1. 线性方程组的表示法

1.1 一般形式

含有n个未知数，m个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

- 系数矩阵$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$
- 增广矩阵$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{bmatrix} = (A, b)$
- 未知数列向量$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$
- 常数项列向量$b = x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$

当常数项 b 均为0时，称为齐次线性方程组

当常数项 b 不全为0时，称为非齐次线性方程组

1.2 矩阵形式

$Ax = b$

1.3 向量形式

将系数矩阵分为列向量组，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$

$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = b$

- 若使用向量形式表示齐次线性方程组，则向量组的组合系数即为方程组的解

2. 线性方程组解的判定

2.1 非齐次线性方程组的判定

n元非齐次线性方程组有解的充分必要条件是，$r(A) = r(\overline{A})$

且当有解时

- 若$r(A) = r(\overline{A}) = n$，有唯一解
- 若$r(A) = r(\overline{A}) < n$，有无穷多解

- 进行初等行变换时只需对增广矩阵$\overline{A}$进行即可，因为去掉最后一列即为系数矩阵A的行阶梯矩阵

2.2 齐次线性方程组的判定

齐次线性方程组天然具有零解，判定的是在零解之外是否有非零解

> n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充分必要条件是，系数矩阵A的秩小于未知数个数，即$r(A)<n$

> n元齐次线性方程组$Ax=0$只有零解的充分必要条件是，系数矩阵A的秩等于未知数个数，即$r(A)=n$

- 推论
  1. 对于齐次线性方程组$Ax=0$，如果方程的个数小于未知数的个数，则$Ax=0$必有非零解
  2. 对于齐次线性方程组$Ax=0$，如果方程的个数等于未知数的个数，即系数矩阵是方阵，则（即克莱姆法则）
     - $Ax=0$有非零解$\Leftrightarrow |A|=0$
     - $Ax=0$只有零解$\Leftrightarrow |A|\neq 0$

3. 线性方程组解的性质

> 线性方程组的解，可以看成列向量，称为解向量，简称为解

3.1 齐次线性方程组的解的性质

1. 若ξ_1,ξ_2是齐次线性方程组$Ax=0$的两个解，则$\xi_1+\xi_2$也是$Ax=0$的解
2. 若ξ是齐次线性方程组$Ax=0$的解，则对任意常数k，有$k\xi$也是$Ax=0$的解
3. 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是齐次线性方程组$Ax=0$的两个解，则

   $c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_s\xi_s$，$(c_1,c_2,\cdots,c_s$是任意常数$)$也是$Ax=0$的解

3.2 非齐次线性方程组的解的性质

1. 设η_1, η_2是非齐次线性方程组$Ax = b$的任意两个解，则$\eta_1 - \eta_2$为其对应导出组$Ax = 0$的一个解
2. 设η是非齐次线性方程组$Ax = b$的解，ξ是其导出组$Ax = 0$的任一解，则$\eta + \xi$是非齐次线性方程组$Ax = b$的一个解
3. 若η^*是$Ax = b$的一个解，则$Ax = b$的任一解可表示为$\xi + \eta^*$，其中ξ是其导出组$Ax = 0$的解

4. 齐次线性方程组的基础解系

> 对于齐次线性方程组，引入了基础解系的概念
>
> 对于齐次线性方程组
>
> $\rightarrow$ 解向量的线性组合仍为方程组的解
>
> $\rightarrow$ 解向量组
>
> $\rightarrow$ *找到解向量组的极大线性无关组，即为基础解系*

4.1 基础解系的定义

> 设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$是齐次线性方程组$Ax = 0$的解向量，如果
>
> 1. $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$线性无关（意味着没有零向量！）
> 2. 方程组$Ax = 0$的任一解向量都可由$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$线性表示
>
> 则称，$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$是齐次线性方程组$Ax = 0$的一个基础解系

- 显然，若方程组$Ax = 0$只有零解，则没有基础解系

4.2 基础解系的存在及判定

- 存在性
  - 若$Ax=0$有非零解，则基础解系必存在
  - > 对于n元齐次线性方程组$Ax=0$，若$r(A)=r<n$，则$Ax=0$必存在基础解系，且基础解系中含有$n-r$个向量
  - 可以得到如下结论
    - $Ax=0$的基础解系存在$\Leftrightarrow Ax=0$存在非零解$\Leftrightarrow r(A)<n$
- 判定

> 当下列三条同时成立时，可以说，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是n元齐次线性方程组$Ax=0$的一个基础解系

1. $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$Ax=0$的解向量
2. $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性无关
3. 两个选一个即可
   1. 方程组$Ax=0$的任一解向量都可由$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示
   2. 向量组$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$中的向量个数$s=n-r(A)$

4.3 基础解系的性质和结论

- 基础解系$\Leftrightarrow$解向量组的极大线性无关组，因此，基础解系具备极大线性无关组的相关性质和结论

1. 当$Ax=0$有非零解时，基础解系存在
2. 若$Ax=0$的基础解系存在，则基础解系不唯一
3. $Ax=0$的不同基础解系之间可以互相线性表示
4. $Ax=0$的不同基础解系所含向量个数相等，均为$n-r(A)$
5. $Ax=0$的任意$n-r(A)$个线性无关的解向量都是它的基础解系

6. 若$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$是$Ax=0$的一个基础解系，则$Ax=0$的任一解都可以用$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_s$线性表示

4.4 基础解系的求法

1. 对方程组的系数矩阵A进行初等行变换，化为行简化阶梯矩阵B
2. 以B为系数矩阵，写出同解方程$Bx=0$
3. 确定自由未知量，通过自由未知量的特定取值，求出基础解系
   - 自由未知量个数为$n-r(A)$
   - 自由未知量的取值随意，但一般选择标准化的取值，即确定一个自由变量为1，其他为0

5. 线性方程组解的结构

5.1 齐次线性方程组解的结构

对于n元齐次线性方程组$Ax=0$，若系数矩阵A的秩$r(A)=r<n$，$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为其一个基础解系，则方程组$Ax=0$的通解可表示为

$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}$

其中，$c_1,c_2,\cdots,c_{n-r}$为任意常数

5.2 非齐次线性方程组解的结构

对于n元非齐次线性方程组$Ax=b$，若$r(A)=r(\overline{A})=r<n$，如果α_0是$Ax=b$的一个解（通常称为特解），$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}$为其导出组$Ax=0$的一个基础解系，则方程组$Ax=b$的通解可表示为

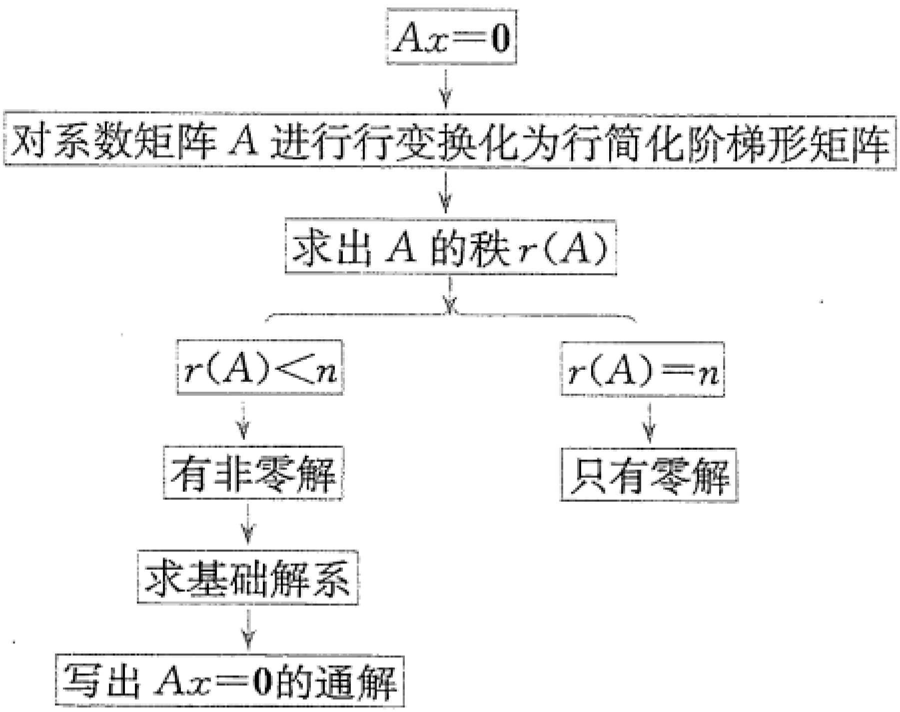
$$x = \alpha_0 + c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

其中，$c_1, c_2, \cdots, c_{n-r}$为任意常数

6. 线性方程组的求解

6.1 齐次线性方程组的求解

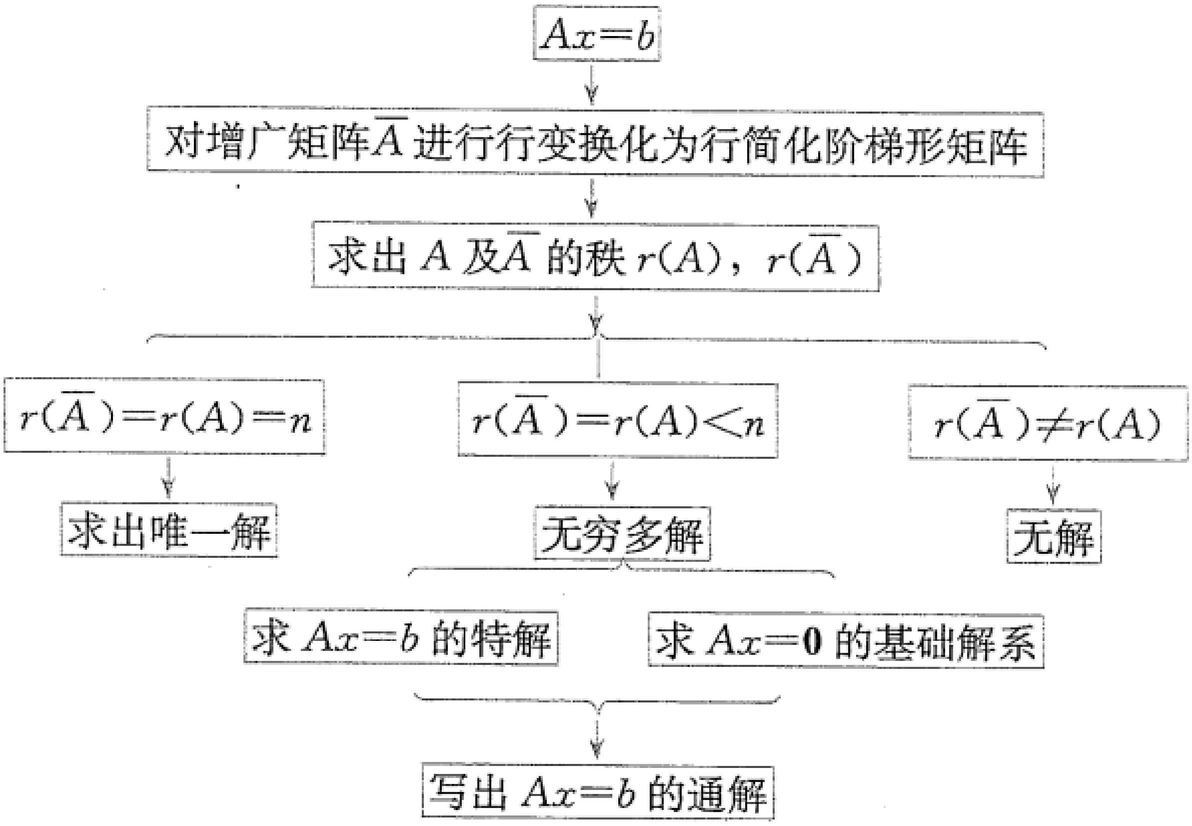
1. 对系数矩阵进行初等行变换，化为行简化阶梯矩阵，求出系数矩阵的秩
2. 判断秩，若为n，则只有零解，不为n，则有非零解，求出基础解系
3. 根据解的结构，写出方程组的通解



6.2 非齐次线性方程组的求解

1. 对增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换，化为行简化阶梯矩阵，求出系数矩阵和增广矩阵的秩，判断是否有解，及解的个数

2. 有解时，以行简化阶梯矩阵为增广矩阵，写出新的同解线性方程组，求出一个特解
3. 求出导出组的一个基础解系
4. 写出原方程组的一个通解



7. 线性方程组的公共解