全国大学生数学竞赛真题集（高等数学）

作者：李熵一

时间：July, 2022

版本：Second

b 站 up 主：李熵一

酌贪泉而觉爽，处涸辙以犹欢。——王勃

目录

第 1 章　极限专题 **1**

1.1　函数极限 1

1.2　数列极限 4

第 2 章　微分学专题 **8**

2.1　一元微分 8

2.2　多元微分 9

第 3 章　积分学专题 **11**

3.1　不定积分 11

3.2　定积分 12

3.3　反常积分 12

3.4　二重积分 14

3.5　三重积分 15

3.6　曲线积分 16

3.7　曲面积分 18

第 4 章　应用题专题 **20**

4.1　几何应用 20

4.2　物理应用 23

第 5 章　证明题专题 **24**

5.1　中值定理证明 24

5.2　不等式证明 26

第 6 章　微分方程专题 **29**

第 7 章　无穷级数专题 **31**

7.1　常数项级数 31

7.2　函数项级数 34

7.3　傅里叶级数 35

第 8 章　其他类型补充 **36**

第 1 章 极限专题

1.1 函数极限

题目 1.1 (第九届决赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x\ln\left(1+\sin^2 x\right)}$$

题目 1.2 (第十二届初赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\,e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}$$

题目 1.3 (第十届初赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$$

(题目 1.3 变式)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\dots\sqrt[n]{\cos nx}}{x^2}$$

题目 1.4 (第十一届决赛)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\left(1-\sqrt{\sin x}\right)\left(1-\sqrt[3]{\sin x}\right)\cdots\left(1-\sqrt[n]{\sin x}\right)}{(1-\sin x)^{n-1}}$$

题目 1.5 (第十二届决赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arctan x-(x^2+1)\arctan^3 x}$$

题目 1.6 (第二届决赛)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$$

题目 1.7 (第三届决赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$$

题目 1.8 (第十一届初赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x}\right)-\sin x}{\arctan\left(4\sqrt[3]{1-\cos x}\right)}$$

题目 1.9 (第一届初赛)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x+e^{2x}+\ldots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$$

♡

题目 1.10 (第二届初赛)

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

♡

题目 1.11 (第六届决赛)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{u^2}\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\mathrm{d}u}$$

♡

题目 1.12 (第十三届初赛)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{x-\ln\left(e^x+x\right)}{x}$$

♡

题目 1.13 (第三届初赛)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left[1-\ln\left(1+x\right)\right]}{x}$$

♡

(题目 1.13 变式)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2\left[1-\ln\left(1+x\right)\right]}{x^2}$$

♠

题目 1.14 (第三届决赛)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

♡

(题目 1.14 变式)

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\frac{x}{2}-x^3\tan\frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$$

♠

题目 1.15 (第四届决赛)

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(x\ln a\right)\cdot\ln\left(\frac{\ln ax}{\ln\frac{x}{a}}\right)\right], a>1$$

♡

题目 1.16 (第四届初赛)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$$

题目 1.17 (第十届决赛)

设函数 $y=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-a\sin^2 x}-b}{x^2}, & x\neq 0\\ 2, & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，求 $a+b$ 的值。

题目 1.18 (第六届初赛)

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=e^3$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$。

题目 1.19 (第八届初赛)

若 $f(1)=0$, $f'(1)$ 存在，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)\tan 3x}{\left(e^{x^2}-1\right)\sin x}$。

题目 1.20 (第九届初赛)

设 $f(x)$ 有二阶导数连续，且 $f(0)=f'(0)=0$, $f''(0)=6$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x\right)}{x^4}$。

题目 1.21 (第一届决赛)

设 $f(x)$ 在点 $x=1$ 附近有定义，且在点 $x=1$ 可导，$f(1)=0$, $f'(1)=2$。求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\sin^2 x+\cos x\right)}{x^2+x\tan x}$。

题目 1.22 (第十二届初赛)

设 $f(x), g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U, f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=a>0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}$。

题目 1.23 (第十三届初赛)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t}{x\displaystyle\int_0^x f(x-t)\,\mathrm{d}t}$。

题目 1.24 (第二届决赛)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有二阶连续导数，且 $f(0)$,$f'(0)$,$f''(0)$ 均不为零。证明：存在唯一一组实数 k_1,k_2,k_3，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{k_1 f(h)+k_2 f(2h)+k_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0$$

题目 1.25 (第四届初赛)

设函数 $y=f(x)$ 的二阶导数连续，且 $f''(x)>0, f(0)=0, f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距。

题目 1.26 (第一届决赛)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，求 $\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{1}{y}\int_0^y xf(x)\,\mathrm{d}x$。

题目 1.27 (第四届决赛)

设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续可导

$$f'(x)=\frac{1}{1+f^2(x)}\left[\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right]$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

1.2 数列极限

题目 1.28 (第二届初赛)

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)\left(1+a^2\right)\cdots\left(1+a^{2^n}\right),|a|<1$

题目 1.29 (第三届初赛)

$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^n}$

题目 1.30 (第一届决赛)

$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n-e\right]$

题目 1.31 (第一届决赛)

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{n}}+b^{\frac{1}{n}}+c^{\frac{1}{n}}}{3}\right)^n,a>0,b>0,c>0$

题目 1.32 (第六届初赛)

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$

题目 1.33 (第十届初赛)

$\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)^\alpha-n^\alpha,\alpha\in(0,1)$

题目 1.34 (第五届初赛)

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\sin\left(\pi\sqrt{1+4n^2}\right)\right]^n$$

♡

题目 1.35 (第九届初赛)

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$$

♡

题目 1.36 (第七届决赛)

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(\pi n!e)$$

♡

(题目 1.36 变式)

$$\lim_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$$

♠

题目 1.37 (第四届初赛)

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$$

♡

(题目 1.37 变式)

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n\ln n}}$$

♠

题目 1.38 (第二届决赛)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$$

♡

题目 1.39 (第十二届决赛)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

♡

题目 1.40 (第七届初赛)

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n^2+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n^2+2}+\ldots+\frac{\sin\pi}{n^2+n}\right)$$

♡

题目 1.41 (第一届决赛)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\sin\frac{k\pi}{n^2}$$

♡

题目 1.42 (第九届决赛)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{(n)!}\right]$$

♡

题目 1.43 (第十一届决赛)

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+\sqrt{k}}\right)$$

题目 1.44 (第八届初赛)

若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 可导，且 $f(a)\neq 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(a+\frac{1}{n}\right)}{f(a)}\right)^{n}$。

题目 1.45 (第十二届初赛)

设数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$,$n\geq 1$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n!a_n$。

题目 1.46 (第十三届初赛)

设 $x_1=2021$,$x_n^2-2(x_n+1)x_{n+1}+2021=0\,(n\geq 1)$。证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

题目 1.47 (第三届初赛)

设 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为数列，a,λ 为有限数，求证：

(1) 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=a$。

(2) 如果存在正整数 p，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$。

题目 1.48 (第六届初赛)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，严格单增，且存在 $x_n\in[a,b]$ 使得

$$[f(x_n)]^n=\frac{1}{b-a}\int_a^b [f(x)]^n\mathrm{d}x$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 。

题目 1.49 (第十三届初赛补赛)

设 $x_0=1$,$x_n=\ln(1+x_{n-1})\,(n\geq 1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$。

题目 1.50 (第十届决赛)

设 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内三阶连续可导，满足 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$，又设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1\in(0,1)$,$a_{n+1}=f(a_n)\,(n=1,2,3,\ldots)$,$\{a_n\}$ 严格单调减少且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，计算 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n^2$。

题目 1.51 (第六届初赛)

设 $A_n=\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4}-A_n\right)$。

题目 1.52 (第八届初赛)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数,$f(0)=0$,$f(1)=1$。证明:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}$$

♡

题目 1.53 (第十三届初赛)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续的二阶导数。证明:

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right]$$

♡

题目 1.54 (第六届决赛)

设 D 是平面上由光滑闭曲线围成的有界区域,其面积为 $A>0$,函数 $f(x,y)$ 在该区域及其边界上连续且 $f(x,y)>0$,记 $J_n=\left(\dfrac{1}{A}\displaystyle\iint\limits_D f^{1/n}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma\right)^n$,求 $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$。

♡

第 2 章 微分学专题

2.1 一元微分

题目 2.1 (第六届初赛)

设 $y=y(x)$ 由 $x=\int_1^{y-x}\sin^2\left(\frac{\pi t}{4}\right)\mathrm{d}t$ 所确定，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=0}$。

♡

题目 2.2 (第二届决赛)

已知 $\left\{\begin{array}{l} x=\ln\left(1+e^{2t}\right) \\ y=t-\arctan e^t \end{array}\right.$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

♡

题目 2.3 (第七届决赛)

设 $f(t)$ 二阶连续可导，且 $f(t)\neq 0$，若 $\left\{\begin{array}{l} x=\int_0^t f(s)\,\mathrm{d}s \\ y=f(t) \end{array}\right.$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

♡

题目 2.4 (第一届初赛)

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$。

♡

题目 2.5 (第一届初赛， 1997 年考研数学一和 2020 年考研数学二)

设函数 $f(x)$ 连续,$g(x)=\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为常数，求 $g'(x)$ 并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

♡

题型归类 题目 2.6-2.8：高阶导数

题目 2.6 (第八届初赛)

设 $f(x)=e^x\sin 2x$，求 $f^{(4)}(0)$。

♡

(题目 2.6 拓展)

设 $f(x)=e^x\sin x$，求 $f^{(n)}(x)$。

♠

题目 2.7 (第十二届初赛)

设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，求 $f^{(n)}(-1)$。

♡

题目 2.8 (第十一届决赛)

设 $f(x)=\left(x^2+2x-3\right)^n\arctan^2\frac{x}{3}$，其中 n 为正整数，求 $f^{(n)}(-3)$。

♡

2.2 多元微分

题目 2.9 (第二届初赛)

设函数 $f(t)$ 有二阶连续导数,$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$g(x,y)=f\left(\frac{1}{r}\right)$, 求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$。

题目 2.10 (第九届初赛)

设 $w=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数, 且 $u=x-cy$,$v=x+cy$, 其中 c 为非零常数, 求 $w_{xx}-\frac{1}{c^2}w_{yy}$。

题目 2.11 (第四届初赛)

已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$, 且 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$。确定常数 a 和 b, 使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$$

题目 2.12 (第十二届初赛)

已知 $z=xf\left(\frac{y}{x}\right)+2y\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, 其中 f,φ 均为二阶可微函数。

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(2) 当 $f=\varphi$, 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\big|_{x=a}=-by^2$ 时, 求 $f(y)$。

题目 2.13 (第十三届初赛)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$。

题目 2.14 (第十届决赛)

设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(x-y,z)=0$ 确定, 其中 $F(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

题目 2.15 (第三届初赛)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\frac{1}{x},z-\frac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数, 且具有连续的二阶偏导数。求证: $x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1$ 和 $x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$。

题目 2.16 (第三届决赛)

设函数 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，满足 $f_x^2 f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} + f_y^2 f_{xx} = 0$，且 $f_y \neq 0$，$y = y(x,z)$ 是由方程 $z = f(x,y)$ 所确定的函数，求 $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$。

题目 2.17 (第七届初赛)

设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $F\left(x + \dfrac{z}{y}, y + \dfrac{z}{x}\right) = 0$ 所决定，其中 $F(u,v)$ 具有连续偏导数，且 $xF_u + yF_v \neq 0$，求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。(结果要求不显含有 F 及其偏导数)

题目 2.18 (第六届决赛)

设 $\vec{l}_j, j = 1,2,\ldots,n$ 是平面上点 P_0 处的各方向向量,$n \geqslant 2$，相邻两个向量之间的夹角为 $\dfrac{2\pi}{n}$。若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导，证明：$\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j} = 0$。

题目 2.19 (第十一届决赛)

设 $F(x_1,x_2,x_3) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x_1 + x_3\cos\varphi, x_2 + x_3\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$

其中 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数。已知

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f(x_1 + x_3\cos\varphi, x_2 + x_3\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\left[f(x_1 + x_3\cos\varphi, x_2 + x_3\sin\varphi)\right]\mathrm{d}\varphi, i = 1,2,3$$

试求 $x_3\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_3^2}\right) - \dfrac{\partial F}{\partial x_3}$ 并化简。

第 3 章 积分学专题

3.1 不定积分

题目 3.1 (第九届初赛)

$$\int \frac{e^{-\sin x}\sin 2x}{(1-\sin x)^2}\mathrm{d}x$$

♡

题目 3.2 (第十届初赛)

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$$

♡

(题目 3.2 变式)

$$\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

♠

题目 3.3 (第三届决赛)

$$\int \left(1+x-\frac{1}{x}\right)e^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$$

♡

题目 3.4 (第四届决赛)

$$\int x\arctan x\ln\left(1+x^2\right)\mathrm{d}x$$

♡

题目 3.5 (第六届决赛)

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x。$$

♡

(题目 3.5 变式)

$$\int \frac{x^2\pm 1}{1+kx^2+x^4}\mathrm{d}x$$

♠

题目 3.6 (第一届决赛)

$$\int \frac{1}{\sin^3 x+\cos^3 x}\mathrm{d}x$$

♡

题目 3.7 (第十一届初赛)

设隐函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 所确定，求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}$。

♡

3.2 定积分

题目 3.8 (第十三届初赛补赛)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+\tan x} \mathrm{d}x$$

♡

题目 3.9 (第十一届初赛)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x\left(1+\sin x\right)}{1+\cos x} \mathrm{d}x$$

♡

题目 3.10 (第五届初赛)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\sin x \cdot \arctan e^x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$$

♡

题目 3.11 (第六届初赛)

设 n 为正整数，计算 $I=\displaystyle\int_{e^{-2n\pi}}^{1} \left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\right| \mathrm{d}x$。

♡

题目 3.12 (第七届决赛)

设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数，若 $n\geqslant 2$，计算 I_n+I_{n-2}。

♡

题目 3.13 (第一届初赛)

设 $f\left(x\right)$ 是连续函数，且满足 $f\left(x\right)=3x^2-\displaystyle\int_0^2 f\left(x\right)\mathrm{d}x-2$，求 $f\left(x\right)$。

♡

题目 3.14 (第七届决赛)

设 $f\left(x\right)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：$2\displaystyle\int_a^b f\left(x\right)\left(\int_x^b f\left(t\right)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x=\left(\int_a^b f\left(x\right)\mathrm{d}x\right)^2$

♡

3.3 反常积分

题目 3.15 (第四届初赛)

计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\left|\sin x\right|\mathrm{d}x$。

♡

(题目 3.15 类题，2019 年考研数学一真题)

求曲线 $y=e^{-x}\sin x\ (x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积。

♠

题目 3.16 (第十届决赛)

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x,a>0$$

♡

题目 3.17 (第六届决赛)

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{u}{1+e^u}\mathrm{d}u$$

♡

题目 3.18 (第二届初赛)

设 $s>0$, 求 $I_n=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-sx}x^n\mathrm{d}x\,(n=1,2,\ldots)$。

♡

题目 3.19 (第五届初赛)

证明广义积分 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的。

♡

题目 3.20 (第十二届初赛)

已知 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$, 则 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

♡

(题目 3.20 拓展)

计算 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^4\mathrm{d}x$ 的值。

♠

题目 3.21 (第三届决赛)

讨论 $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{\cos^2x+x^\alpha\sin^2x}\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 α 是一个实常数。

♡

题目 3.22 (第七届初赛)

设区间 $(0,+\infty)$ 上的函数 $u(x)$ 定义为 $u(x)=\displaystyle\int_{0}^{+\infty}e^{-xt^2}\mathrm{d}t$, 求 $u(x)$ 的初等函数表达式。

♡

题目 3.23 (第十三届初赛补赛)

设 $f(x)=\displaystyle\int_{0}^{x}\left(1-\frac{[u]}{u}\right)\mathrm{d}u$, 其中 $[x]$ 表示小于等于 x 的最大整数, 试讨论

$$\int_{1}^{+\infty}\frac{e^{f(x)}}{x^p}\cos\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x$$

的敛散性, 其中 $p>0$。

♡

3.4 二重积分

题目 3.24 (第五届决赛)

$$\int_0^{2\pi} x \int_x^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{t^2} \mathrm{d}t \mathrm{d}x$$

♡

题目 3.25 (第四届决赛)

$$\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \left| x^2 + y^2 - x - y \right| \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

♡

题目 3.26 (第十一届初赛)

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^{\pi} e^{\sin\theta(\cos\phi - \sin\phi)} \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

♡

题目 3.27 (第七届决赛)

设 $D: 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$, 求 $I = \iint\limits_D \left(x + y^2\right) e^{-\left(x^2+y^2-4\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

♡

题目 3.28 (第三届初赛)

求 $\iint\limits_D \operatorname{sgn}(xy - 1) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x, y) \,|0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 2\}$。

♡

题目 3.29 (第十三届初赛)

记 $D = \left\{(x, y) \left| x^2 + y^2 \leqslant \pi \right.\right\}$, 则 $\iint\limits_D \sin x^2 \cos y^2 + x\sqrt{x^2 + y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

♡

题目 3.30 (第一届初赛)

$\iint\limits_D \dfrac{(x + y)\ln\left(1 + \frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1 - x - y}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 区域 D 是由直线 $x + y = 1$ 与两坐标轴所围三角形区域。

♡

题目 3.31 (第十三届初赛补赛)

设函数 $f(x, y)$ 在闭区域 $D = \left\{(x, y) \left| x^2 + y^2 \leqslant 1 \right.\right\}$ 上具有二阶连续偏导数, 且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + y^2$, 求 $\lim\limits_{r \to 0^+} \dfrac{\iint_{x^2+y^2 \leqslant r^2} \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(\tan r - \sin r)^2}$。

♡

题目 3.32 (第六届决赛)

设 $f(x,y)$ 为 R^2 上的非负的连续函数，若 $I = \lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在极限，则称广义积分 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I。若 $\iint\limits_{R^2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 收敛于 I，证明极限 $\lim\limits_{t\to+\infty} \iint\limits_{-t\leqslant x,y\leqslant t} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在且收敛于 I。

3.5 三重积分

题目 3.33 (第九届初赛)

记曲面 $z^2 = x^2 + y^2$ 和 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 围成空间区域 V，求三重积分 $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 。

题目 3.34 (第十届初赛)

计算三重积分 $\iiint\limits_V x^2 + y^2\mathrm{d}v$，其中 V 是由 $x^2 + y^2 + (z-2)^2 \geqslant 4, x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leqslant 9$ 及 $z \geqslant 0$ 所围成的空间图形。

题目 3.35 (第十一届初赛)

计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega \dfrac{xyz}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = 2xy$ 围成的区域在第一卦限部分。

题目 3.36 (第八届初赛)

某物体所在的空间区域为 $\Omega : x^2 + y^2 + 2z^2 \leqslant x + y + 2z$，密度函数为 $x^2 + y^2 + z^2$，求质量 $M = \iiint\limits_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

题目 3.37 (第四届初赛)

$F(x)$ 为连续函数,$t > 0$，区域 Ω 是由椭圆抛物面 $z = x^2+y^2$ 和球面 $x^2+y^2+z^2 = t^2\ (t > 0)$ 所围起来的部分。定义三重积分 $F(t) = \iiint\limits_\Omega f(x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}v$，求 $F(t)$ 的导数 $F'(t)$。

题目 3.38 (第十届决赛)

计算三重积分 $M = \iiint\limits_\Omega \dfrac{1}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\Omega : 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant 1$。

题目 3.39 (第八届决赛)

设函数 $f(x,y,z)$ 在区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}\left(x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

3.6 曲线积分

题目 3.40 (第六届决赛)

求曲线积分 $I=\displaystyle\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{|x|+|y|}$, 其中 L 是以 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时针方向。

题目 3.41 (第四届初赛)

设函数 $u=u(x)$ 连续可微,$u(2)=1$, 且 $\displaystyle\int_L(x+2y)\,u\mathrm{d}x+\left(x+u^3\right)u\mathrm{d}y$ 在右半平面与路径无关, 求 $u(x)$ 。

题目 3.42 (第一届初赛)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,L 为 D 的正向边界, 试证:

(1) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L xe^{-\sin y}\mathrm{d}y-ye^{\sin x}\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\oint_L xe^{\sin y}\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2$

题目 3.43 (第二届初赛)

设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数, 在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\displaystyle\oint_L\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数。

(1) 设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$ 。证明: $\displaystyle\oint_L\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$ 。

(2) 求函数 $\varphi(x)$ 。

(3) 设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线, 求 $\displaystyle\oint_C\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$。

(题目 4.24 类题, 2005 年考研数学一真题)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数, 在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上, 曲线积分 $\displaystyle\oint_L\frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数。

(1) 证明: 对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C , 有

$$\oint_C\frac{\varphi(y)\,\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0$$

(2) 求函数 $\varphi(y)$ 的表达式。

题目 3.44 (第九届初赛)

设曲线 Γ 为曲线 $x^2+y^2+z^2=1, x+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 从点 $A(1,0,0)$ 到点 $B(0,0,1)$ 的一段, 求曲线积分 $I=\int_\Gamma y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$ 。

♡

题目 3.45 (第十二届决赛)

记空间曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$ $(a>0)$, 求积分 $\oint_\Gamma (1+x)^2\mathrm{d}s$。

♡

题目 3.46 (第十二届初赛)

计算 $I=\oint_\Gamma \left|\sqrt{3}y-x\right|\mathrm{d}x-5z\mathrm{d}z$, 曲线 $\Gamma:\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ x^2+y^2=2z \end{cases}$, 从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向。

♡

题目 3.47 (第十届决赛)

设曲线 L 是空间区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面与平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 的交线, 求 $\left|\oint_L \left(z^2-y^2\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-z^2\right)\mathrm{d}y+\left(y^2-x^2\right)\mathrm{d}z\right|$。

♡

题目 3.48 (第五届初赛)

设 $I_a(r)=\int_C \dfrac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2\right)^a}$, 其中 a 为常数, 曲线 C 为椭圆 $x^2+xy+y^2=r^2$, 取正向, 求极限 $\lim\limits_{r\to+\infty} I_a(r)$ 。

♡

题目 3.49 (第三届决赛)

设连续可微函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(xz-y, x-yz)=0$ (其中 $F(u,v)$ 有连续的偏导数) 唯一确定,L 为正向单位圆周, 试求:

$$\oint_L \left(xz^2+2yz\right)\mathrm{d}y-\left(2xz+yz^2\right)\mathrm{d}x$$

♡

题目 3.50 (第十届初赛)

设函数 $f(t)$ 在 $t\neq 0$ 时一阶连续可导, 且 $f(1)=0$, 求函数 $f\left(x^2-y^2\right)$, 使得曲线积分 $\int_L y\left[2-f\left(x^2-y^2\right)\right]\mathrm{d}x+xf\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}y$ 与路径无关, 其中 L 为任一不与直线 $y=\pm x$ 相交的分段光滑曲线。

♡

3.7 曲面积分

题目 3.51 (第一届决赛)

求 $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-y^2-x^2}$ 的上侧, $a>0$。

题目 3.52 (第五届初赛)

设 Σ 是一个光滑封闭曲面, 方向朝外。给定第二型的曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^3-x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(2y^3-y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3z^3-z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

试确定曲面 Σ, 使得积分 I 的值最小, 并求该最小值。

题目 3.53 (第五届决赛)

设函数 $f(x)$ 连续可导,$P=Q=R=f\left(\left(x^2+y^2\right)z\right)$, 有向曲面 Σ_t 是圆柱体 $x^2+y^2\leqslant t^2, 0\leqslant z\leqslant 1$ 的表面, 方向向外, 记第二型的曲面积分

$$I_t=\iint\limits_{\Sigma_t}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

求极限 $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{I_t}{t^4}$。

题目 3.54 (第三届初赛)

设函数 $f(x)$ 连续,a,b,c 为常数,Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，记第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S$。求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1}f\left(\sqrt{a^2+b^2+c^2}u\right)\mathrm{d}u$。

题目 3.55 (第二届决赛)

已知 S 是空间曲线 $\begin{cases}x^2+3y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转形成的椭球面的上半部分（$z\geqslant 0$）（取上侧）,Π 是 S 在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面,$\rho(x,y,z)$ 是原点到切平面 Π 的距离,λ,μ,ν 表示 S 的正法向的方向余弦, 计算:

(1) $\iint\limits_{S}\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$　(2) $\iint\limits_{S}z(\lambda x+3\mu y+\nu z)\,\mathrm{d}S$

题目 3.56 (第六届初赛)

设球体 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2\leqslant 12$ 被平面 $P:x+y+z=6$ 所截的小球缺为 Ω。记球缺上的球冠为 Σ, 方向指向球外, 求第二型曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

题目 3.57 (第七届决赛)

设 $P(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在空间上有连续偏导数，设上半球面

$$S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$$

方向向上，若对任何点 (x_0,y_0,z_0) 和 $r>0$，第二型曲面积分 $\iint\limits_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$，证明：$\dfrac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$。

♡

题目 3.58 (第十三届初赛)

对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z) = a_1x^4 + a_2y^4 + a_3z^4 + 3a_4x^2y^2 + 3a_5y^2z^2 + 3a_6x^2z^2$$

计算曲面积分 $\oint\!\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$。

♡

题目 3.59 (第十三届初赛补赛)

若对于 R^3 中半空间 $\{(x,y,z) \in R^3 \,|x>0\}$ 内任意有向光滑封闭曲面 S，都有

$$\iint\limits_S xf''(x)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\left(xf(x) - f'(x)\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - xz\left(\sin x + f'(x)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

其中 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶导数连续且 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} f'(x) = 0$，求 $f(x)$。

♡

第 4 章 应用题专题

4.1 几何应用

题型归类 题目 4.1-4.12：求解直线方程和平面方程

题目 4.1 (第八届初赛)

曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

题目 4.2 (第一届初赛)

曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程。

题目 4.3 (第六届初赛)

设有曲面 $S:z=x^2+2y^2$ 和平面 $\pi:2x+2y+z=0$，求与 π 平行的 S 的切平面方程。

题目 4.4 (第十届初赛)

若曲线 $y=f(x)$ 由 $\begin{cases} x=t+\cos t \\ e^y+ty+\sin t=1 \end{cases}$ 确定，求此曲线在 $t=0$ 对应点处的切线方程。

题目 4.5 (第十二届初赛)

设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程。

题目 4.6 (第十一届决赛)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $3x-y=2\arctan(y-2x)$ 所确定，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $P\left(1+\dfrac{\pi}{2},3+\pi\right)$ 处的切线方程。

题目 4.7 (第四届决赛)

过直线 $\begin{cases} 10x+2y-2z=27 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ 作曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 的切平面，求此切平面的方程。

题目 4.8 (第五届决赛)

设 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 有连续偏导数，$\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,z)}\neq 0$。曲线 $\Gamma:\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 过点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$。记 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为 S，求 S 上过点 (x_0,y_0) 的切线方程。

题目 4.9 (第九届决赛)

设一平面过原点和点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，求此平面方程。

题目 4.10 (第四届初赛)

通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点 $(4,-3,1)$。

题目 4.11 (第八届决赛)

过单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}-2z^2=1$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 的交线且与直线 $\begin{cases}x=0\\3y+z=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

题目 4.12 (第十三届初赛补赛)

已知直线 $L:\begin{cases}2x-4y+z=0\\3x-y-2z=9\end{cases}$ 和平面 $\pi:4x-y+z=1$，则直线 L 在平面 π 上的投影直线方程。

题型归类 题目 4.13-4.14：求解锥面方程和柱面方程

题目 4.13 (第七届初赛)

设 M 是以三个正半轴为母线的半圆锥面，求其方程。

题目 4.14 (第十三届初赛)

过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0\\y-z=2\end{cases}$，$L_2:\begin{cases}x=0\\x+y-z+2=0\end{cases}$，$L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2}\\y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程。

题型归类 题目 4.15-4.19：面积、体积问题

题目 4.15 (第七届初赛)

曲面 $z=x^2+y^2+1$ 在点 $M(1,-1,3)$ 的切平面与曲面所围区域的体积。

题目 4.16 (第三届决赛)

求曲面 $x^2+y^2=az$ 和 $z=2a-\sqrt{x^2+y^2}\ (a>0)$ 所围立体的表面积。

题目 4.17 (第八届决赛)

曲线 $L_1:y=\dfrac{1}{3}x^3+2x\ (0\leqslant x\leqslant 1)$ 绕直线 $L_2:y=\dfrac{4}{3}x$ 旋转所生成的旋转曲面的面积。

题目 4.18 (第五届初赛)

过曲线 $y=\sqrt[3]{x}\ (x\geqslant 0)$ 上的点 A 作切线，使该切线与曲线及 x 轴所围成的平面图形的面积为 $\dfrac{3}{4}$，求 A 点的坐标。

题目 4.19 (第六届初赛)

设一球缺高为 h，所在球半径为 R。证明该球缺的体积为 $\frac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，球冠的面积为 $2\pi Rh$。

题型归类 题目 4.20-4.26：极值、最值问题

题目 4.20 (第五届初赛)

设函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+3x^2y-2y^3=2$ 所确定，求 $y(x)$ 的极值。

题目 4.21 (第十二届决赛)

函数 $u=x_1+\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_3}{x_2}+\frac{2}{x_3}\,(x_i>0,i=1,2,3)$ 的所有极值点。

题目 4.22 (第二届决赛)

设 $\Sigma_1:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，其中 $a>b>c>0$，$\Sigma_2:z^2=x^2+y^2$，Γ 为 Σ_1 和 Σ_2 的交线，求椭球面 Σ_1 在 Γ 上各点的切平面到原点距离的最大值和最小值。

题目 4.23 (第一届初赛)

设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为 $\frac{1}{3}$，试确定 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小。

题目 4.24 (第一届决赛)

现要设计一个容积为 V 的圆柱体的容器，已知上下两底的材料费为单位面积 a 元，而侧面的材料费为单位面积 b 元，试给出最节省的设计方案，即高与上下底的直径之比为何值时所需费用最少？

(题目 4.24 类题, 2018 年考研数学一真题)

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值。

题目 4.25 (第十一届决赛)

设平面 L 的方程为 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$，且通过五个点 $P_1(-1,0)$，$P_2(0,-1)$，$P_3(0,1)$，$P_4(2,-1)$，$P_5(2,1)$，计算 L 上任意两点之间的直线距离最大值。

题目 4.26 (第九届初赛)

设二元函数 $f(x,y)$ 在平面上有连续的二阶偏导数，对任意角度 α，定义一元函数 $g_\alpha(t)=f(t\cos\alpha,t\sin\alpha)$，若对任何 α 都有 $\frac{\mathrm{d}g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t}=0$ 且 $\frac{\mathrm{d}^2g_\alpha(0)}{\mathrm{d}t^2}>0$。证明：$f(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值。

题目 4.27 (第二届初赛)

求直线 $l_1:\begin{cases} x-y=0 \\ z=0 \end{cases}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-3}{-1}$ 的距离。

题目 4.28 (第十一届初赛)

设 $a,b,c,\mu>0$，曲面 $xyz=\mu$ 与曲面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 相切, 求 μ。

题目 4.29 (第十二届决赛)

设 $P_0(1,1,-1)$, $P_1(2,-1,0)$ 为空间的两点, 计算函数 $u=xyz+e^{xyz}$ 在点 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数。

题目 4.30 (第七届决赛)

设 $f(u,v)$ 在全平面上有连续的偏导数, 证明：曲面 $f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$ 的所有切平面都交于点 (a,b,c)。

4.2 物理应用

题目 4.31 (第三届初赛)

在平面上, 有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线, 其线密度为 ρ。在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点, 求射线对该质点的引力。

题目 4.32 (第四届决赛)

设曲面 $\Sigma: z^2=x^2+y^2, 1\leqslant z\leqslant 2$, 其面密度为常数 ρ。求在原点处的质量为 1 的质点和 Σ 之间的引力（记引力常数为 G）。

题目 4.33 (第二届初赛)

设 l 是过原点、方向为 (α,β,γ) (其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$) 的直线, 均匀椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ (其中 $0<c<b<a$, 密度为 1) 绕 l 旋转。

(1) 求其转动惯量;

(2) 求其转动惯量关于方向 (α,β,γ) 的最大值和最小值。

题目 4.34 (第三届决赛)

设 D 为椭圆形 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\,(a>b>0)$, 面密度为 ρ 的均质薄板; l 为通过椭圆焦点 $(-c,0)$ (其中 $c^2=a^2-b^2$) 垂直于薄板的旋转轴。

(1) 求薄板 D 绕 l 旋转的转动惯量 J。

(2) 对于固定的转动惯量, 讨论椭圆薄板的面积是否有最大值和最小值。

第 5 章 证明题专题

5.1 中值定理证明

题目 5.1 (第一届决赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可微, 且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$。证明:

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$, 使得 $f(\xi)=\xi$。

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$, 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$ 。

题目 5.2 (第十二届初赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$。证明:

(1) 存在 $x_0\in(0,1)$, 使得 $f(x_0)=2-3x_0$。

(2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$, 且 $\xi\neq\eta$, 使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$ 。

题目 5.3 (第十二届决赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0, \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$。

(1) 证明存在互不相同的点 $x_1,x_2\in(a,b)$, 使得 $f'(x_i)=f(x_i), i=1,2$。

(2) 证明存在 $\xi\in(a,b), \xi\neq x_i, i=1,2$, 使得 $f''(\xi)=f(\xi)$。

(题目 5.3 推广)

(3) 证明存在 $\xi\in(a,b), \xi\neq x_i, i=1,2$, 使得 $f''(\xi)-3f'(\xi)+2f(\xi)=0$。

题目 5.4 (第三届初赛)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 具有连续的三阶导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$ 。求证: 在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 ξ, 使得 $f'''(\xi)=3$ 。

题目 5.5 (第十一届决赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数, 且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{2}, \int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=3$。

题目 5.6 (第二届初赛)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶导数, 并且 $f''(x)>0, \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\alpha>0, \lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=\beta<0$, 且存在一点 x_0, 使得 $f(x_0)<0$, 证明: 方程 $f(x)=0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 恰有两个实根。

题目 5.7 (第一届决赛)

设 $n>1$ 为整数,$F(x)=\int_0^x e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\ldots+\frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$,证明：方程 $F(x)=\frac{n}{2}$ 在 $\left(\frac{n}{2},n\right)$ 内至少有一个根。

♡

题目 5.8 (第十三届初赛补赛)

设 $f(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)+\int_{-1}^1|x-t|\,e^{-t^2}\mathrm{d}t$，证明：在区间 $(-1,1)$ 内，$f(x)$ 有且仅有两个实根。

♡

题目 5.9 (第九届决赛)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$ ，证明：在区间 $[0,1]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3 ，使得 $\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1}f(t)\,\mathrm{d}t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$
$=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3)$。

♡

题目 5.10 (第四届决赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上二阶可导，且 $|f(x)|<1$ ，又 $f^2(0)+[f'(0)]^2=4$，试证在 $(-2,2)$ 内至少存在一点 ξ ，使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$ 。

♡

题目 5.11 (第八届初赛)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $I=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\neq 0$。证明：在 $(0,1)$ 内存在不同的两点 x_1,x_2 使得 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}=\frac{2}{I}$ 。

♡

题目 5.12 (第七届初赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=0$ ，$\int_0^1 xf(x)\,\mathrm{d}x=1$，试证：

(1) $\exists x_0\in[0,1]$ 使得 $|f(x_0)|>4$ 。

(2) $\exists x_1\in[0,1]$ 使得 $|f(x_1)|=4$。

♡

题目 5.13 (第九届决赛)

设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续，且存在两两互异的点 $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$，使得 $\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta$ 。证明：对任意 $\lambda\in(\alpha,\beta)$ ，存在互异的点 $x_5,x_6\in(0,1)$，使得 $\lambda=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$。

♡

5.2 不等式证明

题目 5.14 (第八届决赛)

设 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{4}{\pi^2}<\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\tan^2 x}<\dfrac{2}{3}$。

♡

题目 5.15 (第十届初赛)

证明：对于连续函数 $f(x)>0$，有 $\ln\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x>\int_0^1 \ln f(x)\,\mathrm{d}x$。

♡

题目 5.16 (第五届初赛)

设 $|f(x)|\leqslant\pi, f'(x)\geqslant m>0\,(a\leqslant x\leqslant b)$。证明：$\left|\int_a^b \sin f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\dfrac{2}{m}$。

♡

题目 5.17 (第十届初赛)

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，且 $1\leqslant f(x)\leqslant 3$。证明：$1\leqslant\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\leqslant\dfrac{4}{3}$。

♡

题目 5.18 (第六届初赛)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，且有正常数 A,B 使得 $|f(x)|\leqslant A,|f''(x)|\leqslant B$。证明：对于任意 $x\in[0,1]$，有 $|f'(x)|\leqslant 2A+\dfrac{B}{2}$。

♡

题目 5.19 (第五届决赛)

设当 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足条件 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{1+x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$，且 $f(0)=1$。试证：当 $x\geqslant 0$ 时，有 $e^{-x}\leqslant f(x)\leqslant 1$ 成立。

♡

题目 5.20 (第十二届决赛)

设 $A_n(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中 $0<x,y<1$，证明：

$$\frac{2}{2-x-y}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}\right)$$

♡

题目 5.21 (第八届初赛)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，且当 $x\in(0,1)$，$0<f'(x)<1$。试证：当 $a\in(0,1)$ 时，有 $\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2>\int_0^a f^3(x)\,\mathrm{d}x$。

♡

题目 5.22 (第十二届决赛)

设 $f(x), g(x)$ 是 $[0,1] \to [0,1]$ 的连续函数，且 $f(x)$ 单调增加。求证：

$$\int_0^1 f(g(x))\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$$

♡

题目 5.23 (第四届初赛)

求最小的实数 C，使得满足 $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 1$ 的连续的函数 $f(x)$，都有

$$\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x \leqslant C$$

♡

题目 5.24 (第二届决赛)

是否存在区间 $[0,2]$ 上的连续可微函数 $f(x)$，满足 $f(0) = f(2) = 1, |f'(x)| \leqslant 1$ 和 $\left|\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 1$ ？请说明理由。

♡

题目 5.25 (第九届初赛)

设函数 $f(x) > 0$ 且在实轴上连续，若对任意实数 t，有 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1$ 。证明：$\forall a, b, a < b$，有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{b-a+2}{2}$ 。

♡

题目 5.26 (第五届决赛)

设 $D = \{(x,y)\,|0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}, I = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中函数 $f(x,y)$ 在 D 上有连续二阶偏导数。若对任何 x, y 有 $f(0,y) = f(x,0) = 0$，且 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \leqslant A$ 。证明：$I \leqslant \dfrac{A}{4}$ 。

♡

题目 5.27 (第七届初赛)

设 $f(x,y)$ 在 $x^2 + y^2 \leqslant 1$ 上有连续的二阶导数，$f_{xx}^2 + 2f_{xy}^2 + f_{yy}^2 \leqslant M$ 。若 $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$，证明：$\left|\iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{\pi\sqrt{M}}{4}$ 。

♡

题目 5.28 (第十届初赛)

设 $f(x,y)$ 在区域 D 内可微，且 $\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2} \leqslant M$，$A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ 是 D 内两点，线段 AB 包含在 D 内，证明：$|f(x_1,y_1) - f(x_2,y_2)| \leqslant M|AB|$，其中 $|AB|$ 表示线段 AB 的长度。

♡

题目 5.29 (第十一届初赛)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上具有连续导数，满足 $3\left[3+f^2(x)\right]f'(x) = 2\left[1+f^2(x)\right]^2 e^{-x^2}$，且 $f(0) \leqslant 1$。证明：存在常数 $M>0$，使得 $x\in[0,+\infty)$ 时，恒有 $|f(x)| \leqslant M$。

题目 5.30 (第八届决赛)

设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上连续的周期为 1 的周期函数，且满足 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ 与 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$。证明：当 $0\leqslant x\leqslant 13$ 时，有

$$\int_0^{\sqrt{x}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{x+27}} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sqrt{13-x}} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant 11$$

并给出取等号的条件。

题目 5.31 (第九届决赛)

设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D = \left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant a^2\right\}$ 上具有一阶连续偏导数，且满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2} = a^2$ 以及 $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = a^2$，其中 $a>0$。证明：

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{4}{3}\pi a^2$$

题目 5.32 (第十一届决赛)

设 Ω 是由光滑的简单封闭曲面 Σ 围成的有界闭区域，函数 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上具有连续二阶偏导数，且 $f(x,y,z)\big|_{(x,y,z)\in\Sigma} = 0$。记 ∇f 为函数 $f(x,y,z)$ 的梯度，并令 $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$。证明：对任意常数 $C>0$，恒有

$$C\iiint\limits_\Omega f^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{1}{C}\iiint\limits_\Omega (\Delta f)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \geqslant 2\iiint\limits_\Omega |\nabla f|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

第 6 章 微分方程专题

题目 6.1 (第三届决赛)

微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy = xe^{x^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 的解。

题目 6.2 (第十三届初赛补赛)

微分方程 $\begin{cases} (x+1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 1 = 2e^{-y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解。

题目 6.3 (第六届决赛)

设实数 $a \neq 0$，求微分方程 $\begin{cases} y'' - ay'^2 = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$ 的解。

题目 6.4 (第七届决赛)

微分方程 $y'' - (y')^3 = 0$ 的通解。

题目 6.5 (第二届决赛)

求方程 $(2x + y - 4)\,\mathrm{d}x + (x + y - 1)\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解。

题目 6.6 (第六届初赛)

已知 $y_1 = e^x$ 和 $y_2 = xe^x$ 是齐次二阶常系数线性微分方程的解，求该微分方程。

题目 6.7 (第一届初赛)

已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x + e^{-x}, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$ 是某二阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程。

题目 6.8 (第九届初赛)

已知可导函数 $f(x)$ 满足 $f(x)\cos x + 2\displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t = x + 1$，求 $f(x)$。

题目 6.9 (第四届决赛)

求在 $[0, +\infty)$ 上的可微函数 $f(x)$，使 $f(x) = e^{-u(x)}$，其中 $u = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 。

题目 6.10 (第九届决赛)

满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = u(t) + \displaystyle\int_0^1 u(t)\,\mathrm{d}t$ 及 $u(0) = 1$ 的可微函数 $u(t)$。

题目 6.11 (第九届决赛)

设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且满足 $\mathrm{d}f(x,y) = ye^y\mathrm{d}x + x(1+y)e^y\mathrm{d}y$ 及 $f(0,0)=0$，求 $f(x,y)$。

♡

题目 6.12 (第十一届初赛)

已知 $\mathrm{d}u(x,y) = \dfrac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{3x^2-2xy+3y^2}$，求 $u(x,y)$。

♡

题目 6.13 (第四届决赛)

设 $f(u,v)$ 有连续偏导数，满足 $f_u(u,v)+f_v(u,v)=uv$，求 $y(x)=e^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解。

♡

题目 6.14 (第八届初赛)

设 $f(x)$ 有连续导数，且 $f(1)=2$。记 $z=f(e^xy^2)$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=z$，求 $f(x)$ 在 $x>0$ 的表达式。

♡

题目 6.15 (第八届决赛)

设可微函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,y)$，$f\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{f\left(0,y+\frac{1}{n}\right)}{f(0,y)}\right)^n = e^{\cot y}$，求 $f(x,y)$。

♡

题目 6.16 (第十一届决赛)

设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(0)=f(1)=0$，且满足 $\int_0^1 [f'(x)]^2\mathrm{d}x - 8\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\dfrac{4}{3}=0$，求 $f(x)$。

♡

题目 6.17 (第十三届初赛)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数。

♡

(题目 6.17 铺垫)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y'+y=f(x)$ 的每一个解在 $[0,+\infty)$ 上都是有界函数。

♠

题目 6.18 (第二届初赛)

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=2t+t^2 \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$t>-1$ 所确定，且 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中 $\psi(t)$ 具有二阶导数，曲线 $y=\psi(t)$ 与 $y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}\mathrm{d}u+\dfrac{3}{2e}$ 在 $t=1$ 处相切，求函数 $\psi(t)$。

♡

第 7 章 无穷级数专题

7.1 常数项级数

题目 7.1 (第十三届初赛补赛)

计算 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{4n^2+4n+1}$。

题目 7.2 (第八届决赛)

设 $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$。证明：极限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在。

(题目 7.1 铺垫, 2011 考研数学一真题)

(1) 证明 $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$。

(2) 证明 $a_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} - \ln n$ 收敛。

(题目 7.1 拓展， 1999 考研数学二真题)

设 $f(x)$ 是区间 $[1,+\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\,(n=1,2,\ldots)$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。

题目 7.3 (第五届初赛)

判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{(n+1)(n+2)}$ 的敛散性, 若收敛, 求其和。

题目 7.4 (第十届决赛)

计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdots\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{1}{n+1}$。

题目 7.5 (第五届初赛)

设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛。

题目 7.6 (第七届决赛)

设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$, 其中 n 为正整数, 设 p 为实数, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n I_n^p$ 的绝对收敛性和条件收敛性。

(题目 7.7 类题， 1999 考研数学一真题)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\mathrm{d}x$

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值。

(2) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛。

题目 7.7 (第八届决赛)

$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$, 记 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=C$, 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-C)$ 的敛散性。

题目 7.8 (第九届决赛)

设 $0<a_n<1, n=1,2,\ldots$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$ （有限或 $+\infty$ ）

(1) 证明：当 $q>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛; 当 $q<1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

(2) 讨论 $q=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的敛散性并阐明理由。

题目 7.9 (第二届初赛)

设 $a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$, 证明：

(1) 当 $a>1$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^a}$ 收敛;

(2) 当 $a\leqslant 1$, 且 $S_n\to\infty\,(n\to\infty)$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^a}$ 发散。

题目 7.10 (第二届决赛)

设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 内的可微函数, 且 $|f'(x)|<mf(x)$, 其中 $0<m<1$ 。任取实数 a_0, 定义 $a_n=\ln f(a_{n-1}), n=1,2,\ldots$ 。证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛。

题目 7.11 (第四届决赛)

若对于任何收敛于零的序列 $\{x_n\}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_n$ 都收敛, 试证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛。

题目 7.12 (第四届初赛)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 为正项级数，证明：

(1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)>0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛；

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\dfrac{1}{b_{n+1}}\right)<0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

♡

题目 7.13 (第五届决赛)

假设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 1，$\lim\limits_{n\to\infty} n a_n=0$，且 $\lim\limits_{x\to 1^-}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n=A$。证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛且 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n=A$。

♡

题目 7.14 (第十届初赛)

已知 $\{a_k\},\{b_k\}$ 是正数数列，且 $b_{k+1}-b_k\geqslant\delta>0, k=1,2,\ldots,\delta$ 为某常数，证明：若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k\sqrt[k]{(a_1a_2\ldots a_k)(b_1b_2\ldots b_k)}}{b_{k+1}b_k}$ 收敛。

♡

题目 7.15 (第十二届初赛)

设 $u_n=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\,(n\geqslant 1)$

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

(3) 证明当 $p\geqslant 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$ 的和。

♡

题目 7.16 (第六届决赛)

设 $p>0, x_1=\dfrac{1}{4}, x_{n+1}^p=x_n^p+x_n^{2p}\,(n=1,2\ldots)$，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{1+x_n^p}$ 收敛并求其和。

♡

题目 7.17 (第十届决赛)

设 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为单调递减的正实数列，$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为一实数列，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ 收敛，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\ldots+a_n)\,u_n=0$。

♡

题目 7.18 (第十三届初赛)

设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$ 且 $b_n=a_nb_{n-1}-2, n=2,3,\ldots$。又设 $\{b_n\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和。

♡

题目 7.19 (第十一届决赛)

设 $\{u_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{u_{n+1}}{u_n}=1-\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n^\beta}\right)$, 其中常数 $\alpha>0,\beta>1$

(1) 对于 $v_n=n^\alpha u_n$, 判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{v_{n+1}}{v_n}$ 的敛散性;

(2) 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性。

注: 设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 则 $a_n=o(b_n)\Leftrightarrow$ 存在常数 $M>0$ 及正整数 N , 使得 $|a_n|\leqslant M|b_n|$ 对任意 $n>N$ 成立。

♡

题目 7.20 (第十三届初赛补赛)

设正数列 $\{a_n\}$ 单调减少且趋于零, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^n x^n$, 证明: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln f(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ 也发散。

♡

7.2 函数项级数

题目 7.21 (第十二届决赛)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]x^n$ 的收敛域。

♡

题目 7.22 (第七届初赛)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+2}{(n+1)!}(x-1)^n$ 的收敛域与和函数。

♡

题目 7.23 (第三届初赛)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$ 的和函数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}$ 的和。

♡

题目 7.24 (第一届初赛)

求 $x\to1^-$ 时, 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量。

♡

题目 7.25 (第一届初赛)

已知 $u_n(x)$ 满足

$$u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x,n=1,2,\ldots$$

且 $u_n(1)=\frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 。

♡

7.3 傅里叶级数

题目 7.26 (第七届初赛)

函数 $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [-5,0) \\ 0, & x \in [0,5) \end{cases}$ 在 $(-5,5]$ 的傅里叶级数在 $x=0$ 收敛的值。

♡

题目 7.27 (第六届决赛)

展 $[-\pi,\pi)$ 上的函数 $f(x) = |x|$ 成傅里叶级数，并证明 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$。

♡

(题目 7.27 类题， 1991 考研数学一真题)

将函数 $f(x) = 2 + |x| \, (-1 \leqslant x \leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并求此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

♠

题目 7.28 (第八届初赛)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可导，且 $f(x) = f(x+2) = f\left(x+\sqrt{3}\right)$，用 Fourier 级数理论证明 $f(x)$ 为常数。

♡

第 8 章 其他类型补充

题目 8.1 (第四届初赛)

求方程 $x^2 \sin \frac{1}{x} = 2x - 501$ 的近似解, 精确到 0.001 。

♡

题目 8.2 (第八届决赛)

求 $\sum\limits_{n=1}^{100} n^{-\frac{1}{2}}$ 的整数部分。

♡

题目 8.3 (第三届决赛)

证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n}{n^2x^2+1} e^{x^2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$。

♡

题目 8.4 (第一届决赛)

是否存在 R^1 中的可微函数 $f(x)$ 使得 $f(f(x)) = 1 + x^2 + x^4 - x^3 - x^5$, 若存在, 请给出一个例子; 若不存在, 请给出证明。

♡

题目 8.5 (第一届决赛)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续, 且对于固定的 $x \in [0,+\infty)$, 当自然数 $n \to +\infty$ 时,$f(x+n) \to 0$ 。证明: 函数序列 $\{f(x+n) \mid n = 1,2,\ldots\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛于 0。

♡

题目 8.6 (第七届初赛)

设 $f(x)$ 在 (a,b) 内二次可导, 且存在常数 α, β, 使得对于 $\forall x \in (a,b)$, 有 $f'(x) = \alpha f(x) + \beta f''(x)$, 证明 $f(x)$ 在 (a,b) 内无穷次可导。

♡

题目 8.7 (第十二届初赛)

证明 $f(n) = \sum\limits_{m=1}^{n} \int_0^m \cos \frac{2\pi n[x+1]}{m} \mathrm{d}x$ 等于 n 的所有因子 (包括 1 和 n 本身) 之和, 其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数, 并计算 $f(2021)$ 。

♡

题目 8.8 (第五届决赛)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上四阶连续可导, 且满足 $f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \frac{1}{2}f''(x+\theta h)h^2$ 。其中 θ 是与 x, h 无关的常数, 证明 $f(x)$ 是不超过 3 次的多项式。

♡

题目 8.9 (第十一届初赛)

设 $f(x)$ 是仅有正实根的多项式函数, 满足 $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ 。证明: $c_n > 0\,(n \geqslant 0)$, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}}$ 存在, 且等于 $f(x)$ 的最小根。

♡

题目 8.10 (第十一届初赛)

设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可微,$f(0)=0$，且存在常数 $A>0$, 使得 $|f'(x)|\leqslant A|f(x)|$ 在 $[0,+\infty)$ 上成立, 证明：在 $(0,+\infty)$ 上有 $f(x)\equiv 0$。

♡

题目 8.11 (第三届决赛)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上无穷次可微, 并且满足存在 $M>0$, 使得

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\leqslant M\,(k=1,2,\ldots),\forall x\in(-\infty,+\infty)$$

且 $f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0\,(n=1,2,\ldots)$。求证：在 $(-\infty,+\infty)$ 上,$f(x)\equiv 0$。

♡

题目 8.12 (第五届决赛)

设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且满足 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=1$，求一个这样的函数 $f(x)$ 使得积分 $I=\displaystyle\int_0^1\left(1+x^2\right)f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 取得最小值。

♡

题目 8.13 (第十届决赛)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，且 $|f(x)|\leqslant 1, f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$ 。证明：对于 $0<\alpha<\beta$ ，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_\alpha^\beta f'\left(nx-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x=0$ 成立。

♡