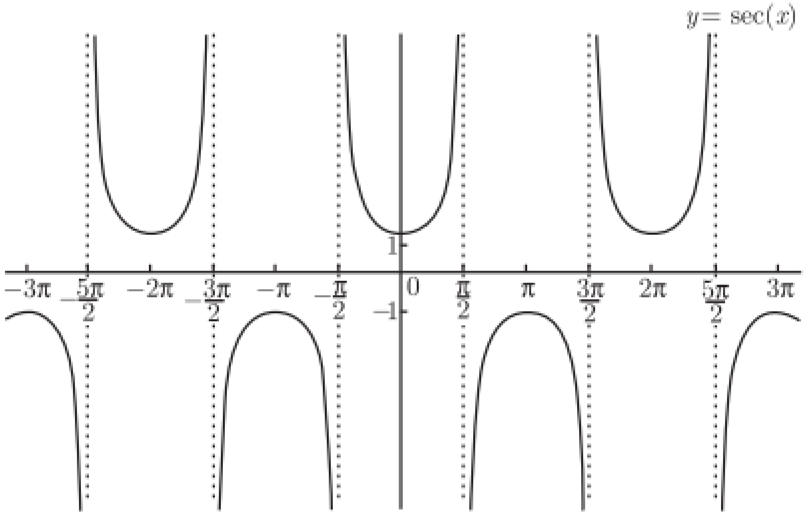



图　2-20

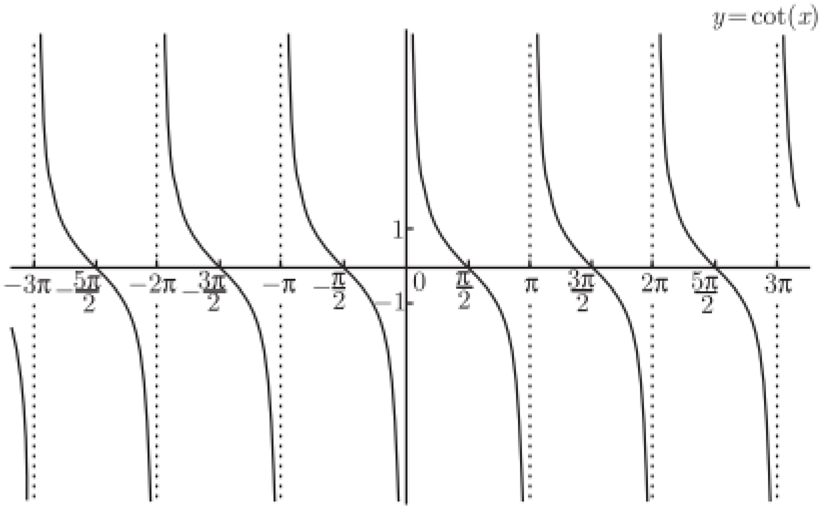
- 


图 2-22

## 1.6 三角恒等式

### 1.6.1 用正弦余弦表示正切余切

- $tan(x) = \frac{\sin(x)}{cos(x)}$
- $cot(x) = \frac{\cos(x)}{sin(x)}$

### 1.6.2 毕达哥拉斯定理

- $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$
- 两边同时除以$cos^2(x)$，可得
  - $1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} = sec^2(x)$
- 两边同时除以$sin^2(x)$，可得
  - $1 + cot^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)} = csc^2(x)$

### 1.6.3 互余

不带有`co`的三角函数，$sin$、$tan$、$sec$，和带有`co`的三角函数是互余的关系，当两个自变量相加等于$\frac{\pi}{2}$时，他们的值相等

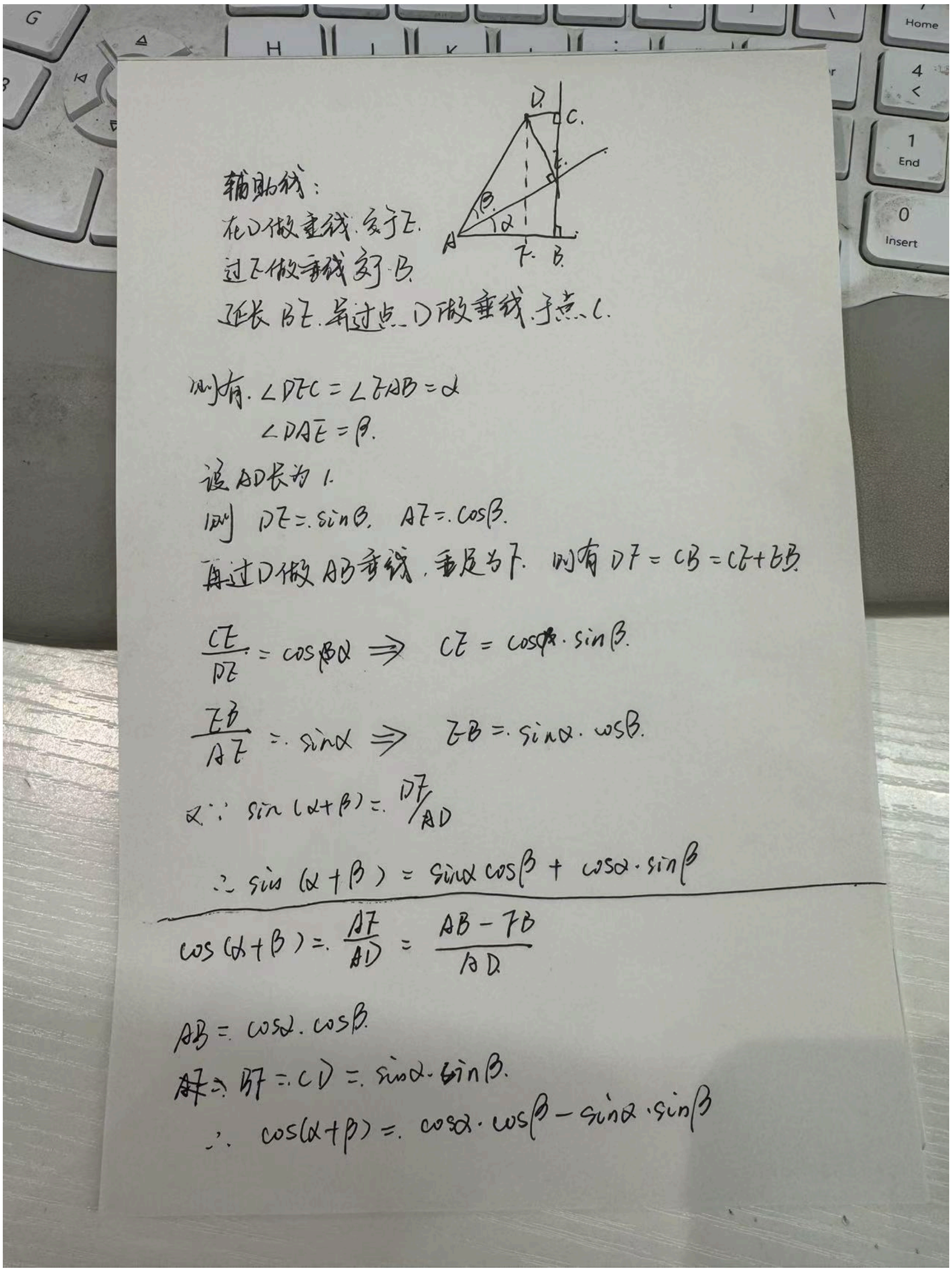
也即：

- $sin(x) = cos(\frac{\pi}{2} - x)$
- $tan(x) = cot(\frac{\pi}{2} - x)$
- $sec(x) = csc(\frac{\pi}{2} - x)$

反之也成立：

- $cos(x) = sin(\frac{\pi}{2} - x)$
- $cot(x) = tan(\frac{\pi}{2} - x)$
- $csc(x) = sec(\frac{\pi}{2} - x)$

### 1.6.4 和差公式

- 和公式
    - $sin(\alpha+\beta)=sin(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sin(\beta)$
    - $cos(\alpha+\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)-sin(\alpha)sin(\beta)$
    - 推导过程
        - 

辅助线：
在D做垂线，交于E.
过E做垂线交于B.
延长BE，并过点D做垂线于点C.

则有 $\angle DEC = \angle EAB = \alpha$
$\angle DAE = \beta$.
设AD长为1.
则 $DE = \sin\beta$, $AE = \cos\beta$.
再过D做AB垂线，垂足为F. 则有 $DF = CB = CE + EB$

$\frac{CE}{DE} = \cos\alpha \Rightarrow CE = \cos\alpha \cdot \sin\beta$.

$\frac{EB}{AE} = \sin\alpha \Rightarrow EB = \sin\alpha \cdot \cos\beta$.

又∵ $\sin(\alpha+\beta) = DF/AD$

∴ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \frac{AF}{AD} = \frac{AB - FB}{AD}$

$AB = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.
又∵ $FB = CD = \sin\alpha \cdot \sin\beta$.
∴ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$

- 差公式
    - $sin(\alpha-\beta)=sin(\alpha)cos(\beta)+cos(\alpha)sin(\beta)$
    - $cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha)cos(\beta)+sin(\alpha)sin(\beta)$
    - 通过$sin(\alpha-\beta)=sin(\alpha+(-\beta))$和$cos(\alpha-\beta)=cos(\alpha+(-\beta))$并结合$sin/cos$奇偶性即可推导出

### 1.6.5 倍角公式

- 将和公式中的$\alpha, \beta$替换为一样的角即可得出倍角公式
- $sin(2\alpha) = 2sin(\alpha)cos(\alpha)$
- $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$
  - 结合毕达哥拉斯公式，可知
    - $cos(2\alpha) = 2cos^2(\alpha) - 1$
    - 或
    - $cos(2\alpha) = 1 - 2sin^2(\alpha)$

### 1.6.6 半角公式

- 正弦：$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$
- 余弦： $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$
- 正切： $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$
- 证明过程

。

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$$

证：由倍角公式 $\cos(2\alpha) = 1-2\cdot\sin^2(\alpha)$ 可知

令 $\alpha = \frac{\theta}{2}$. 则有.

$$\cos(\theta) = 1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

$$\cancel{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}}$$

可知 $\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{2}$

$$\therefore \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\theta)}{2}}$$

---

$$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$$

证：同理、$\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)-1$.

则有 $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos(\theta)}{2}$

$$\therefore \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos(\theta)}{2}}$$

---

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)}$$

证：$\tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1-\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}$

$$\frac{(1-\cos(\theta))\cdot(1+\cos(\theta))}{(1+\cos(\theta))^2}$$

$$= \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}$$

$\because 1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 恒大于0.

则 $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 与 $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ 同号 $\Rightarrow$

$$\therefore \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1+\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\frac{(1-\cos\theta)^2}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}.$$