

1. 矩阵的概念

* 1.1 矩阵的概念

i 矩阵： $m \times n$ 个数 a_{ij} ($i = 1, 2, 3, \dots, m; j = 1, 2, 3, \dots, n$) 排列成一个 m 行 n 列的数表，称为一个 $m \times n$ 矩阵

i 同型矩阵： 矩阵 A 和矩阵 B 是同型矩阵 \Leftrightarrow 矩阵 A 和矩阵 B 的行数相等，列数也相等

i 矩阵相等： 矩阵 A 和矩阵 B 相等 $\Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \text{ 和 } B \text{ 是同型矩阵;} \\ \text{对应位置元素相等} \end{cases}$

* 1.2 特殊矩阵

- 方阵
 - 行数和列数相等的矩阵，相等的行列数称为阶数
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$
- 行矩阵
 - 只有一行的矩阵，也称为行向量
 - $[1 \quad 2]$
- 列矩阵
 - 只有一列的矩阵，也称为列向量
 - $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
- 零矩阵
 - 元素全为0的矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

○ 负矩阵

- 将矩阵 A 的所有元素取其对应相反数后得到的矩阵，叫做 A 的负矩阵，记为 $-A$

$$\text{○ } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \text{ 则 } -A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$$

○ 上三角矩阵

- 主对角线下方的元素全部为0的方阵

○ 下三角矩阵

- 主对角线上方的元素全部为0的方阵

○ 对角矩阵

- 即使上三角矩阵，又是下三角矩阵，也即主对角线上方，下方元素全部为0的方阵

- 主对角线元素可以是0

- 记为 $\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$

○ 数量矩阵

- 主对角线元素是同一个常数的对角矩阵，记为 kE

$$\text{○ } E_n = \begin{bmatrix} k & & & \\ & k & & \\ & & k & \\ & & & \ddots \\ & & & & k \end{bmatrix}$$

○ 单位矩阵

- 主对角线元素全为1，其他位置元素全为0的方阵，记为 E

- n 阶单位矩阵

$$\text{○ } E_n = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

2. 矩阵的加法、减法、数乘

✧ 2.1 矩阵的加减法

i 两个同型矩阵相加，就是对应位置的元素相加

i 两个同型矩阵相减，就是对应位置的元素相减

○ 加减法运算规律

- $A + B = B + A$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$
- $A + O = A$
- $A + (-A) = O$
- $A - B = A + (-B)$
- $A + B = C \Leftrightarrow A = C - B$

✧ 2.2 矩阵的数乘

i 数 k 乘以矩阵 A ，就是用数 k 乘以矩阵 A 里的每个元素

○ 注意与行列式数乘的区别

- 行列式是将某一行/列的公因子提到外边一次
- 矩阵是将所有元素的公因子提到外边一次

○ 运算规律

- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + l)A = kA + lA$
- $k(lA) = (kl)A$
- $1A = A$
- $(-1)A = -A$

3. 矩阵的乘法

两个矩阵 A 、 B ，如果 A 的列数，等于 B 的行数，则 A 、 B 可以相乘得到一个新的乘积矩阵 AB ，乘法规则定义如下：

① 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{ns} \end{bmatrix}_{n \times s}$, 则乘积矩阵

$$AB = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1s} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{ms} \end{bmatrix}_{m \times s}$$

其中, $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, m; j = 1, 2, 3, \cdots, s$

- ① 只有左边矩阵的列数，等于右边矩阵的行数时，才能相乘
- ② 乘积矩阵的行数，等于左边矩阵的行数，乘积矩阵的列数，等于右边矩阵的列数
- ③ 乘积矩阵的元素，等于左边矩阵的行，乘以右边矩阵的列
 - 乘积矩阵的第 i 行，第 j 列元素，等于左边矩阵的第 i 行，和右边矩阵的第 j 列元素对应相乘求和

✧ 3.1 矩阵乘法 不满足 的规律

- 矩阵的乘法 不满足 交换律
 - 当 AB ， BA 都有意义时， AB ， BA 不一定相等
 - AB 有意义， BA 不一定有意义
- 矩阵的乘法 不满足 消去律
 - 若 $AB = AC$ ，且 $A \neq O$ ，推到不出 $B = C$
 - 若 $BA = CA$ ，且 $A \neq O$ ，推到不出 $B = C$
- 两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵
 - 若 $AB = O$ ，推到不出 $A = O$ 或 $B = O$

- 第二点和第三点的例子

- 矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

- 则 $AB = AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 且 $A \neq 0$, 但是 $B \neq C$

- 则 $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, 但是 $A \neq 0, B \neq 0$

* 3.2 矩阵乘法 满足 的规律或性质

- 结合律

- $(AB)C = A(BC)$

- 分配律 注意C的左右位置不能动

- $(A + B)C = AC + BC$

- $C(A + B) = CA + CB$

- 数乘与矩阵乘积

- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

- 单位矩阵与矩阵相乘 单位矩阵在矩阵乘法中相当于数乘1

- $AE = EA = A$

- 数量矩阵与矩阵相乘 数量矩阵在矩阵乘法中相当于数乘

- 数量矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix} = aE$, 则有 $AB = aB$

- 两个对角矩阵相乘

- $$\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & & & \\ & b_2 & & \\ & & b_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & & & \\ & a_2 b_2 & & \\ & & a_3 b_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_n b_n \end{bmatrix}$$

- 行列向量相乘 顺序不同结果不同

- 行向量乘以列向量, 结果是一个 **常数**

- 列向量乘以行向量, 结果是一个 **矩阵**

○

若方阵 A 的任意两行(列)对应成比例, 则方阵 A 可表示为

$$\begin{bmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \end{bmatrix}$$

- 可以选取矩阵的某个首元 a_{1i} 不为0的列向量 α , 再选取某个行列向量, 并用 a_{1i} 除以该行向量, 得到新行向量 β^T , 则方阵可化为 $\alpha\beta^T$

* 3.3 矩阵的可交换

i 若矩阵 A, B , 满足 $AB = BA$, 则称 A 和 B 可交换, 否则为不可交换

可交换的矩阵, 一定满足:

- 一定是同阶方阵

i ○ 不是同阶方阵一定不是可交换矩阵

- $AB = BA$

- AB, BA 不相等, 一定不是可交互矩阵

i 单位矩阵 E , 和任一一个同阶方阵可交换

i 两个同阶对角矩阵可交换

4. 方阵的幂

* 4.1 方阵的幂的定义

设 A 为方阵, k 为正整数, 则 A 的 k 次幂的定义为:

i
$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ 个}}$$

规定: $A^0 = E$

- 只有方阵才有幂!

✧ 4.2 方阵的幂的性质

- 设 A 为方阵, k_1, k_2 为非负整数, 则有
 - $A^{k_1} A^{k_2} = A^{k_1+k_2}$
 - $(A^{k_1})^{k_2} = A^{k_1 k_2}$
- $(lA)^k = l^k A^k$, l 为常数, k 为正整数
- 若矩阵 A, B 可交换, 则有

i 若 A, B 不可交换, 则该项内容等式均不成立

- $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) = (A + B)(A - B)$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A - B)^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$
- $(A + B)^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$
- $(AB)^k = A^k B^k$
- 一般有, 不要求矩阵 A, B 可交换
 - $(A + B)(A - B) = A^2 + BA - AB - B^2$
 - $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$
 - $(A - B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$
- 方阵多项式
 - 设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 则有
$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1} A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 E$$

5. 矩阵的转置

✧ 5.1 转置定义

将矩阵 A 的各行依次变为列(或各列依次变为行)后得到的矩阵, 即为 A 的转置矩阵 A^T

i

A 和 A^T 互为转置矩阵

i

若 A 为 $m \times n$ 矩阵, 则 A^T 为 $n \times m$ 矩阵

- 转置矩阵性质
 - $(A^T)^T = A$
 - $(A + B)^T = A^T + B^T$
 - $(A - B)^T = A^T - B^T$
 - $(kA)^T = kA^T$
 - $(AB)^T = B^T A^T$
 - 可以推广到 m 个矩阵积的转置矩阵
 - $(A_1 A_2 \cdots A_m)^T = A_m^T \cdots A_2^T A_1^T$
 - $(A^k)^T = (A^T)^k$

✧ 5.2 对称矩阵与反对称矩阵

- 对称矩阵 必为方阵

i

如果矩阵 A 满足 $A = A^T$, 则称矩阵 A 为对称矩阵

也即, 第 i 行等于第 i 列

i

设矩阵 A 为 n 阶方阵, $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $a_{ij} = a_{ji}$ $i = 1, 2, 3, \cdots, n; j = 1, 2, 3, \cdots, n$, 则称矩阵 A 为对称矩阵

- 对称矩阵的性质

- 若 A, B 为同阶对称矩阵, 则 $A + B, A - B$ 仍为对称矩阵
- 若 A 为对称矩阵, 则 kA, A^m 仍为对称矩阵, k 为常数, m 为正整数
- 若 A, B 为同阶对称矩阵, 则 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB = BA$
- 对任意 $m \times n$ 矩阵 A , 则 $A^T A, AA^T$ 均为对称矩阵
 - 若 A 为 $m \times n$ 矩阵, 且 $AA^T = O$, 则 $A = O$

2. 【证明】由 $AA^T = O$, 知 AA^T 是 m 阶方阵, 且主对角线上元

素分别为 $a_{11}^2 + a_{12}^2 + \cdots + a_{1m}^2 = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, 则

$a_{11} = a_{12} = \cdots = a_{1m} = 0, i = 1, 2, \cdots, m$, 所以 $A = O$.

- 反对称矩阵 必为方阵

i

如果矩阵 A 满足 $A^T = -A$, 则称矩阵 A 为反对称矩阵

也即, 第 i 行等于第 i 列的相反数

i

设 矩 阵 A 为 n 阶 方 阵 , $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $a_{ij} = -a_{ji} \ i = 1, 2, 3, \cdots, n; j = 1, 2, 3, \cdots, n$, 则称矩阵 A 为反对称矩阵

i

易知, 反对称矩阵的主对角线上的元素均为0

- 反对称矩阵的性质
 - 若 A, B 为同阶反对称矩阵, 则 $A + B, A - B$ 仍为反对称矩阵
 - 若 A 为反对称矩阵, 则 kA 仍为对称矩阵, k 为常数
 - 若 A 为反对称矩阵, k 为正整数, 则 A^k 为 $\begin{cases} \text{对称矩阵,} & k \text{ 偶数} \\ \text{反对称矩阵,} & k \text{ 奇数} \end{cases}$

6. 方阵的行列式

i

做题时, 在写矩阵的行列式前, 要知道到底是不是方阵

设 n 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ ，则 A 的行列式为 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

i

矩阵 A 的行列式 $|A|$ 为一个数

i

只有方阵才有行列式

○ 方阵行列式的性质

○ $|A^T| = |A^T| = |A|$

○ $|kA| = k^n |A|$

○ $|AB| = |A| \cdot |B|$

○ 该条性质的前提，是 A, B 都是 n 阶方阵，如果是 $|A_{2 \times 3} B_{3 \times 2}|$ ，则不能使用该条性质，因为只有方阵才有行列式， $A_{2 \times 3}$ ， $B_{3 \times 2}$ 均不是方阵，但是 $A_{2 \times 3} B_{3 \times 2}$ 是方阵

○ $|A^m| = |A|^m$

○ $|E| = 1$

○ 若 A 是奇数阶反对称矩阵，则 $|A| = 0$

7. 方阵的伴随矩阵

设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ ， $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, \dots, n$)，则矩阵 A 的伴随矩阵 A^* 的定义为

$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$

i

○ A^* 的元素是 a_{ij} 的代数余子式，是把行的代数余子式放到列上

i

○ 有且只有方阵才有伴随矩阵

○ 伴随矩阵的性质

○ 对任意方阵 A ，有 $AA^* = A^*A = |A|E$

○ 伴随矩阵是行的代数余子式放到列上，再结合异乘变零定理，可证

○ 不论 A 是否可逆，该等式都成立

○ 若 A 为 n 阶方阵，则 $|A^*| = |A|^{n-1}$

○ 根据第一个定理可知， $AA^* = |A|E$
两边取行列式，则有， $|AA^*| = ||A|E|$
等号左边，根据矩阵行列式的性质有， $|AA^*| = |A||A^*|$
等号右边，根据矩阵行列式的性质有， $||A|E| = |A|^n|E| = |A|^n$
将上式两边同时除以 $|A|$ ，（注意到当 $|A|$ 为0时，性质一定成立）
有， $|A^*| = |A|^{n-1}$
证毕

○ 不论 A 是否可逆，该等式都成立

○ 若 A 为方阵，则 $(A^T)^* = (A^*)^T$

○ 若 A 为 n 阶方阵， k 为常数，则 $(kA)^* = k^{n-1}A^*$

○ $(kA)^*$ 在计算每个代数余子式时，相比较 A^* ，每个代数余子式都扩大了 k^{n-1} 倍

○ 若 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，则 $A^* = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

○ 主对角线位置互换，副对角线取相反数

○ 若 A 为 n 阶方阵

○ 当 $A^* = A^T$ ，可推导出元素 a_{ij} 等于其代数余子式 A_{ij}

○ 当元素 a_{ij} 等于其代数余子式 A_{ij} ，可推导出 $A^* = A^T$

○ 再结合行列式 $|A|$ 等于元素 a_{ij} 和 A_{ij} 的和，可以求出相关题目

8. 逆矩阵



做题时，在写 A^{-1} 前，要么题干说了 A 可逆，要么自己证明了 $|A| \neq 0$

○ 定义

○ 逆矩阵

i

设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B ，使得 $AB = BA = E$ ，则称矩阵 A 是可逆的，且 B 是 A 的逆矩阵，记作 A^{-1}

i

若方阵 A 可逆，则其逆矩阵**唯一**，且 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$

i

方阵要么有逆矩阵，要么没有逆矩阵

○ 奇异矩阵

i

设 A 为 n 阶方阵，若 $|A| \neq 0$ ，则称矩阵 A 是非奇异矩阵，若 $|A| = 0$ ，则称 A 是奇异矩阵

○ 矩阵可逆的判定

i

方阵 A 可逆的**充要条件**是 A 为非奇异矩阵，即 $|A| \neq 0$ ，并且当 A 可逆时， $A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*$

i

利用该公式求逆矩阵，称为**伴随矩阵法**

i

对角矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_n \end{bmatrix}$ 可逆的充要条件是 a_1, a_2, \dots, a_n **均**不为0，且

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_1} & & & \\ & \frac{1}{a_2} & & \\ & & \frac{1}{a_3} & \\ & & & \ddots \\ & & & & \frac{1}{a_n} \end{bmatrix}$$

i

设 A 是 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B ，使得 $AB = E$ 或 $BA = E$ ，则 A 可逆，且 $A^{-1} = B$

○ 可逆矩阵的性质

○ 若方阵 A 可逆，则其逆矩阵 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1} = A$

- 若方阵 A 可逆, 则
 - A^T 也可逆, 且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
 - A^* 也可逆, 且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$
 - k 为非零常数, 则 kA 也可逆, 且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$
 - m 为正整数, 则 A^m 也可逆, 且 $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$
- 若方阵 A 可逆, 则
 - $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
 - $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$
- 若 A, B 为同阶可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
 - 可推广到有限个同阶方阵的情况, 即, $(A_1A_2 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$
- 解矩阵方程

i 永远不要把矩阵放到分母上

- 若 A, B 均为可逆矩阵, 则矩阵方程, 要注意矩阵乘法的位置
 - $AX = C$, 其解为 $X = A^{-1}C$
 - $XA = C$, 其解为 $X = CA^{-1}$
 - $AXB = C$, 其解为 $X = A^{-1}CB^{-1}$

589. 重要说明

- 转置与逆, 伴随矩阵与逆, 转置与伴随矩阵, 可以交换顺序, 也即
 - $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
 - $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$
 - i** ○ $(A^T)^* = (A^*)^T$
- 矩阵的幂和矩阵的转置, 矩阵的幂和逆矩阵, 可以交换顺序
 - $(A^T)^m = (A^m)^T$

○ $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$

9. 矩阵的初等变换

* 9.1 矩阵的初等变换

i 初等变换分为初等行变换和初等列变换

○ 初等行变换

矩阵的以下三种变换，称为矩阵的初等行变换

i

- 交换矩阵的两行
- 用数 $k \neq 0$ 乘矩阵某行的全部元素
- 把矩阵某行的全部元素的 l 倍，加到另一行对应的元素上

○ 初等列变换

矩阵的以下三种变换，称为矩阵的初等列变换

i

- 交换矩阵的两列
- 用数 $k \neq 0$ 乘矩阵某列的全部元素
- 把矩阵某列的全部元素的 l 倍，加到另一列对应的元素上

○ 矩阵 A 经过初等变换得到矩阵 B ，记为 $A \rightarrow B$

* 9.2 矩阵标准型

○ 标准形定义 不一定是方阵



标准形矩阵：元素只有0和1，且矩阵左上角是一个单位矩阵，除此之外的元素都是0

- 标准形变换



任何矩阵A都可以经过初等变换，化为标准形矩阵，并称此标准形矩阵为矩阵A的标准形

- 标准形矩阵中1的个数就是矩阵的秩

✧ 9.3 阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵

满足下方两个条件的矩阵，称为行阶梯形矩阵



- 如果矩阵有零行，则零行都在非零行下方
- 任一非零行，从左到右数的第一个非零元素（称为首非零元）所在的列，在这个元素左下方（如果有的话）都是零



特别的，若行阶梯形矩阵的首非零元都是1，且首非零元所在列中，其他元素都是0，则此矩阵为行简化阶梯形矩阵

- 行阶梯形矩阵变换

任何矩阵都可经过若干次初等行变换化为行阶梯形矩阵



任何矩阵都可经过若干次初等行变换化为行简化阶梯形矩阵

矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行阶梯形矩阵 $\xrightarrow{\text{行变换}}$ 行简化阶梯形矩阵

- 如果只用初等行变换，则行阶梯矩阵不是唯一的，但是行简化矩阵一定是唯一的

10. 初等矩阵

* 10.1 初等矩阵定义

i 由单位矩阵 E 经过一次初等行或列变换得到的矩阵，称为初等矩阵

○ 类型

i $E(ij)$: 交换单位矩阵 E 的第 i, j 两行，或两列

i $E(i(k))$: 用非零数 k 乘以单位矩阵 E 的第 i 行或列

i $E(ij(l))$: 把单位矩阵 E 的第 j 行的 l 倍加到第 i 行

* 10.2 初等矩阵的性质

○ 初等矩阵的行列式都不为0 所有都可逆

○ $E(ij) = -1$ 相当于交换了行列式两行或列，改变一次符号

○ $E(i(k)) = k$ 相当于对角线某个元素扩大了 k 倍

○ $E(ij(l)) = 1$ 虽然不是对角行列式，但仍是上三角或下三角行列式

○ 初等矩阵的转置矩阵仍是同种类型的初等矩阵

○ $E(ij)^T = E(ij)$

○ $E(i(k))^T = E(i(k))$

○ $E(ij(l))^T = E(ji(l))$

○ 初等矩阵均可逆，且初等矩阵的逆矩阵仍为同种类型的初等矩阵

○ $E(ij)^{-1} = E(ij)$

○ $E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$

○ $E(ij(l))^{-1} = E(ij(-l))$

* 10.3 初等矩阵与矩阵的初等变换的关系

- 设 A 为 $m \times n$ 阶矩阵，则

i

对 A 进行一次初等行变换，等于用同种类型的 m 阶初等矩阵左乘 A ，也即，用初等矩阵左乘 A ，等于对 A 实施一次相对应的初等行变换

i

对 A 进行一次初等列变换，等于用同种类型的 n 阶初等矩阵右乘 A ，也即，用初等矩阵右乘 A ，等于对 A 实施一次相对应的初等列变换

11. 矩阵的等价 \cong

- 矩阵等价定义

i

若矩阵 A 可以经过有限次初等变换化为矩阵 B ，则说 A 与 B 等价，记为 $A \cong B$

i

$$A \cong B \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

- 等价矩阵一定是同型矩阵

- 矩阵等价的性质

- 反身性，对任何矩阵 A ，都有 $A \cong A$
- 对称性，若矩阵 $A \cong B$ ，则 $B \cong A$
- 传递性，若矩阵 $A \cong B$ ， $B \cong C$ ，则 $A \cong C$

- 矩阵等价的结论

1

任一个矩阵 $A_{m \times n}$ 都和其标准形矩阵 $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$ 等价

2 矩阵 A, B 等价的充要条件（都是同型矩阵）

1 存在一些列初等矩阵 $P_1, P_2, \dots, P_s; Q_1, Q_2, \dots, Q_t$, 使 $P_1 P_2 \dots P_s A Q_1 Q_2 \dots Q_t = B$

2 存在可逆矩阵 P, Q , 使 $PAQ = B$

3 $r(A) = r(B)$

3 若矩阵 $A \cong B$, 则

1 A 与 B 的标准形相同

2 A 与 B 的秩相同, 即 $r(A) = r(B)$

4 若 A, B 为同阶方阵, 且 $A \cong B$, 则,

1 $|A| = k|B| (k \neq 0)$ 由性质2-1, 或性质2-2, 结合矩阵行列式性质
即可知

2 A, B 同时可逆, 或同时不可逆 由性质4-1, 结合矩阵的行列式为不为0与可逆
与否即可知

5 设 A 为 n 阶方阵, 则 A 可逆的充要条件为

1 $A \cong E$

○ 充分性:

○

$$\begin{aligned} A \cong E &\rightarrow \\ PAQ &= E \rightarrow \\ |PAQ| &= k|E| \rightarrow \\ |P| \cdot |A| \cdot |Q| &= k|E| \rightarrow \\ \because |Q| \neq 0, |P| \neq 0, |E| \neq 0 &\rightarrow \\ \therefore |A| \neq 0 &\rightarrow \\ \therefore A &\text{可逆} \end{aligned}$$

i

○ 必要性:

○

$$\begin{aligned} \because A &\text{可逆} \rightarrow \\ \therefore |A| &\neq 0 \rightarrow \\ \because A &\cong A \text{的标准型, 记为} S \rightarrow \\ \therefore PAQ &= S \rightarrow \\ |P| \cdot |A| \cdot |Q| &= |S| \rightarrow \\ \because |A| &\neq 0 \rightarrow \\ \therefore |S| &\neq 0 \rightarrow \\ \text{矩阵} S &\text{的主对角线没有} 0 \text{元素} \rightarrow \\ \therefore \text{标准型矩阵是一个单位阵} \end{aligned}$$

2 A 可以表示为有限个初等矩阵的乘积

○ 可逆矩阵必可表示为有限个初等矩阵的乘积

12. 初等变换法求逆矩阵

○ 初等行变换求逆矩阵的原理

若 A 可逆, 则 A^{-1} 也可逆

根据可逆矩阵与初等矩阵的关系, 可知, 若 $P_1 \cdots P_s$ 为初等矩阵则有

$$A^{-1} = P_1 \cdots P_s \cdots (1)$$

$$\text{也即, } P_1 \cdots P_s E = A^{-1} \cdots (2)$$

$$\text{对等式1右乘} A, \text{ 则有 } P_1 \cdots P_s A = A^{-1} A = E \cdots (3)$$

$$P_1 \cdots P_s A = E$$

$$P_1 \cdots P_s E = A^{-1}$$

观察上述两式可知, 对 A 进行同一批初等行变换, 可化为 E

对 E 进行同一批初等行变换, 可化为 A^{-1}

因此, 可将 A 和 E 拼接为 $(A:E)$, 进行同样的初等行变换, 得到 $(E:A^{-1})$

○ 初等变换法求逆矩阵步骤 适用于高阶矩阵

i 先处理第一列, 再处理第二列, 以此类推

○ 利用矩阵 A 和同阶单位矩阵 E , 做 $n \times 2n$ 矩阵

○ 对 $(A:E)$ 进行初等行变换, 将其化为行简化阶梯形矩阵

$$\text{○ } (A:E) \xrightarrow{\text{行}} (B:D)$$

○ $(B:D)$ 是行简化阶梯形矩阵

$$\text{○ 对应的有 } A \xrightarrow{\text{行}} B, E \xrightarrow{\text{行}} D$$

○ 结果判定, $\begin{cases} \text{若 } B = E, \text{ 则 } A \text{ 可逆, 且 } A^{-1} = D \\ \text{若 } B \neq E, \text{ 则 } A \text{ 不可逆} \end{cases}$

i 在对 $(A:E)$ 进行初等行变换时, 如果过程中发现 A 对应的左子块的行列式为0, 即可终止算法并判断 A 不可逆

○ 初等变换法求矩阵方程

- $AX = B$
 - 将 A 和 B 拼接为矩阵 $(A:B)$
 - 进行初等行变换，当 A 对应的左子块变为 E 时，右子块就是 X 的解
- $XA = B$
 - 将 A 和 B 拼接为矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$
 - 进行初等列变换，当 A 对应的上子块变为 E 时，下子块就是 X 的解

13. 分块矩阵

○ 分块矩阵的定义

○ 定义



设 A 是一个矩阵，将 A 用若干纵线和横线分成许多小矩阵，每个小矩阵称为矩阵 A 的子块，该过程就是分块过程，分块以后的矩阵 A 称为分块矩阵

- 按行分块后，得到的四个行向量称为矩阵 A 的行向量组
- 按列分块后，得到的四个列向量称为矩阵 A 的列向量组
- 特殊的分块矩阵

○ 上三角分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & * & \cdots & * \\ & A_2 & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix} \quad \text{其中 } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ 均为方阵}$$

○ 下三角分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \cdots & A_k \end{bmatrix} \quad \text{其中 } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ 均为方阵}$$

○ 对角分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} \text{ 其中 } A_1, A_2, \dots, A_k \text{ 均为方阵}$$

分块矩阵的运算

分块矩阵的加法和数乘

设矩阵 $A_{m \times n}$ 和 $B_{m \times n}$ 按照同一方式分块,

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} A_{11} + B_{11} & A_{12} + B_{12} & \cdots & A_{1t} + B_{1t} \\ A_{21} + B_{21} & A_{22} + B_{22} & \cdots & A_{2t} + B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} + B_{s1} & A_{s2} + B_{s2} & \cdots & A_{st} + B_{st} \end{bmatrix}$$

$$kA = \begin{bmatrix} kA_{11} & kA_{12} & \cdots & kA_{1t} \\ kA_{21} & kA_{22} & \cdots & kA_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ kA_{s1} & kA_{s2} & \cdots & kA_{st} \end{bmatrix}$$

分块矩阵的乘法

设矩阵 $A_{m \times l}$ 和 $B_{l \times n}$ 把 A, B 分块, 使得 A 的列分块和 B 的行分块相同, 也即 A 的列分块 每个子块的列数, 与 B 的行分块的每个子块的行数, 对应相等

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \cdots & B_{tr} \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$AB = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \cdots & C_{sr} \end{bmatrix}$$

其中

$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{it}B_{tj} \quad i = 1, 2, \dots, s; \quad j = 1, 2, \dots, r$$

A 和 B 因为都是小矩阵, 因此顺序不可颠倒

- 特别的，如果 A, B 是同阶对角分块矩阵，且分块方式相同，

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1 & & \\ & B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & B_k \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

- $$AB = \begin{bmatrix} A_1 B_1 & & \\ & A_2 B_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k B_k \end{bmatrix}$$

- $$A^m = \begin{bmatrix} A_1^m & & \\ & A_2^m & \\ & & \ddots \\ & & & A_k^m \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵的转置

- 分块矩阵的转置，是将各行子块依次转为列子块，并且每个子块内部也要进行转置

- $$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}, \text{ 则 } A^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T & \cdots & A_{s1}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T & \cdots & A_{s2}^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1t}^T & A_{2t}^T & \cdots & A_{st}^T \end{bmatrix}$$

- 分块矩阵的逆矩阵

- 三角分块矩阵

- 设 A, B 为 **方阵**，则，

- $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$ 可逆， $\Leftrightarrow A, B$ 都可逆，且 $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}$ 可逆， $\Leftrightarrow A, B$ 都可逆，且 $\begin{bmatrix} A & O \\ C & B \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{bmatrix}$

- 对角分块矩阵

- 设 A_1, A_2, \dots, A_k 为 **方阵**，则

i 主对角线分块矩阵的逆矩阵，是主对角线上子块的逆矩阵

$$\circ \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} \text{ 可逆, } \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_k \text{ 均可逆, 且}$$

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k^{-1} \end{bmatrix}$$

i

副对角线分块矩阵的逆矩阵，是副对角线上子块的逆矩阵，但是要调转顺序

$$\circ \begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \dots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix} \text{ 可逆, } \Leftrightarrow A_1, A_2, \dots, A_k \text{ 均可逆, 且}$$

$$\begin{bmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \dots & & \\ A_k & & & \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} & & & A_k^{-1} \\ & & \dots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{bmatrix}$$

分块矩阵的行列式

设 A_1, A_2, \dots, A_k 为方阵，则

$$\circ \left| \begin{bmatrix} A_1 & * & \dots & * \\ & A_2 & \dots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_k \end{bmatrix} \right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \dots \bullet |A_k|$$

$$\circ \left| \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ * & A_2 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ * & * & \dots & A_k \end{bmatrix} \right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \dots \bullet |A_k|$$

$$\circ \left| \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} \right| = |A_1| \bullet |A_2| \bullet \dots \bullet |A_k|$$

设 A 为 m 阶方阵， B 为 n 阶方阵，则

$$\circ \left| \begin{bmatrix} O & A \\ B & C \end{bmatrix} \right| = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

$$\circ \left| \begin{bmatrix} C & A \\ B & O \end{bmatrix} \right| = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

$$\circ \quad \left| \begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix} \right| = (-1)^{mn} |A| \cdot |B|$$

14. 矩阵的秩

○ 秩的定义

○ 矩阵的子式

i

设矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$ ，在 A 中任取 k 行 k 列 ($k \leq \min(m, n)$)，位于这些行列交叉点处的 k^2 个元素，按照他们在 A 中的相对位置不变，得到的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式

- 一阶子式即为元素本身
- 若 A 为 n 阶矩阵，则 A 的 n 阶子式即为 $|A|$

○ 矩阵的秩

i

矩阵 A 中，非零子式的最高阶数，称为矩阵 A 的秩，记作 $r(A)$

- 零矩阵没有非零子式，规定零矩阵的秩为 0
- 若 $A \neq O$ ，则 $r(A) \geq 1$
- 对任意矩阵 $A_{m \times n}$ ，有 $0 \leq r(A) \leq \min(m, n)$
 - 不等式右侧其实说明了 $r(A) \leq m$ ， $r(A) \leq n$

i

设矩阵 $A = (a_{ij})_{mn}$

- 若 $r(A) = \min(m, n)$ ，则称矩阵 A 为满秩矩阵
 - 若 $r(A) = m$ ，称为行满秩矩阵
 - 若 $r(A) = n$ ，称为列满秩矩阵
- 若 $r(A) < \min(m, n)$ ，则称矩阵 A 为降秩矩阵

特别的, 若 A 为 n 阶方阵, 若 $r(A) = n$, 则称 A 为满秩矩阵, 若 $r(A) < n$, 则称 A 为降秩矩阵

i

可通过定理推出, 若 A 为 n 阶方阵

- A 满秩 $\Leftrightarrow r(A) = n \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow A$ 可逆 $\Leftrightarrow A$ 为非奇异矩阵
- A 降秩 $\Leftrightarrow r(A) < n \Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$ 不可逆 $\Leftrightarrow A$ 为奇异矩阵

○ 矩阵的秩相关的结论

① $r(A) = r (r > 0) \Leftrightarrow$ 矩阵 A 中至少有一个 r 阶子式不等于零, 而所有的 $r + 1$ 阶子式都为零, 或者没有 $r + 1$ 阶子式

- 不仅仅 $r + 1$ 阶子全部为0, 从 $r + 1, r + 2, \min(m, n)$ 的各阶子式其实都为0, 如果存在的话

可以对 $r + 2$ 阶子式按照某行展开, 则是各个元素乘以对应的 $r + 1$ 阶的代数余子式, 但是已经 $r + 1$ 阶行列式全部为0, 所以全部 $r + 2$ 阶子式也全部为0

② $r(A) \geq r \Leftrightarrow$ 矩阵 A 中至少有一个 r 阶子式不等于零

③ $r(A) < r \Leftrightarrow$ 矩阵 A 中所有 r 阶子式都为零, 其实是 r 阶以上的全部子式都为零

④ 转置矩阵, 负矩阵, 数乘矩阵的秩

① $r(A) = r(A^T)$ 行列式转置, 不影响行列式的值

② $r(A) = r(-A)$ $|A| = (-1)^k |A|$, 如果 $|A| = 0$, $|-A| = 0$, 如果 $|A| \neq 0$, $|-A| \neq 0$

③ $r(A) = r(kA) \quad k \neq 0$ $|A|$ 和 $|kA|$ 始终同时为0, 或同时不为0

⑤ $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = O; r(A) \geq 1 \Leftrightarrow A \neq O$

⑥ 若 $A \neq O$, 则 A 任意两行或两列成比例 $\Leftrightarrow r(A) = 1$

⑦ 若 A 为行阶梯矩阵, 则 $r(A) = A$ 中非零行的行数

⑧ 初等变换不改变矩阵的秩, 即若 $A \cong B$, 有 $r(A) = r(B)$

⑨ 若 A, B 为同型矩阵, 则 $A \cong B \Leftrightarrow r(A) = r(B)$

⑩

若 A 的标准型为 $D = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$, 则 $r(A)$ 等于 D 中1的个数

- ⑪ 若 A, B 同为 $m \times n$ 阶矩阵, 则 $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$
- ⑫ 若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times s$ 阶矩阵, 则 $r(A) + r(B) - n \leq r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$
- 不等式右侧其实说明了 $r(AB) \leq r(A)$, $r(AB) \leq r(B)$
- ⑬ 若 A 为 $m \times n$ 阶矩阵, B 为 $n \times s$ 阶矩阵, 且 $AB = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$
- ⑭ $r(A^T A) = r(AA^T) = r(A) = r(A^T)$
- ⑮ 若 A 为可逆方阵, 则 $r(AB) = r(B)$ $r(CA) = r(C)$
- A 可逆方阵, 则可以表示为若干个初等矩阵的乘积, 则 AB, CA 相当于对 B, C 做初等行/列变换
 - 初等变换不改变矩阵的秩
- ⑯ 若 A 为 n 阶方阵($n \geq 2$), A^* 为 A 的伴随矩阵, 则 $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n - 1 \\ 0, & r(A) < n - 1 \end{cases}$

○ 求解矩阵的秩

○ 定义法



若矩阵 A 中有不等于零的 r 阶子式, 且所有 $r + 1$ 阶子式都为零, 或者没有 $r + 1$ 阶子式, 则 $r(A) = r$

○ 初等变换法



利用矩阵的初等行变换, 将矩阵化为行阶梯矩阵, 则行阶梯矩阵中非零行的行数即为矩阵的秩

原理: 初等变换不改变

○ 行列式法



若 A 为 n 阶方阵, 求 $|A|$, 若 $\begin{cases} \text{若 } |A| \neq 0 & r(A) = n \\ \text{若 } |A| = 0 & r(A) < n \end{cases}$

○ 利用矩阵秩的结论

