# 应用随机过程

张　波　　　商　豪

中国人民大学　统计学院



GoBack
FullScreen
Close
Quit

# 第5章 Markov链

- 5.1 基本概念
- 5.2 状态的分类及性质
- 5.3 极限定理及平稳分布
- 5.4 Markov链的应用
- 5.5 连续时间Markov链

有一类随机过程，它具备所谓的“无后效性”(Markov性)，即要确定过程将来的状态，知道它此刻的情况就足够了，并不需要对它以往状况的认识，这类过程称为Markov过程.我们将介绍Markov过程中最简单的两种类型：离散时间的Markov链(简称马氏链)及连续时间的Markov链.

# §5.1 基本概念

## §5.1.1 Markov链的定义及一些例子

**定义 5.1.1** 随机过程$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$称为Markov链，若它只取有限或可列个值(若不另外说明，以非负整数集$\{0,1,2,\cdots\}$来表示)，并且对任意的 $n\geq 0$，及任意状态$i,j,i_0,i_1\cdots,i_{n-1}$，有

$$P\{X_{n+1}=j|X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots,X_{n-1}=i_{n-1},X_n=i\}$$
$$=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\} \qquad (5.1.1)$$

其中$X_n=i$表示过程在时刻$n$处于状态$i$，称$\{0,1,2,\cdots\}$为该过程的 状态空间，记为$S$. 式(5.1.1)刻画了Markov链的特性，称为Markov性.

**定义 5.1.2** 称(5.1.1)式中的条件概率 $P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$为Markov链$\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$的一步转移概率，简称转移概率，记为$p_{ij}$，它代表处于状态$i$的过程下一步转移到状态$j$的概率.

**一般情况下，转移概率与状态$i$, $j$和时刻$n$有关.**

**定义 5.1.3** 当Markov链的转移概率 $p_{ij}=P\{X_{n+1}=j|X_n=i\}$只与状态$i,j$有关，而与$n$无关时，称之为**时齐Markov链**；否则，就称之为非时齐的.

**在本书中，我们只讨论时齐Markov链，并且简称为Markov链.**

当Markov链的状态为有限时，称为有限链，否则称为无限链.但无论状态有限还是无限，我们都可以将$p_{ij}(i,j\in\mathcal{S})$排成一个矩阵的形式，令

$$\mathbf{P}=(p_{ij})=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdots \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{5.1.2}$$

称P为转移概率矩阵，一般简称为转移矩阵.由于概率是非负的，且过程必须转移到某个状态，所以容易看出$p_{ij}(i,j\in\mathcal{S})$有性质

$$\begin{aligned} &(1)\quad p_{ij}\geq 0,\quad i,j\in\mathcal{S}; \\ &(2)\quad \sum_{j\in S} p_{ij}=1,\quad \forall i\in\mathcal{S}. \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

**定义 5.1.4** 称矩阵为**随机矩阵**，若矩阵元素具有(5.1.3)式中两条性质.

**易见随机矩阵每一行元素的和都为**1.

**例 5.1.1** (一个简单的疾病、死亡模型，Fix-Neyman) 考虑一个包含两个健康状态$S_1, S_2$ 以及两个死亡状态$S_3, S_4$ (即由不同原因引起的死亡)的模型.若个体病愈，则认为它处于状态$S_1$，若它患病，说它处于$S_2$，个体可以从$S_1$,$S_2$进入$S_3$和$S_4$，易见这是一个马氏链的模型，转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**例 5.1.2** (赌徒的破产或称带吸收壁的随机游动) 系统的状态是$0 \sim n$，反映赌博者在赌博期间拥有的钱数，当他输光或拥有钱数为$n$时，赌博停止，否则他将持续赌博.每次以概率$p$赢得1 ，以概率$q=1-p$输掉1.这个系统的转移矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,0 \\ q\,0\,p\,0 \cdots 0\,0\,0 \\ 0\,q\,0\,p \cdots 0\,0\,0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\quad\cdot\quad\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\,0\,0\,0 \cdots q\,0\,p \\ 0\,0\,0\,0 \cdots 0\,0\,1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

**例 5.1.3** (带反射壁的随机游动) 设上例中当赌博者输光时将获得赞助1让他继续赌下去，就如同一个在直线上做随机游动的球在到达左侧0点处就立刻反弹回1一样，这就是一个一侧带有反射壁的随机游动.此时转移矩阵为

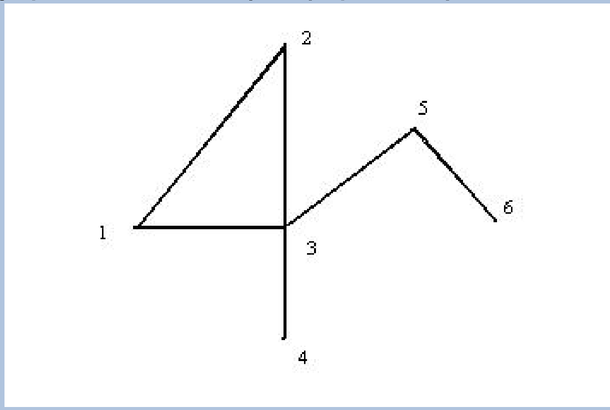
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0\,1\,0\,0 & \cdot & 0\,0\,0 \\ q\,0\,p\,0 & \cdots & 0\,0\,0 \\ 0\,q\,0\,p & \cdots & 0\,0\,0 \\ \vdots\;\vdots\;\vdots\;\vdots & & \vdots\;\vdots\;\vdots \\ 0\,0\,0\,0 & \cdots & q\,0\,p \\ 0\,0\,0\,0 & \cdots & 0\,0\,1 \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

**同样可考虑两侧均有反射壁的情况.**

**例 5.1.4** (自由随机游动)设一个球在全直线上做无限制的随机游动，它的状态为$0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.它仍是一个Markov链，转移矩阵为

$$
\mathbf{P} = \begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & q & 0 & p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
\cdots & 0 & q & 0 & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & q & 0 & p & 0 & \cdots \\
\cdots & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & q & 0 & p & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots
\end{pmatrix}
$$

**例 5.1.5** (图上的简单随机游动) 设有一蚂蚁在如图5-1上爬行，当两个结点相临时，蚂蚁将爬向它临近的一点，并且爬向任何一个邻居的概率是相同的.




则此Markov链的转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**例 5.1.6** (Wright-Fisher遗传模型)遗传的要素是染色体.遗传性质的携带者称为基因，它们位于染色体上.基因控制着生物的特征，它们是成对出现的.控制同一特征的不同基因称为等位基因，记这对等位基因为$A$和$a$，分别称为显性的与隐形的.在一个总体中基因$A$和$a$ 出现的频率称为基因频率，分别记为$p$和$1-p$.

设总体中的个体数为$2N$，每个个体的基因按$A$型基因的基因频率的大小，在下一代中转移成为$A$型基因.因此，繁殖出的第二代的基因型是由试验次数为$2N$的Bernoulli试验所确定的，即如果在第$n$代母体中$A$型基因出现了$i$次，而$a$型基因出现了$2N-i$次，则下一代出现$A$型基因的概率为$p_i=\frac{i}{2N}$，而出现$a$型基因的概率为$1-p_i$.

记$X_n$为第$n$代中携带$A$型基因的个体数，则易知$\{X_n\}$是一个状态空间为$S = \{0,1,2,\cdots,2N\}$的时齐Markov链，其转移概率矩阵为$\mathbf{P} = (p_{ij})$，其中

$$p_{ij} = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = C_{2N}^j p_i^j (1-p_i)^{2N-j}$$
$$= C_{2N}^j \left(\frac{i}{2N}\right)^j \left(1 - \frac{i}{2N}\right)^{2N-j}$$

**下面我们再给出几个所谓“嵌入Markov链”的例子，在这些情况下模型的Markov性不是明显的.**

**例 5.1.7** ($M/G/1$排队系统) 假设顾客依照参数为$\lambda$的Poisson过程来到一个只有一名服务员的服务站，若服务员空闲则顾客就能立刻得到服务，否则排队等待直至轮到他.设每名顾客接受服务的时间是独立的随机变量,有共同的分布$G$，而且与来到过程独立.这个系统称为$M/G/1$排队系统，字母$M$代表顾客来到的间隔服从指数分布，$G$代表服务时间的分布，数字1表示只有1名服务员.

若以$X(t)$表示时刻$t$系统中的顾客人数，则$\{X(t), t \geq 0\}$是不具备Markov性的，因为若已知$t$时刻系统中的人数，要预测未来，虽然可以不用关心从最近的一位顾客到来又过去了多长时间(因过程无记忆，所以这段时间不影响下一位顾客的到来)，但要注意此刻在服务中的顾客已经接受了多长时间的服务(因为$G$不是指数的，不具备“无记忆性”，所以已经服务过的时间将影响到他何时离去).

我们可以这样考虑，令$X_n$表示第$n$位顾客走后剩下的顾客数，$n \geq 1$.再令$Y_n$记第$n+1$位顾客接受服务期间到来的顾客数，则

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + Y_n, & 若 X_n > 0 \\ Y_n, & 若 X_n = 0 \end{cases} \tag{5.1.4}$$

可见$X_{n+1}$可由$X_n$和$Y_n$得到，那么$Y_n$是否会依赖于$Y_{n-1}$, $Y_{n-2}, \cdots$呢？我们要证明 $Y_n, n \geq 1$都是相互独立的.

事实上，因为$Y_n, n \geq 1$代表的是在不相互重叠的服务时间区间内来到的人数，来到过程又是Poisson过程，这就很容易证明了$Y_n, n \geq 1$的独立性，并且还是同分布的.

$$P\{Y_n = j\} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}dG(x), \quad j = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.1.5}$$

由(5.1.4)、(5.1.5)式得$\{X_n, n = 1, 2, \cdots\}$是Markov链，转移概率为

$$p_{0j} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^j}{j!}dG(x), \quad j \geq 0$$
$$p_{ij} = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^{j-i+1}}{(j-i+1)!}dG(x), \quad j \geq i-1, i \geq 1$$
$$p_{ij} = 0, \qquad \text{其他}$$



GoBack FullScreen Close Quit

**例 5.1.8** 考虑定货问题.设某商店使用$(s,S)$定货策略，每天早上检查某商品的剩余量，设为$x$, 则定购额为

$$\begin{cases} 0, & 若x \geq s \\ S-x, & 若x < s \end{cases}$$

设定货和进货不需要时间，每天的需求量$Y_n$独立同分布且$P\{Y_n=j\}=a_j, j=0,1,2,\cdots$.现在我们要从上述问题中寻找一个Markov链.

令$X_n$为第$n$天结束时的存货量，则

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-Y_{n+1}, & 若X_n \geq s \\ S-Y_{n+1}, & 若X_n < s \end{cases}$$

因此$\{X_n, n\geq 1\}$是Markov链，转移概率为

$$p_{ij}=\begin{cases} a_{i-j}, & 若i \geq s \\ a_{S-j}, & 若i < s \end{cases}$$

**例 5.1.9** 以$S_n$表示保险公司在时刻$n$的盈余，这里的时间以适当的单位来计算(如天,月等).初始盈余 $S_0=x$显然为已知，但未来的盈余$S_1,S_2,\cdots$却必须视为随机变量，增量$S_n-S_{n-1}$解释为时刻$n-1$和时刻$n$之间获得的盈利(可以为负).假定$X_1,X_2,\cdots$是不包含利息的盈利且独立同分布为$F(x)$，则

$$S_n=S_{n-1}(1+\gamma)+X_n,$$

其中$\gamma$为固定的利率, $\{S_n\}$是一Markov链，转移概率为

$$p_{xy}=F[y-(1+\gamma)x]$$

## §5.1.2 $n$步转移概率，C-K方程

**定义 5.1.5** 称条件概率

$$p_{ij}^{(n)} = P\{X_{m+n} = j | X_m = i\}, \quad i,j \in S, m \geq 0, n \geq 1 \tag{5.1.6}$$

为Markov链的$n$步转移概率，相应地称$\mathbf{P}^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ 为$n$步转移矩阵.

当$n=1$时，$p_{ij}^{(1)} = p_{ij}, \mathbf{P}^{(1)} = \mathbf{P}$，此外规定

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \tag{5.1.7}$$

显然，$n$步转移概率$p_{ij}^{(n)}$指的就是系统从状态$i$经过$n$步后转移到$j$的概率，它对中间的$n-1$步转移经过的状态无要求.

下面的定理给出了$p_{ij}^{(n)}$和$p_{ij}$的关系.

**定理 5.1.1 ( Chapman-Kolmogorov方程，简称C-K方程)**

对一切$n, m \geq 0, i, j \in$ $mathcal S$有

(1)

$$p_{ij}^{(m+n)} = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \qquad (5.1.8)$$

(2)

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-2)} = \cdots = \mathbf{P}^{n} \qquad (5.1.9)$$

**证明:**

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(m+n)} &= P\{X_{m+n}=j|X_0=i\} \\
&= \frac{P\{X_{m+n}=j, X_0=i\}}{P\{X_0=i\}} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \frac{P\{X_{m+n}=j, X_m=k, X_0=i\}}{P\{X_0=i\}} \quad \text{（全概率公式）} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} \frac{P\{X_{m+n}=j, X_m=k, X_0=i\}}{P\{X_0=i\}} \frac{P\{X_m=k, X_0=i\}}{P\{X_m=k, X_0=i\}} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P\{X_{m+n}=j|X_m=k, X_0=i\}P\{X_m=k|X_0=i\} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{kj}^{(n)} \cdot p_{ik}^{(m)} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}
\end{aligned}
$$

(2)是(1)的矩阵形式，利用矩阵乘法易得. ∎

**例 5.1.10** 设例5.1.2中，$n=3, p=q=\frac{1}{2}$.赌博者从2元赌金开始赌博，求解他经过4次赌博之后输光的概率.

解：这个概率为$p_{20}^{(4)}=P\{X_4=0|X_0=2\}$，一步转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

利用矩阵乘法得

$$\mathbf{P}^{(4)}=\mathbf{P}^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故$p_{20}^{(4)}=\frac{5}{16}$($P^{(4)}$中第3行第1列).

**例 5.1.11** 甲乙两人进行某种比赛，设每局甲胜的概率是$p$，乙胜的概率是$q$，和局的概率是$r$，$p+q+r=1$. 设每局比赛后，胜者记“+1”分，负者记“-1”分，和局不记分，且当两人中有一人获得2分时结束比赛. 以$X_n$表示比赛至第$n$局时甲获得的分数，则$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$为时齐Markov链，求在甲获得1分的情况下，不超过两局可结束比赛的概率.

解：$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$的一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & r & p & 0 & 0 \\ 0 & q & r & p & 0 \\ 0 & 0 & q & r & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

两步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q+rq & r^2+pq & 2pr & p^2 & 0 \\ q^2 & 2rq & r^2+2pq & 2pr & p^2 \\ 0 & q^2 & 2qr & r^2+pq & p+pr \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故在甲获得1分的情况下，不超过两局可结束比赛的概率为

$$p_{1,2}^{(2)} + p_{1,-2}^{(2)} = p + pr$$

**例 5.1.12** 质点在数轴上的点集$\{-2,-1,0,1,2\}$上做随机游动.质点到达点-2后，以概率1停留在原处；到达点2后，以概率1向左移动一点；到达其它点后，分别以概率$\frac{1}{3}$向左、向右移动一点，以概率$\frac{1}{3}$停留在原处.试求在已知该质点处于状态0的条件下，经三步转移后仍处于状态0的概率.

解：一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0\\ \frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0&0\\ 0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&0\\ 0&0&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\ 0&0&0&1&0 \end{pmatrix}$$

二步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(2)} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

三步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}^{(3)} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} * & * & 0 & * & * \\ * & * & \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & \frac{1}{3} & * & * \\ * & * & 0 & * & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & \frac{7}{27} & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

即在已知处于状态0的条件下，经三步转移后仍处于状态0的概率为$\frac{7}{27}$.(转移矩阵中的$*$部分与最终要计算的结果无关，故省略计算)

**例 5.1.13** (广告效益的推算)某种啤酒A的广告改变了广告方式,经调查发现买A种啤酒及另外三种啤酒B,C,D的顾客每两个月的平均转换率如下(设市场中只有这四种啤酒):

$$\begin{aligned}
A &\to A(0.95)\ B(0.02)\ C(0.02)\ D(0.01)\\
B &\to A(0.30)\ B(0.60)\ C(0.06)\ D(0.04)\\
C &\to A(0.02)\ B(0.01)\ C(0.07)\ D(0.00)\\
D &\to A(0.20)\ B(0.20)\ C(0.10)\ D(0.50)
\end{aligned}$$

假设目前购买A,B,C,D四种啤酒的顾客的分布为$(25\%, 30\%, 35\%, 10\%)$，试求半年后啤酒A的市场份额.

解：令$\mathbf{P}$为转移矩阵，则显然有

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.95 & 0.02 & 0.02 & 0.01 \\ 0.30 & 0.60 & 0.06 & 0.04 \\ 0.20 & 0.10 & 0.70 & 0.00 \\ 0.20 & 0.20 & 0.10 & 0.50 \end{pmatrix}$$

令

$$\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) = (0.25, 0.30, 0.35, 0.10)$$

计算经过半年后顾客在这四种啤酒上的转移概率$\mathbf{P}^3$,

$$\mathbf{P}^2 = \begin{pmatrix} 0.9145 & 0.035 & 0.0352 & 0.0153 \\ 0.485 & 0.38 & 0.088 & 0.047 \\ 0.36 & 0.134 & 0.5 & 0.006 \\ 0.37 & 0.234 & 0.136 & 0.26 \end{pmatrix}$$

$$
\mathbf{P}^3 = \begin{pmatrix} 0.8894 & 0.0458 & 0.0466 & 0.01820 \\ 0.60175 & 0.2559 & 0.0988 & 0.04355 \\ 0.4834 & 0.1388 & 0.36584 & 0.01196 \\ 0.5009 & 0.2134 & 0.14264 & 0.14306 \end{pmatrix}
$$

我们关心啤酒A半年后的市场占有率，即从A,B,C,D四种啤酒经3次转移后转到A的概率，求得A的市场占有率变为

$$
v = (0.25, 0.3, 0.35, 0.10) \begin{pmatrix} 0.8894 \\ 0.60175 \\ 0.4834 \\ 0.5009 \end{pmatrix} \approx 0.624
$$

可见啤酒A的市场份额由原来的25%增至62.4%，新的广告方式很有效益.

## §5.2　状态的分类及性质

本节我们首先来讨论一下Markov链各个状态之间的关系，并以这些关系将状态分类，最后来研究它们的性质.

**定义 5.2.1** 称状态$i$可达状态$j(i, j \in \mathcal{S})$，若存在$n \geq 0$使得$p_{ij}^{(n)} > 0$，记为 $i \to j$. 若同时有$j \to i$，则称$i$与$j$互通，记为 $i \leftrightarrow j$.

**定理 5.2.1** 互通是一种等价关系，即满足:

(1)自返性: $i \leftrightarrow i$;

(2)对称性: $i \leftrightarrow j$，则$j \leftrightarrow i$;

(3)传递性: $i \leftrightarrow j, j \leftrightarrow k$，则$i \leftrightarrow k$.



GoBack
FullScreen
Close
Quit

**证明：从互通的定义可知(1)(2)是显然的,只证(3).**

**由互通定义可知需证**$i \to k$**且**$k \to j$. **首先，由**$i \to j$，$j \to k$**知道存在**$m, n \geq 0$，**使得** $p_{ij}^{(m)} > 0, p_{jk}^{(n)} > 0$.**再由C-K方程知道** $p_{ik}^{(m+n)} = \sum_{l \in \mathcal{S}} p_{il}^{(m)} p_{lk}^{(n)} \geq p_{ij}^{(m)} p_{jk}^{(n)} > 0$，**故**$i \to k$.**同理可证**$k \to i$，**即有**$i \leftrightarrow k$. ∎

**我们把任何两个互通状态归为一类，由上述定理可知，同在一类的状态应该都是互通的，并且任何一个状态不能同时属于两个不同的类.**

**定义 5.2.2** 若Markov链只存在一个类，就称它是不可约的；否则称为可约的.

**例 5.2.1** 我们来看例5.1.1中疾病死亡模型的四个状态之间的关.为清楚起见，经常以图5-2所示的转移图来表示Markov链的状态变化.由转移矩阵容易看出：$S_1 \to S_1, S_2 \to S_1, S_1 \to S_2, S_2 \to S_2, S_1 \to S_3, S_2 \to S_3, S_1 \to S_4, S_2 \to S_4$. 所以只有$S_1 \leftrightarrow S_2$，但$S_3 \not\to S_1, S_4 \not\to S_1, S_3 \not\to S_2, S_4 \not\to S_2, S_3 \not\to S_4, S_4 \not\to S_3$. 状态可分为三类$\{S_1, S_2\}$,$\{S_3\}$和$\{S_4\}$.

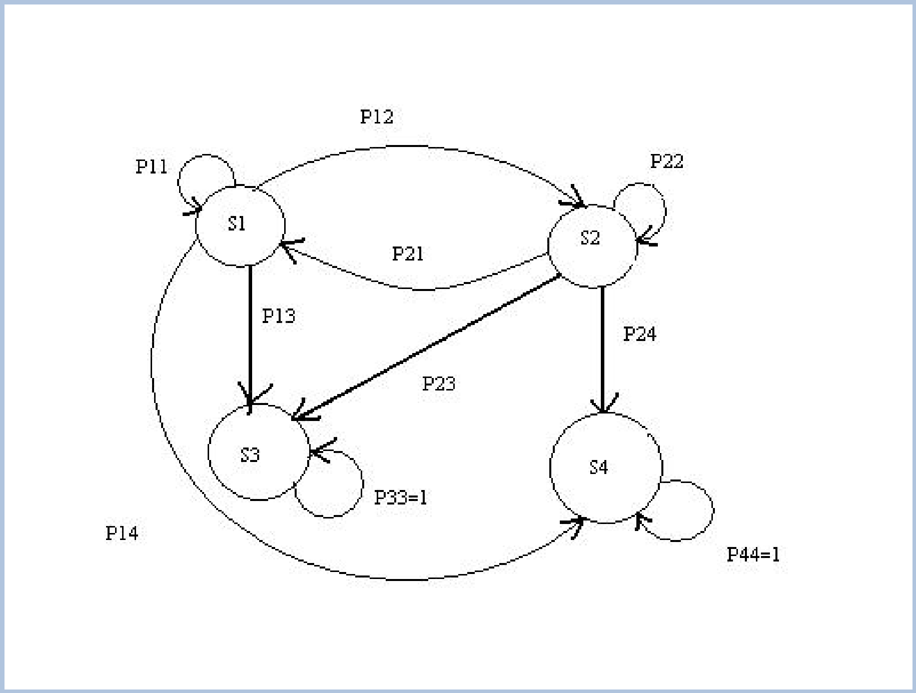





图5-2　例5.2.1图示

**读者可用类似的方法来说明赌徒输光问题中任何两个状态$i,j(0<i,j<n)$都互通，并可将所有状态分为三类：$\{0\}$,$\{1,2,\cdots,n-1\}$,$\{n\}$.**

下面我们给出状态的一些性质，然后证明同在一类的状态具有相同的性质.

**定义 5.2.3** 若集合$\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$非空，则称它的最大公约数$d = d(i)$为状态$i$的 周期.若$d > 1$，称$i$是周期的；若$d = 1$，称$i$是非周期的.并特别规定上述集合为空集时，称$i$的周期为无穷大.

注：由定义5.2.3知道，虽然$i$有周期$d$，但并不是对所有的 $n$, $p_{ii}^{(nd)}$都大于0.如果集合 $\{n : n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$为$\{3, 9, 18, 21, \cdots\}$，其最大公约数$d = 3$，即3是$i$的周期，显然， $n = 6, 12, 15$都不属于此集合，即$p_{ii}^{(6)} = 0, p_{ii}^{(12)} = 0, p_{ii}^{(15)} = 0$.但是可以证明，当n充分大之后一定有 $p_{ii}^{(dn)} > 0$.

**例 5.2.2** 考察如图5-3所示的Markov链.

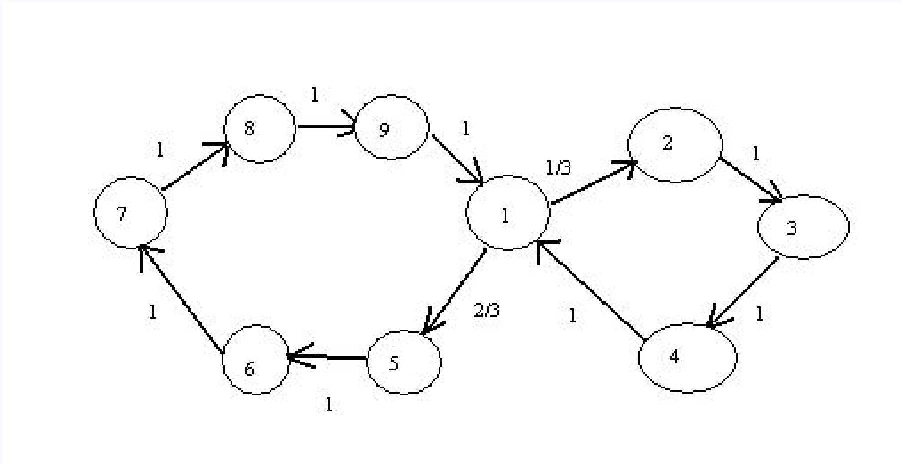



图5-3　例5.2.2图示

由状态1出发再回到状态1的可能步长为$T=\{4,6,8,10,\cdots\}$，它的最大公约数是2，虽然从状态1出发2步并不能回到状态1，我们仍然称2是状态1的周期.



GoBack
FullScreen
Close
Quit

**定理 5.2.2** 若状态$i,j$同属一类，则$d(i)=d(j)$.

**证明：由类的定义知$i\leftrightarrow j$，即存在$m,n\geq 0$，使$p_{ij}^{(m)}>0, p_{ji}^{(n)}>0$，则$p_{ii}^{(m+n)}=\sum_{k\in\mathcal{S}}p_{ik}^{(m)}p_{ki}^{(n)}\geq p_{ij}^{(m)}p_{ji}^{(n)}>0$. 对所有使得$p_{jj}^{(s)}>0$的$s$,有 $p_{ii}^{(n+s+m)}\geq p_{ij}^{(m)}p_{jj}^{(s)}p_{ji}^{(n)}>0$. 显然$d(i)$应同时整除 $n+m$和$n+m+s$，则它必定整除$s$.而$d(j)$是$j$的周期，所以也有$d(i)$整除$d(j)$. 反过来也可证明$d(j)$整除$d(i)$，于是$d(i)=d(j)$.** ∎

**定义 5.2.4** 对于任何状态$i,j$，以$f_{ij}^{(n)}$记从$i$出发经$n$步后首次到达$j$的概率，则有

$$f_{ij}^{(n)}=P\{X_n=j,X_k\neq j,k=1,2,\cdots,n-1|X_0=i\},n\geq 1$$

$$f_{ij}^{(0)}=\delta_{ij} \tag{5.2.1}$$

令$f_{ij}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$,若$f_{jj}=1$,称状态$j$为常返状态;若$f_{jj}<1$，称状态$j$为非常返状态或瞬过状态.

我们来看$f_{ij}$的含义.容易看出集合 $A_n=\{X_n=j, X_k\neq j, k=1,2,\cdots,n-1|X_0=i\}$，在$n$不同时是不相交的，并且$\cup_{n=1}^{\infty}A_n$表示总有一个$n$使得过程从$i$经$n$步后可到达$j$，所以

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}=f_{ij}$$

即表示从$i$出发，有限步内可以到达$j$的概率.则当$i$为常返状态时，从$i$出发，在有限步内，过程将以概率1重新返回$i$；而当$i$为非常返状态时，过程以概率$1-f_{ii}>0$不再回到$i$，换言之，从$i$滑过了.

**对于常返状态$i$，定义**

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$$

**可以知道$\mu_i$表示的是由$i$出发再返回到$i$所需的平均步数(时间).**

**定义 5.2.5** 对于常返状态$i$，若$\mu_i < +\infty$，则称$i$为正常返状态；若$\mu_i = +\infty$，则称$i$为零常返状态.

特别地，若$i$为正常返状态，且是非周期的，则称之为遍历状态. 若$i$是遍历状态，且$f_{ii}^{(1)} = 1$，则称$i$为吸收状态，此时显然 $\mu_i = 1$.

**例 5.2.3** 设Markov链的状态空间为$S=\{1,2,3,4\}$，其一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

试将状态进行分类.

解：由一步转移概率矩阵$\mathbf{P}$，对一切$n\geq 1$，$f_{44}^{(n)}=0$，从而$f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{44}^{(n)}=0<1$，故状态4是非常返态.

又$f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3}$，$f_{33}^{(n)}=0(n\geq 2)$，从而$f_{33}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{33}^{(n)}=\frac{2}{3}<1$，故状态3是非常返态.

但状态1与2是常返态，因为

$$f_{11} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$f_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots = 1$$

又因为

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \infty$$

$$\mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = 3 < \infty$$

故状态1与2都是正常返状态，又因其周期都是1，故它们都是遍历态.

我们可以证明，对于同属一类的状态$i, j$,它们同为常返状态或非常返状态，并且当它们是常返状态时，又同为正常返状态和零常返状态.以下我们首先引入常返性的另一个判定方法.

**定理 5.2.3** 状态$i$为常返的当且仅当$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$; 状态$i$为非常返状态时有 $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$.

在证明定理之前，我们需要下面的引理，它给出了转移概率$p_{ij}^{(n)}$ 与首达概率$f_{ij}^{(n)}$的关系.

**引理 5.2.1** 对任意状态$i,j$及$1 \le n < +\infty$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \tag{5.2.2}$$

**证明：用归纳法.对**$n=1,2$，**由**$p_{ij}^{(1)}=f_{ij}^{(1)}$，**易证上式成立.**

**假设对**$n-1$，**已有** $p_{ij}^{(n-1)} = \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-1-l)}$**成立.**

对$n$用C-K方程，有

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}p_{kj}^{(n-1)} = p_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{\substack{k\neq j\\ k\in\mathcal{S}}} p_{ik}p_{kj}^{(n-1)} \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{\substack{k\neq j\\ k\in\mathcal{S}}} f_{ik}^{(1)}\Big(\sum_{l=1}^{n-1} f_{kj}^{(l)}p_{jj}^{(n-1-l)}\Big) \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{l=1}^{n-1}\Big(\sum_{\substack{k\neq j\\ k\in\mathcal{S}}} f_{ik}^{(1)}f_{kj}^{(l)}\Big)p_{jj}^{(n-1-l)} \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l+1)}p_{jj}^{(n-1-l)} \\
&= f_{ij}^{(1)}p_{jj}^{(n-1)} + \sum_{l=2}^{n} f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)} \\
&= \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)}p_{jj}^{(n-l)}
\end{aligned}
$$

证明中我们用到了等式$f_{ij}^{(l+1)} = \sum_{k\neq j} f_{ik}^{(1)} f_{kj}^{(l)}$，请读者自行证之. 现在我们就可以对定理5.2.3给出证明了.

**定理5.2.3之证明:**

用引理5.2.1, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} &= p_{ii}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{l=1}^{n} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}) \\ &= 1 + \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{n=l}^{\infty} f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)} \\ &= 1 + (\sum_{l=1}^{\infty} f_{ii}^{(l)})(\sum_{m=0}^{\infty} p_{ii}^{(m)})\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$$



GoBack
FullScreen
Close
Quit

从而

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty \iff f_{ii} < 1; \quad \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty \iff f_{ii} = 1.$$

∎

**引理 5.2.2** *若$i \leftrightarrow j$且$i$为常返状态，则$f_{ji} = 1$.*

**证明：假如$f_{ji} < 1$，则以正概率$1 - f_{ji} > 0$使得从$j$出发不能在有限步内回到$i$.这意味着系统中存在着一个正概率，使得它从$i$出发不能在有限步内回到$i$，从而$f_{ii} < 1$,与假设$i$是常返状态相矛盾.所以只能有$f_{ji} = 1$.**

**定理 5.2.4** 常返性是一个类性质.

**证明：首先来证明若**$i \leftrightarrow j$，**则**$i, j$**同为常返或非常返状态.**

**由**$i \leftrightarrow j$**知，存在**$n, m \geq 0$，**使得**$p_{ij}^{(n)} > 0, p_{ji}^{(m)} > 0$，**由C-K方程总有**

$$
\begin{aligned}
p_{ii}^{(n+m+l)} &\geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(l)} p_{ji}^{(m)} \\
p_{jj}^{(n+m+l)} &\geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(l)} p_{ij}^{(n)}
\end{aligned}
$$

**则求和得到**

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(n+m+l)} &\geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} \sum_{l=0}^{\infty} p_{jj}^{(l)} \\
\sum_{l=0}^{\infty} p_{jj}^{(n+m+l)} &\geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)} \sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)}
\end{aligned}
$$

可见，$\sum_{l=0}^{\infty} p_{jj}^{(l)}, \sum_{l=0}^{\infty} p_{ii}^{(l)}$相互控制，同为无穷或有限，从而$i, j$同为常返或非常返状态.

其次我们还可以证明，当$i, j$同为常返状态时，它们同为正常返状态或零常返状态. 证明将在下一节给出.

**例 5.2.4** 设Markov链的状态空间$\mathcal{S}=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为 $p_{00}=\frac{1}{2}, p_{i,i+1}=\frac{1}{2}, p_{i0}=\frac{1}{2}, i\in\mathcal{S}$. 由图5-4易知,$f_{00}^{(1)}=\frac{1}{2}, f_{00}^{(2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}, f_{00}^{(3)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},\cdots, f_{00}^{(n)}=\frac{1}{2^n}$，故$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1, \mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}n2^{-n}<\infty$. 可见状态0是正常返状态的，显然它是非周期的，故0是遍历态.对其他状态$i>0$，由$i\leftrightarrow 0$, 故$i$也是遍历的.

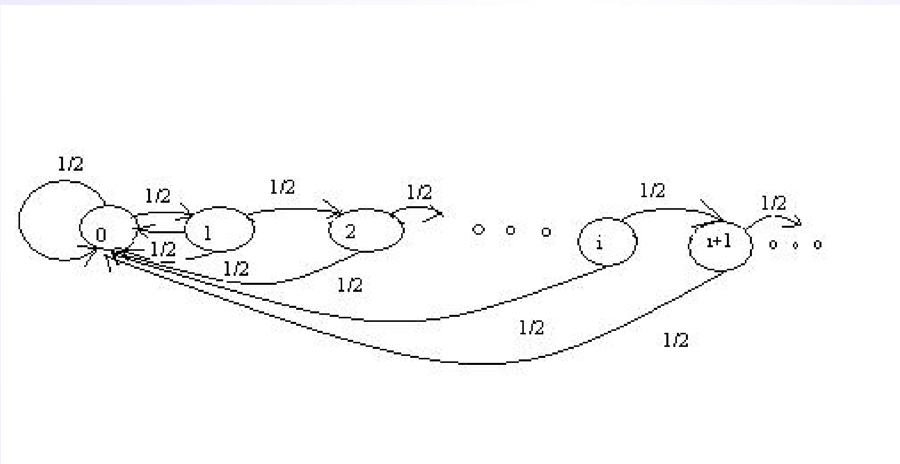





图5.4 例5.15图示

GoBack
FullScreen
Close
Quit

**例 5.2.5** 考虑直线上无限制的随机游动，状态空间为$\mathcal{S}=\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，转移概率为 $p_{i,i+1}=1-p_{i,i-1}=p, i\in\mathcal{S}$. 对于状态0，可知$p_{00}^{(2n+1)}=0, n=1,2,\cdots$，即从0出发奇数次不可能返回到0. 而

$$p_{00}^{(2n)}=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n=\frac{(2n)!}{n!n!}[p(1-p)]^n$$

即经过偶数次回到0 当且仅当它向左、右移动距离相同.

由Stirling 公式知，当$n$充分大时，$n!\sim n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}$，则$p_{00}^{(2n)}\sim\frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{n\pi}}$. 而$p(1-p)\le\frac{1}{4}$且$p(1-p)=\frac{1}{4}\iff p=\frac{1}{2}$. 于是$p=\frac{1}{2}$时，$\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}=\infty$，否则 $\sum_{n=0}^{\infty}p_{ii}^{(n)}<\infty$，即当$p\neq\frac{1}{2}$ 时状态0是瞬过状态，$p=\frac{1}{2}$时是常返状态. 显然，过程的各个状态都是相通的，故以此可得其他状态的常返性. (请读者自己考虑它们的周期是什么？)

# §5.3 极限定理及平稳分布

## §5.3.1 极限定理

对于一个系统来说，考虑它的长期的性质是很必要的，本节我们将研究Markov链的极限情况和平稳Markov链的有关性质.首先来看两个例子.

**例 5.3.1** 设Markov链的转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}, \quad 0<p,q<1$$

现在考虑$\mathbf{P}^{(n)}$当$n\to\infty$时的情况.由$\mathbf{P}^{(n)}=\mathbf{P}^n$知，只需计算$\mathbf{P}$的$n$重乘积的极限.令

$$\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 1 & -p \\ 1 & q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\\ -\frac{1}{p+q} & \frac{1}{p+q}\end{pmatrix},\qquad \mathbf{P}=\mathbf{QDQ}^{-1}$$

从而

$$\mathbf{P}^n=(\mathbf{QDQ}^{-1})^n=\mathbf{Q}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1-p-q\end{pmatrix}^n\mathbf{Q}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{q+p(1-p-q)^n}{p+q} & \frac{p-p(1-p-q)^n}{p+q}\\ \frac{q-q(1-p-q)^n}{p+q} & \frac{p+q(1-p-q)^n}{p+q}\end{pmatrix}\qquad(5.3.1)$$

由于$|1-p-q|<1$，(5.3.1)式的极限为

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n=\begin{pmatrix}\frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\\ \frac{q}{p+q} & \frac{p}{p+q}\end{pmatrix}$$

可见此Markov链的$n$步转移概率有一个稳定的极限.

**例 5.3.2** 在例5.2.5中令$p=\frac{1}{3}$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3})^n}{\sqrt{n\pi}} = 0 \tag{5.3.2}$$

令$p=\frac{1}{2}$，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(2n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2})^n}{\sqrt{n\pi}} = 0 \tag{5.3.3}$$

由(5.3.2)和(5.3.3)式知道，从零出发经过无穷次的转移之后，系统在某一规定时刻回到0的概率趋于0.

我们容易证明例5.3.1 中所有状态是正常返状态，而例5.2.5中当$p=\frac{1}{3}$时状态0是非常返状态，当$p=\frac{1}{2}$时，0是零常返状态.那么两个例子给出的是不是一般结论呢?答案是肯定的，我们不加证明地引入Markov链的一个基本极限定理.

**定理 5.3.1** 若状态$i$是周期为$d$的常返状态，则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} \tag{5.3.4}$$

当$\mu_i=\infty$时，$\frac{d}{\mu_i}=0$.

注：在定理5.3.1中只提到$i$是常返状态的情形.当$i$是非常返状态时，由于$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$, 易见$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

由定理5.3.1, 我们有以下推论.

**推论 5.3.1** 设$i$为常返状态，则

$$i\text{为零常返状态} \iff \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$$

证明：若$i$为零常返状态，则 $\mu_i = \infty$, 从而$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$.而当$m$不是$d$的整数倍时, $p_{ii}^{(m)} = 0$，故$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$.

反之若$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$. 设$i$为正常返状态，则$\mu_i < \infty$，由定理5.3.1知$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} > 0$，矛盾. ∎

利用推论5.3.1，我们把定理5.2.4的第二部分补充证明如下:

**证明(定理5.2.4)** 设$i \leftrightarrow j$为常返状态且$i$为零常返状态，则

$$p_{ii}^{(n)} \to 0$$

考虑到

$$p_{ii}^{(n+m+l)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{jj}^{(m)} p_{ji}^{(l)} \geq 0 \tag{5.3.5}$$

令$m \to \infty$, 对(5.3.5)式取极限，知

$$0 \geq \lim_{m \to \infty} p_{jj}^{(m)} \geq 0$$

故$j$也为零常返状态. 反之由$j$为零常返状态也可推得$i$为零常返状态，从而证明了$i, j$同为零常返状态或正常返状态. ∎



GoBack FullScreen Close Quit

下面我们要利用定理5.3.1来讨论$p_{ij}^{(n)}$的极限性质. 一般说来, 我们讨论两个问题.一是极限$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$是否存在,二是其极限是否与$i$有关. 首先有

**定理 5.3.2** (1)若$j$为非常返状态或零常返状态, 则$\forall i \to j, i \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \tag{5.3.6}$$

(2)若$j$为正常返状态且周期为$d$, 则$\forall i \to j, i \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_j} \tag{5.3.7}$$

证明：(1) 由引理5.2.1，得

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}. \tag{5.3.8}$$

对$N < n$，有

$$\sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \leq \sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=N+1}^{n} f_{ij}^{(l)} \tag{5.3.9}$$

先固定$N$,令$n \to \infty$, 由于$p_{jj}^{(n)} \to 0$, 所以(5.3.9)式右端第一项趋于0.再令$N \to \infty$，(5.3.9)式右端第二项因$\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \leq 1$ 而趋于0，故

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

(1)得证.

(2)依然用式(5.3.8)，对于$1 \le N < n$有

$$\sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \le p_{ij}^{(n)} \le \sum_{l=1}^{N} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=N+1}^{n} f_{ij}^{(l)}.$$

先固定$N$，令$n \to \infty$，再令$N \to \infty$,由定理5.3.1得

$$\frac{d}{\mu_j} \le \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} \le \frac{d}{\mu_j}$$

即$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{d}{\mu_j}$，定理得证. ∎

**推论 5.3.2** $\forall i \to j,\quad i, j \in \mathcal{S}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0\,, & j\text{为非常返状态或零常返状态} \\ \frac{d}{\mu_j}, & j\text{为正常返状态} \end{cases} \tag{5.3.10}$$

证明直接由定理5.3.1推得，这里从略.

**推论 5.3.3** 有限状态的Markov链，不可能全为非常返状态，也不可能有零常返状态，从而不可约的有限Markov链是正常返的.

证明：设状态空间$S = \{1, 2, \cdots, N\}$.若全部$N$个状态非常返，对状态$i \to j$，有 $p_{ij}^{(n)} \to 0$.若$i \not\to j$，即$i$不可达$j$，$\forall n$，$p_{ij}^{(n)} = 0$.于是当$n \to \infty$时，$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} \to 0$，但$\sum_{j=1}^{N} p_{ij}^{(n)} = 1$，矛盾.

若$S$中有零常返状态，设为$i$，令$C = \{j : i \to j\}$，则有 $\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1$ 并且对$j \in C, j \to i$. 因为若$j \not\to i$与$i$为常返状态矛盾.故 $i \leftrightarrow j$，从而$j$也为零常返状态，则$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$，从而$\sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} \to 0 (n \to \infty)$，矛盾. ∎

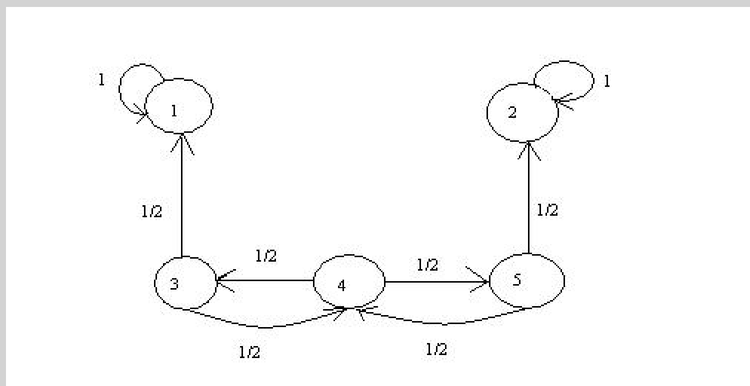
**推论 5.3.4** 若Markov 链有一个零常返状态，则必有无限个零常返状态.

**例 5.3.3** 设Markov链的状态空间为$S=\{1,2,3,4,5\}$，转移矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

试确定常返状态，瞬过状态，并对常返状态$i$确定其平均回转时间$\mu_i$.

解:画出转移图5-5.






GoBack
FullScreen
Close
Quit

显然，状态1, 2的周期为1，状态3, 4, 5的周期为2.

$$\mathbf{P}^n \xrightarrow{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0\,0 \\ *\,*\,0\,0\,0 \\ *\,*\,0\,0\,0 \\ *\,*\,0\,0\,0 \end{pmatrix}$$

从而1, 2为正常返状态，3, 4, 5为瞬过状态，$\mu_1 = \mu_2 = 1$.此Markov链可分为三类，即$\{1\}$,$\{2\}$和$\{3, 4, 5\}$.

## §5.3.2 平稳分布与极限分布

前面我们只讨论了Markov 链的转移概率$p_{ij}$的有关问题，下面我们将就它的初始分布的问题给出一些结论.首先是关于Markov链的平稳分布和极限分布的概念.

**定义 5.3.1** 对于Markov链，概率分布$\{p_j, j \in S\}$称为平稳分布，若

$$p_j = \sum_{i \in S} p_i p_{ij} \tag{5.3.11}$$

可见，若Markov链的初始分布$P\{X_0 = j\} = p_j$是平稳分布，则$X_1$的分布将是

$$P\{X_1 = j\} = \sum_{i \in S} P\{X_1 = j | X_0 = i\} \cdot P\{X_0 = i\} = \sum_{i \in S} p_{ij} p_i = p_j \tag{5.3.12}$$



GoBack
FullScreen
Close
Quit

这与$X_0$的分布是相同的，依次递推$X_n, n=0,1,2,3,\cdots$将有相同的分布，这也是为什么称$\{p_i, i\in S\}$为平稳分布的原因.

**定义 5.3.2** 称Markov链是遍历的，如果所有状态相通且均是周期为1的正常返状态. 对于遍历的Markov链,极限

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j, \quad j\in\mathcal{S} \tag{5.3.13}$$

称为Markov链的极限分布.

由定理5.3.2知，$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$.

下面的定理说明对于不可约遍历的Markov链，极限分布就是平稳分布并且还是唯一的平稳分布.

**定理 5.3.3** 对于不可约非周期的Markov链,

(1)若它是遍历的，则$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0 (j \in \mathcal{S})$是平稳分布且是唯一的平稳分布;

(2)若状态都是瞬过的或全为零常返的，则平稳分布不存在.

证明: (1) 对遍历的Markov链，由定理5.3.2知$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ 存在，记为$\pi_j$.

首先证$\{\pi_j, j \in S\}$是平稳分布.由于$\sum_{i\in\mathcal{S}} p_{ij}^{(n)} = 1$，则有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S} p_{ij}^{(n)} = 1 \tag{5.3.14}$$

易证 (5.3.14)式中极限与求和可交换. 即有

$$\sum_{i\in S}\pi_j = 1$$

利用C-K方程得$p_{ij}^{(n+1)} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}$.



GoBack
FullScreen
Close
Quit

两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj} = \sum_{k\in S}(\lim_{n\to\infty} p_{ik}^{(n)}) p_{kj}$$

即$\pi_j = \sum_{k\in\mathcal{S}} \pi_k p_{kj}$, 从而$\{\pi_j, j\in\mathcal{S}\}$是平稳分布.

再证$\{\pi_j, j\in\mathcal{S}\}$是唯一的平稳分布. 假设另外还有一个平稳分布$\{\tilde{\pi}_j, j\in\mathcal{S}\}$, 则由$\tilde{\pi}_j = \sum_{k\in\mathcal{S}} \tilde{\pi}_k p_{kj}$归纳得到

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{k\in S} \tilde{\pi}_k p_{kj}^{(n)}, \quad n = 1, 2, \cdots \tag{5.3.15}$$

令$n\to\infty$，对(5.3.15)式两端取极限,有

$$\tilde{\pi}_j = \sum_{i\in\mathcal{S}} \tilde{\pi}_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in\mathcal{S}} \tilde{\pi}_i \cdot \pi_j$$

因为$\sum_{i\in\mathcal{S}} \tilde{\pi}_i = 1$，所以$\tilde{\pi}_j = \pi_j$, 得证平稳分布唯一.

(2)假设存在一个平稳分布$\{\pi_j, j \in S\}$, 则由(1)中证明知道

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}, (n = 1, 2, \cdots)$$

成立，令$n \to \infty$知$p_{ij}^{(n)} \to 0$, 则推出$\pi_j = 0, j \in \mathcal{S}$, 这是不可能的.于是对于非常返的或零常返的Markov链不存在平稳分布. ∎

对于有限状态的遍历的Markov链，定理确定了求解极限分布的方法, 即$\pi_j, j \in S$是方程 $\pi_j = \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i p_{ij}$的解，同时由$\pi_j = \frac{1}{\mu_j}$ 给出了求解状态的平均回转时间的简单方法.

**例 5.3.4** 设Markov链的转移阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

则它的平稳分布满足

$$\begin{cases} \pi_1 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 \\ \pi_2 = 0.5\pi_1 + 0.5\pi_3 \\ \pi_3 = 0.5\pi_2 + 0.5\pi_3 \end{cases}$$

求解 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\pi_3)=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. 则

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} P\{X_n=j|X_0=i\} = \frac{1}{3}$$

即0时刻从$i$出发在很久的时间之后Markov链处于状态$1,2,3$的概率均为$\frac{1}{3}$，即$X_n$的极限分布为均匀分布.

**例 5.3.5** 设有6个车站,车站中间的公路连接情况如图5-6所示.

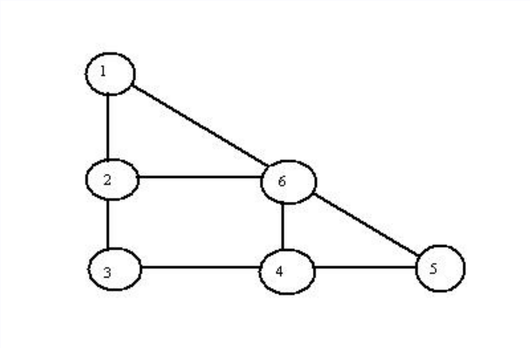



图5-6　例5.3.5图示

汽车每天可以从一个站驶向与之直接相临的车站，并在夜晚到达车站留宿，次日凌晨重复相同的活动.设每天凌晨汽车开往临近的任何一个车站都是等可能的，试说明很长时间后，各站每晚留宿的汽车比例趋于稳定.求出这个比例以便正确地设置各站的服务规模.

解：以$\{X_n, n=0,1,\cdots\}$记第$n$天某辆汽车留宿的车站号.这是一个Makov链，转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

解方程

$$\begin{cases} \pi\mathbf{P} & = \pi \\ \sum_{i=1}^{6} \pi_i & = 1 \end{cases}$$

其中$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6)$，可得$\pi = (\frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4})$. 从而无论开始汽车从哪一个车站出发在很长时间后他在任一个车站留宿的概率都是固定的，从而所有的汽车也将以一个稳定的比例在各车站留宿.

**例 5.3.6** 设甲袋中有$k$个白球和1个黑球，乙袋中有$k+1$个白球，每次从两袋中各任取一球，交换后放入对方的袋中.证明经过$n$次交换后，黑球仍在甲袋中的概率$p_n$满足$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$.

解：以$X_n$表示第$n$次取球后甲袋中的黑球数，则$\{X_n, n = 0, 1, 2, \cdots\}$是状态空间为$\mathcal{S} = \{0, 1\}$的时齐Markov链，一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{k}{k+1} & \frac{1}{k+1} \\ \frac{1}{k+1} & \frac{k}{k+1} \end{pmatrix}$$

则它的平稳分布满足

$$\begin{cases} \pi_0 & = \frac{k}{k+1}\pi_0 + \frac{1}{k+1}\pi_1 \\ \pi_1 & = \frac{1}{k+1}\pi_0 + \frac{k}{k+1}\pi_1 \end{cases}$$

且有$\pi_0 + \pi_1 = 1$，

求解得$\pi=(\pi_0,\pi_1)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，故经过$n$次交换后，黑球仍在甲袋中的概率$p_n$满足

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}P\{X_n=1\}=\pi_1=\frac{1}{2}$$

**例 5.3.7** 我国某种商品在国外销售情况共有连续24个季度的数据(其中1表示畅销，2表示滞销):

1,1,2,1,2,2,1,1,1,2,1,2,1,1,2,2,1,1,2,1,2,1,1,1

如果该商品销售情况近似满足时齐性与Markov性.

(1)试确定销售状态的一步转移概率矩阵.

(2)如果现在是畅销，试预测这之后的第四个季度的销售状况.

(3)如果影响销售的所有因素不变，试预测长期的销售状况.

解：以$X_n$表示第$n$季度该种商品在国外的销售情况，则$\{X_n, n=1,2,\cdots\}$是一状态空间为$\{1,2\}$的时齐Markov链.

(1)由$1\to 1$有7次；由$1\to 2$有7次，得$p_{11}=p_{12}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}$.

由$2\to 1$有7次；由$2\to 2$有7次，得$p_{21}=\frac{7}{9}, p_{22}=\frac{2}{9}$.

一步转移概率矩阵为

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{7}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$$

(2)

$$\mathbf{P}^{(4)}=\mathbf{P}^4=\begin{pmatrix} 0.611 & 0.389 \\ 0.605 & 0.395 \end{pmatrix}$$

$$p_{11}^{(4)}=0.611>p_{12}^{(4)}=0.389$$

即如果现在是畅销，这之后第四个季度该种商品将以概率0.611畅销.

(3)由平稳方程$(\pi_1,\pi_2)=(\pi_1,\pi_2)\mathbf{P}$及规范性条件$\pi_1+\pi_2=1$得

$$\begin{cases}\pi_1 & =\frac{1}{2}\pi_1+\frac{7}{9}\pi_2\\ \pi_2 & =\frac{1}{2}\pi_1+\frac{2}{9}\pi_2\\ \pi_1+\pi_2 & =1\end{cases}$$

解得$\pi=(\pi_1,\pi_2)=(\frac{14}{23},\frac{9}{23})$.

即长期下去，该种商品将以$\frac{14}{23}$的概率畅销.

## §5.4 Markov链的应用

### §5.4.1 群体消失模型(分支过程)

考虑一个能产生同类后代的个体组成的群体.每一个体生命结束时以概率$p_j(j=0,1,2,3,\cdots)$产生了$j$个新的后代，与别的个体产生的后代个数相互独立.初始的个体数以$X_0$表示，称为第零代的总数；第零代的后代构成第一代，其总数记为$X_1$，第一代的每个个体以同样的分布产生第二代，$\cdots$，一般地，以$X_n$记第$n$代的总数.此Markov链$\{X_n, n=0,1,2,\cdots\}$称为分支过程.

现在假设群体是从单个祖先开始的，即$X_0=1$，则有

$$X_n=\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_{n,i}$$

其中$Z_{n,i}$表示第$n$代的第$i$个成员的后代的个数.

首先来考虑第$n$代的平均个体数$E[X_n]$，对$X_n$取条件期望，有

$$
\begin{aligned}
E[X_n] &= E[E[X_n|X_{n-1}]] \\
&= \mu E[X_{n-1}] \\
&= \mu^2 E[X_{n-2}] \\
&= \cdots \\
&= \mu^n
\end{aligned}
$$

其中$\mu = \sum_{i=0}^{\infty} ip_i$是每个个体的后代个数的均值. 从而可以看出，若$\mu < 1$，则平均个体数单调下降趋于0.若$\mu = 1$时，各代平均个体数相同.当$\mu > 1$时，平均个体数按指数阶上升至无穷.

下面就来考虑群体最终会消亡的概率$\pi_0$. 对第一代个体数取条件，则

$$\begin{aligned}\pi_0 &= P\{\text{群体消亡}\}\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{\text{群体消亡}|X_1 = j\} \cdot p_j\\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j\end{aligned}$$

上面的第二个等式是因为群体最终灭绝是以第1代为祖先的$j$个家族全部消亡，而各家族已经假定为独立的，每一家族灭绝的概率均为$\pi_0$.

很自然我们会假设：家族消亡与$\mu$有关，在此我们给出一个定理，以证明$\pi_0 = 1$的充要条件是 $\mu \leq 1$(不考虑$p_0 = 1$和$p_0 = 0$的平凡情况，即家族在第零代后就消失或永不消失).

**定理 5.4.1** 设$0 < p_0 < 1$，则$\pi_0 = 1 \iff \mu \le 1$

证明：由$\pi_0$的表达式

$$\pi_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_0^j p_j = F(\pi_0) \qquad (5.4.1)$$

知它是直线$y = x$和曲线$y = F(x)$交点的横坐标，显然(1,1)是一个交点. 当$p_0 + p_1 = 1$时，$y = F(x)$是一条直线，当$p_0 + p_1 < 1$时，由于

$$F'(x) = \sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1} p_j > 0, \quad 0 < x < 1$$

$$F''(x) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) x^{j-2} p_j > 0, \quad 0 < x < 1$$

可见$F(x)$是单调增加的凸函数，如图5-7所示.

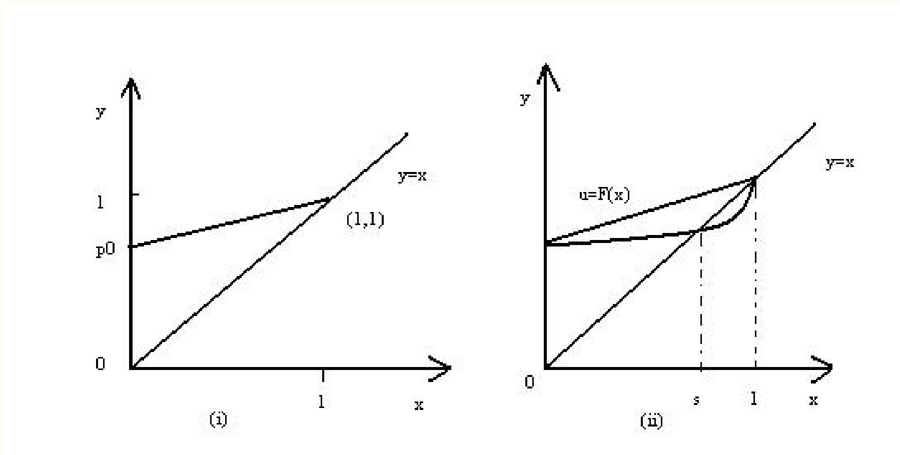



图5-7 $F(x)$图示

从图5-7(i)可以知道，当$p_0+p_1=1$时，方程(5.4.1)只有一个解，即$\pi_0=1$, 家族最终必定消亡. 图5-7(ii)可分为两种情况：(1)若$0<s<1, F(s)>s, F(1)=1$,方程(5.4.1) 只有唯一的解$\pi_0=1$; (2)存在一个$0<s<1$使得 $F(s)=s$, 那么此时$\pi_0$应取$s$还是1呢？可以证明，$\pi_0$必定取值为$s$，为此只需证明$\pi_0$是方程 (5.4.1)的最小解. 利用归纳法，首先，当$n=1$时，

$$\pi = \sum_{j=0}^{\infty} \pi^j p_j \geq \pi^0 p_0 = p_0 = P\{X_1 = 0\}$$

假设$\pi \geq P\{X_n = 0\}$, 则

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = 0\} &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_{n+1} = 0 | X_1 = j\} \cdot p_j \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} P\{X_n = 0\}^j \cdot p_j \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \pi^j p_j \\ &= \pi \end{aligned}$$

从而对一切$n$，$\pi \geq P\{X_n = 0\}$.而 $\lim_{n\to\infty} P\{X_n = 0\} = P\{$群体最终灭绝$\} = \pi_0$，从而$\pi \geq \pi_0$.这就证明了在这种情况下$\pi_0$取值应为$s$.

再来看在上述这三种情形下$\mu$的情况.

第一种情况，若$p_0 + p_1 = 1$，显然

$$\mu = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j = p_1 < 1$$

第二种情况，若$p_0 + p_1 < 1$而且方程(5.4.1)只有一个根$\pi_0 = 1$, 由图5-7(ii)容易看出，此时$F'(1) \le 1$而 $F'(1) = \sum_{j=0}^{\infty} j p_j = \mu$, 从而$\mu \le 1$.

第三种情况下，容易看出$F'(1) = \mu > 1$, 这就证明了$\pi_0 = 1 \iff \mu \le 1$. ∎

在实际应用中，考虑一个群体的真实增长时，分支过程的假定在群体达到无限之前就不成立了(比如独立同分布性). 但另一方面，利用分支过程研究消亡现象是有意义的，因为一般灭绝常常发生在过程的早期.

## §5.4.2 人口结构变化的Markov链模型

考虑社会的教育水平与文化程度的发展变化，可以建立如下模型：将全国所有16岁以上的人口分为文盲、初中、高中(含中专)、大学(含大专)、中级技术人才、高级技术人才、特级专家等7类，结构的变化为升级、退化(如，初中文化者会重新变为文盲)、进入 (年龄达到16岁或移民进入)迁出(死亡或移民国外). 用$(n_1(t), n_2(t), \cdots, n_7(t))$ 表示在$t$年各等级的人数，$N(t) = \sum_{i=1}^{7} n_i(t)$为全社会16岁以上人口总数 (简称为总人数)，以$q_{ij}$记每年从$i$级转为$j$级的人数在$i$级人数中的百分比，则

$$\mathbf{Q} = (q_{ij})_{7\times 7}$$

是一个准转移阵(每行所有元素之和$\leq 1$).

再考虑进入与迁出，记$w_i$为每年从$i$级迁出占$i$级总人数的比例，$r_i$为每年进入 $i$级的人数在总进入人数的比例，则

$$\sum_{j=1}^{7} q_{ij} + w_i = 1, \quad r_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{7} r_i = 1$$

记$R(t)$为总进入人数，$W(t)$为总迁出人数，则

$$N(t+1) = N(t) + R(t) - W(t)$$

$$n_j(t+1) = \sum_{i=1}^{7} n_i(t) q_{ij} + r_j R(t) - n_j(t) w_j$$

令

$$M(t) = N(t+1) - N(t) = R(t) - W(t)$$

设总人数以常数百分比$\alpha$增长(可以为负增长),即

$$M(t) = \alpha N(t), \quad \alpha = \frac{N(t+1)}{N(t)} - 1$$

于是

$$\frac{n_j(t+1)}{N(t+1)} = \frac{N(t)}{N(t+1)}[\sum_{i=1}^{7}\frac{n_i(t)}{N(t)}q_{ij} + r_j\frac{R(t)}{N(t)} - \frac{n_j(t)}{N(t)}w_j]$$

$$= (\frac{1}{1+\alpha})[\sum_{i=1}^{7}\frac{n_i(t)}{N(t)}q_{ij} + r_j\frac{R(t)}{N(t)} - \frac{n_j(t)}{N(t)}w_j]$$

记$a_j(t) = \frac{n_j(t)}{N(t)}$，上式可改写为

$$a_j(t+1) = \frac{1}{1+\alpha}[\sum_{i=1}^{7}a_i(t)q_{ij} + r_j\frac{R(t)}{N(t)} - w_ja_j(t)] \quad (5.4.2)$$

由$R(t) = W(t) + M(t)$，(5.4.2)式可改写为

$$a_j(t+1) = \frac{1}{1+\alpha}[\sum_{i=1}^{7}a_i(t)(q_{ij} + r_jw_i) - w_ja_j(t) + \alpha r_j]$$

(这是由于$\frac{W(t)}{N(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{7}n_i(t)w_i}{N(t)} = \sum_{i=1}^{7}a_i(t)w_i$).

特别地，当$\alpha = 0$时，

$$a_j(t+1) = \sum_{i=1}^{7} a_i(t)(q_{ij} + r_j w_i) - w_j a_j(t)$$

记$\mathbf{a}(t) = (a_1(t), \cdots, a_7(t))$, $\widetilde{\mathbf{P}} = (\widetilde{p}_{ij})$，其中

$$\widetilde{p}_{ij} = \begin{cases} q_{ij} + r_j w_i & , \quad i \neq j \\ q_{jj} + r_j w_j - w_j, & i = j \end{cases}$$

则上式变为$\mathbf{a}(t+1) = \mathbf{a}(t) \cdot \widetilde{\mathbf{P}}$.这是一个以$\widetilde{\mathbf{P}}$为转移阵的Markov链在$t$时刻的分布满足的方程.

在实际中，我们希望人口结构维持一个合理的稳定水平$\mathbf{a}^*$，文盲越少越好，而专家也不需太多，并且从现在的$\mathbf{a}(0)$出发，通过控制人口进入各级的比例$\mathbf{r} = (r_1, \cdots, r_7)$来尽快地达到这个稳定水平.为此我们讨论一下在不同的$\mathbf{r}$下全部可能的稳定结构.

由于$\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\widetilde{\mathbf{P}}$(因为$\mathbf{a}$是稳定的)，即

$$\mathbf{a}=\mathbf{a}(\mathbf{Q}+(w_ir_j)-(w_j\delta_{ij}))=\mathbf{aQ}+(\mathbf{aw}')\mathbf{r}-(a_1w_1,\cdots,a_7w_7)$$

其中$\mathbf{w}=(w_1,\cdots,w_7)$, $\mathbf{r}=(r_1,\cdots,r_7)$. 当数$\mathbf{aw}'\neq 0$时

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}[\mathbf{I}-\mathbf{Q}+(w_j\delta_{ij})](\mathbf{aw}')^{-1}$$

即$\mathbf{a}=(\mathbf{aw}')\cdot\mathbf{r}(\mathbf{I}-\mathbf{Q}+(w_j\delta_{ij}))^{-1}$. 又因为要求$r_i\geq 0$. 从而$a_j\geq\sum_{i=1}^{7}a_iq_{ij}-a_jw_j(\forall j)$，这样对于$\forall\mathbf{a}\in\mathcal{A}\doteq\{\mathbf{a}: a_j\geq\sum_{i=1}^{7}a_iq_{ij}-a_jw_j,\forall j\}$,就可由(5.4.2) 式找出$\mathbf{r}$，使其满足

$$\mathbf{a}=\mathbf{aQ}+\mathbf{aw}'\mathbf{r}-\mathbf{a}(w_i\delta_{ij})=\mathbf{a}\cdot\widetilde{\mathbf{P}}$$

从而对于此$\mathbf{r}$，$\mathbf{a}$是一个稳定的结构.



GoBack
FullScreen
Close
Quit

# §5.5 连续时间Markov链

## §5.5.1 连续时间Markov链

前面几节讨论的是时间和状态空间都是离散的Markov过程，本节我们将介绍另外一种情况的Markov过程，它的状态空间仍然是离散的，但时间是连续变化的，称为连续时间Markov链. 我们会给出它的一些性质，一个重要的方程(Kolmogrov方程)和一个重要的应用(生灭过程).

**定义 5.5.1** 过程$\{X(t), t \geq 0\}$的状态空间$\mathcal{S}$为离散空间，为方便书写设$\mathcal{S}$为$\{0, 1, 2, \cdots\}$或其子集. 若对一切$s, t \geq 0$及$i, j \in \mathcal{S}$,有

$$\begin{aligned} &P\{X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s\} \\ &\qquad = P\{X(t+s) = j | X(s) = i\} \qquad (5.5.1) \end{aligned}$$

成立，则称$\{X(t), t \geq 0\}$是一个连续时间**Markov**链.

条件概率$P\{X(t+s)=j|X(s)=i\}$记作$p_{ij}(s,t)$，表示过程在时刻$s$处于状态$i$，经$t$时间后转移到$j$的转移概率，并称$\mathbf{P}(s,t)=(p_{ij}(s,t))$为相应的转移概率矩阵.

**定义 5.5.2** 称连续时间Markov链是时齐的，若 $p_{ij}(s,t)$ 与$s$无关.简记 $p_{ij}(s,t)=p_{ij}(t)$，相应地记$\mathbf{P}(t)=(p_{ij}(t))$.

我们只讨论时齐的连续时间Markov链，并且简称为连续时间Markov链(在不引起混淆的情况下有时也称为Markov链).

对于连续时间Markov链来说, 除了要考虑在某一时刻它将处于什么状态外, 还关心它在离开这个状态之前会停留多长的时间，从它具备Markov性来看，这个“停留时间”具备“无记忆性”的特征，应该服从指数分布，下面我们给出一个具体的解释.

**定理 5.5.1** 设$\{X(t), t \geq 0\}$是连续时间Markov链，假定在时刻0过程刚刚到达$i(i \in \mathcal{S})$. 以$\tau_i$记过程在离开$i$之前在$i$停留的时间，则$\tau_i$服从指数分布.

证明：我们只需证明对$s, t \geq 0$, 有

$$P\{\tau_i > s + t | \tau_i > s\} = P\{\tau_i > t\}. \tag{5.5.2}$$

即无记忆性.

注意到

$$\{\tau_i > s\} \iff \{X(u) = i, 0 < u \leq s | X(0) = i\}$$

$$\{\tau_i > s+t\} \iff \{X(u) = i, 0 < u \leq s, X(v) = i, s < v \leq s+t | X(0) = i\}$$

则

$$
\begin{aligned}
&P\{\tau_i > s+t|\tau_i > s\} \\
= &P\{X(u)=i, 0<u\le s, X(v)=i, s<v\le s+t|X(u)=i, 0\le u\le s\} \\
= &P\{X(v)=i, s<v\le s+t|X(s)=i\} \\
= &P\{X(u)=i, 0<u\le t|X(0)=i\} \\
= &P\{\tau_i > t\}
\end{aligned}
$$

由上述定理，实际上我们得到了另外一个构造连续时间Markov链的方法，它是具有如下两条性质的随机过程.

(1) 在转移到下一个状态之前处于状态$i$的时间服从参数为$\mu_i$的指数分布；

(2)在过程离开状态$i$时，将以概率$p_{ij}$到达$j$，且$\sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij} = 1$.

注:当$\mu_i = \infty$时，它在状态$i$停留的平均时间为0，即一旦进入马上离开，称这样的状态为瞬过的.但我们假设所考虑的连续时间Markov链中不存在瞬过状态，即设 $\forall i, 0 \leq \mu_i < +\infty$(若$\mu_i = 0$，称$i$为吸收态，即一旦进入，将停留的平均时间为无限长).由此我们看出，连续时间Markov链是一个做下面的运动的随机过程：它以一个Markov链的方式在各个状态之间转移，在两次转移之间以指数分布停留.从上面已经知道，这个指数分布与过程现在所处的状态有关，但一定要与下面将转移到的状态独立(试用Markov性说明原因).

**定义 5.5.3** 称一个连续时间Markov链是正则的，若以概率1在任意有限长的时间内转移的次数是有限的.

从而可得连续性条件

$$\lim_{t\to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{5.5.3}$$

以下我们总假定所考虑的Markov链都满足正则性条件.下面是几个连续时间Markov链的典型例子.

**例 5.5.1** (Poisson过程)参数为$\lambda$的Poisson过程$\{N(t), t \geq 0\}$，取值为$\{0, 1, 2, \cdots\}$. 由第3章知道，它在任一个状态$i$停留的时间服从指数分布，并且在离开$i$时以概率1转到$i+1$ (又一个事件发生)，由Poisson过程的独立增量性容易看出它在$i$停留的时间与状态的转移是独立的(特别是由它的平稳增量性$\mu_i = \mu_{i+1} = \frac{1}{\lambda}, i = 0, 1, 2, \cdots$)，从而Poisson过程是时齐的连续时间Markov链. 对$i \in \mathcal{S}$,，它的转移概率为

$$
\begin{aligned}
p_{i,i}(t) &= P\{N(t+s)=i|N(s)=i\} \\
&= P\{N(t)=0\} \\
&= e^{-\lambda t} \\
p_{i,i+1}(t) &= P\{N(t+s)=i+1|N(s)=i\} \\
&= P\{N(t)=1\} \\
&= \lambda t e^{-\lambda t} \\
p_{i,j}(t) &= \frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}e^{-\lambda t}, j>i+1 \\
p_{i,j}(t) &= 0, j<i
\end{aligned}
$$

**例 5.5.2** (Yule过程)考察生物群体繁殖过程的模型.设群体中各个生物体的繁殖是相互独立的、强度为 $\lambda$的Poisson过程，并且群体中没有死亡，此过程称为Yule过程.我们来说明 Yule过程是一个连续时间Markov链.

设在时刻0群体中有1个个体，则群体将有的个体数是$\{1,2,3,\cdots\}$.以$T_i(i \geq 1)$记群体数目从$i$增加到$i+1$所需的时间，由Yule过程定义，当群体数目为$i$时,这$i$个个体是以相互独立的Poisson过程来产生后代的.由Poisson过程的可加性知，这相当于一个强度为 $\lambda i$的Poisson过程；由Poisson过程的独立增量性，易知$T_i$与状态的转移是独立的 $(i \geq 1)$，并且$\{T_i\}$是相互独立的参数为$i\lambda$的指数变量.这就说明了Yule过程是一个连续时间Markov链，我们来求它的转移概率$p_{ij}(t)$.首先

$$
\begin{aligned}
P\{T_1 \le t\} &= 1 - e^{-\lambda t} \\
P\{T_1 + T_2 \le t\} &= \int_0^t P\{T_1 + T_2 \le t | T_1 = x\} \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \int_0^t (1 - e^{-2\lambda(t-x)}) \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= (1 - e^{-\lambda t})^2 \\
P\{T_1 + T_2 + T_3 \le t\} &= \int_0^t P\{T_1 + T_2 + T_3 \le t | T_1 + T_2 = x\} dP\{T_1 + T_2 \le x \\
&= \int_0^t (1 - e^{-3\lambda(t-x)}) 2\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x}) dx \\
&= (1 - e^{-\lambda t})^3 \\
&\cdots \cdot \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

一般地，用归纳法不难证明

$$P\{T_1+T_2+\cdots+T_j\le t\}=(1-e^{-\lambda t})^j$$

而

$$\{T_1+T_2+\cdots+T_j\le t\}\iff\{X(t)\ge j+1|X(0)=1\}$$

所以

$$\begin{aligned}p_{1j}(t)&=P\{X(t)=j|X(0)=1\}\\&=P\{X(t)\ge j|X(0)=1\}-P\{X(t)\ge j+1|X(0)=1\}\\&=(1-e^{-\lambda t})^{j-1}-(1-e^{-\lambda t})^j\\&=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}\quad(j\ge 1)\end{aligned}\tag{5.5.4}$$

这是一个几何分布，均值为$e^{\lambda t}$.

又因为

$$p_{ij}(t) = P\{X(s+t) = j | X(s) = i\}$$

相当于一个总量从$i$个个体开始的Yule过程的群体总数在$t$时间内增加到$j$的概率. 而这相当于$i$个独立的服从(5.5.4)式的几何随机变量的和取值为$j$的概率 (想一想为什么)，于是

$$p_{ij}(t) = \binom{j-1}{i-1} e^{-\lambda t i}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}, \quad j \geq i \geq 1$$

**例 5.5.3** (生灭过程) 仍然考虑一个生物群体的繁殖模型.每个个体生育后代如例5.5.2的假定，但是每个个体将以指速率$\mu$死亡，这是一个生灭过程，一个生灭过程的状态为 $\{0,1,2,\cdots\}$.在状态$i$，它能转移到$i+1$(生了一个)或$i-1$(死了一个)，以$T_i$记过程从$i$到达$i+1$或$i-1$的时间.类似例5.5.2可以得到，$T_i$相互独立且与状态会转移到$i+1$或是$i-1$是独立的，$T_i$服从参数为$i\mu+i\lambda$ 的指数分布(把生灭过程看成两个Yule过程之和，一个生，一个灭)，并且下一次转移到 $i+1$的概率$p_{i,i+1}$是$\frac{\lambda}{\mu+\lambda}$(见第3章习题3.3)，到$i-1$的概率$p_{i,i-1}$为 $\frac{\mu}{\mu+\lambda}$.



GoBack
FullScreen
Close
Quit

**例 5.5.4** (M/M/S排队系统) 顾客的来到是参数为$\lambda$的Poisson过程.服务员数为S个，每个顾客接受服务的时间服从参数为$\mu$的指数分布.遵循先来先服务，若服务员没有空闲就排队的原则. 以$X(t)$记$t$时刻系统中的总人数，则$\{X(t), t \geq 0\}$是一个生灭过程(来到看作出生，离去看作死亡)，来到率是恒定参数为$\lambda$的Poisson过程，离去过程的参数会发生变化，以$\mu_n$记系统中有$n$个顾客时的离去率，则

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 1 \leq n \leq S \\ s\mu\,, & n > S \end{cases}$$

请读者自己证明.

## §5.5.2 Kolmogorov微分方程

对于离散时间Markov链，如果已知其转移概率矩阵$\mathbf{P} = (p_{ij})$，则其$n$步转移概率矩阵由其一步转移矩阵的$n$次方可得.但是对于连续时间Markov链，转移概率$p_{ij}(t)$的求解一般比较复杂.下面我们先考虑$p_{ij}(t)$的一些性质.

**定理 5.5.2** 时齐连续时间Markov链的转移概率$p_{ij}(t)$满足:

(1)$p_{ij}(t) \geq 0$;
(2)$\sum_{j\in S} p_{ij}(t) = 1$;
(3)$p_{ij}(t+s) = \sum_{k\in S} p_{ik}(t)p_{kj}(s)$.

证明：(1)和(2)由$p_{ij}(t)$的定义易知.

下面证明(3)：

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t+s) &= P\{X(t+s)=j|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P\{X(t+s)=j, X(t)=k|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P\{X(t+s)=j|X(t)=k, X(0)=i\}P\{X(t)=k|X(0)=i\} \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} P\{X(t+s)=j|X(t)=k\}p_{ik}(t) \\
&= \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t)p_{kj}(s)
\end{aligned}
$$

∎

一般称(3)为连续时间Markov链的C-K方程.

**定理 5.5.3** (1)

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=q_{ii}\leq +\infty \tag{5.5.5}$$

(2)

$$\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}=q_{ij}<\infty \tag{5.5.6}$$

称$q_{ij}$为从状态$i$转移到$j$的转移速率.

**推论 5.5.1** 对有限状态时齐的连续时间Markov链,有

$$q_{ii}=\sum_{j\neq i}q_{ij}<+\infty \tag{5.5.7}$$

证明：由定理5.5.2知，$\sum_{j\in\mathcal{S}} p_{ij}(t)=1$，即

$$1-p_{ii}(t)=\sum_{j\neq i} p_{ij}(t)$$

故

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t} &= \lim_{t\to 0}\sum_{j\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}\\ &= \sum_{j\neq i}\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}\\ &= \sum_{j\neq i} q_{ij} < +\infty\end{aligned}$$

∎

注：对于无限状态的情况，一般只能得到$q_{ii} \geq \sum_{j\neq i} q_{ij}$.为了简单起见,设状态空间为$\mathcal{S} = \{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$，此时记

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1i} & \cdots \\ q_{21} & -q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2i} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ q_{i1} & q_{i2} & q_{i3} & \cdots & -q_{ii} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

称为连续时间Markov链的**Q**-矩阵，当矩阵元素 $q_{ii} = \sum_{j\neq i} q_{ij} < +\infty$时，称该矩阵为保守的.

下面我们应用这两个定理及推论，来导出一个重要的微分方程.

**定理 5.5.4** （**Kolmogorov微分方程**）对一切$i,j\in\mathcal{S},t\geq 0$且$\sum_{j\neq i}q_{ij}=q_{ii}<+\infty$，有

(1) 向后方程

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)-q_{ii}p_{ij}(t) \tag{5.5.8}$$

(2) 在适当的正则条件下，有向前方程

$$p'_{ij}(t)=\sum_{k\neq j}q_{kj}p_{ik}(t)-q_{jj}p_{ij}(t) \tag{5.5.9}$$

证明：由定理5.5.2(3),有

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

或等价地

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t)p_{ii}(h) = \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t)$$

变形为

$$p_{ij}(t+h) - p_{ij}(t) = \sum_{k\neq i} p_{ik}(h)p_{kj}(t) - (1-p_{ii}(h))p_{ij}(t)$$

于是

$$\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) - \lim_{h\to 0}\frac{(1-p_{ii}(h))}{h}p_{ij}(t) \tag{5.5.10}$$

若此Markov链状态是有限的，应用定理5.5.3和推论5.5.1从上式直接可得 (1)(向后方程).

下面证明对于无限状态下依然有(1)成立.由式(5.5.10)我们只需证明其中的极限与求和可交换次序即可.

对于固定的$N$，有

$$\begin{aligned}
\liminf_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t) &\geq \liminf_{h\to 0}\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\\
&=\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}}\liminf_{h\to 0}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\\
&=\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}}q_{ik}p_{kj}(t)
\end{aligned}$$

由$N$的任意性，得

$$\liminf_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\geq\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)$$

又因为$p_{kj}(t) \leq 1, \forall k \in \mathcal{S}$，所以

$$\limsup_{h\to 0} \sum_{k\neq i} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t)$$

$$\leq \limsup_{h\to 0} [\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \sum_{k\geq N} \frac{p_{ik}(h)}{h}]$$

$$= \limsup_{h\to 0} [\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \left( \sum_{k} \frac{p_{ik}(h)}{h} - \sum_{k<N} \frac{p_{ik}(h)}{h} \right)]$$

$$= \limsup_{h\to 0} [\sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}} \frac{p_{ik}(h)}{h} p_{kj}(t) + \left( \frac{1-p_{ii}(h)}{h} - \sum_{\substack{k<N\\ k\neq i}} \frac{p_{ik}(h)}{h} \right)]$$

$$= \sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}} q_{ik} p_{kj}(t) + q_{ii} - \sum_{\substack{k\neq i\\ k<N}} q_{ik}$$

同样由$N$的任意性，可知

$$\limsup_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)\leq\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)\ \left(\text{因为}q_{ii}=\sum_{k\neq i}q_{ik}<\infty\right)$$

这就证明了

$$\lim_{h\to 0}\sum_{k\neq i}\frac{p_{ik}(h)}{h}p_{kj}(t)=\sum_{k\neq i}q_{ik}p_{kj}(t)$$

于是(1)得证.(1)用矩阵形式写出即是$P'(t)=QP(t)$，其中$P(t)=(p_{ij}(t)),Q=(q_{ij})$. 依定理条件可知，$Q$是保守的.

下面证明(2). 在(1)中计算$t+h$的状态时是对退后到时刻$h$的状态来取条件的(所以称为后退方程)，这里我们考虑对时刻$t$的状态取条件，用C-K方程

$$p_{ij}(t+h) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_{ik}(t)p_{kj}(h)$$

同理得到

$$\lim_{h\to0}\frac{p_{ij}(t+h)-p_{ij}(t)}{h} = \lim_{h\to0}\Big(\sum_{k\neq j} p_{ik}(t)\frac{p_{kj}(h)}{h}-\frac{1-p_{jj}(h)}{h}p_{ij}(t)\Big)$$

假若上式中极限与求和号可交换，则有(2)成立，以矩阵形式写出即为

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$$

但是这个假定不一定成立，所以在定理中，我们加了“适当正则”这个条件，但是对于有限状态的Markov链或生灭过程(特别只生不灭的纯生过程)，它都是成立的. ∎

**例 5.5.5** (Poisson过程)由Poisson过程的第二个定义知

$$
\begin{aligned}
p_{k,k+1}(h) &= P\{N(t+h) - N(t) = 1|N(t) = k\} \\
&= \lambda h + o(h) \\
p_{k,k}(h) &= P\{N(t+h) - N(t) = 0|N(t) = k\} \\
&= 1 - \lambda h + o(h)
\end{aligned}
$$

由此导出$p_{ij}(t)$满足的微分方程，首先

$$
\lim_{h\to 0} \frac{1 - p_{kk}(h)}{h} = q_{kk} = \lambda
$$

$$
\lim_{h\to 0} \frac{p_{k,k+1}(h)}{h} = q_{k,k+1} = \lambda
$$

从而

$$
\begin{aligned}
p'_{ij}(t) &= q_{i,i+1}p_{i+1,j}(t) - q_{ii}p_{ij}(t) \\
&= \lambda p_{i+1,j}(t) - \lambda p_{ij}(t)
\end{aligned}
$$

当$j=i$时，有

$$p'_{ii}(t)=-\lambda p_{ii}(t)$$

当$j=i+1$时，有

$$p'_{i,i+1}(t)=\lambda p_{i+1,i+1}(t)-\lambda p_{i,i+1}(t)$$

当$j=i+2$时，有

$$p'_{i,i+2}(t)=\lambda p_{i+1,i+2}(t)$$

在其他情况下，微分方程不存在.

由条件$p_{ii}(0)=1$, 则上述微分方程的解为

$$p_{i,i}(t)=e^{-\lambda t}$$

$$p_{i,i+1}(t)=\lambda te^{-\lambda t}$$

$$p_{ij}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}\quad (j\geq i\geq 0)$$

可由此验证这个定义与Poisson过程的第一个定义的等价性.

**例 5.5.6** (Yule过程)类似Poisson过程，给出Yule过程$\{X(t), t \geq 0\}$的转移概率.

解 由于考虑的是单一祖先，所以$X(0) = 1$.根据模型的假定(见例5.5.2)，有

$$
\begin{aligned}
&P\{X(t+h) - X(t) = 1 | X(t) = k\} = k\lambda h + o(h) \\
&P\{X(t+h) - X(t) = 0 | X(t) = k\} = 1 - k\lambda h + o(h) \\
&P\{X(t+h) - X(t) \geq 2 | X(t) = k\} = o(h) \\
&P\{X(t+h) - X(t) < 0 | X(t) = k\} = 0
\end{aligned}
$$

重复例5.5.5的过程得Yule过程的转移概率$p_{ij}(t)$满足的向前方程为

$$
\begin{aligned}
&p'_{ii}(t)=-i\lambda p_{ii}(t)\\
&p'_{ij}(t)=(j-1)\lambda p_{i,j-1}(t)-j\lambda p_{ij}(t),\quad j>i
\end{aligned}
$$

解得

$$
p_{ij}(t)=\binom{j-1}{i-1}e^{-\lambda ti}(1-e^{-\lambda t})^{j-i},\quad j\geq i\geq 1
$$

与例5.5.2中结论是相同的.

**例 5.5.7** (生灭过程)同样, 例5.5.3的生灭过程应满足

(1) $P\{X(t+h)-X(t)=1|X(t)=i\}=\lambda h+o(h)$;

(2) $P\{X(t+h)-X(t)=-1|X(t)=i\}=i\mu h+o(h)$;

(3) $P\{X(t+h)-X(t)=0|X(t)=i\}=1-(\lambda+i\mu)h+o(h)$;

(4) $p_{ii}(0)=1, p_{ij}(0)=0 \quad (j\neq i)$.

从而导出Kolmogorov向后方程为

$$\begin{cases} p'_{ij}(t) = i\mu p_{i-1,j}(t)-(\lambda+i\mu)p_{ij}(t)+\lambda p_{i+1,j}(t), & i\geq 0 \\ p'_{0,j}(t)=-\lambda p_{0,j}(t)+\lambda p_{1,j}(t) \end{cases}$$

向前方程为

$$\begin{cases} p'_{ij}(t) = (i+1)\mu p_{i,j+1}(t)-(\lambda+i\mu)p_{ij}(t)+\lambda p_{i,j-1}(t) \\ p'_{i,0}(t)=-\lambda p_{i,0}(t)+\mu p_{i,1}(t) \end{cases}$$