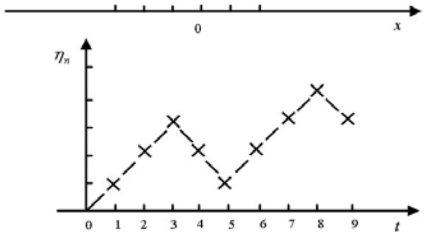
随机游动

1. 随机游动模型

设有一个质点在 x 轴上作随机游动，在 t=0 时在 x 轴的原点，在 t=1,2,3,…时沿 x 轴正方向或反方向移动一个单位距离，沿正方向移动一个单位距离的概率为 p，沿反方向移动一个单位距离的概率为 q=1-p。



质点随机游动构成一个离散时间、离散状态的随机过程。

记质点在第 n 步时的状态为 $\eta_n, n=0,1,2,\cdots$，

- 样本空间：{……-3,-2,-1,0,1,2,3……}
- 初始态：$\eta_0=0$
- 一步转移概率：**经过一步从状态 i 转移到状态 j 的概率**

$$p_{ij}=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q=1-p & j=i-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

2. 随机游动模型的分析

- 经过 n 步以后的位置特征
- 经过 n 步返回原点的概率；
- 经过 n 步第一次返回原点的概率；
- 第一次返回原点所需的平均时间
- 迟早返回原点的概率；
- 多次返回原点的概率；
- 经过 n 步达到+1 的概率；
- 第 1 次通过最大值；

2.1 经过 n 步以后的位置特征：概率分布、统计特征

质点在第 n 步时的状态为 $\eta_n, n=0,1,2,\cdots$，

？ 经过时间 n，质点距离原点的距离为 m 的概率 P{η_n=m}

η_n 是一个随机变量，它的可能取值是：$\{-n, 1-n, 2-n, \cdots, -1, 0, , 1, \cdots, n-1, n\}$

若质点移动 n 步后到达 $\eta_n = m$ 的位置，则所有的移动中，正方向移动 $\dfrac{n+m}{2}$ 步，反方向移动 $\dfrac{n-m}{2}$ 步，因此：

一维概率分布：

$$P\{\eta_n = m\} = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}}, \qquad \text{m=-n,-n+2,-n+4,……,n-2,n;} \quad m \le n$$

均值：

$\eta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$；其中 ξ_k 为每一步的移动，

$$P\{\xi_k = 1\} = p, \qquad P\{\xi_k = -1\} = q, k = 1,2,\cdots,n$$

$$\mathrm{E}\{\xi_k\} = P\{\xi_k = 1\} * 1 + P\{\xi_k = 1\} * (-1) = \mathrm{p} - \mathrm{q}$$

$$E\{\eta_n\} = E\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right\} = \sum_{k=1}^{n} E\{\xi_k\} = \mathrm{n}(p-q),$$

$$E\{\eta_n^2\} = E\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k \cdot \sum_{l=1}^{n} \xi_l\right] = E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \xi_k \xi_l\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} E[\xi_k \xi_l]$$

考虑到

$k \ne l$， $E[\xi_k \xi_l] = E[\xi_k] \cdot E[\xi_l] = (p-q)^2$；

$k = l$， $E[\xi_k \xi_l] = 1^2 \cdot p + (-1)^2 \cdot q = p + q = 1$

$$\therefore \quad E[\eta^2] = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} E[\xi_k \xi_l] + \sum_{k=1}^{n} E[\xi_k \xi_k] = \mathrm{n}(\mathrm{n}-1)(p-q)^2 + \mathrm{n}$$

方差：

$$E\{[\eta_n - E(\eta_n)]^2\} = E\{\eta^2 + E(\eta_n)^2 - 2\eta_n \cdot E(\eta_n)\}$$
$$= E(\eta_n^2) - [E(\eta_n)]^2$$
$$= E(\eta_n^2) - \mu_{\eta_n}^2$$
$$= n(n-1)(p-q)^2 + n - n^2(p-q)^2$$
$$= n - n(p-q)^2$$
$$= 4npq$$

相关函数：

若 n<m, $E[\eta_n \cdot \eta_m] = E\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k \cdot \sum_{l=1}^{m}\xi_l\right]$

$$= E\left[\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\xi_k\xi_l\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}E(\xi_k\xi_l)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}E(\xi_k\xi_l) + \sum_{k=1}^{n}E(\xi_k\xi_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{m}(p-q)^2 + n$$

$$= n(m-1)(p-q)^2 + n$$

若 n>m, $E[\eta_n \cdot \eta_m] = m(n-1)(p-q)^2 + m$

$$E[\eta_n \cdot \eta_m] = \min[n, m][1-(p-q)^2] + nm \cdot (p-q)^2$$

总结：

概率分布：

$$P\{\eta_n = m\} = \binom{n}{\frac{n+m}{2}} p^{\frac{n+m}{2}} q^{\frac{n-m}{2}} \quad , \quad m=-n,-n+2,-n+4,\cdots\cdots,n-2,n; \quad m \le n$$

均值：$E\{\eta_n\} = n(p-q)$

方差：$E\left\{\left[\eta_n - E(\eta_n)\right]^2\right\} = 4npq$

相关函数：$E[\eta_n \cdot \eta_m] = \min[n,m] \cdot 4pq + nm \cdot (p-q)^2$

2.2 经过 n 步返回原点的概率

根据一维分布的分析可知，第 n 步返回原点的概率为：

$$P\{\eta_n = 0\} = \begin{cases} 0, & n\text{为奇数} \\ \binom{n}{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

只有经过偶数步才能返回原点，经过奇数步返回原点的概率为 0。

考虑经过 2n 步返回原点的概率，记作：

$$u_{2n} = P\{\eta_{2n} = 0\} = \binom{2n}{n} p^n q^n$$

2.3 第一次返回原点的概率

第 2n 步第一次返回原点的事件记作：

$$B_{2n} = \{\eta_1 \ne 0, \eta_2 \ne 0, \ldots\ldots, \quad \eta_{2n-1} \ne 0, \eta_{2n} = 0\}$$

第 2n 步第一次返回原点的概率记作：

$$v_{2n} = P\{B_{2n}\} = P\{\eta_1 \ne 0, \eta_2 \ne 0, \ldots\ldots, \quad \eta_{2n-1} \ne 0, \eta_{2n} = 0\}$$

第 2n 步返回原点的概率与第 2n 步第一次返回原点的概率的关系是：

$$u_{2n} = v_{2n} + v_{2n-2}u_2 + \cdots + v_2 u_{2n-2} = \sum_{k=1}^{n} v_{2k} u_{2n-2k}$$

利用矩生成函数求概率分布及数字特征

对于 u_{2n} 与 v_{2n}，注意到 $v_0 = 0, u_0 = 1$ 可以得到下列的矩生成函数，

$$U(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}u_{2n}z^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}v_{2k}u_{2n-2k}z^{2n}$$

$$=1+\sum_{m=0}^{\infty}u_{2m}z^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}v_{2k}z^{2k}=1+U(z)V(z)$$

对于经过 2 n 步返回原点的概率 u_{2n}，

$$\begin{aligned}u_{2n}&=\frac{(2n)!}{n!n!}(pq)^n\\&=\frac{(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}{n!}\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{n!}(pq)^n\\&=\frac{2^n n!}{n!}\frac{2^n(-1)^n(-1/2)(-3/2)\cdots(-1/2-(n-1))}{n!}(pq)^n\\&=\binom{-1/2}{n}(-4pq)^n\end{aligned}$$

u_{2n} 的矩生成函数为

$$\begin{aligned}U(z)&=\sum_{n=0}^{\infty}u_{2n}z^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-4pq)^n z^{2n}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-4pqz^2)^n\\&=\frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}\end{aligned}$$

$$V(z)=1-\frac{1}{U(z)}$$

$$V(z)=1-\sqrt{1-4pqz^2}$$

$$
\begin{aligned}
v_{2n} &= (-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}(4pq)^n \\
&= \frac{(-1)^{n-1}(1/2)(-1/2)(-3/2)\cdots(1/2-(n-1))}{n!}(4pq)^n \\
&= \frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 3\cdot 1}{2^n n!}(4pq)^n \\
&= \frac{(2n-2)!}{2^n 2^{n-1} n!(n-1)!}(4pq)^n \\
&= \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n}2(pq)^n
\end{aligned}
$$

2.4 迟早返回原点的概率

第 2n 步第一次返回原点的事件记作：

$$B_{2n} = \{\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0, \ldots\ldots, \quad \eta_{2n-1} \neq 0, \eta_{2n} = 0\}$$

第 2n 步第一次返回原点的概率记作：

$$v_{2n} = P\{B_{2n}\} = P\{\eta_1 \neq 0, \eta_2 \neq 0, \ldots\ldots, \quad \eta_{2n-1} \neq 0, \eta_{2n} = 0\}$$

随机游动迟早返回原点的概率,

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n = V(1) \\
&= 1-\sqrt{1-4pq} \\
&= 1-|p-q| \\
&= \begin{cases} 1-|p-q|<1 & p \neq q \\ 1 & p = q \end{cases}
\end{aligned}
$$

随机游动第一次返回原点花费的平均时间，

$$
\begin{aligned}
\mu &= \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot P(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 2n \cdot v_n = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} v_n z^{2n}\Big|_{z=1} \\
&= \frac{d}{dz}V(z=1) = \frac{d}{dz}\left(1-\sqrt{1-4pqz^2}\right)_{z=1} \\
&= \begin{cases} \dfrac{4pq}{|p-q|} & p \neq q \\ \infty & p = q \end{cases}
\end{aligned}
$$

随机游动的恒等式

考虑到

$$U(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqz^2}}, \quad V(z) = 1-\sqrt{1-4pqz^2}$$

可以得到

$$
\begin{aligned}
1-V(z) &= \sqrt{1-4pqz^2} = \left(1-4pqz^2\right)\Big/\sqrt{1-4pqz^2} \\
&= \left(1-4pqz^2\right)U(z)
\end{aligned}
$$

也就是说，

$$
\begin{aligned}
&-v_{2n} = u_{2n} - 4pqu_{2n-2} \\
&v_{2n} = 4pqu_{2n-2} - u_{2n}
\end{aligned}
$$

对于对称的随机游动 $p=q=1/2$，就有

$$
u_{2n} = v_{2n+2} + u_{2n+2} = v_{2n+2} + v_{2n+4} + v_{2n+6} + \cdots
$$

2.5 多次返回原点的概率

“在 2n 次试验中，第 r 次返回原点”，相应的概率记作，$v_{2n}^{(r)}$。利用递推公式有

$$
v_{2n}^{(r)} = \sum_{k=0}^{n} v_{2k} \cdot v_{2n-2k}^{(r-1)}
$$

相应的生成函数是

$$
\begin{aligned}
V^{(r)}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} v_{2n}^{(r)} z^{2n} = \sum_{k=0}^{\infty} v_{2k}^{(r)} z^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} v_{2m}^{(r)} z^{2m} \\
&= V(z) V^{(r-1)}(z) = V^{r}(z)
\end{aligned}
$$

考虑到

$$
V(z) = 1-\sqrt{1-4pqz^2}
$$

经过推导，可以得到恒等式

$$
\begin{aligned}
V^{(r)}(z) &= V(z)V^{(r-1)}(z) = \left(1-\sqrt{1-4pqz^2}\right)V^{(r-1)}(z) \\
&= V^{(r-1)}(z) - \sqrt{1-4pqz^2}\,V^{(r-1)}(z) \\
&= V^{(r-1)}(z) - \sqrt{1-4pqz^2}\left(1-\sqrt{1-4pqz^2}\right)V^{(r-2)}(z) \\
&= V^{(r-1)}(z) - \sqrt{1-4pqz^2}\,V^{(r-2)}(z) + \left(1-4pqz^2\right)V^{(r-2)}(z) \\
&= V^{(r-1)}(z) - \sqrt{1-4pqz^2}\,V^{(r-2)}(z) + V^{(r-2)}(z) - 4pqz^2 V^{(r-2)}(z) \\
&= V^{(r-1)}(z) + V^{(r-2)}(z)\left(1-\sqrt{1-4pqz^2}\right) - 4pqz^2 V^{(r-2)}(z) \\
&= V^{(r-1)}(z) + V^{(r-2)}(z)V(z) - 4pqz^2 V^{(r-2)}(z) \\
&= 2V^{(r-1)}(z) - 4pqz^2 V^{(r-2)}(z)
\end{aligned}
$$

由此得到递推公式

$$v_{2n}^{(r)}=2v_{2n}^{(r-1)}-4pqv_{2n-2}^{(r-2)}$$

初值 $v_{2n}^{(1)}$ 已经可以计算出，由此得到“在 2n 次试验中，第 r 次返回原点”的概率为

$$v_{2n}^{(r)}=\frac{r}{2n-r}\binom{2n-r}{n}2^{r}\left(pq\right)^{n}$$

2.6 第 n 步第 1 次达到+1 的事件以及相应的概率

事件 $\{\eta_1\le 0,\eta_2\le 0,\cdots,\eta_{n-1}\le 0,\eta_n=1\}$ 表示第 1 次达到+1，第 1 次穿过+1 的事件。

相应的概率记作：

$$\Phi_n=P\{\eta_1\le 0,\eta_2\le 0,\cdots,\eta_{n-1}\le 0,\eta_n=1\}$$

其中初始条件是 $\phi_0=0$， $\phi_1=p$ 。

考虑“ $n>1$ 第 1 次达到+1”的事件，

$$P\{\eta_1=-1\}=q$$

存在一个整数 $k<n$ ， $k=1,2,\cdots n-2$ ，使得 $\eta_k=0$ ，在以后的 n-k 步，第 1 次达到+1。

$$\begin{aligned}&P\{\eta_1=-1,\eta_2<0,\cdots,\eta_{k-1}<0,\eta_k=0\}\\&=P\{\eta_1=0,\eta_2\le 0,\cdots,\eta_{k-1}\le 0,\eta_k=1\}\\&=\Phi_{k-1}\end{aligned}$$

第 n 步第 1 次达到+1 的事件，可以分解为互斥的事件，第 n 步第 1 次达到+1 的概率为这些互斥事件的概率的和

$$\phi_n=q\left(\phi_1\phi_{n-2}+\phi_2\phi_{n-3}+\cdots+\phi_{n-2}\phi_1\right)\qquad n>1$$

第 n 步第 1 次达到+1 的概率的矩生成函数是，

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n z^n&=pz+\sum_{n=2}^{\infty}q\sum_{k=1}^{n-1}\phi_k\phi_{n-k-1}z^n\\&=pz+qz\sum_{m=1}^{\infty}\phi_m z^m\sum_{k=1}^{\infty}\phi_k z^k\\&=pz+qz\Phi^2(z)\end{aligned}$$

$$\Phi(z)=\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2qz}$$

$$2qz\Phi(z)=V(z)$$

考虑到，

$$v_{2n} = \frac{1}{2n-1}\binom{2n-1}{n} 2(pq)^n$$

因此有，

$$\phi_{2n-1} = \frac{v_{2n}}{2q} = \frac{(-1)^{n-1}}{2q}\binom{1/2}{n}(4pq)^n$$

$$\phi_{2n} = 0$$

进一步有

$$\Phi(z=1) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q} = \frac{1-|p-q|}{2q}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n = \begin{cases} p/q & p<q \\ 1 & p>q \end{cases}$$

计算第 1 次穿过+1 的平均时间是

$$\Phi'(z=1) = \frac{V'(z=1)}{2q} - \phi_1 = \left(\frac{1}{|p-q|}-1\right)\frac{1}{2q}$$

$$= \begin{cases} 1/(p-q) & p>q \\ \infty & p=q \\ p/q(q-p) & q>p \end{cases}$$

2.7 第 1 次通过最大值

给定一个期望的最大值 r，$\Phi_n^{(r)}$表示“在第 n 步第一次通过 r”的概率。

定义第 1 次通过最大值 r 的矩生成函数，

$$\Phi^{(r)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\phi_n^{(r)} z^r = \Phi^r(z)$$

进一步可以得到

$$V^{(r)}(z) = (2q)^r z^r \Phi^{(r)}(z)$$

由此得到

$$v_{2n}^{(r)} = (2q)^r \phi_{2n}^{(r)}$$

或

$$\phi_m^{(r)} = \frac{r}{m}\binom{m}{(m+r)/2} p^{(m+r)/2} q^{(m-r)/2}$$

如果 $p = q = 1/2$，有

$$\phi_n^{(r)} = \frac{r}{n}\binom{n}{(n+r)/2}2^{-n}$$

附录 1：矩生成函数

对于一个取整数值 n=0,1,2,……，的随机变量 x，，其相应的矩生成函数定义为：

$$\Phi(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p(x=n)\cdot z^{n}$$

$\Phi(1/z)$ 是序列 $p(x=n)$ 的正常的 z 变换

矩生成函数广泛应用于概率与随机过程的分析中，通过常用分布的矩生成函数以及有理分式的幂级数展开等方法，得到最后的概率分布表达式。

通过矩生成函数的微分可以得到随机变量的数字特征：

均值：

$$E\{X\}=\Phi^{'}(z)|_{z=1}$$

方差：

$$\begin{aligned}D\{X\}&=E\{X^{2}\}-[EX]^{2}\\&=\Phi^{''}(z)|_{z=1}+\Phi^{1}(z)|_{z=1}-[\Phi^{1}(z)|_{z=1}]^{2}\end{aligned}$$

附录 2：典型的域变换

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}v_{2k}u_{2n-2k}z^{2n}=\sum_{m=0}^{\infty}u_{2m}z^{2m}\sum_{k=0}^{\infty}v_{2k}z^{2k}$$