

1. 根据定义求导

导数的定义如下：

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

那么一般情况下可以根据导数定义进行导函数的求解

需要注意的是，当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时，带入定义后可能出现不定式，也即出现 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{c}{0}$ $c \neq 0$ 的场景，此时不能简单的将 Δx 消掉

- 例，求 $f(x) = \sqrt{x} + x^2$ 的导数
- 解

Handwritten solution for the derivative of $f(x) = \sqrt{x} + x^2$ using the definition of a derivative.

$f(x) = \sqrt{x} + x^2$, 求 $f'(x)$.

则根据 $f'(x)$ 定义, 可知

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \frac{\sqrt{x + \Delta x} + (x + \Delta x)^2 - \sqrt{x} - x^2}{\Delta x}$$

考虑到此时无法约去分子分母中的 Δx , 所以进行拆项

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$$

令 $l_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ $l_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x}$

则 $l_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x})(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})}$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x (\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} \quad (\Delta x \text{ 约掉})$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$$
$$l_2 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x + \Delta x}{1} = 2x$$

$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 2x$

2. 更好的求导方法

2.1 函数的常数倍的导数

常数倍函数的导数，是指形如 $f(x) = Cg(x)$ C 为常数的函数

$$f(x) = Cg(x) \text{ 的导数为 } f' = Cg'$$

2.2 函数和与函数差的导数

$$f(x) = u(x) + v(x) \text{ 的导数为 } f' = u' + v'$$

$$f(x) = u(x) - v(x) \text{ 的导数为 } f' = u' - v'$$

2.3 根据乘积法则求积函数的导数

- 乘积法则 - 以函数形式体现

$$\text{设 } f(x) = h(x)g(x), \text{ 则}$$

$$f' = h'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- 乘积法则 - 以 dx 形式体现

$$\text{设 } y = uv, \text{ } u \text{ 和 } v \text{ 是关于 } x \text{ 的函数, 则}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$$

- 如果函数乘积多于两个，速记方法，以 dx 形式体现

乘积出现几次，就将乘积相加几次，然后逐个替换乘积中的函数为其导数

- 例子

- 设 $y = uvw$, uvw 是关于 x 的函数，则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}vw + u\frac{dv}{dx}w + uv\frac{dw}{dx}$$

2.4 根据商法则求商函数的导数

- 商法则 - 以函数形式体现

$$\text{设 } f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}, \text{ 则}$$

$$f' = \frac{h'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

- 商法则 - 以 dx 形式体现

$$\text{设 } y = \frac{u}{v}, \text{ } u \text{ 和 } v \text{ 是关于 } x \text{ 的函数, 则}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - \frac{dv}{dx}u}{v^2}$$

2.5 通过链式求导法则求复合函数的导数

- 链式求导法则 - 以函数形式体现

设 $f(x) = h(g(x))$, 则

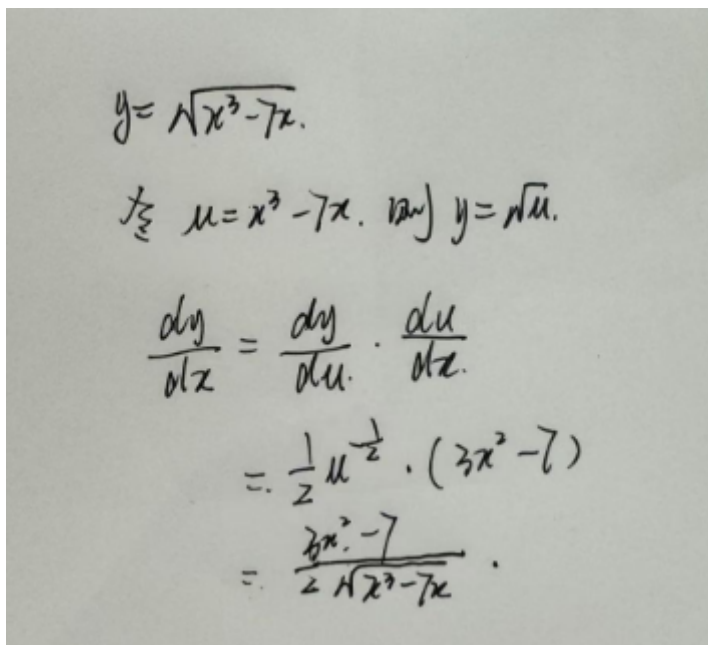
$$f' = h'(g(x))g'(x)$$

- 链式求导法则 - 以 dx 形式体现

设 y 是 u 的函数, u 是 x 的函数, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

- 链式求导法则可以看成按照函数复合的逆方向进行逐个求导并乘积, 外层求导时内部函数不变
 - 例 求函数 $y = \sqrt{x^3 - 7x}$ 的导数



Handwritten derivation of the derivative of $y = \sqrt{x^3 - 7x}$ using the chain rule:

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x^3 - 7x} \\ \text{令 } u &= x^3 - 7x, \text{ 则 } y = \sqrt{u} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 - 7) \\ &= \frac{3x^2 - 7}{2\sqrt{x^3 - 7x}} \end{aligned}$$

2.6 复杂函数求导例题

- 函数 $f(x) = \frac{3x^7 + x^4 \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}}{6x^2 - 4}$ 的导数

解:

$$\begin{aligned}
 & \text{求 } f(x) = \frac{3x^7 + x^4 \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}}{6x^2 - 4} \text{ 的导数} \\
 & \text{令 } u = 3x^7 + x^4 \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}, v = 6x^2 - 4 \\
 & \text{则 } f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} = \frac{u'}{6x^2 - 4} - \frac{(3x^7 + x^4 \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9})' \cdot 12x}{(6x^2 - 4)^2} \\
 & \text{再求 } u', \text{ 令 } p = 3x^7, q = x^4, r = \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9} \\
 & \text{则 } u' = 21x^6 + 4x^3 \cdot \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9} + x^4 \cdot r' \\
 & \text{再求 } r', \text{ 令 } z = 2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9 \\
 & \text{则 } r' = (\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot z', \quad z' = (10x^4 + \frac{20}{3}x^{1/3} - 23) \\
 & \therefore u' = 21x^6 + 4x^3 \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9} + \frac{x^4(10x^4 + \frac{20}{3}x^{1/3} - 23)}{2\sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}} \\
 & = 21x^6 + \frac{8x^3(2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9) + 10x^8 + \frac{20}{3}x^{7/3} - 23x^4}{2\sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}} \\
 & = 21x^6 + \frac{26x^8 + 140x^{7/3} - 207x^4 + 72x^3}{2\sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}} \\
 & \therefore f'(x) = \frac{21x^6 + \frac{26x^8 + 140x^{7/3} - 207x^4 + 72x^3}{2\sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9}}}{6x^2 - 4} - \frac{12x \cdot (3x^7 + x^4 \sqrt{2x^5 + 15x^{4/3} - 23x + 9})}{(6x^2 - 4)^2}
 \end{aligned}$$

3. 求解切线方程

1. 先求解出给定函数的导函数，带入给定的点，计算出斜率
2. 再根据给定的点和函数，算出切线上的点
3. 根据切线过的点和斜率，即可算出切线方程

4. 分段函数的导数

检验分段函数在分段点上，以及如果包含绝对值，要考虑绝对值中分段的点，是否可导，需要做以下校验：

- 分段函数在检验点上是否相等 \Rightarrow 验证连续性
- 分段函数的导数在检验点上是否相等 \Rightarrow 验证可导性
- 例 判断如下函数在分段点上是否可导

$$y = \begin{cases} |x^2 - 4| & x \leq 1 \\ -2x + 5 & x > 0 \end{cases}$$

由函数有绝对值, 因此要去掉绝对值分析.

$$y = \begin{cases} |x-4| & x \leq 1 \\ -x+5 & x > 1 \end{cases}$$

$$\text{即 } y = \begin{cases} x^2-4 & x \leq -2 \\ 4-x^2 & -2 \leq x \leq 1 \\ -x+5 & x > 1 \end{cases}$$

\therefore 需验证 $x=-2$ 和 $x=1$ 处的连续性和可导性.

$x=-2$ 时

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$$

$\therefore x=-2$ 时连续.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -2^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -4$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow -2^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 4$$

$\therefore x=-2$ 时不可导.

$x=1$ 时:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 1^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -2$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 1^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = -2$$

$\therefore x=1$ 时可导

• 解