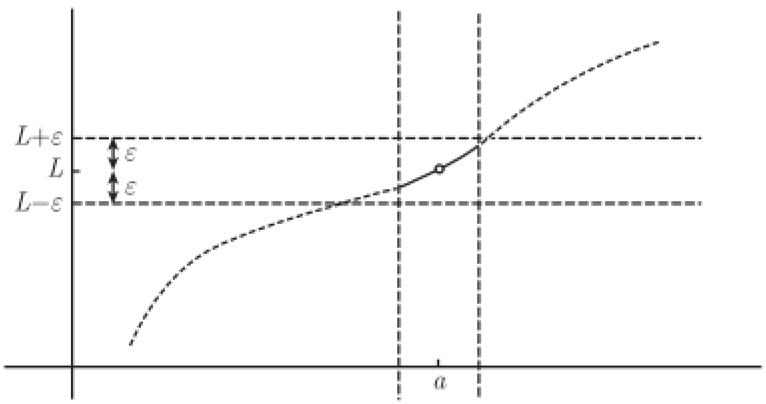
# 1. 极限

## 1.1 极限的定义

### 1.1.1 自变量趋近于有限值时函数的极限

> 定义1：
>
> 当$f(x)$在点$x_0$的去心邻域内有定义，如果存在常数$L$，使得任意给定的正数$\epsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使得不等式
>
> $|f(x) - L| < \epsilon \qquad |x - x_0| \in (0, \delta)$
>
> 恒成立，则常数$L$就叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$

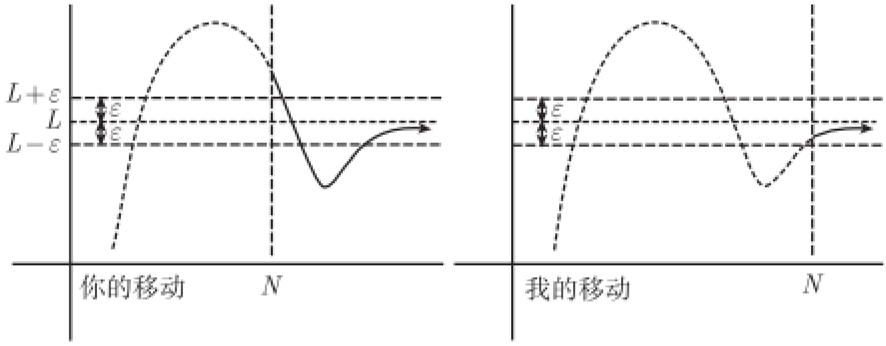
- $\delta$的选择，依赖于$\epsilon$的选择
- 定义1可以理解为，只要$x$距离$x_0$不超过$\delta$，则$f(x)$的值距离$L$就不会超过$\epsilon$
  - $|f(x) - L| < \epsilon$ 可以表示为函数值距离水平线$y = L$的距离
  - $|x - x_0|$可以表示为$x$距离$x_0$的距离
- 换句话说，只要给定了一个和$L$的距离$\epsilon$，就一定可以在接近$x_0$的距离$\delta$内，找到一点，使得函数值和$L$的距离小于给定的$\epsilon$




### 1.1.2 自变量趋近于无穷时函数的极限

> 定义2：
>
> 设函数$f(x)$，当$|x|$大于某一正数时有定义，如果存在常数$L$，使得任意给定的正数$\epsilon > 0$，总存在正数$M$，使得不等式
>
> $|f(x) - L| < \epsilon \qquad |x| > M$
>
> 恒成立，则常数$L$就叫做函数$f(x)$当$x$趋近于$\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

- 定义2对于正负无穷都成立
- 定义2可以理解为，只要有$|x| > M$，就有函数值和$L$的距离小于给定的$\epsilon$，也即位于区间$[L - \epsilon, L + \epsilon]$




### 1.1.3 左右极限

- 左极限

> 定义3：
>
> 当$f(x)$在点$x_0$的左邻域内有定义，如果存在常数$L$，使得任意给定的正数$\epsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使得不等式
>
> $|f(x) - L| < \epsilon \qquad x_0 - \delta < x < x_0$
>
> 恒成立，则常数$L$就叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L$

- 右极限

> 定义4：
>
> 当$f(x)$在点$x_0$的右邻域内有定义，如果存在常数$L$，使得任意给定的正数$\epsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使得不等式
>
> $|f(x) - L| < \epsilon \qquad x_0 < x < x_0 + \delta$
>
> 恒成立，则常数$L$就叫做函数$f(x)$当$x \to x_0$时的极限，记作$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L$

# 2. 极限的四则运算

> 要求参与运算的函数的极限存在且有限，也即非无穷

- 和差运算
  - 当两个函数$f$和$g$，在$x \to a$时有分别有$f(x) \to L$和$g(x) \to M$，那么当$x \to a$时，有$f(x) + g(x) \to L + M$
  - 当两个函数$f$和$g$，在$x \to a$时有分别有$f(x) \to L$和$g(x) \to M$，那么当$x \to a$时，有$f(x) - g(x) \to L - M$
- 乘法运算
  - 当两个函数$f$和$g$，在$x \to a$时有分别有$f(x) \to L$和$g(x) \to M$，那么当$x \to a$时，有$f(x)g(x) \to LM$
- 除法运算
  - 当两个函数$f$和$g$，在$x \to a$时有分别有$f(x) \to L$和$g(x) \to M$，那么当$x \to a$时，有$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{L}{M}$，$M$不为0

# 3. 夹逼定理的证明

> 夹逼定义， aka 三明治定理 Squeeze Theorem/ Sandwich Theorem
>
> 如果两个函数$f(x)$和$g(x)$在某一点$c$附近有同一个极限，也即$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = L$
>
> 并且在点$c$附近，另一个函数$h(x)$总是介于$f(x)$和$g(x)$之间，也即$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$
>
> 那么$h(x)$在点$c$附近也有极限，并且极限是$L$

证明.

证明目的是 证出 $|h(x)-L|<\varepsilon$. 也即$L-\varepsilon<h(x)<L+\varepsilon$.

则根据 $f(x)$和$g(x)$在$x\to a$时极限存在且为$L$.

有 $L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$ ; $L-\varepsilon<g(x)<L+\varepsilon$.

又∵ $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$

∴ $h(x) \geq f(x) > L-\varepsilon$.

$h(x) \leq g(x) < L+\varepsilon$.

则有 $L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$

$|h(x)-L| < \varepsilon$.

证毕

# 4. 其他性质

## 4.1 某点的极限与该点的函数值

> 某点的极限值，与该函数在该点的函数值是无关的

极限值描述的自变量接近某值时，函数的趋近值

可以考虑函数$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \neq 2 \\ 3 & x = 2 \end{cases}$在$x \to$ 2时的极限是1，而非$f(2)$的值3

## 4.2 极限存在的充要条件

> 当且仅当函数$f(x)$在某点$a$的左右极限都存在，且相等时，该函数在点$a$附近存在极限

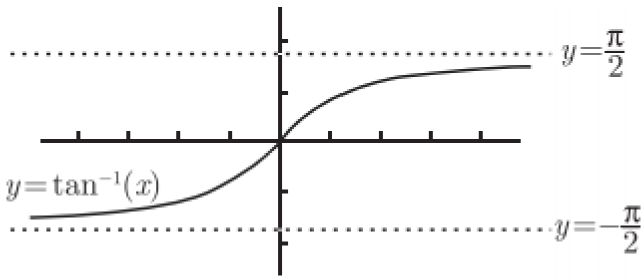
## 4.3 垂直渐近线

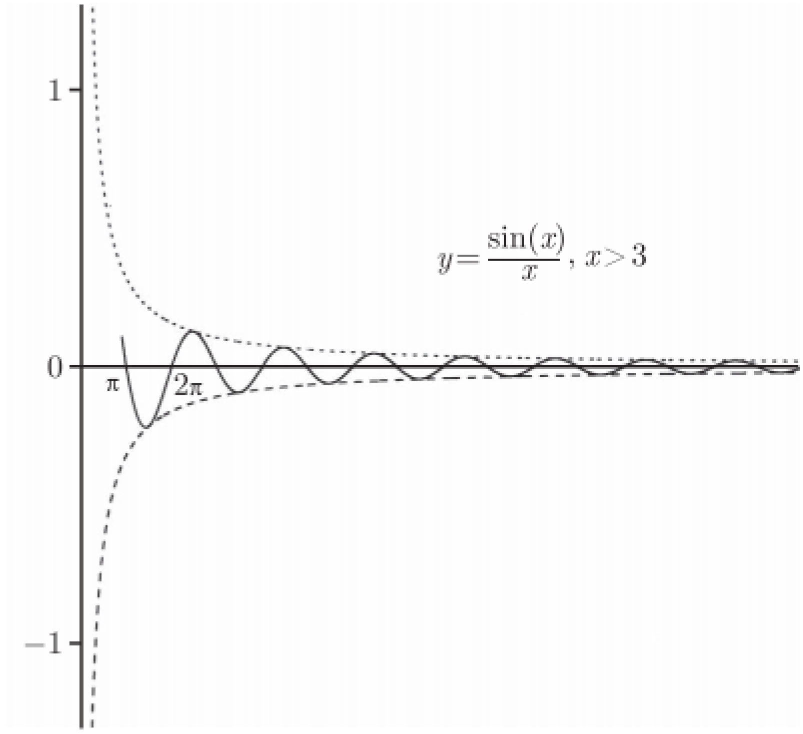
> 如果函数$f(x)$在$x = a$处有一条垂直渐近线，意味着左极限$\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$和右极限$\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$中至少有一个极限是+\infty或-\infty$

## 4.4 水平渐近线

> 如果函数$f(x)$在$y = L$处有一条右侧水平渐近线，则$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$
>
> 如果函数$f(x)$在$y = L$处有一条左侧水平渐近线，则$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

## 4.5 渐近线说明

> 1. 一个函数不一定要在左右两边有相同的水平渐近线，如$f(x) = tan^{-1}(x)$
>
> 
> 
>
> 2. 一个函数可以和其水平渐近线相交，如函数$f(x) = \frac{sin(x)}{x}$




# 5. 附录

## 5.1 三角不等式证明

> 三角不等式:
>
> 对于任意的实数$a, b$，有$|a+b| \leq |a| + |b|$

证明:

对于任意数 $x$，有 $x \le |x|$.

那么对于两个实数 $a$、$b$，定有 $ab \le |ab|$

两端同时乘2，并加 $a^2$, $b^2$

则有:

$$2ab + a^2 + b^2 \le 2|ab| + a^2 + b^2$$

$$(a+b)^2 \le (|a|+|b|)^2$$

等价于

$$(|a+b|)^2 \le (|a|+|b|)^2 \longrightarrow$$ 绝对值性质. $x^2 = |x|^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{|a+b|} \le \sqrt{|a|+|b|}$$

又∵ 平方根函数单调递增

∴ $|a+b| \le |a| + |b|$