马尔可夫链的渐进分析（续三）

马尔可夫链的例子：

例 1 设有一个三状态{0,1,2}的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$$

例 2 设有一个无穷状态{0,1,2,3,……},的齐次马尔可夫链，它的一步转移概率是

$$\begin{bmatrix}1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & & & & \cdots & & \\ 1-p_j & 0 & 0 & 0 & 0 & p_j & 0\\ \cdots & & & & & & \cdots\end{bmatrix}$$

例 3 无限随机游动

例 4 设有一个具有一个弹性壁的随机游动，它的状态空间是{0,1,2,3, }，0 是弹性壁

例 5 艾伦菲斯特（Ehrenfest）模型

例 6 设有一个具有两个吸收壁的随机游动，它的状态空间是{-2,-1,0,1,2}, -2 和 2 为吸收态。

问题：

状态分析：常返态、非常返态，状态空间的分解，闭集

渐进分析

平稳分布：平稳分布存在的条件；平稳分布的特性；确定平稳分布的方法；

过渡分析：到达常返态的概率、进入时间的分布与期望

状态转移概率的渐进性和平稳分布

定理 1

设有一个有限状态的马尔可夫链，若存在一个正整数 m，使得对状态空间的任何状态 i,j 有 $p_{ij}^{(m)} > 0$，则 $\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \pi$ 。

极限矩阵 $\boldsymbol{\pi}$ 的性质：

矩阵有相同的行矢量，每一列元素都相同。

$p\pi = \pi$

推论 1：π 的行矢量满足下列关系：$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{p}$，$\sum_i \pi_i = 1$

π 给出状态的极限分布：

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(n)}\mathbf{p} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{p}，\quad \boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{p}$$

$$\sum_i \pi_i \, p_{ij} = \pi_j$$

归一化条件，$\sum_i \pi_i = 1$

矩阵 π 是唯一的

推论 2：系统稳定后状态的概率（渐进状态）与初始状态无关，稳态分布为 π 的行矢量

系统稳定后处于状态 j 的概率：

$$P(\xi_n = j) = \sum_i P(\xi_n = j / \xi_0 = i) P(\xi_0 = i)$$
$$= \sum_i P_{ij}^{(n)} P(\xi_0 = i)$$
$$\lim_{n\to\infty} P(\xi_n = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_i P_{ij}^{(n)} P(\xi_0 = i)$$
$$= \sum_i \pi_{ij} P(\xi_0 = i)$$
$$= \pi_j \sum_i P(\xi_0 = i)$$
$$= \pi_j$$

$$\lim_{n\to\infty} P\{\xi_n = j\} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$$

初始状态概率分布 $W = \left[p_0(\xi = 0), p_0(\xi = 1) \cdots p_0(\xi = n) \right]$

稳态分布

$W\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$的行矢量

马尔可夫链的稳态渐进分析举例

例 1

设有一个三状态$\{0,1,2\}$的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}0.5 & 0.4 & 0.1\\ 0.3 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 0.5\end{pmatrix}$$，求它的极限分布。

解：

按照稳态分布的存在定理进行判断，三状态$\{0,1,2\}$的马尔可夫链存在稳态解。

设极限分布是$\pi=\left(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2\right)$，它满足方程$\pi=\pi P$，即

$$\begin{aligned}&0.5\pi_0+0.3\pi_1+0.2\pi_2=\pi_0\\&0.4\pi_0+0.4\pi_1+0.3\pi_2=\pi_1\\&0.1\pi_0+0.3\pi_1+0.5\pi_2=\pi_2\\&\pi_0+\pi_1+\pi_2=1\end{aligned}$$

则极限分布是$\pi=\left(\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2\right)=\left(\frac{21}{62},\frac{23}{62},\frac{18}{62}\right)$

判断稳态解的存在性，并求马尔科夫链的稳态解

例 2

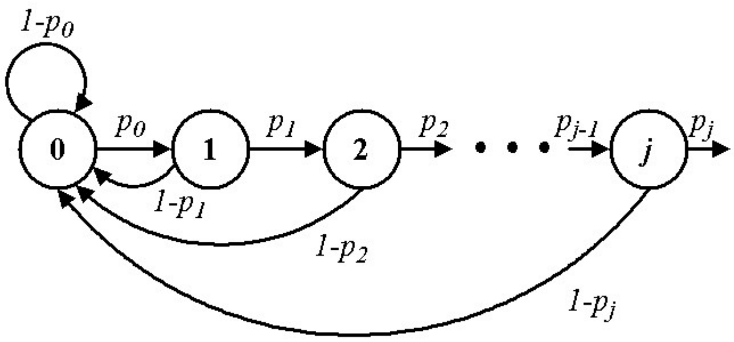
设有一个无穷状态$\{0,1,2,3,\quad\}$,的齐次马尔可夫链，它的一步转移概率是，

$$\begin{aligned}&p_{01}=p_0\quad, p_{00}=1-p_0,\quad p_{0i}=0,(i\neq 0,1)\\&p_{12}=p_1\quad, p_{10}=1-p_1,\quad p_{1i}=0,(i\neq 0,2)\\&p_{23}=p_2\quad, p_{20}=1-p_2,\quad p_{2i}=0,(i\neq 0,3)\\&\cdots\qquad\qquad\qquad\qquad\cdots\\&p_{j\,j+1}=p_j, p_{j0}=1-p_j,\quad p_{ji}=0,(i\neq 0,j)\end{aligned}$$

求状态 0 的特性。

解：

$$\begin{bmatrix}1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & & & & \cdots & & \\ 1-p_j & 0 & 0 & 0 & 0 & p_j & 0\\ \cdots & & & & & & \cdots\end{bmatrix}$$



所有的状态之间是相同的，状态空间是一个不可约闭集。

所有状态或全部是常返，或全部是非常返的

分析 0 状态的常返特性

求 $f_{00}^{(n)}$

$$f_{00}^{(1)} = 1 - p_0$$

$$f_{00}^{(2)} = p_0(1 - p_1) = p_0 - p_0 p_1$$

$$f_{00}^{(n)} = p_0 p_1 \cdots p_{n-2}(1 - p_{n-1}) = p_0 p_1 \cdots p_{n-2} - p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_{00}^{(n)} = 1 - p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}$$

迟早返回 0 状态的概率是

$$f_{00} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{00}^{(n)} = 1 - \lim_{n\to\infty}\left(p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}\right)$$

0 状态是常返的条件是 $\lim_{n\to\infty}\left(p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}\right) = 0$

这等价于 $\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{1}{p_n} = \infty$

如果 $p_n = e^{-1/(n+1)}, n = 0,1,2,\cdots$，

则有，$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{1}{p_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty$，这个链是常返的。

如果 $p_n = e^{-1/(n+1)^2}, n = 0,1,2,\cdots$，

则有，$\sum_{n=0}^{\infty} \ln \frac{1}{p_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} < \infty$，这个链是非常返的。

它迟早返回零状态的概率是

$$f_{00}=1-\exp\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$
$$=1-\exp\left\{-\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right]\right\}$$
$$=1-\exp(-\frac{\pi}{2})=0.8070$$

结论：0 状态是常返的条件是 $\lim_{n\to\infty}\left(p_0 p_1\cdots p_{n-2}p_{n-1}\right)=0$

分析 0 状态的常返特性，研究从 0 状态出发，返回 0 状态的概率。

例 3

无限制随机游动的 0 状态常返行为的分析

解：

它的一步转移概率是，

$$\begin{cases} p_{i\ i+1}=p \\ p_{i\ i-1}=q \\ p_{i\ j}=0, \quad if\ \ j\neq i+1,i-1 \end{cases}$$

无限制随机游动各状态都相通，则所有状态或全部是常返的或全部是非常返的。

研究状态 0 的常返和非常返的性质：

可以计算 $\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}$。如果 $\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}$ 小于 1，则 0 状态是非常返的，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}$ 等于 1，则 0 状态是常返的。

也可以计算 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}$ 。如果 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}$ 是有限的，则 0 状态是非常返的，如果 $\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}$ 是无限的，则 0 状态是常返的。

引用研究随机游动的矩生成函数：

返回原点的概率 $\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}$ ：

$$V(z)=1-\sqrt{1-4pqz^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_{2n}=V(z=1)=1, \qquad p=q=1/2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}v_{2n}=V(z=1)<1, \qquad p\neq q\neq 1/2$$

返回原点的概率之和 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$：

$$U(z)=\frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}=U(z=1)=\infty, \qquad p=q=1/2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}=U(z=1)<\infty, \qquad p\neq q\neq 1/2$$

结论：p=1/2，零状态是常返的，p≠1/2 零状态是非常返的。

分析 0 状态的常返特性，研究从 0 状态出发，返回 0 状态的概率。

例 4

设有一个具有一个弹性壁的随机游动，它的状态空间是{0,1,2,3, }，0 是弹性壁试分析各个状态的特性。

解：

状态之间的转移概率是，

$$p_{j\,j+1}=p \quad ,(j=0,1,2,\cdots)$$

$$p_{j\,j-1}=q \quad ,(j=1,2,3,\cdots)$$

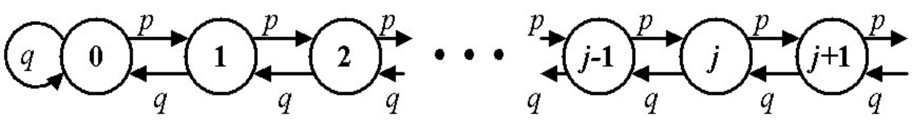
$$p_{00}=q$$

… …

$$p_{j\,k}=0 \qquad ,(j\neq 0,k\neq j+1,j-1)$$

$$p_{0\,k}=0 \qquad ,(k\neq 0,1)$$

绘出状态转移图:



定义到达稳态后系统处于状态 j 的概率是 $\pi(j)$，系统有平衡方程：

$$p\pi(0)=q\pi(1)$$

$$p\pi(1)=q\pi(2)$$

$$p\pi(2)=q\pi(3)$$

… … …

$$p\pi(j)=q\pi(j+1)$$

… … …

平衡方程分析：

系统的稳态状态方程组：

$$p\pi(0)+q\pi(0)=q\pi(1)+q\pi(0)$$

即，

$$p\pi(0)=q\pi(1)$$

对于状态1,　2,　$\cdots$ 有

$$\begin{aligned}
&p\pi(1)+q\pi(1)=q\pi(2)+p\pi(0)\\
&p\pi(2)+q\pi(2)=q\pi(3)+p\pi(1)\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
&p\pi(j)+q\pi(j)=q\pi(j+1)+p\pi(j-1)\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots
\end{aligned}$$

将上述方程进行整理，即得平衡方程：

$$p\pi(0)=q\pi(1)$$

$$\begin{aligned}
&p\pi(1)=q\pi(2)\\
&p\pi(2)=q\pi(3)\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
&p\pi(j)=q\pi(j+1)\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots
\end{aligned}$$

进一步得到递推关系，

$$\pi(1)=\frac{p}{q}\pi(0)$$

$$\begin{aligned}
&\pi(2)=\frac{p}{q}\pi(1)=\left(\frac{p}{q}\right)^2\pi(0)\\
&\pi(3)=\frac{p}{q}\pi(2)=\left(\frac{p}{q}\right)^3\pi(0)\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\\
&\pi(j)=\frac{p}{q}\pi(j-1)=\left(\frac{p}{q}\right)^j\pi(0)\\
&\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots
\end{aligned}$$

考虑到所有状态概率的和为 1，有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\pi(j)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j\pi(0)=\pi(0)\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^j=1$$

若 $p<q$，即 $p<1/2$

$\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j}$ 收敛，$\pi(0)=1-\frac{p}{q}$，随机游动是常返的。

若 $p \geq q$，即 $p \geq 1/2$

$\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{p}{q}\right)^{j}$ 不收敛，随机游动是非常返的，无极限分布。

分析状态的一步转移概率，系统状态的特性，建立稳态概率的方程，求出稳态解。

例 5 艾伦菲斯特（Ehrenfest）模型。一个坛子装有 c 个球，它们或是红色的或是黑色的。从坛子随机地摸出一个球并换入另一个颜色的球，经过 n 次摸换，把坛子中的黑球数定义为系统的状态，试分析各个状态的特性。

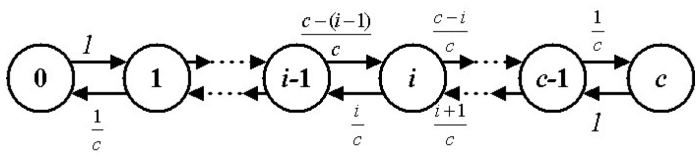
解：

设系统处于状态 i，坛子中有 i 个黑球，则以概率 $\frac{i}{c}$ 摸出一个黑球，使坛子里变成 i-1 个黑球；以概率 $\frac{c-i}{c}$ 摸出一个红球，使坛子里变成 i+1 个黑球。

当系统处于状态 i 时，它转移到状态 i-1 的概率是 $\frac{i}{c}$，它转移到状态 i+1 的概率是 $\frac{c-i}{c}$。

$$\begin{cases} p_{i\ i-1}=\frac{i}{c}, & i=1,2,3,\cdots,c \\ p_{i\ i+1}=\frac{c-i}{c}, & i=0,1,2,\cdots,c-1 \end{cases}$$

系统的状态转移图：



系统中各个状态是相通的，它是一个不可约的马尔科夫链，它的稳态分布存在。

建立达到稳定状态后，系统的稳态方程是:

$$\frac{c-0}{c}\pi(0)=\frac{1}{c}\pi(1)$$

$$\frac{c-1}{c}\cdot\pi(1)+\frac{1}{c}\cdot\pi(1)=\frac{2}{c}\cdot\pi(2)+\frac{c-0}{c}\cdot\pi(0)$$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$\frac{c-j}{c}\cdot\pi(j)+\frac{j}{c}\cdot\pi(j)=\frac{j+1}{c}\cdot\pi(j+1)+\frac{c-(j-1)}{c}\cdot\pi(j-1)$$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$\frac{c-(c-1)}{c}\cdot\pi(c-1)+\frac{c-1}{c}\cdot\pi(c-1)=\frac{c}{c}\cdot\pi(c)+\frac{c-(c-2)}{c}\cdot\pi(c-2)$$

$$\frac{c}{c}\cdot\pi(c)=\frac{c-(c-1)}{c}\cdot\pi(c-1)$$

$$\frac{c-0}{c}\pi(0)=\frac{1}{c}\pi(1)$$

$$\frac{c-1}{c}\cdot\pi(1)=\frac{2}{c}\cdot\pi(2)$$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$\frac{c-j}{c}\cdot\pi(j)=\frac{j+1}{c}\cdot\pi(j+1)$$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$\frac{1}{c}\cdot\pi(c-1)=\cdot\pi(c)$$

进一步得到递推关系:

$$\pi(1)=c\cdot\pi(0)=\binom{c}{1}\cdot\pi(0)$$

$$\pi(2)=\frac{c-1}{2}\cdot\pi(1)=\frac{c(c-1)}{2\cdot 1}\cdot\pi(0)=\binom{c}{2}\cdot\pi(0)$$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$\pi(j+1)=\frac{c-j}{\mathrm{j}+1}\cdot\pi(j)=\binom{c}{j+1}\cdot\pi(0)$$

$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$

$$\pi(c)=\frac{1}{c}\cdot\pi(c-1)=\binom{c}{c}\cdot\pi(0)$$

根据归一化条件，有

$$1=\sum_{j=0}^{c}\pi(j)=\sum_{j=0}^{c}\binom{c}{j}\cdot\pi(0=\pi(0)\sum_{j=0}^{c}\binom{c}{j}=\pi(0)\cdot 2^{c}$$

$$\pi(0)=2^{-c}$$

$$\pi(j)=\frac{1}{2^{c}}\binom{c}{j}$$

分析状态的一步转移概率，系统状态的特性，建立稳态概率的方程，求出稳态解。

例 6

天体物理中，质点进入和离开某一体积的马尔可夫链的状态分析。

例 7

用动态平衡的观点解释艾伦菲斯特模型的平稳分布。（略）

非常返状态的分析

所要研究的问题：从任意一个状态出发，进入特定的常返状态的概率；以及进入这个常返状态所需时间的概率分布。

系统状态的描述：

设$\{\xi(n),n=0,1,2,\cdots\}$是一个齐次马尔可夫链，它的状态空间是 I,状态空间按照各个状态的性质分成几个互不相交的常返态类$\{A_k,k=1,2,\cdots\}$，以及所有的非常返态所组成的子集I_c，有

$$I=I_c\cup A_1\cup A_2\cdots$$
$$A_1\cup A_2\cdots=I_{\bar{c}}$$
$$I=I_c\cup I_{\bar{c}}$$

其中$I_{\bar{c}}$是所有常返状态的集合。

问题 1、吸收概率

吸收概率的定义：

从某个状态 i 出发，进入某个常返状态子集A_k的概率$P\{A_k/i\}$，这个概率称作状态A_k对于状态 i 的吸收概率。

如果$i\in A_k$，则$P\{A_k/i\}=1$；

如果$i\in A_j, j\neq k$，则$P\{A_k/i\}=0$；

吸收概率方程组：

$$P\left\{A_k / i\right\}=\sum_{j\in I_c} p_{ij} P\left\{A_k / j\right\}+\sum_{j\in A_k} p_{ij}, i\in I_c$$ 。

问题 2、吸收时间

吸收时间的定义：

常返态对于状态 i 的吸收时间 T_i，指从某个起始状态 i，进入常返状态的时间，是一个随机变量。

T_i 的分析：

T_i 的概率：

令 $P\left\{T_i=n\right\}=\sum_k P\{T_{iA_k}=n\}, n=0,1,\cdots$，是随机过程从状态 i 出发，经过 n 步进入常返状态类的概率。

如果 $i\in I_{\bar{c}}$，则 $T_i=0, P\left\{T_i=0\right\}=1$；

如果有无穷多个非常返状态，随机过程可能永远停留在非常返状态中。

T_i 的概率的递推方程：

$$P_i^{(1)}=\sum_{j\in I_{\bar{c}}} p_{ij}, i\in I_c$$

$$P_i^{(n+1)}=\sum_{j\in I_c} p_{ij}\cdot P_j^{(n)}, n>0, i\in I_c$$

T_i 与吸收概率的关系：

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} P\left\{T_i=n\right\}=P\left\{T_i<\infty\right\}=\sum_k P\{A_k / i\}$$

$\sum_k P\{A_k / i\}$ 是随机过程从非常返状态 i 出发，迟早进入常返状态的概率；如果该随机过程有无限多个非常返状态，迟早进入常返状态的概率可能小于 1。

$1-\sum_k P\{A_k / i\}$ 是随机过程从非常返状态 i 出发,永远停留在非常返状态的概率.

T_i 的数学期望：

如果随机过程从非常返状态 i 出发，$P\left\{T_i<\infty\right\}=1$，计算 T_i 的数学期望。

分析：吸收时间 T_i 的数学期望为：

$$E\left\{T_i\right\}=\sum_{n=1}^{\infty} n P_i^{(n)}$$ ，

因为：$P_i^{(n+1)}=\sum_{j\in I_c} p_{ij}\cdot P_j^{(n)}, n>0$

则：$(n+1)\cdot P_i^{(n+1)} - P_i^{(n+1)} = \sum_{j=I_c} nP_j^{(n)} \cdot p_{ij}, n \ge 0$

上式两端对 $n=0,1,2,\cdots$ 求和，得到

$$E\left\{T_i\right\} - \sum_{n=1}^{\infty} P_i^{(n)} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=I_c} nP_j^{(n)} \cdot p_{ij}$$

$$E\left\{T_i\right\} - 1 = \sum_{j=I_c}\sum_{n=0}^{\infty} nP_j^{(n)} \cdot p_{ij} \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} P_i^{(n)} = \sum_k P\{A_k / i\} = 1\right)$$

$$E\left\{T_i\right\} - 1 = \sum_{j=I_c} E\left\{T_j\right\} \cdot p_{ij}, i \in I_c$$

由此可以求得从非常返态各个状态进入常返态的时间的数学期望。

非常返态的吸收时间的矩生成函数

设马尔可夫链的状态空间为 I，状态空间按照各个状态的性质分成几个互不相交的常返态类$\left\{A_k, k=1,2,\cdots\right\}$，以及所有的非常返态所组成的子集$I_c$，对于马尔可夫链的过渡态$i \in I_c$，设从过渡态 i 到常返态类$A_k$的转移时间为 T，从过渡态 i 经过 n 步进入到常返态类A_k的概率记为$P_k\{T=n/i\} \equiv P_{ik}{}^{(n)}$，其相应的矩生成函数为

$$P_{ik}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{ik}{}^{(n)} s^n$$

则$P_{ik}(s)$ 满足如下方程组：

$$P_{ik}(s) = \sum_j s \cdot P_{ij} \cdot P_{jk}(s)$$

证明：

利用切普曼-柯尔莫哥洛夫方程：

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{j\in I} P_{ij} \cdot P_{jk}^{(n-1)}$$

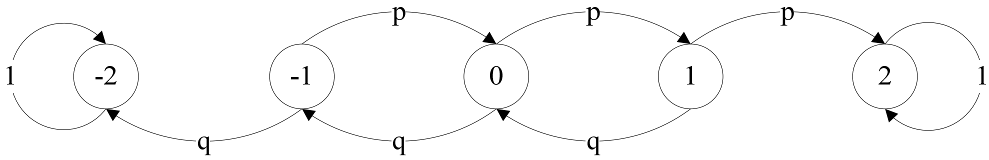
$$\begin{aligned} P_{ik}(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} P_{ik}{}^{(n)} s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j\in I} P_{ij} \cdot P_{jk}^{(n-1)} s^n \\ &= \sum_{j\in I} P_{ij}\, s \cdot \sum_{n=1}^{\infty} P_{jk}^{(n-1)} s^{n-1} \\ &= \sum_{j\in I} P_{ij}\, s \cdot P_{jk}(s) \end{aligned}$$

根据转移时间的概率母函数，可以得到转移时间的均值：

$$E_k\{T\}=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot P_k\{T=n/i\}=\frac{d}{ds}P_{ik}(s)|_{s=1}$$

非常返态分析举例

例 6 质点在直线上作随机游动，其规律如下图所示，其中，状态 -2 和状态 2 为吸收态。分析吸收态 2、-2 对各个分常返态的吸收概率。



解：定义 $U_{i,2}$ 表示吸收态对状态 i 的吸收概率

$$\begin{cases} U_{2,2}=1 \\ U_{1,2}=p\cdot U_{22}+q\cdot U_{02} \\ U_{0,2}=p\cdot U_{12}+q\cdot U_{-12} \\ U_{-1,2}=p\cdot U_{02}+q\cdot U_{-22} \\ U_{-2,2}=0 \end{cases}$$

解方程后得到：

$$\begin{cases} U_{22}=1 \\ U_{12}=\dfrac{p-p^2q}{1-2pq} \\ U_{02}=\dfrac{p^2}{1-2pq} \\ U_{-12}=\dfrac{p^3}{1-2pq} \\ U_{-22}=0 \end{cases}$$

同理可得：

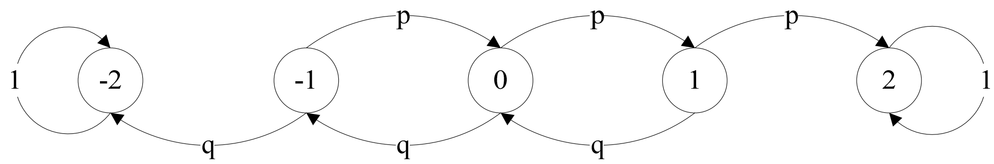
$$\begin{cases} U_{2,-2}=0 \\ U_{1,-2}=\dfrac{q^3}{1-2pq} \\ U_{0,-2}=\dfrac{q^2}{1-2pq} \\ U_{-1,-2}=\dfrac{q-q^3p}{1-2pq} \\ U_{-2,-2}=1 \end{cases}$$

设 Ui 表示从非常返态出发，最终进入常返态的概率，可以验证：

$$
\begin{cases} U_1 = U_{1,2} + U_{1,-2} = 1 \\ U_0 = U_{0,2} + U_{0,-2} = 1 \\ U_{-1} = U_{-1,-2} + U_{-1,-2} = 1 \end{cases}
$$

即从非常返态-1、0、1 出发最终将进入常返态。

例 7 质点在直线上作随机游动，其规律如下图所示，其中，状态 -2 和状态 2 为吸收态。分析吸收态 2 对各个分常返态的吸收时间的数学期望。



解：

根据 $E\left\{T_{iA_k}\right\} - P\{A_k / i\} = \sum_{j=I_c} E\left\{T_{jA_k}\right\} \cdot p_{ij}, i \in I_c$ 可得：

$$E[T_{-1,2}] - \frac{P^3}{1-2pq} = E[T_{0,2}] \cdot p$$

$$E[T_{0,2}] - \frac{p^2}{1-2pq} = E[T_{-1,2}] \cdot q + E[T_{1,2}] \cdot p$$

$$E[T_{1,2}] - \frac{p - p^2 q}{1-2pq} = E[T_{0,2}] \cdot q$$

解得：

$$E[T_{-1,2}] = \frac{P^3(3-2pq)}{(1-2pq)^2}$$

$$E[T_{0,2}] = \frac{2p^2}{(1-2pq)^2}$$

$$E[T_{1,2}] = \frac{p - p^2 q + 2p^3 q^2}{(1-2pq)^2}$$

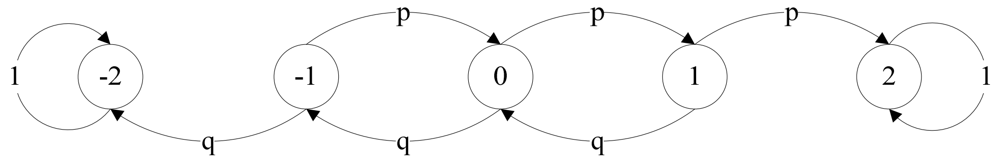
同理可得：

$$E[T_{-1,-2}] = \frac{q - pq^2 + 2p^2 q^3}{(1-2pq)^2}$$

$$E[T_{0,-2}] = \frac{2q^2}{(1-2pq)^2}$$

$$E[T_{1,-2}] = \frac{q^3(3-2pq)}{(1-2pq)^2}$$

例 8 质点在直线上作随机游动，其规律如下图所示，其中，状态 -2 和状态 2 为吸收态。分析常返态对各个分常返态的吸收时间的数学期望。



解：

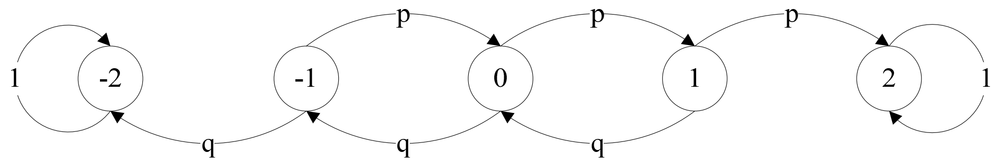
根据 $E\left\{T_i\right\}-1=\sum_{j=I_c} E\left\{T_j\right\}\cdot p_{ij}, i\in I_c$ 可得：

$$E[T_{-1}]-1=E[T_0]\cdot p$$
$$E[T_0]-1=E[T_{-1}]\cdot q+E[T_1]\cdot p$$
$$E[T_1]-1=E[T_0]\cdot q$$

解得：

$$E[T_{-1}]=\frac{1+2P^2}{1-2pq}$$
$$E[T_0]=\frac{2}{1-2pq}$$
$$E[T_1]=\frac{1+2q^2}{1-2pq}$$

例 9 质点在直线上作随机游动，其规律如下图所示，其中，状态 -2 和状态 2 为吸收态。分析质点从任意位置出发，进入吸收态 2 的吸收概率、平均转移时间。



解：

定义 T_i^n 表示从状态 i 出发经过 n 步进入吸收态 2 的概率：相应的概率母函数为 $T_i\ (s)$

则 $T_i\ (s)$，i=-1、0、1 满足如下方程组：

$$T_{-1}(s)=s\cdot p\cdot T_0(s)$$
$$T_0(s)=s\cdot q\cdot T_{-1}(s)+s\cdot p\cdot T_1(s)$$
$$T_1(s)=s\cdot q\cdot T_0(s)+s\cdot p$$

解方程得到：

$$\begin{cases} T_{-1}(s) = \dfrac{s^3 p^3}{1-2s^2 pq} \\ T_0(s) = \dfrac{s^2 p^2}{1-2s^2 pq} \\ T_1(s) = \dfrac{sp(1-s^2 pq)}{1-2s^2 pq} \end{cases}$$

吸收概率为：

$$\begin{cases} U_{-1} = T_{-1}(s)|_{s=1} = \dfrac{p^3}{1-2pq} \\ U_0 = T_0(s)|_{s=1} = \dfrac{p^2}{1-2pq} \\ U_1 = T_1(s)|_{s=1} = \dfrac{p(1-pq)}{1-2pq} \end{cases}$$

平均转移时间为：

$$E\{T_0\} = \frac{d}{ds} T_0(s)|_{s=1}$$

$$\frac{d}{ds} T_0(s) = \frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{s^2 p^2}{-1+2s^2 q p} \right)$$

$$= -2\frac{s p^2}{-1+2s^2 q p} + \frac{4 s^3 p^3 q}{(-1+2s^2 q p)^2}$$

因此： $E\{T_0\} = -2\dfrac{p^2}{-1+2qp} + \dfrac{4p^3 q}{(-1+2qp)^2}$

$$= 2\frac{p^2}{(-1+2qp)^2}$$

同理可得：

$$E\{T_{-1}\} = -3\frac{p^3}{-1+2qp} + \frac{4p^4 q}{(-1+2qp)^2}$$

$$= -\frac{p^3(-3+2qp)}{(-1+2qp)^2}$$

$$E\{T_1\}=\frac{p\,(q\,p-1)}{-1+2\,q\,p}+\frac{2\,p^2\,q}{-1+2\,q\,p}-\frac{4\,p^2\,(q\,p-1)\,q}{(-1+2\,q\,p)^2}$$

$$=\frac{p\,(-q\,p+2\,q^2\,p^2+1)}{(-1+2\,q\,p)^2}$$

利用概率母函数可以求经过 n 步转移进入吸收态 2 的概率：

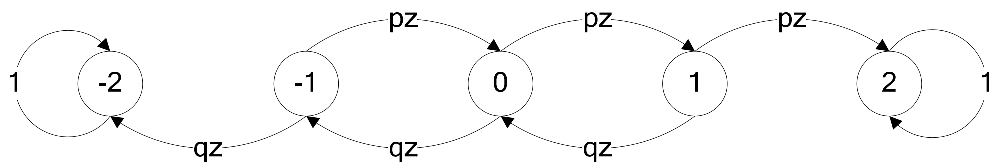
$$T_0(s)=\frac{s^2p^2}{1-2s^2pq}$$

$$=s^2\,p^2+2\,s^4\,p^3\,q+4\,s^6\,p^4\,q^2+8\,s^8\,p^5\,q^3+\cdots\cdots$$

所以经过 6 步转移进入吸收态的概率为：$4\,p^4\,q^2$，经过 18 步进入吸收态的概率为 $256\,p^{10}\,q^8$

用信号流图分析吸收概率

设一步增益分别为 pz 和 qz



利用梅森公式求从状态 i 到状态 2 的转移函数 A_i

$$A_i=\frac{\sum_k g_k\Delta_k}{\Delta}$$

式中：

Δ——称为流图的特征行列式

$\Delta=1-$（所有不同环路的增益之和）

+（每两个互不接触环路增益乘积之和）

−（每三个互不接触环路增益乘积之和）

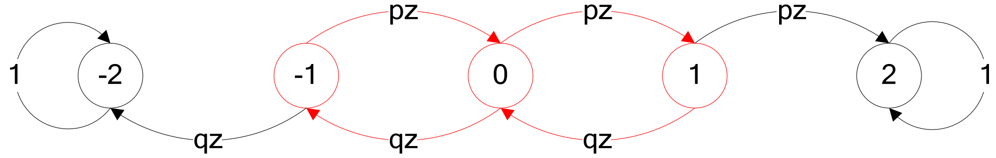
+…

k——表示由状态 i 到状态 2 之间，第 k 条前向增益的标号

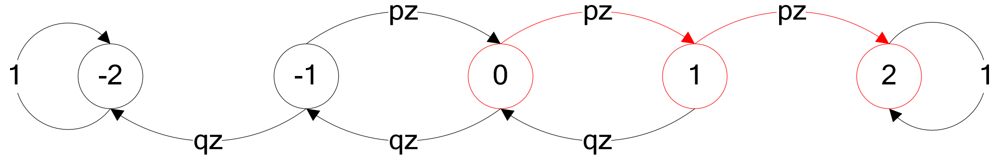
g_k——表示由状态 i 到状态 2 之间第 k 条前向路径的增益

Δ_k——称为对于第 k 条前向链路特征行列式的余因子。它是除去与 k 条前向链路相接触的环路外，余下的特征行列式。

观察从状态 0 出发的情况：
共有 2 个环路：分别为（-1,0）和（0,1）



前向路径（红色表示）

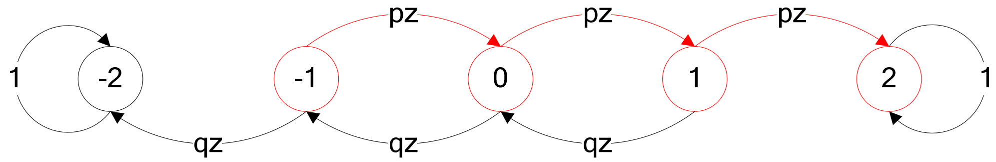


所以不存在不与前向路径不相接触的环路（即不存在不包括状态 0 和状态 1 的环路）
所以：

$$A_i = \frac{\sum_k g_k \Delta_k}{\Delta}$$

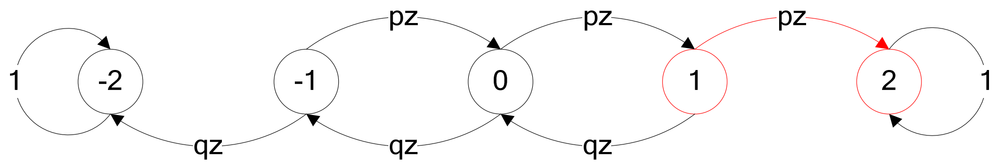
$$A_0(z) = \frac{pz \cdot pz \cdot 1}{1-2pzqz} = \frac{p^2 z^2}{1-2pzqz}$$

观察从状态-1 出发的情况，其前向路径为：

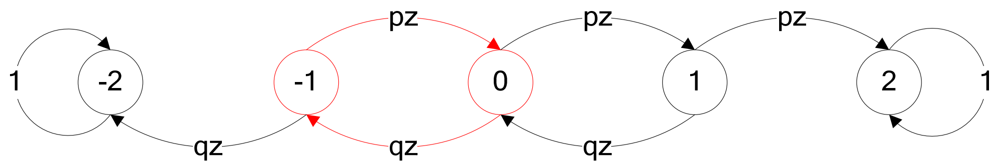


$$A_{-1}(z) = \frac{(pz)^3}{1-2pzqz}$$

观察从状态 1 出发的情况，其前向路径为：



与前向路径不相接触的环路有：



所以：

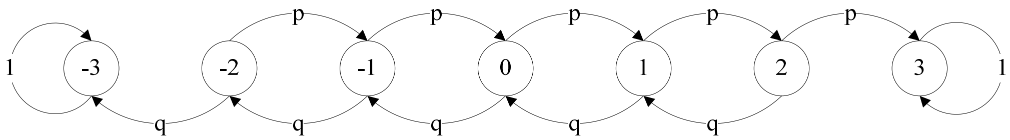
$$A_1(z)=\frac{pz(1-pzqz)}{1-2pzqz}$$

取 z=1 则：

$$\begin{cases} A_1(1)=\dfrac{pz(1-pzqz)}{1-2pzqz}\Big|_{z=1}=\dfrac{p-p^2q}{1-2pq} \\ A_0(1)=\dfrac{p^2z^2}{1-2pzqz}\Big|_{z=1}=\dfrac{p^2}{1-2pq} \\ A_{-1}(1)=\dfrac{(pz)^3}{1-2pzqz}\Big|_{z=1}=\dfrac{p^3}{1-2pq} \end{cases}$$

与之前通过解方程组求得的结果相同

例 8 将上例扩大到 7 个状态的情况

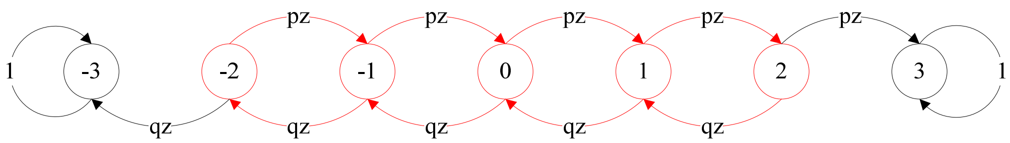


解：联列方程组并求解得：

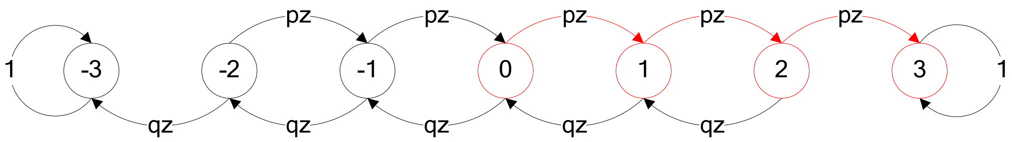
$$\begin{cases} U_3=1 \\ U_2=pU_3+qU_1 \\ U_1=pU_2+qU_0 \\ U_0=pU_1+qU_{-1} \\ U_{-1}=pU_0+qU_{-2} \\ U_{-2}=pU_{-1}+qU_{-3} \\ U_{-3}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_3=1 \\ U_2=\dfrac{p-3p^2q+p^3q^2}{1-4pq+3p^2q^2} \\ U_1=\dfrac{p^2-2p^3q}{1-4pq+3p^2q^2} \\ U_0=\dfrac{p^3}{1-3pq} \\ U_{-1}=\dfrac{p^4}{1-4pq+3p^2q^2} \\ U_{-2}=\dfrac{p^5}{1-4pq+3p^2q^2} \\ U_{-3}=0 \end{cases}$$

用信号流图的方法进行分析（仅分析从状态 0 出发到状态 3 的情况）

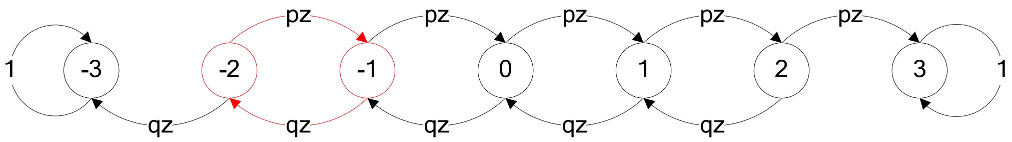
所有的环路有：



前向路径为：



与前向路径不相关的环路为



因此：

$$A_0(z)=\frac{(pz)^3(1-pzqz)}{1-4pzqz+3(pzqz)^2}=\frac{(pz)^3}{1-3pzqz}$$

当 z=0 时

$$A_0(1)=\frac{(p)^3}{1-3pq}=U_0$$

问题 1：吸收概率，从某个状态 i 出发，进入某个常返状态（常返状态子集）的概率

求解：

1． 联立方程组

2． 信号流图分析法：逐个状态独立分析求解

附：定理 1 证明

设有一个有限状态的马尔可夫链，若存在一个正整数 m，使得对状态空间的任何状态 i,j 有 $p_{ij}^{(m)}>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}P^{(n)}=\pi$。π 是一个矩阵，有相同的行矢量，每一列元素都相同。

证明：

设 m＝1 步的状态转移矩阵的所有元素是正的，

首先证明 n 步的状态转移矩阵每一列的最小元素随着 n 的增加而增大，每一列的最大元素随着 n 的增加而减小。

在 n 步的状态转移矩阵中，第 j 列中的最小元素是

$$\min_i p_{ij}^{(n)}=m_j(n)$$

在 n 步的状态转移矩阵中，第 j 列中的最大元素是

$$\max_i p_{ij}^{(n)}=M_j(n)$$

由切尔曼－科尔莫科洛夫方程，可以得到

$$p_{ij}^{(n)}=\sum_k p_{ik}p_{kj}^{(n-1)}\geq\sum_k p_{ik}m_j(n-1)=m_j(n-1)$$

$$m_j(n)\geq m_j(n-1)$$

同理可以得到

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_k p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \le \sum_k p_{ik} M_j(n-1) = M_j(n-1)$$

$$M_j(n) \le M_j(n-1)$$

接着证明 n 步的状态转移矩阵每一列的最小元素和最大元素，随着 n 的增加趋于同一极限。即 $M_j(n)$， $m_j(n)$ 趋于同一极限。

设，

从 i_0 经 n 步到达 j 的转移概率是 $m_j(n)$，

从 i_1 经 n－1 步到达 j 的转移概率是 $M_j(n-1)$。

则有，

$$\begin{aligned} m_j(n) = p_{i_0 j}^{(n)} &= \sum_k p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)} \\ &= \varepsilon P_{i_1 j}^{(n-1)} + (p_{i_0 i_1} - \varepsilon) P_{i_1 j}^{(n-1)} + \sum_{k \ne i_1} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)} \\ &\ge \varepsilon M_j(n-1) + \left[p_{i_0 i_1} - \varepsilon + \sum_{k \ne i_1} p_{i_0 k} \right] \cdot m_j(n-1) \end{aligned}$$

即

$$m_j(n) \ge \varepsilon M_j(n-1) + (1-\varepsilon) m_j(n-1)$$

同理，

设

从 i_0'经 n 步到达 j 的转移概率是 $M_j(n)$

从 i_2 经 n－1 步到达 j 的转移概率是 $m_j(n-1)$

则有，

$$\begin{aligned} M_j(n) = p_{i_0' j}^{(n)} &= \sum_k p_{i_0' k} p_{kj}^{(n-1)} \\ &= \varepsilon P_{i_2 j}^{(n-1)} + (p_{i_0' i_2} - \varepsilon) P_{i_2 j}^{(n-1)} + \sum_{k \ne i_2} p_{i_0' k} p_{kj}^{(n-1)} \\ &\le \varepsilon m_j(n-1) + \left[p_{i_0' i_2} - \varepsilon + \sum_{k \ne i_2} p_{i_0' k} \right] \cdot M_j(n-1) \end{aligned}$$

即

$$M_j(n) \le \varepsilon m_j(n-1) + (1-\varepsilon) M_j(n-1)$$

由此可以得到

$$\begin{aligned} M_j(n) - m_j(n) &\le (1-2\varepsilon)\left[M_j(n-1) - m_j(n-1) \right] \\ &\le (1-2\varepsilon)^{n-1} \end{aligned}$$

即，$M_j(n) = m_j(n)$ 当$n \to \infty$

这就证明了当$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}$，$\boldsymbol{\pi}$的每一列的元素都相同，$\boldsymbol{\pi}$有相同的行矢量。再设 m >1 步的状态转移矩阵的所有元素是正的，可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbf{p}^{(m)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(mn)} = \boldsymbol{\pi}$$

进一步设$k = 1,2,3,\cdots,m-1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(mn+k)} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(k)}\mathbf{p}^{(mn)} = \mathbf{p}^{(k)}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

定理得证。