马尔可夫链 状态分类

1 马尔可夫链中状态的分类：

1.1 到达和相通：

定义 1：状态 i 可到达状态 j，

如果对状态 i 和 j 存在某个 $n(n \geq 1)$ 使得 $p_{i\,j}^{n} > 0$，即由状态 i 出发，经过 n 步状态转移，以正的概率到达状态 j，则称自状态 i 可到达状态 j，并记为 $i \to j$。反之，如状态 i 不能到达状态 j，记为 $i \not\to j$，此时对于一切 $n, p_{i\,j}^{n} = 0$。

定义 2：状态 i 和状态 j 互通，

有两个状态 i 和 j，如果由状态 i 可以到达状态 j，且由状态 j 可以到达状态 i，则称状态 i 状态 j 相通，记作 $i \longleftrightarrow j$

定理 1：到达的传递性，

如果由状态 i 可以到达状态 k，由状态 k 可以到达状态 j，则由状态 i 可以到达状态 j，即到达具有传递性。

定理 2：相通具有传递性。

如果由状态 i 和状态 k 相通，状态 k 和状态 j 相通，则由状态 i 和状态 j 相通，即相通具有传递性。

1.2 状态空间的分解：

定义 1，状态空间的类，

如果两个状态相通，则称两个状态处于同一类中。可以按照相通的概念把状态空间分成一些隔离的类。

状态空间分解成隔离的类，对于每个类都有相应的状态转移矩阵。

定义 2，状态空间的闭集，

设 C 为状态空间的一个子集，如果从 C 中的任何一个状态 i 不能到达 C 以外的任何状态，则称 C 是闭集。

如果单个状态构成一个闭集，则称这个状态为吸收态。

整个状态空间必定构成一个闭集。

闭集的充分必要条件是，$p_{i\,j} = 0, i \in C \;\; j \notin C$。

定义 3，不可约的马尔可夫链

如果除了整个状态空间以外，没有别的闭集的马尔可夫链称为不可约的，这时所有的状态是相通的。

定理 1，

在 m 步转移概率矩阵中，如果只保留闭集中各状态间的转移概率，而把其他所有行和列的元素删去，则留下的概率矩阵满足 $\sum_{k \in C} p_{i\,k} = 1, \quad i \in C$。

1.3 状态的常返态和滑过态

定义 1，

对于任意两个状态 i，j，设$T_{i\,j}$代表从状态 i 出发首次进入状态 j 的最早时刻,即

$$T_{i\,j}(\omega)=\min\{n:\xi(0)=i,\xi(n)=j,n\geq 1\}。$$

定义 2，从状态 i 经过 n 步第一次到达状态 j 的概率，

$$f_{i\,j}^{(n)}=P_r\{T_{i\,j}=n/\xi(0)=i\}。$$

定义 3，从状态 i 迟早到达状态 j 的概率，

$$f_{i\,j}=\sum_{1\leq n<\infty}f_{i\,j}^{(n)}=\sum_{1\leq n<\infty}P_r\{T_{i\,j}=n/\xi(0)=i\}。$$

定理 1，对于任意的$i,j\in I,1\leq n<\infty$，有

$$p_{i\,j}^{(n)}=\sum_{r=1}^{n}f_{i\,j}^{(r)}p_{j\,j}^{(n-r)}。$$

定理 2，$f_{i\,j}>0$的充要条件，$i\rightarrow j$

推论，i，j 相通的充要条件是 $f_{i\,j}>0,f_{ji}>0$

定义 4，如果 $f_{ii}=1$，则称状态 i 是常返的。

定义 5，如果 $f_{ii}<1$，则称状态 i 是非常返的,是滑过态。

定理 3

状态 i 是常返的的充要条件是，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，如果状态 i 是非常返的，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-f_{ii}}<\infty$$

证明：

引入系统从状态 i 出发经过 n 步，到达状态 j 的概率 $p_{i\,j}^{(n)}$ 对应的母函数，

$$P_{i\,j}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{i\,j}^{(n)}s^n=\delta_{i\,j}+\sum_{n=1}^{\infty}p_{i\,j}^{(n)}s^n$$

同时引入从状态 i 第一次到达状态 j 的概率 $f_{i\,j}^{(n)}$ 对应的母函数

$$F_{i\,j}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}f_{i\,j}^{(n)}s^n$$

考虑到 $p_{i\,j}^{(n)}=\sum_{r=1}^{n}f_{i\,j}^{(r)}p_{j\,j}^{(n-r)}$，有

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(s) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} f_{ij}^{(r)} p_{jj}^{(n-r)} \right) s^n \\
&= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{n} \left(f_{ij}^{(r)} s^r \right) \cdot \left(p_{jj}^{(n-r)} s^{n-r} \right) \\
&= \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(f_{ij}^{(r)} s^r \right) \sum_{n=r}^{\infty} \cdot \left(p_{jj}^{(n-r)} s^{n-r} \right) \\
&= \delta_{ij} + \sum_{r=1}^{\infty} \left(f_{ij}^{(r)} s^r \right) \sum_{m=0}^{\infty} \cdot \left(p_{jj}^{m} s^{m} \right) \\
&= \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s)
\end{aligned}
$$

令 j=i 有

$$P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s) P_{ii}(s)$$

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$

注意到

$$P_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \quad F_{ii}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}$$

状态 i 是常返的 $f_{ii} = 1$，$P_{ii}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$，

状态 i 是非常返的 $f_{ii} < 1$，$P_{ii}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$，

定理 4，

两个相通的状态、若一个是常返的，另一个必是常返的。

定理 5，

如果状态 j 是非常返的，则对每一个状态 i，$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$，$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。

1.4 周期的状态和非周期的状态

定义 1，周期性的状态，

只有当转移步数 n 是整数 d 的正倍数时，相应的转移概率为非零值，

定义 2，遍历态

非周期的常返态定义为遍历态。

2 马尔可夫链的状态空间举例

绘出各个状态之间的转移图。

研究状态的到达和相通，进行状态空间的分解。研究状态空间的周期性。

研究状态的常返性和非常返性。

例 1

设有三个状态（0，1，2）的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是，

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$，求各个状态之间的关系。

解：

绘出各个状态之间的转移图。研究状态的到达和相通，进行状态空间的分解。

系统中的状态是相通的。

例 2

设有四个状态（0，1，2，3）的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是，

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$，求各个状态之间的关系。

解：

绘出各个状态之间的转移图。研究状态的到达和相通，进行状态空间的分解。

状态（0，1）是一个闭集，

状态（2）是一个滑过态，是非常返的，

状态（3）是一个吸收态，也是一个闭集。

例 3

设有 9 个状态（0，1，2，3，4，5，6，7，8）的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵如下，其中*表示正概率元素，试对它的状态进行分类。

$$P=\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & * & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

绘出各个状态之间的转移图。研究状态的到达和相通，进行状态空间的分解。

状态 0 是一个吸收态，状态 1，2；3，4，5 分别组成两个闭集。状态 6；7，8 都是滑过态。

例 4

设有四个状态（0，1，2，3）的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是，

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$，求各个状态之间的关系。

解：

绘出各个状态之间的转移图。研究状态的到达和相通，进行状态空间的分解。

这是一个有限状态的马尔可夫链，

所有状态都是相通的，都是常返的。

例 5

设有五个状态（0，1，2，3，4）的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是，

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0\\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2\end{pmatrix}$$，求各个状态之间的关系。

解：

绘出各个状态之间的转移图。研究状态的到达和相通，进行状态空间的分解。

（0，1）是一个闭集，这两个状态是常返的，

（2，3）是一个闭集，这两个状态是常返的，

（4）是一个非常返的滑过态。

例 6

试研究无限制随机游动各状态的性质。

解：

它的一步转移概率是，

$$\begin{cases} p_{i\ i+1}=p \\ p_{i\ i-1}=q \\ p_{i\ j}=0, \quad if\ \ j\neq i+1, i-1 \end{cases}$$

由于无限制随机游动各状态都相通，则所有状态或全部是常返的或全部是非常返的。研究状态 0 的常返和非常返的性质，可以计算 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$。如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ 是有限的，则 0 状态是非常返的，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}^{(n)}$ 是无限的，则 0 状态是常返的。研究状态 0 的常返和非常返的性质，也可以计算 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$。如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$ 小于 1，则 0 状态是非常返的，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}$ 等于 1，则 0 状态是常返的。

从 0 状态出发，经过偶数次转移，它所取的状态一定是偶数状态。因此，只有经过

偶数次转移，才能到达 0 状态。

$$p_{00}^{(n)}=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n$$

利用公式：$n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$

$$p_{00}^{(n)}=\frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}}=\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$$

考虑到$4p(1-p)\le 1$，等式成立的条件是 p=1/2。

当 p=1/2 时，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots\right)=\infty$，状态 0 和所有状态是常返的。

当 p≠1/2 时，$\sum_{n=1}^{\infty}p_{00}^{(n)}\le\infty$，状态 0 和所有状态都是非常返的。

研究状态、首先是 0 状态的常返和非常返性。

引用以前研究随机游动的矩生成函数：

考虑随机游动，迟早返回原点的概率，

$$V(z)=1-\sqrt{1-4pqz^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_{2n}=V(z=1)=1,\qquad p=q=1/2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_{2n}=V(z=1)<1,\qquad p\ne q\ne 1/2$$

考虑随机游动，返回原点的概率之和，

$$U(z)=\frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}=V(z=1)=\infty,\qquad p=q=1/2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}=V(z=1)<\infty,\qquad p\ne q\ne 1/2$$

例 7

设有四个状态（0，1，2，3）的马尔可夫链，它的一步转移概率矩阵是，

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$，求各个状态之间的关系。

解：

绘出各个状态之间的转移图。研究状态空间的周期性。

状态有两个字类，（0，1）和（2，3）。该过程有确定性的周期状态转移，（0，1）→（2，3）→（0，1）→（2，3）…。周期是 2。

例 8

设有 8 个状态的马尔可夫链，它的一步状态转移概率矩阵给定，给出它的状态转移图，分析它状态的周期性。

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

绘出各个状态之间的转移图。研究状态空间的周期性。