1. 矩阵的概念

1.1 矩阵的概念

矩阵：$m\times n$个数$a_{ij}(\ i=1,2,3,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,n)$排列成一个$m$行$n$列的数表，称为一个$m\times n$矩阵

同型矩阵：矩阵A和矩阵B是同型矩阵$\Leftrightarrow$矩阵A和矩阵B的行数相等，列数也相等

矩阵相等：矩阵A和矩阵B相等$\Leftrightarrow A=B\Leftrightarrow\begin{cases}A\text{和}B\text{是同型矩阵；}\\ \text{对应位置元素相等}\end{cases}$

1.2 特殊矩阵

- 方阵
  - 行数和列数相等的矩阵，相等的行列数称为阶数
    - $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$
- 行矩阵
  - 只有一行的矩阵，也称为行向量
    - $\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$
- 列矩阵
  - 只有一列的矩阵，也称为列向量
    - $\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$
- 零矩阵
  - 元素全为0的矩阵
    - $\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

- 负矩阵
  - 将矩阵A的所有元素取其对应相反数后得到的矩阵，叫做A的负矩阵，记为$-A$
    - $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}$，则$-A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\-3 & -4\end{bmatrix}$
- 上三角矩阵
  - 主对角线下方的元素全部为0的方阵
- 下三角矩阵
  - 主对角线上方的元素全部为0的方阵
- 对角矩阵
  - 即使上三角矩阵，又是下三角矩阵，也即主对角线上方，下方元素全部为0的方阵
  - 记为$diag(a_1,a_2,...,a_n)$
- 数量矩阵
  - 主对角线元素是同一个常数的对角矩阵，记为kE
    -
- 单位矩阵
  - 主对角线元素全为1，其他位置元素全为0的方阵，记为E
    - n阶单位矩阵
    - $$E_n=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{bmatrix}$$

2. 矩阵的加法、减法、数乘

2.1 矩阵的加减法

> 两个同型矩阵相加，就是对应位置的元素相加

两个同型矩阵相减，就是对应位置的元素相减

- 加减法运算规律
  - $A+B=B+A$
  - $(A+B)+C=A+(B+C)$
  - $A+O=A$
  - $A+(-A)=O$
  - $A-B=A+(-B)$
  - $A+B=C \Leftrightarrow A=C-B$

2.2 矩阵的数乘

数k乘以矩阵A，就是用数k乘以矩阵A里的每个元素

- 运算规律
  - $k(A+B)=kA+kB$
  - $(k+l)A=kA+lA$
  - $k(lA)=(kl)A$
  - $1A=A$
  - $(-1)A=-A$

3. 矩阵的乘法

两个矩阵A、B，如果A的列数，等于B的行数，则A、B可以相乘得到一个新的乘积矩阵AB，乘法规则定义如下：

设$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$，$B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}_{n\times s}$，则乘积矩阵$AB=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}_{m\times s}$

其中，$c_{ij}=a_{i1}b_{j1}+a_{i2}b_{j2}+\cdots+a_{in}b_{nj}$，$i=1,2,3,\cdots,m;j=1,2,3,\cdots,s$

1. 只有左边矩阵的列数，等于右边矩阵的行数时，才能相乘
2. 乘积矩阵的行数，等于左边矩阵的行数，乘积矩阵的列数，等于右边矩阵的列数
3. 乘积矩阵的元素，等于左边矩阵的行，乘以右边矩阵的列
    - 乘积矩阵的第i行，第j列元素，等于左边矩阵的第i行，和右边矩阵的第j列元素对应相乘求和

3.1 矩阵乘法不满足的规律

- 矩阵的乘法不满足交换律
    - 当AB，BA都有意义时，AB，BA不一定相等
    - AB有意义，BA不一定有意义
- 矩阵的乘法不满足消去律
    - 若$AB=AC$，且$A\neq O$，推到不出$B=C$
    - 若$BA=CA$，且$A\neq O$，推到不出$B=C$
- 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵
    - 若$AB=O$，推到不出$A=O$或$B=O$

3.2 矩阵乘法满足的规律或性质

- 结合律
    - $(AB)C=A(BC)$

- 分配律 *注意C的左右位置不能动*
  - $(A+B)C=AC+BC$
  - $C(A+B)=CA+CB$
- 数乘与矩阵乘积
  - $k(AB)=(kA)B=A(kB)$
- 单位矩阵与矩阵相乘 *单位矩阵在矩阵乘法中相当于数乘1*
  - $AE=EA=A$
- 数量矩阵与矩阵相乘 *数量矩阵在矩阵乘法中相当于数乘*
  - 数量矩阵$A=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=aE$，则有$AB=aB$
- 两个对角矩阵相乘
  - $$\begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 & & & & \\ & b_2 & & & \\ & & b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1b_1 & & & & \\ & a_2b_2 & & & \\ & & a_3b_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_nb_n \end{bmatrix}$$
- 行列向量相乘 *顺序不同结果不同*
  - 行向量乘以列向量，结果是一个常数
  - 列向量乘以行向量，结果是一个矩阵
  - 若方阵A的任意两行(列)对应成比例，则方阵A可表示为$\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix}\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$

3.3 矩阵的可交换

> 若矩阵A，B，满足$AB=BA$，则称A和B可交换，否则为不可交换

> 可交换的矩阵，一定满足：
> - 一定是同阶方阵
>   - 不是同阶方阵一定不是可交换矩阵

- $AB = BA$
  - AB，BA不相等，一定不是可交互矩阵

单位矩阵E，和任一个同阶方阵可交换

两个同阶对角矩阵可交换

4. 方阵的幂

4.1 方阵的幂的定义

设A为方阵，k为正整数，则A的k次幂的定义为：

$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}_{k\text{个}}$

规定：$A^0 = E$

4.2 方阵的幂的性质

- 设A为方阵，k_1, k_2为非负整数，则有
  - $A^{k_1}A^{k_2} = A^{k_1+k_2}$
  - $(A^{k_1})^{k_2} = A^{k_1k_2}$
- $(lA)^k = l^kA^k, l$为常数，k为正整数
- 若矩阵A，B可交换，则有
  - $A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) = (A+B)(A-B)$
  - $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
  - $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
  - $(A-B)^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2)$
  - $(A+B)^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$

- $(AB)^k = A^k B^k$
- 一般有，不要求矩阵A，B可交换
  - $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$
  - $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
  - $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$
- 方阵多项式
  - 设$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，则有

    $f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$

5. 矩阵的转置

5.1 转置定义

> 将矩阵A的各行依次变为列(或各列依次变为行)后得到的矩阵，即为A的转置矩阵A^T
>
> > A和A^T互为转置矩阵
> >
> > 若A为$m \times n$矩阵，则A^T为$n \times m$矩阵

- 转置矩阵性质
  - $(A^T)^T = A$
  - $(A+B)^T = A^T + B^T$
  - $(A-B)^T = A^T - B^T$
  - $(kA)^T = kA^T$
  - $(AB)^T = B^T A^T$
    - 可以推广到m个矩阵积的转置矩阵
    - $(A_1 A_2 \cdots A_m)^T = A_m^T \cdots A_2^T A_1^T$
  - $(A^k)^T = (A^T)^k$

5.2 对称矩阵与反对称矩阵

- 对称矩阵 *必为方阵*

> 如果矩阵A满足$A=A^T$，则称矩阵A为对称矩阵

> 设矩阵A为n阶方阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若$a_{ij}=a_{ji}$ $i=1,2,3,\cdots,n$; $j=1,2,3,\cdots,n$，则称矩阵A为对称矩阵

  - 对称矩阵的性质
    - 若A，B为同阶对称矩阵，则$A+B$，$A-B$仍为对称矩阵
    - 若A为对称矩阵，则kA，A^m仍为对称矩阵，k为常数，m为正整数
    - 若A，B为同阶对称矩阵，则AB为对称矩阵的充要条件是$AB=BA$
    - 对任意$m\times n$矩阵A，则A^TA, AA^T均为对称矩阵
      - 若A为$m\times n$矩阵，且$AA^T=O$， 则$A=O$

        2. 【证明】由$AA^T=O$, 知AA^T是m阶方阵，且主对角线上元素分别为$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0, i=1,2,\cdots,m$，则

        $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{in}=0, i=1,2,\cdots,m$，所以$A=O$.

- 反对称矩阵 *必为方阵*

> 如果矩阵A满足$A^T=-A$，则称矩阵A为反对称矩阵

> 设矩阵A为n阶方阵，$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若$a_{ij}=-a_{ji}$ $i=1,2,3,\cdots,n$; $j=1,2,3,\cdots,n$，则称矩阵A为反对称矩阵

> 易知，反对称矩阵的主对角线上的元素均为0

  - 反对称矩阵的性质
    - 若A，B为同阶反对称矩阵，则$A+B$，$A-B$仍为反对称矩阵
    - 若A为反对称矩阵，则kA仍为对称矩阵，k为常数
    - 若A为反对称矩阵，k为正整数，则A^k为$\begin{cases}\text{对称矩阵,} & k\text{偶数}\\ \text{反对称矩阵,} & k\text{奇数}\end{cases}$

6. 方阵的行列式

设 n 阶方阵 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$，则 A 的行列式为 $|A|\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

> 矩阵A的行列式$|A|$为一个数
>
> 只有方阵才有行列式

- 方阵行列式的性质
  - $|A^T|=|A^T|=|A|$
  - $|kA|=k^n|A|$
  - $|AB|=|A|\cdot|B|$
  - $|A^m|=|A|^m$
  - $|E|=1$
  - 若A是奇数阶反对称矩阵，则$|A|=0$

7. 方阵的伴随矩阵

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，$|A|$中元素a_{ij}的代数余子式为A_{ij} $(i,j=1,2,3,\cdots,n)$，则矩阵A的伴随矩阵A^*的定义为

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

> - A^*的元素是a_{ij}的代数余子式，是把行的代数余子式放到列上

- 有且只有方阵才有伴随矩阵

- 伴随矩阵的性质
  - 对任意方阵A，有$AA^* = A^*A = |A|E$
    - 伴随矩阵是行的代数余子式放到列上，再结合异乘变零定理，可证
  - 若A为n阶方阵，则$|A^*| = |A|^{n-1}$
    - 根据第一个定理可知，$AA^* = |A|E$
      两边取行列式，则有，$|AA^*| = \big||A|E\big|$
      等号左边，根据矩阵行列式的性质有，$|AA^*| = |A||A^*|$
      等号右边，根据矩阵行列式的性质有，$\big||A|E\big| = |A|^n|E| = |A|^n$
      将上式两边同时除以$|A|$，（注意到当$|A|$为0时，性质一定成立）
      有，$|A^*| = |A|^{n-1}$
      证毕
  - 若A为方阵，则$(A^T)^* = (A^*)^T$
  - 若A为n阶方阵，k为常数，则$(kA)^* = k^{n-1}A^*$
    - $(kA)^*$在计算每个代数余子式时，相比较A^*，每个代数余子式都扩大了k^{n-1}倍
  - 若$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，则$A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
  - 若A为n阶方阵
    - 当$A^* = A^T$，可推导出元素a_{ij}等于其代数余子式A_{ij}
    - 当元素a_{ij}等于其代数余子式A_{ij}，可推导出$A^* = A^T$

8. 逆矩阵

- 定义
  - 逆矩阵

> 设A为n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB = BA = E$，则称矩阵A是可逆的，且B是A的逆矩阵，记作A^{-1}

> 若方阵A可逆，则其逆矩阵唯一，且$AA^{-1} = A^{-1}A = E$

> 方阵要么有逆矩阵，要么没有逆矩阵

- 奇异矩阵

> 设A为n阶方阵，若$|A| \neq 0$，则称矩阵A是非奇异矩阵，若$|A| = 0$，则称A是奇异矩阵

- 矩阵可逆的判定

> 方阵A可逆的充要条件是A为非奇异矩阵，即$|A| \neq 0$，并且当A可逆时，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
>
> > 利用该公式求逆矩阵，称为伴随矩阵法

> 对角矩阵$A = \begin{bmatrix} a_1 & & & & \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$可逆的充要条件是$a_1, a_2, \cdots, a_n$均不为0，且$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & & \\ & & \frac{1}{a_3} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$

> 设A是n阶方阵，若存在n阶方阵B，使得$AB = E$或$BA = E$，则A可逆，且$A^{-1} = B$

- 可逆矩阵的性质
  - 若方阵A可逆，则其逆矩阵A^{-1}也可逆，且$(A^{-1})^{-1} = A$
  - 若方阵A可逆，则
    - A^T也可逆，且$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
    - A^*也可逆，且$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
    - k为非零常数，则kA也可逆，且$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
    - m为正整数，则A^m也可逆，且$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
  - 若方阵A可逆，则

- $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
- $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$
- 若A,B为同阶可逆矩阵，则AB也可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
  - 可推广到有限个同阶方阵的情况，即，$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1}=A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$
- 解矩阵方程
  - 若A,B均为可逆矩阵，则矩阵方程，*要注意矩阵乘法的位置*
    - $AX=C$，其解为$X=A^{-1}C$
    - $XA=C$，其解为$X=CA^{-1}$
    - $AXB=C$，其解为$X=A^{-1}CB^{-1}$

9. 矩阵的初等变换

- 矩阵的初等变换分为行变换和列变换
  - 初等行变换

    > 矩阵的以下三种变换，称为矩阵的初等行变换
    > - 交换矩阵的两行
    > - 用数$k\neq 0$乘矩阵某行的全部元素
    > - 把矩阵某行的全部元素的l倍，加到另一行对应的元素上

  - 初等列变换

    > 矩阵的以下三种变换，称为矩阵的初等列变换
    > - 交换矩阵的两列
    > - 用数$k\neq 0$乘矩阵某列的全部元素
    > - 把矩阵某列的全部元素的l倍，加到另一列对应的元素上

  - 矩阵A经过初等变换得到矩阵B，记为$A\rightarrow B$
- 矩阵标准型

- 标准形定义

> 标准形矩阵：元素只有0和1，且矩阵左上角是一个单位矩阵，除此之外的元素都是0

- 标准形变换

> 任何矩阵A都可以经过初等变换，化为标准形矩阵，并称此标准形矩阵为矩阵A的标准形

  - 标准形矩阵中1的个数就是矩阵的秩

- 阶梯形矩阵
  - 行阶梯形矩阵

> 满足下方两个条件的矩阵，称为行阶梯形矩阵
>
> - 如果矩阵有零行，则零行都在非零行下方
> - 任一非零行，从左到右数的第一个非零元素（称为首非零元）所在的列，在这个元素下方（如果有的话）都是零

> 特别的，若行阶梯形矩阵的首非零元都是1，且首非零元所在列的其他元素都是0，则此矩阵为行简化阶梯形矩阵

  - 行阶梯形矩阵变换

> 任何矩阵都可经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵
>
> 任何矩阵都可经过若干次初等行变换化为行简化阶梯形矩阵
>
> 矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行简化阶梯形矩阵

10. 初等矩阵

- 初等矩阵定义

> 由单位矩阵E经过一次初等行或列变换得到的矩阵，称为初等矩阵

- 类型

  > $E(ij)$： 交换单位矩阵E的第i,j两行，或两列

  > $E(i(k))$：用非零数k乘以单位矩阵E的第i行或列

  > $E(ij(l))$：把单位矩阵E的第j行的l倍加到第i行

- 初等矩阵的性质
  - 初等矩阵的行列式都不为0
    - $E(ij) = -1$　　相当于交换了行列式两行或列，改变一次符号
    - $E(i(k)) = k$　　相当于对角线某个元素扩大了k倍
    - $E(ij(l)) = 1$　　虽然不是对角行列式，但仍是上三角或下三角行列式
  - 初等矩阵的转置矩阵仍是同种类型的初等矩阵
    - $E(ij)^T = E(ij)$
    - $E(i(k))^T = E(i(k))$
    - $E(ij(l))^T = E(j\color{red}{i}(l))$
  - 初等矩阵均可逆，且初等矩阵的逆矩阵仍为同种类型的初等矩阵
    - $E(ij)^{-1} = E(ij)$
    - $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$
    - $E(ij(l))^{-1} = E(ij(\color{red}{-l}))$
- 初等矩阵与矩阵的初等变换的关系
  - 设A为$m \times n$阶矩阵，则

  > 对A进行一次初等行变换，等于用同种类型的m阶初等矩阵左乘A，也即，用初等矩阵左乘A，等于对A实施一次相对应的初等行变换

  > 对A进行一次初等列变换，等于用同种类型的n阶初等矩阵右乘A，也即，用初等矩阵右乘A，等于对A实施一次相对应的初等列变换

11. 矩阵的等价$\cong$

- 矩阵等价定义

> 若矩阵A可以经过有限次初等变换化为矩阵B，则说A与B等价，记为$A \cong B$
>
> > $A \cong B \Leftrightarrow A \to B$

  - 等价矩阵一定是同型矩阵

- 矩阵等价的性质
  - 反身性，对任何矩阵A，都有$A \cong A$
  - 对称性，若矩阵$A \cong B$，则$B \cong A$
  - 传递性，若矩阵$A \cong B$，$B \cong A$，则$A \cong C$

- 矩阵等价的结论
  1. 任一个矩阵$A_{m\times n}$都和其标准形矩阵$D = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m\times n}$等价
  2. 矩阵A, B等价的充要条件（都是同型矩阵）
     1. 存在一些列初等矩阵$P_1, P_2, \cdots, P_s$; $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$，使$P_1P_2\cdots P_sAQ_1, Q_2\cdots Q_t = B$
     2. 存在可逆矩阵P, Q，使$PAQ = B$
     3. $r(A) = r(B)$
  3. 若矩阵$A \cong B$，则
     1. A与B的标准形相同
     2. A与B的秩相同，即$r(A) = r(B)$
  4. 若A, B为同阶方阵，且$A \cong B$，则，
     1. $|A| = k|B|\ (k \neq 0)$　　由性质2-1，或性质2-2，结合矩阵行列式性质即可知

2. A,B同时可逆，或同时不可逆　由性质2-1，或性质2-2，结合可逆的定义即可知

5. 设A为n阶方阵，则A可逆的充要条件为
   1. $A \cong E$
   2. A可以表示为有限个初等矩阵的乘积

12. 初等变换法求逆矩阵

- 初等变换法求逆矩阵步骤　*适用于高阶矩阵*
  1. 利用矩阵A和同阶单位矩阵E，做$n \times 2n$矩阵
  2. 对$(A\vdots E)$进行初等**行**变换，将其化为**行简化阶梯形矩阵**
     - $(A\vdots E) \xrightarrow{\text{行}} (B\vdots D)$
       - $(B\vdots D)$是行简化阶梯形矩阵
       - 对应的有$A \xrightarrow{\text{行}} B$，$E \xrightarrow{\text{行}} D$
  3. 结果判定，$\begin{cases} \text{若}B = E,\text{则}A\text{可逆},\text{且}A^{-1} = D \\ \text{若}B \neq E,\text{则}A\text{不可逆} \end{cases}$

> 在对$(A\vdots E)$进行初等行变换时，如果过程中发现A对应的左子块的行列式为0，即可终止算法并判断A不可逆

- 初等变换法求矩阵方程
  - $AX = B$
    - 将A和B拼接位$n \times 2n$的矩阵$(A\vdots B)$
    - 进行初等行变换，当A对应的左子块变为E时，右子块就是X的解
  - $XA = B$
    - 先对两边同时取转置矩阵，化为$A^TX^T = B^T$的形式
    - 在按照$AX = B$的方法求解出X^T
    - 对X^T进行转置得到X即可

13. 分块矩阵

- 分块矩阵的定义
  - 定义

> 设A是一个矩阵，将A用若干纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为矩阵A的子块，该过程就是分块过程，分块以后的矩阵A称为分块矩阵

    - 按行分块后，得到的四个行向量称为矩阵A的行向量组
    - 按列分块后，得到的四个列向量称为矩阵A的列向量组
  - 特殊的分块矩阵
    - 上三角分块矩阵
      - $\begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix}$其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为方阵
    - 下三角分块矩阵
      - $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & A_k \end{bmatrix}$其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为方阵
    - 对角分块矩阵
      - $\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$其中$A_1, A_2, \cdots, A_k$均为方阵
- 分块矩阵的运算
  - 分块矩阵的加法和数乘

- 设矩阵$A_{m\times n}$和$B_{m\times n}$按照同一方式分块，$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1t}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{s1}&B_{s2}&\cdots&B_{st}\end{bmatrix}$，则
  - $A+B=\begin{bmatrix}A_{11}+B_{11}&A_{12}+B_{12}&\cdots&A_{1t}+B_{1t}\\A_{21}+B_{21}&A_{22}+B_{22}&\cdots&A_{2t}+B_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}+B_{s1}&A_{s2}+B_{s2}&\cdots&A_{st}+B_{st}\end{bmatrix}$
  - $kA=A=\begin{bmatrix}kA_{11}&kA_{12}&\cdots&kA_{1t}\\kA_{21}&kA_{22}&\cdots&kA_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\kA_{s1}&kA_{s2}&\cdots&kA_{st}\end{bmatrix}$

- 分块矩阵的乘法
  - 设矩阵$A_{m\times l}$和$B_{l\times n}$把A,B分块，使得A的列分块和B的行分块相同，$A=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1t}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{st}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&\cdots&B_{1r}\\B_{21}&B_{22}&\cdots&B_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{t1}&B_{t2}&\cdots&B_{tr}\end{bmatrix}$，则
    - $AB=A=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&\cdots&C_{1r}\\C_{21}&C_{22}&\cdots&C_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{s1}&A_{s2}&\cdots&A_{sr}\end{bmatrix}$
      - 其中，$C_{ij}=A_{i1}B_{1j}+A_{i2}B_{2j}+\cdots+A_{it}B_{tj}\ \ i=1,2,\cdots,s;\ j=1,2,\cdots,r$
  - 特别的，如果A,B是同阶对角分块矩阵，且分块方式相同，$\begin{bmatrix}A_1&&&\\&A_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_k\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}B_1&&&\\&B_2&&\\&&\ddots&\\&&&B_k\end{bmatrix}$，则
    - $AB=\begin{bmatrix}A_1B_1&&&\\&A_2B_2&&\\&&\ddots&\\&&&A_kB_k\end{bmatrix}$

- $$A^m=\begin{bmatrix}A_1^m & & & \\ & A_2^m & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^m\end{bmatrix}$$
- 分块矩阵的转置
  - 分块矩阵的转置，是将各行子块依次转为列子块，并且每个子块内部也要进行转置
  - $$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st}\end{bmatrix}，则A^T=\begin{bmatrix}A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T\\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T\end{bmatrix}$$
- 分块矩阵的逆矩阵
  - 三角分块矩阵
    - 设A,B为方阵，则，
      - $\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}$ 可逆，$\Leftrightarrow A,B$ 都可逆，且 $\begin{bmatrix}A & C\\ O & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1}\\ O & B^{-1}\end{bmatrix}$
      - $\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}$ 可逆，$\Leftrightarrow A,B$ 都可逆，且 $\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix}$
  - 对角分块矩阵
    - 设$A_1,A_2,\ldots,A_k$为方阵，则
      - $\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k\end{bmatrix}$可逆，$\Leftrightarrow A_1,A_2,\ldots,A_k$均可逆，且 $\begin{bmatrix}A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1}\end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}$ 可 逆 ， $\Leftrightarrow A_1, A_2, \ldots, A_k$ 均 可 逆 ， 且 $\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \cdots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & \cdots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$

- 分块矩阵的行列式
  - 设$A_1, A_2, \ldots, A_k$为方阵，则
    - $\left|\begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix}\right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \cdots \bullet |A_k|$
    - $\left|\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & A_k \end{bmatrix}\right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \cdots \bullet |A_k|$
    - $\left|\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}\right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \cdots \bullet |A_k|$
  - 设A为m阶方阵，B为n阶方阵，则
    - $\left|\begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$
    - $\left|\begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$
    - $\left|\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}\right| = (-1)^{mn}|A| \cdot |B|$

14. 矩阵的秩

- 秩的定义
  - 矩阵的子式

> 设矩阵$A=(a_{ij})_{mn}$，在A中任取k行k列（$k\le min(m,n)$），位于这些行列交叉点处的k^2个元素，按照他们在A中的相对位置不变，得到的k阶行列式，称为矩阵A的一个k阶子式
>
> - 一阶子式即为元素本身
> - 若A为n阶矩阵，则A的n阶子式即为$|A|$

- 矩阵的秩

> 矩阵A中，非零子式的最高阶数，称为矩阵A的秩，记作$r(A)$
>
> - 零矩阵没有非零子式，规定零矩阵的秩为0
> - 若$A\neq O$，则$r(A)\ge 1$
> - 对任意矩阵$A_{m\times n}$，有$0\le r(A)\le min(m,n)$

> 设矩阵$A=(a_{ij})_{mn}$
>
> - 若$r(A)=min(m,n)$，则称矩阵A为满秩矩阵
>   - 若$r(A)=m$，称为行满秩矩阵
>   - 若$r(A)=n$，称为列满秩矩阵
> - 若$r(A)<min(m,n)$，则称矩阵A为降秩矩阵

> 特别的，若A为n阶方阵，若$r(A)=n$，则称A为满秩矩阵，若$r(A)<n$，则称A为降秩矩阵
>
> 可通过定理推出，若A为n阶方阵
>
> - A满秩$\Leftrightarrow r(A)=n\Leftrightarrow |A|\neq 0\Leftrightarrow A$可逆 $\Leftrightarrow A$为非奇异矩阵
> - A降秩$\Leftrightarrow r(A)<n\Leftrightarrow |A|=0\Leftrightarrow A$不可逆 $\Leftrightarrow A$为奇异矩阵

- 矩阵的秩相关的结论
  1. $r(A)=r(r>0)\Leftrightarrow$矩阵$A$中至少有一个$r$阶子式不等于零，而所有的$r+1$阶子式都为零，或者没有$r+1$阶子式
  2. $r(A)\ge r\Leftrightarrow$矩阵A中至少有一个r阶子式不等于零
  3. $r(A)<r\Leftrightarrow$矩阵A中所有r阶子式都为零
  4. 转置矩阵，负矩阵，数乘矩阵的秩
     1. $r(A)=r(A^T)$

2. $r(A)=r(-A)$
3. $r(A)=r(kA)\ k\neq 0$

5. $r(A)=0 \Leftrightarrow A=O$; $r(A)\neq 0 \Leftrightarrow A\neq O$
6. 若$A\neq O$，则A任意两行或两列成比例$\Leftrightarrow r(A)=1$
7. 若A为行阶梯矩阵，则$r(A)=A$中非零行的行数
8. 初等变换不改变矩阵的秩，即若$A\cong B$，有$r(A)=r(B)$
9. 若A,B为同型矩阵，则$A\cong B\Leftrightarrow r(A)=r(B)$
10. 若A的标准型为$D=\begin{bmatrix}1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{bmatrix}$，则$r(A)$等于$D$中1的个数
11. 若A,B同为$m\times n$阶矩阵，则$r(A+B)\leq r(A)+r(B)$
12. 若 A 为 $m\times n$ 阶矩阵，B 为 $n\times s$ 阶矩阵，则 $r(A)+r(B)-n\leq r(AB)\leq min(r(A),r(B))$
13. 若A为$m\times n$阶矩阵，B为$n\times s$阶矩阵，且$AB=O$，则$r(A)+r(B)\leq n$
14. $r(A^TA)=r(AA^T)=r(A)$
15. 若A为可逆方阵，则$r(AB)=r(B)\ \ r(CA)=r(C)$
16. 若A为n阶方阵$(n\geq 2)$，A^*为A的伴随矩阵，则$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\ 1, & r(A)=n-1\\ 0, & r(A)<n-1\end{cases}$

- 求解矩阵的秩
  - 定义法

    > 若矩阵A中有不等于零的r阶子式，且所有$r+1$阶子式都为零，或者没有$r+1$阶子式，则$r(A)=A$

  - 初等变换法

    > 利用矩阵的初等行变换，将矩阵化为行阶梯矩阵，则行阶梯矩阵中非零行的行数即为矩阵的秩

  - 行列式法

若A为n阶方阵，求$|A|$，若$\begin{cases} 若|A| \neq 0 & r(A)=n \\ 若|A|=0 & r(A)<n \end{cases}$

- 利用矩阵秩的结论