马尔可夫链

1. 马尔可夫链

1.1 概述

马尔可夫链是时间离散，状态离散，具有马尔可夫性的过程

定义，马尔可夫链

设有一个离散时间、离散状态的随机过程$\{\xi(n), n=0,1,2\cdots\}$，且$\xi(n)$满足条件，

$$\begin{aligned}&P\{\xi(n+1)=j/\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n\}\\&\quad=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}\end{aligned}$$

则称这类随机过程是马尔可夫链。它具有无后效性。

性质 1，马尔可夫链的有限维概率密度可以用转移概率来表示，即

$$\begin{aligned}&P\{\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n,\xi(n+1)=j\}\\&=P\{\xi(n+1)=j/\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n\}\\&\quad P\{\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n\}\\&=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}\cdot P\{\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n\}\\&\quad\cdots\\&=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}\cdot P\{\xi(n)=i_n/\xi(n-1)=i_{n-1}\}\cdots\\&\quad P\{\xi(1)=i_1/\xi(0)=i_0\}\cdot P\{\xi(0)=i_0\}\end{aligned}$$

性质 2，马尔可夫链的有限维条件概率密度可以用转移概率来表示，即

$$\begin{aligned}&P\{\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n,\xi(n+1)=j/\xi(0)=i_0\}\\&=P\{\xi(0)=i_0,\xi(1)=i_1,\cdots\xi(n)=i_n,\xi(n+1)=j\}/P\{\xi(0)=i_0\}\\&=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}\cdot P\{\xi(n)=i_n/\xi(n-1)=i_{n-1}\}\cdots\\&\qquad P\{\xi(1)=i_1/\xi(0)=i_0\}\cdot P\{\xi(0)=i_0\}/P\{\xi(0)=i_0\}\\&=P\{\xi(n+1)=j/\xi(n)=i_n\}\cdot P\{\xi(n)=i_n/\xi(n-1)=i_{n-1}\}\cdots\\&\quad P\{\xi(1)=i_1/\xi(0)=i_0\}\end{aligned}$$

1.2 马尔可夫链的一步转移概率

定义，马尔可夫链的一步转移概率

条件概率$P\{\xi(k+1)=j/\xi(k)=i\}=P_{ij}(k)$是时刻 k 马尔可夫链的一步转移概率，

它完全描述了马尔可夫链的有限维概率。

性质，马尔可夫链的一步转移概率具有非负性和归一化特性。

$$P_{ij}(k) \ge 0，\ \sum_j P_{ij}(k) = 1$$

马尔可夫链的一步转移概率矩阵：

马尔可夫链的一步转移概率矩阵由一步转移概率组成，即

$$P(k) = \begin{bmatrix} P_{00}(k) & P_{01}(k) & P_{02}(k) & \cdots \\ P_{10}(k) & P_{11}(k) & P_{12}(k) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{i0}(k) & P_{i1}(k) & P_{i2}(k) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

一步转移概率矩阵的第 i 行第 j 列元素是从状态 i 转移到状态 j 的概率，每个元素都是非负的，每一行元素的和是 1。

定义，齐次马尔可夫链

如果马尔可夫链的一步转移概率满足条件 $P\{\xi(k+1) = j / \xi(k) = i\} = P_{ij}$，与 k 无关，则称这个马尔可夫链是齐次的。

马尔可夫链的分析问题，

分析状态转移的概率：

按照马尔可夫链的描述，确定马尔可夫链的状态空间和一步转移概率矩阵，

按照马尔可夫链的一步转移概率矩阵，确定马尔可夫链的 n 步转移概率矩阵，

进一步分析状态的概率：

确定经过 n 步到达某个状态的概率，

确定经过 n 步第一次到达某个状态的概率，

确定常返状态的极限分布，

确定从非常返状态到达特定状态的概率分布。

1.3 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

切普曼-柯尔莫哥洛夫方程，是用 m 步和 r 步转移概率来表示 m+r 步转移概率。

m 步转移概率：$P_{ij}^{(m)}(k) = P\{\xi(k+m) = j / \xi(k) = i\}$，

有 $P_{ij}^{(m)}(k) \ge 0$，$\sum_j P_{ij}^{(m)}(k) = 1$

切普曼-柯尔莫哥洛夫方程：

$$P_{ij}^{(m+r)}(n) = \sum_k P_{ik}^{(m)}(n) \cdot P_{kj}^{(r)}(n+m)$$

证明 1

按照全概率公式，

$$
\begin{aligned}
P_{ij}^{(m+r)}(n) &= P\{\xi(n+m+r)=j/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P\{\xi(n+m+r)=j,\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P\{\xi(n+m+r)=j/\xi(n+m)=k,\xi(n)=i\} \\
&\quad P\{\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P\{\xi(n+m+r)=j/\xi(n+m)=k\} \\
&\quad P\{\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P_{ik}^{(m)}(n)\cdot P_{kj}^{(r)}(n+m)
\end{aligned}
$$

证明 2

利用马尔可夫链的有限维条件概率密度可以用转移概率，有

$$
\begin{aligned}
&P\{\xi(n+m+r)=j,\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\} \\
&\quad = P\{\xi(n+m+r)=j/\xi(n+m)=k\}P\{\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\}
\end{aligned}
$$

对 n+m 时刻的状态 k 求和，有

$$
\begin{aligned}
P_{ij}^{(m+r)}(n) &= P\{\xi(n+m+r)=j/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P\{\xi(n+m+r)=j,\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P\{\xi(n+m+r)=j/\xi(n+m)=k\} \\
&\quad P\{\xi(n+m)=k/\xi(n)=i\} \\
&= \sum_k P_{ik}^{(m)}(n)\cdot P_{kj}^{(r)}(n+m)
\end{aligned}
$$

齐次切普曼-柯尔莫哥洛夫方程，

齐次马尔可夫链的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程：

$$P_{ij}^{(m+r)} = \sum_k P_{ik}^{(m)} \cdot P_{kj}^{(r)}$$

可以将它写成矩阵形式

$$\left[P_{ij}^{(m+r)}\right] = \left[P_{ik}^{(m)}\right]\cdot\left[P_{kj}^{(r)}\right]$$

可以将它写成矩阵转置形式

$$\left[P_{ij}^{(m+r)}\right]^T = \left[P_{kj}^{(r)}\right]^T \cdot \left[P_{ik}^{(m)}\right]^T$$

齐次马尔可夫链的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程的矩阵形式：

$$P^{(m+r)} = P^{(m)}\cdot P^{(r)}$$

$$P^{m+r} = P^m \cdot P^r$$

用 n 步转移概率、m 步转移概率来表示 n+m 步转移概率的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程（用全概率公式来证明）。

系统的状态概率方程，

系统在时刻 n 的概率分布是 $P\{\xi(n)=i\}, i=0,1,\cdots,$

写成概率分布矢量，

$$\mathbf{w}(n)=\left[P\{\xi(n)=0\},P\{\xi(n)=1\},\cdots,P\{\xi(n)=i\},\cdots\right]$$

系统在时刻 n+m 的概率分布是 $P\{\xi(n+m)=j\}, j=0,1,\cdots$

写成概率分布矢量，

$$\mathbf{w}(n+m)=\left[P\{\xi(n+m)=0\},P\{\xi(n+m)=1\},\cdots,P\{\xi(n+m)=i\},\cdots\right]$$

它们之间的关系是，

$$P\left\{\xi(n+m)=j\right\}=\sum_i P\left\{\xi(n+m)=j/\xi(n)=i\right\}\cdot P\left\{\xi(n)=i\right\}$$

写成矢量形式，$\mathbf{w}(n+m)=\mathbf{w}(n)\left[P^{(m)}(n)\right]$

2 马尔可夫链举例

2.1 马尔可夫链举例

天气预报问题，
数字通信的级连误码问题，
无限制的随机游动，
带有一个吸收壁的随机游动，
带有两个吸收壁的随机游动，
带有一个反射壁的随机游动，
带有两个反射壁的随机游动，
赌徒输光问题，
艾伦菲斯特模型，
Polya 模型，
离散分支问题。

2.2 普通的马尔可夫链举例

通过本节讲义的例题，着重说明从物理问题怎样建立系统模型，并进一步分析系统的一步状态转移概率，系统状态的概率，以及系统状态之间的转换的概率。

例 1 天气预报问题：

假设明天是否有雨仅与今天是否有雨有关，而与过去的天气无关。假设今天有雨明天有雨的概率为α，今天无雨明天有雨的概率为β；假设把有雨称为 0 状态天气，把无雨称为 1 状态天气。这是一个有两个状态的马尔可夫链，它的一步状态转移概率矩阵是

解：

$$P=\begin{pmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ \beta & 1-\beta\end{pmatrix}$$

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 2 数字通信系统：

数字通信的二进制对称信道链路，链路传输 0，1 两种信号，每一级链路的一步转移概率矩阵是 $P=\begin{pmatrix}P_{00} & P_{01}\\ P_{10} & P_{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{pmatrix}$

解：（略）

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 3 无限制的随机游动：

设有一个质点在 x 轴上作随机游动，在 t=1,2,3,…时沿 x 轴正方向或反方向移动一个单位距离，沿正方向移动一个单位距离的概率为 p，沿反方向移动一个单位距离的概率为 q=1-p。若以 $\xi(n)$ 表示时刻 n 质点的位置，则 $\{\xi(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程，$\xi(n+1),\xi(n+2),\cdots\xi(n+k),\cdots$ 等 n 时刻以后质点所处的位置只与 $\xi(n)=i$ 有关，而与质点在 n 以前是如何到达 I 的无关。所以它是一个马尔可夫链，其状态空间是 I：$\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。求其一步和 m 步转移概率。

解：

一步转移概率是，

$$\begin{cases}p_{i\ i+1}=p\\ p_{i\ i-1}=q\\ p_{i\ j}=0, \quad if\ \ j\neq i+1, i-1\end{cases}$$

m 步转移概率是，

m 步中有 m_1 是沿正方向移动的步数，有 m_2 是沿反方向移动的步数，都是正整数，

$$m_1+m_2=m$$
$$m_1-m_2=j-i$$
$$m_1=(m+j-i)/2$$
$$m_2=(m-j+i)/2$$

$$p^{(m)}{}_{i\ j}=\begin{pmatrix}m\\ \dfrac{m+j-i}{2}\end{pmatrix}p^{\frac{m+j-i}{2}}q^{\frac{m-j+i}{2}}$$

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 4 带有一个吸收壁的随机游动：

设有一个质点在 x 轴上作随机游动，在 t=1,2,3,…时沿 x 轴正方向或反方向移动一个单位距离，沿正方向移动一个单位距离的概率为 p，沿反方向移动一个单位距离的概率为 q=1-p。若以 $\xi(n)$ 表示时刻 n 质点的位置，则 $\{\xi(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程，$\xi(n+1),\xi(n+2),\cdots\xi(n+k),\cdots$ 等 n 时刻以后质点所处的位置只与 $\xi(n)=i$ 有关，而与质点在 n 以前是如何到达 I 的无关。但质点一旦到达状态 0，它就停留在状态 0 上。所以它是一个马尔可夫链，其状态空间是 I：$\{0,1,2,\cdots\}$。求其一步转移概率。

解：

一步转移概率是，

$$\begin{cases} p_{i\ i+1}=p, \quad if \quad i\ge 1, i\in I \\ p_{i\ i-1}=q, \quad if \quad i\ge 1, i\in I \\ p_{i\ j}=0, \quad if \quad j\ne i+1, i-1, i\ge 1, i\in I \\ p_{0\ 0}=1 \end{cases}$$

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 5 带有两个吸收壁的随机游动：

设有一个质点在 x 轴上作随机游动，在 t=1,2,3,…时沿 x 轴正方向或反方向移动一个单位距离，沿正方向移动一个单位距离的概率为 p，沿反方向移动一个单位距离的概率为 q=1-p。若以 $\xi(n)$ 表示时刻 n 质点的位置，则 $\{\xi(n), n=0,1,2,\cdots\}$ 是一个随机过程，$\xi(n+1),\xi(n+2),\cdots\xi(n+k),\cdots$ 等 n 时刻以后质点所处的位置只与 $\xi(n)=i$ 有关，而与质点在 n 以前是如何到达 I 的无关。

它是一个马尔可夫链，其状态空间是 I：$\{0,1,2,\cdots a\}$。但质点一旦到达状态 0 和 a，它就停留在状态 0 和 a 上，0 和 a 是两个吸收壁。求其一步转移概率。

解：

一步转移概率是，

$$\begin{cases} p_{i\,i+1}=p, \; if \quad 1\le i\le a-1 \\ p_{i\,i-1}=q, \; if \quad 1\le i\le a-1 \\ p_{i\,j}=0, \; if \quad j\ne i+1, i-1, 1\le i\le a-1 \\ p_{0\,0}=1 \\ p_{a\,a}=1 \end{cases}$$

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 6 赌徒输光问题：

两个赌徒进行一系列赌博，在每一局赌博中甲获胜的概率是 p，乙获胜的概率是 1-p，每一局后，负者要付一元给胜者。如果起始时甲有资本 a 元，乙有资本 b 元，a+b=c，两人

赌博直到甲输光或乙输光为止，求甲输光的概率。

解：

这个问题实际是带有两个吸收壁的随机游动问题，这时的状态空间是 I：$\{0,1,2,\cdots c\}$，$c=a+b,\quad a\geq 1,\quad b\geq 1$。问题是从 a 点出发，到达 0 状态先于 c 状态的概率。

设$0\leq j\leq c$，u_j为质点从 j 点出发到 0 状态先于 c 状态的概率。由全概率公式有

$$u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1}$$

由边界条件有

$$u_0 = 1$$
$$u_c = 0$$

解递推关系有

$$(p+q)u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1}$$
$$p(u_j - u_{j+1}) = q(u_{j-1} - u_j)$$
$$(u_j - u_{j+1}) = \frac{q}{p}(u_{j-1} - u_j)$$

定义$(u_j - u_{j+1}) = d_j$，$\frac{q}{p} = r$，相应的差分方程是

$$d_j = rd_{j-1} = r^2 d_{j-2} = \cdots = r^j d_0$$

设$r\neq 1$，

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 - u_c \\ &= \sum_{i=0}^{c-1}(u_i - u_{i+1}) \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} d_i \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} r^i d_0 \\ &= \frac{1-r^c}{1-r} d_0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_j &= u_j - u_c \\
&= \sum_{i=j}^{c-1}(u_i - u_{i+1}) \\
&= \sum_{i=j}^{c-1} d_i \\
&= \sum_{i=j}^{c-1} r^i d_0 \\
&= \frac{r^j - r^c}{1-r} d_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_j &= \frac{r^j - r^c}{1-r^c} u_0 = \frac{r^j - r^c}{1-r^c} \\
&= \frac{(q/p)^j - (q/p)^c}{1-(q/p)^c}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_a &= \frac{r^a - r^c}{1-r^c} \\
&= \frac{(q/p)^a - (q/p)^c}{1-(q/p)^c}
\end{aligned}
$$

设 $r=1$，

$$
\begin{aligned}
u_0 &= u_0 - u_c \\
&= \sum_{i=0}^{c-1}(u_i - u_{i+1}) \\
&= \sum_{i=0}^{c-1} d_i \\
&= \sum_{i=0}^{c-1} r^i d_0 \\
&= c d_0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_j &= u_j - u_c \\
&= \sum_{i=j}^{c-1}(u_i - u_{i+1}) \\
&= \sum_{i=j}^{c-1} d_i \\
&= \sum_{i=j}^{c-1} r^i d_0 \\
&= (c-j) d_0
\end{aligned}
$$

$$
u_j = \frac{c-j}{c}
$$

$$u_a = \frac{c-a}{c} = \frac{b}{c}$$

同样道理，可以得到乙先输光的概率，

当 $r \neq 1$，$u_a = \dfrac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^c}$，

当 r=1，$u_b = \dfrac{a}{c}$。

该例题是有两个吸收壁的特例，

建立了边界条件、递推关系、首先概率表达式，

该例题着重研究对称和非对称的赌徒输光的问题。

例 7 带有一个反射壁的随机游动：

该随机游动的状态空间是 I：$\{0,1,2,\cdots\}$。当质点进入 0 状态，下一步它以概率 p 向正方向移动一步，以概率（1－p）停留在 0 状态。这种情况也可以设想在-1/2 处有一个反射壁，每次向负方向移动即被反射壁反射回 0 状态。求其一步转移概率。

解：

一步转移概率是，

$$\begin{cases} p_{i\ i+1} = p, \quad if \quad 1 \le i \\ p_{i\ i-1} = q, \quad if \quad 1 \le i \\ p_{i\ j} = 0, \quad if \quad j \neq i+1, i-1, 1 \le i \\ p_{0\,0} = 1-p \\ p_{0\,1} = p \end{cases}$$

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 8 带有两个反射壁的随机游动：

该随机游动的状态空间是 I：$\{0,1,2,\cdots a\}$。当质点进入 0 状态，下一步它以概率 p 向正方向移动一步，以概率（1－p）停留在 0 状态。当质点进入 a 状态，下一步它以概率（1－p）向负方向移动一步，以概率 p 停留在 a 状态。求其一步转移概率。

解：

一步转移概率是，

$$\begin{cases} p_{i\ i+1} = p, \quad if \quad 1 \le i \le a-1 \\ p_{i\ i-1} = q, \quad if \quad 1 \le i \le a-1 \\ p_{i\ j} = 0, \quad if \quad j \neq i+1, i-1, 1 \le i \le a-1 \\ p_{0\,0} = 1-p \\ p_{0\,1} = p \\ p_{a\ a-1} = 1-p \\ p_{a\,a} = p \end{cases}$$

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 9

艾伦菲斯特（Ehrenfest）模型。一个坛子装有 c 个球，它们或是红色的或是黑色的。从坛子随机地摸出一个球并换入另一个颜色的球，经过 n 次摸换，研究坛子中黑球的数目。

解

设坛子中有 i 个黑球，并把坛子中的黑球数定义为系统的状态。它以概率 $\frac{i}{c}$ 摸出一个黑球，使坛子里变成 i-1 个黑球；它以概率 $\frac{c-i}{c}$ 摸出一个红球，使坛子里变成 i+1 个黑球。当系统处于状态 i 时，它转移到状态 i-1 的概率是 $\frac{i}{c}$，它转移到状态 i+1 的概率是 $\frac{c-i}{c}$。进一步假设 c=2a，设系统中黑求得个数减去 a 作为系统的状态，则系统的状态空间是 $\{-a, 1-a, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, a-1, a\}$，而一部状态转移概率是

$$\begin{cases} p_{i\ i-1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{i}{a}\right) \\ p_{i\ i+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{i}{a}\right) \end{cases}$$

给出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 10

朴里耶（Polya）模型。加设坛子里有 b 个黑丘壑 r 个红球，随机的从中取出一个球，然后再把球放回去，并加入 c 个与摸出球相同颜色的球，如此放取，不断进行下去。

解

设坛子中的黑球数目是系统的状态，$\xi(n)=i$ 表示在第 n 次摸放后坛子中 i 个黑球，因此有状态转移概率

$$p_{i\,j}(n) = \begin{cases} \frac{i}{b+r+nc}. & j=i+c \\ 1-\frac{i}{b+r+nc}, & j=i \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

状态转移概率是与 n 有关，它是非齐次的马尔科夫链。

绘出系统的状态图，并在图上标出状态之间的一步转移概率。（讲义略）

例 11

离散分支过程（略）