

马尔可夫链 应用分析举例

例 1：赌徒输光问题：

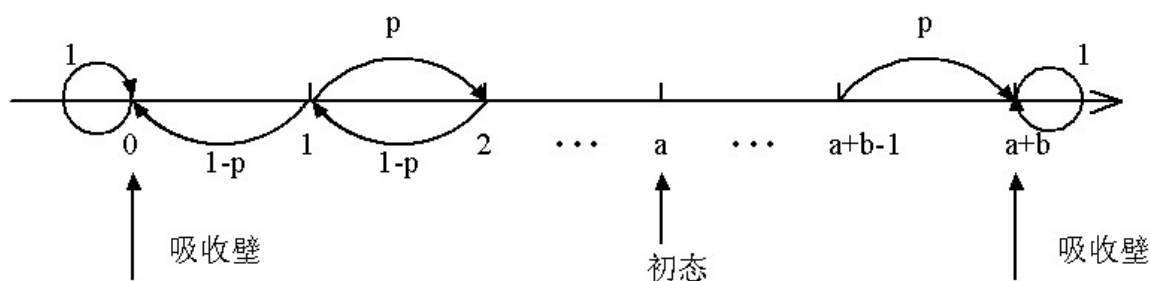
两个赌徒进行一系列赌博，在每一局赌博中甲获胜的概率是 p ，乙获胜的概率是 $1-p$ ，每一局后，负者要付一元给胜者。如果起始时甲有资本 a 元，乙有资本 b 元， $a+b=c$ ，两人赌博直到甲输光或乙输光为止。

求甲输光的概率。

解：

第 n 时刻甲的资本为 ξ ，状态空间是 $I: \{0, 1, 2, \dots, c\}$ ， $c = a + b$ ， $a \geq 1$ ， $b \geq 1$ 。

状态转换图为：



这个问题实际是带有两个吸收壁的随机游动问题

问题是从 a 点出发，到达 0 状态的概率，即被 0 状态吸收的概率。

设 $0 < j < c$ ， u_j 为质点从 j 点出发到 0 状态的概率。由全概率公式有

$$u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1}$$

边界条件为：

$$u_0 = 1$$

$$u_c = 0$$

构造：

$$(p+q)u_j = pu_{j+1} + qu_{j-1}$$

$$p(u_j - u_{j+1}) = q(u_{j-1} - u_j)$$

$$(u_j - u_{j+1}) = \frac{q}{p}(u_{j-1} - u_j)$$

定义

$$(u_j - u_{j+1}) = d_j, \quad (0 \leq j < c), \quad \frac{q}{p} = r,$$

相应的差分方程是：

$$d_j = rd_{j-1} = r^2 d_{j-2} = \cdots = r^j d_0, \quad (0 < j < c)$$

设 $r \neq 1$,

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 - u_c \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} (u_i - u_{i+1}) = \sum_{i=0}^{c-1} d_i = \sum_{i=0}^{c-1} r^i d_0 \\ &= \frac{1-r^c}{1-r} d_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_j &= u_j - u_c \\ &= \sum_{i=j}^{c-1} (u_i - u_{i+1}) = \sum_{i=j}^{c-1} d_i = \sum_{i=j}^{c-1} r^i d_0 \\ &= \frac{r^j - r^c}{1-r} d_0 \end{aligned}$$

$$u_j = \frac{r^j - r^c}{1-r^c} = \frac{(q/p)^j - (q/p)^c}{1-(q/p)^c}$$

$$u_a = \frac{r^a - r^c}{1-r^c} = \frac{(q/p)^a - (q/p)^c}{1-(q/p)^c}$$

设 $r=1$,

$$\begin{aligned} u_0 &= u_0 - u_c \\ &= \sum_{i=0}^{c-1} (u_i - u_{i+1}) = \sum_{i=0}^{c-1} d_i = \sum_{i=0}^{c-1} r^i d_0 \\ &= cd_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_j &= u_j - u_c \\ &= \sum_{i=j}^{c-1} (u_i - u_{i+1}) = \sum_{i=j}^{c-1} d_i = \sum_{i=j}^{c-1} r^i d_0 \\ &= (c-j)d_0 \end{aligned}$$

$$u_j = \frac{c-j}{c}$$

$$u_a = \frac{c-a}{c} = \frac{b}{c}$$

同样道理，可以得到乙先输光的概率，

$$\text{当 } r \neq 1, \quad u_a = \frac{1-(q/p)^a}{1-(q/p)^c},$$

$$\text{当 } r=1, \quad u_b = \frac{a}{c}。$$

该例题是有两个吸收壁的特例，
建立了边界条件、递推关系、首先概率表达式，
该例题着重研究对称和非对称的赌徒输光的问题。

例 2：网球比赛

网球比赛在选手 A 和 B 之间进行。网球的计分制是 15, 30, 40 和 60 分，如果选手 A 赢了第一球，比分是 15:0，否则比分是 0:15。如果选手 A 接着赢了第二球，比分为 30:0，如果 A 接着赢了第三球，比分为 40:0，如果 A 再接着赢了第四球，则比分为 60:0，选手 A 赢得该局比赛。当选手 A 赢了第一球而输了第二球，对手 B 得 15 分，从而比分为 15:15。平分是指第六球后双方分数相同(例如 30:30, 40:40, ...)。在平分后，接下来的一球如果选手 A 得分/失分，则称此时的状态为 A 占先/B 占先。如果 A 在占先后再得分，则选手 A 赢得该局。如果选手 B 在占先后再得分，则选手 B 赢得该局。

一旦第一局比赛结束，选手进入第二局比赛，直到一方赢得至少 6 局且至少领先对手两局，这样该方获得一盘比赛的胜利。因而，一盘结束时的比分为下列情形之一：6:0, 6:1, 6:2, 6:3, 6:4, 7:5, 8:6, ...或是它们的逆序等等(实际规则中采用了决胜局的办法避免一盘比赛的时间过长，此处不详细讨论)。一盘结束后，进行另一盘，直到一方赢得三盘中的两盘（或五盘中的三盘），从而赢得整场比赛。

试对网球比赛中一局比赛的规则进行分析讨论。

题意分析：

整个题目都是在分析网球比赛规则，而分析规则的目的在于得出不同实力的选手在这种规则下赢球的概率。换句话说，假如有两个选手，选手 A 赢一球的概率为 p ，选手 B 赢一球的概率为 $q=1-p$ ，那么若 $p>q$ ，但是两者接近，例如 $p=0.52$ ， $q=0.48$ ，网球比赛的赛制能否保证选手 A 在经过长时间的较量后最终有很大的概率战胜对手？相反，若两者实力悬殊，例如 $p=0.8$ ， $q=0.2$ ，赛制能否保证选手 A 很快就能将 B 淘汰出局。这些都是我们分析比赛规则时要关注的问题，并应该最后得出一个结论。

分出胜负的最小的单位是分，再上是局，局之上是盘（一方赢得至少 6 局且至少领先对手 2 局，这样取得一盘比赛的胜利），然后再上是一场比赛（可能是五盘三胜，也可能是三盘二胜）。我们这里暂时只分析一局比赛的规则。

建模：具有两个吸收壁，五个状态的随机游动

1. 一局比赛的建模

问题：一局比赛共有多少个状态

很多，例如 15:0 就是一个状态，40:15 又是一个状态。还是回到我们分析比赛规则的目的上来，我们是为了得到两名选手最终赢球与输球的概率，那么当一局比赛打到 30:40 的时候，如果选手 B 再取胜一球，则 30:60，选手 B 获胜，而之前这局比赛到底是怎么打到 30:40 的并不是我们关心的问题，我们只关心一局比赛会打到 30:40 的概率（初始概率）以及之后由状态 30:40 打到状态 30:60 的概率（转移概率）。这是典型的马尔科夫链。

那么我们实际要做的事情就是如何确定比赛中对我们的分析有用的状态以及这些状态

的概率，状态之间相互转移的概率。

首先我们对一局比赛中的所有状态分类，可以分为 6 大类：

- (1) “过渡”的状态，例如 15:0 这样的状态。
- (2) A 赢的状态，例如 60:15, 60:30, 60+2:60, 60+4:60+2, ... 这种状态是吸收态
- (3) B 赢的状态，例如 15:60, 30:60, 40:60+1, 60+1:60+3, ... 这种状态是吸收态
- (4) A 占先的状态，也即 A 再赢一球就取胜，而即使 A 再输一球也只是平分的状态，例如 40:30, 60:40
- (5) B 占先的状态，也即 B 再赢一球就取胜，而即使 B 再输一球也只是平分的状态，例如 30:40, 40:60
- (6) 平分的状态，例如 30:30, 40:40, 60:60, 60+1:60+1, ...

值得注意的是，15:15 不是平分状态，因为平分状态后再打一球，状态应该转移到 A 占先或者 B 占先的状态，而 15:15 不符合这个概念。

总结上面的分析，我们应该关心的是后面五种状态的初始概率以及这五种状态之间的转移概率，而在得到后面五种状态的初始概率时会需要考虑“过渡”的状态，得到初始概率后就不用考虑“过渡”的状态了。

下面一幅图是一局的状态转移示意图：

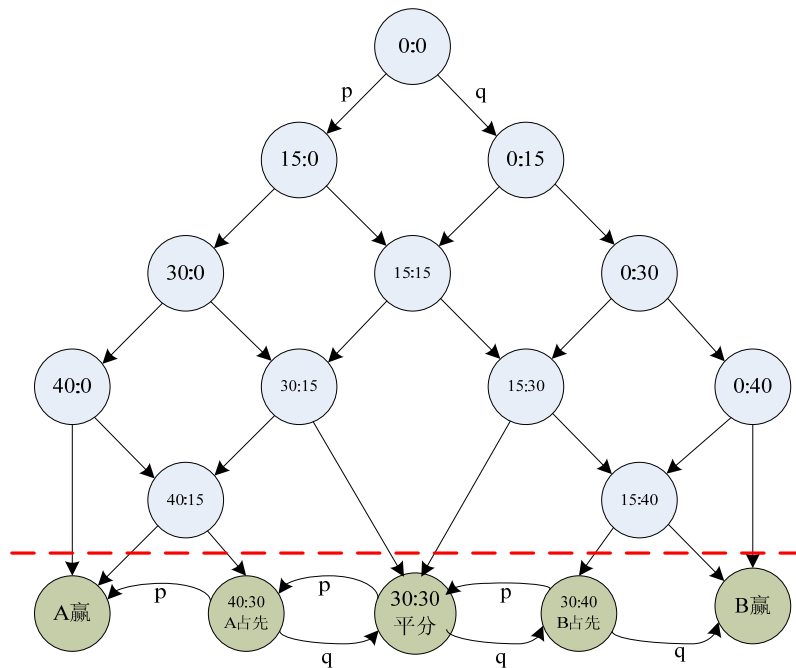


图 1 一局比赛的状态转移图

在完成了上述的分析后，我们需要做的就只是确定图 1 中的五状态随机游动中，各状态的初始概率了。记：

$$\text{状态 0: A 赢 } P_0 = p^4 + 4p^4q$$

$$\text{状态 1: A 占先 } P_1 = 4p^3q^2$$

$$\text{状态 2: 平分 } P_2 = 6p^2q^2$$

$$\text{状态 3: B 占先 } P_3 = 4p^2q^3$$

状态 4: B 赢 $P_4 = q^4 + 4q^4 p$

其中状态 0 和状态 4 是两个吸收壁，因此初始概率分布为

$$p(0) = [p^4 + 4p^4 q, 4p^3 q^2, 6p^2 q^2, 4p^2 q^3, q^4 + 4q^4 p]$$

该随机游动的转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

到此，网球比赛的输赢问题已经被我们转化成了类似赌徒输光的问题，所不同的是
一般讨论赌徒输光时我们认为赌徒具有初始资金 a 的初始概率为 1，而我们这里“赌徒”
可能有各种各样的“初始资金”，即各状态的初始概率都不为 0。

定义 $f_{k,0}$ 为从状态 k 最终回到状态 0 的吸收概率，结合以前关于赌徒输光的结论可知：

当 $p \neq q$ 时(我们不讨论当 $p = q$ 时的概率，因为根据对称性，这样的两个选手在本规则
中赢下比赛的概率肯定相等)

I) 确定 $f_{k,0}$

根据全概公式(吸收概率方程组)，有：

$$f_{k,0} = qf_{k+1,0} + pf_{k-1,0}$$

这是一个差分方程，其边界条件为：

$$f_{0,0} = 1$$

$$f_{4,0} = 0$$

改写差分方程为：

$$(q + p)f_{k,0} = qf_{k+1,0} + pf_{k-1,0}$$

$$f_{k,0} - f_{k+1,0} = \left(\frac{p}{q}\right)(f_{k-1,0} - f_{k,0})$$

根据边界条件，并迭代上式，可得：

$$f_{0,0} - f_{4,0} = 1 = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^4}{1 - \frac{p}{q}} (f_{0,0} - f_{1,0})$$

$$f_{k,0} - f_{4,0} = f_{k,0} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^k - \left(\frac{p}{q}\right)^4}{1 - \frac{p}{q}} (f_{0,0} - f_{1,0})$$

结合上述两式，可解得：

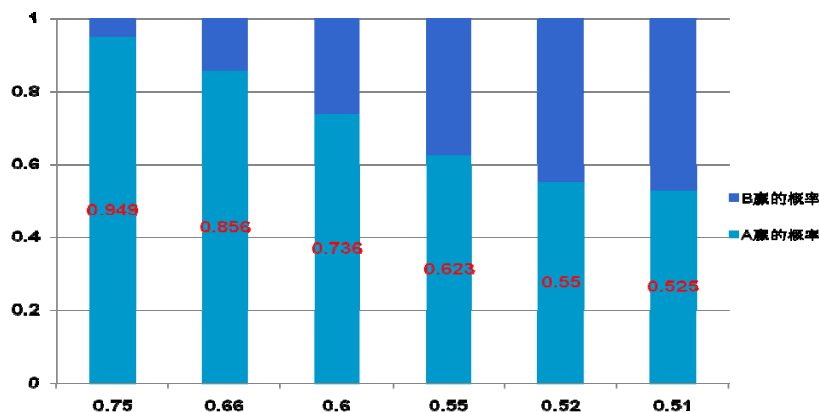
$$f_{k,0} = \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^k - \left(\frac{p}{q}\right)^4}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^4} = \frac{1 - (q/p)^{4-k}}{1 - (q/p)^4}$$

II) 选手 A 赢得一局比赛的概率

$$p_g = P\{\text{选手A赢一局}\} = \sum_{k=0}^4 p_k f_{k,0} = \frac{\sum_{k=0}^4 p_k [1 - (q/p)^{4-k}]}{1 - (q/p)^4} = \frac{1 - \sum_{k=0}^4 p_k (q/p)^{4-k}}{1 - (q/p)^4}$$

选手实力之比与赢下一局比赛的概率的关系的具体数值分析，：

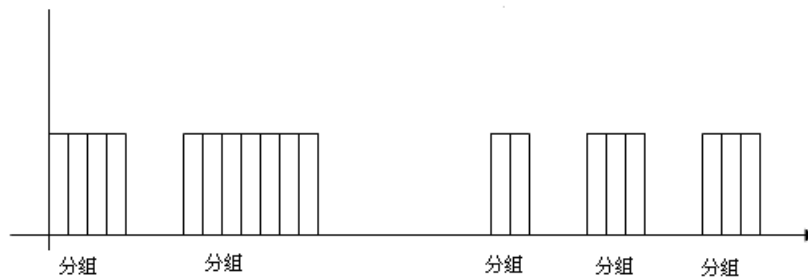
选手技术		赢一局的概率	
p	q	Pg	1-Pg
0.75	0.25	0.949	0.051
0.66	0.34	0.856	0.144
0.6	0.4	0.736	0.264
0.55	0.45	0.623	0.377
0.52	0.48	0.55	0.45
0.51	0.49	0.525	0.475



从上表中可以看出，当选手的实力相差悬殊时，例如选手 A 赢一球的概率是 0.75，而选手 B 赢一球的概率是 0.25，那么选手 A 拿下一局比赛的概率几乎接近 1，因此选手 A 可以轻松的取得整个比赛的胜利；而当选手 A 与选手 B 实力接近，例如选手 A 赢一球的概率是 0.51 时，选手 A 拿下一局比赛的概率只是 0.525。因此网球比赛在局的规则基础上又设置了盘和场的规则，如果再分析盘和场的规则可以看到，通过盘和场的规则设置，相当于“放大”了选手 A 在一局比赛里赢下的概率。即使 A 的实力只是略胜于 B，A 在最终战胜 B 的可能性也很大。

对完整的分析感兴趣的同学可参考帕普里斯《概率、随机变量与随机过程》（第四版）P607 页例 15-26。

例 3：分组数据 on-off 信源



设有一个时隙化的 on-off 信源。信源处于 on 状态时，它将以概率 P_{on} 继续发送分组，以概率 $(1 - P_{on})$ 结束发送；信源处于 off 状态时，它将以概率 $(1 - P_{off})$ 开始发送分组，以概率 P_{off} 继续停止发送。

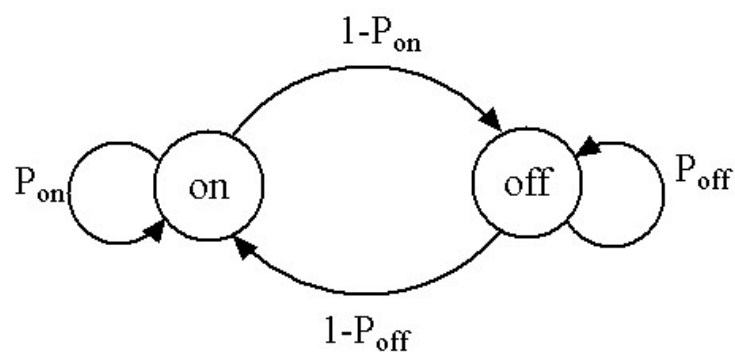
- (1) 求它的渐进稳态分布
- (2) 求发送分组长度的分布
- (3) 求发送间歇长度的分布
- (4) 求发送的平均分组长度、平均间歇长度

解：第一步：确定状态空间

设 on 状态记作 0，off 状态时记作 1，

第二步：确定转移概率矩阵和状态转换图

绘出系统的状态转换图是：



系统的一步转移概率矩阵是：

$$P = \begin{bmatrix} P_{on} & 1 - P_{on} \\ 1 - P_{off} & P_{off} \end{bmatrix}$$

(1) 求稳态分布

第三步：列稳态方程并求解

设 $w_{on}(n), w_{off}(n)$ 是时刻 n 系统处于 on 状态、off 状态的概率。

可以得到稳态的状态方程，

$$\begin{pmatrix} w_{on}(n) \\ w_{off}(n) \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} w_{on}(n) \\ w_{off}(n) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} p_{on} & (1-p_{on}) \\ (1-p_{off}) & p_{off} \end{pmatrix}$$

$$w_{on}(n) = w_{on}(n) \cdot p_{on} + w_{off}(n) \cdot (1-p_{off})$$

$$w_{off}(n) = w_{on}(n) \cdot (1-p_{on}) + w_{off}(n) \cdot p_{off}$$

有归一化条件为：

$$w_{on}(n) + w_{off}(n) = 1$$

由此得到稳态概率分布：

$$w_{off}(n) = \frac{1-p_{on}}{2-p_{off}-p_{on}}$$

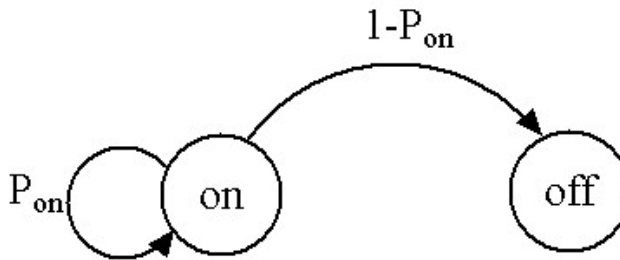
$$w_{on}(n) = \frac{1-p_{off}}{2-p_{off}-p_{on}}$$

(2) 确定发送分组长度的分布

即：求 on 状态持续时间的分布

研究发送分组长度的分布，就是研究从 on 状态到 off 状态的转移时间的分布；

可以假设 on 状态是一个非常返态，off 状态是一个吸收态，通过研究从 on 状态到达 off 吸收态的吸收时间的概率分布，得到发送分组长度的分布。



假设系统的初态处于 on 状态，经过 1 步首次到达 off 状态的概率是，

$$p_{on \rightarrow off}(1) = (1-p_{on})$$

经过 2 步首次到达 off 状态的概率是

$$p_{on \rightarrow off}(2) = p_{on}(1-p_{on})$$

... ...

以此类推，经过 n 步首次到达 off 状态的概率是

$$p_{on \rightarrow off}(n) = p_{on}^{n-1}(1 - p_{on})$$

此即为发送分组长度为 n 的概率。

也可以通过求发送长度分布概率的母函数求解：

从 on 状态到达 off 状态的概率母函数可以记作 $p_{on \rightarrow off}(s)$ 。

相应概率母函数方程为：

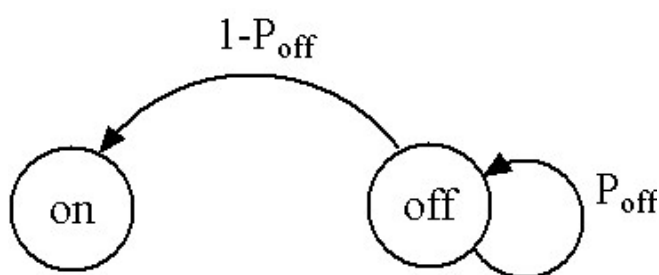
$$\begin{aligned} P_{off \rightarrow off}(s) &= 1 \\ P_{on \rightarrow off}(s) &= (1 - p_{on})s \cdot P_{off \rightarrow off}(s) + p_{on}s \cdot P_{on \rightarrow off}(s) \\ P_{on \rightarrow off}(s) &= (1 - p_{on})s + p_{on}s \cdot P_{on \rightarrow off}(s) \\ P_{on \rightarrow off}(s) &= \frac{(1 - p_{on})s}{1 - p_{on}s} \\ &= \left[1 + p_{on}s + p_{on}^2s^2 + p_{on}^3s^3 + \dots \right] (1 - p_{on})s \end{aligned}$$

在概率母函数记作 $p_{on \rightarrow off}(s)$ 的级数展开式中， s 的 n 次幂的系数就是经过 n 步到达吸收态的概率。

(3) 确定间歇长度的分布

即：求 off 状态持续时间的分布，通过求间歇长度分布概率的母函数求解

研究间歇长度长度的分布，应该假设 off 状态是一个非常返态，on 状态是一个吸收态，就是研究从 off 状态到 on 状态的随机过程。研究从 off 状态到达 on 吸收态的概率分布。



假设系统的初态处于 off 状态，

经过 1 步首次到达 on 状态的概率是，

$$p_{off \rightarrow on}(1) = (1 - p_{off})$$

经过 2 步首次到达 on 状态的概率是

$$p_{off \rightarrow on}(2) = p_{off}(1 - p_{off})$$

$$\dots \qquad \dots$$

以此类推，经过 n 步首次到达 on 状态的概率是

$$p_{off \rightarrow on}(n) = p_{off}^{n-1}(1 - p_{off})$$

此即为间歇长度为 n 的概率。

从 off 状态到达 on 状态的概率母函数记作 $p_{off \rightarrow on}(s)$ 。

相应的概率母函数方程为：

$$P_{on \rightarrow on}(s) = 1$$

$$P_{off \rightarrow on}(s) = (1 - p_{off})s \cdot P_{on \rightarrow on}(s) + p_{off}s \cdot P_{off \rightarrow on}(s)$$

$$P_{off \rightarrow on}(s) = (1 - p_{off})s + p_{off}s \cdot P_{off \rightarrow on}(s)$$

$$P_{off \rightarrow on}(s) = \frac{(1 - p_{off})s}{1 - p_{off}s}$$

$$= [1 + p_{off}s + p_{off}^2s^2 + p_{off}^3s^3 + \dots](1 - p_{off})s$$

在概率母函数记作 $p_{off \rightarrow on}(s)$ 的级数展开式中， s 的 n 次幂的系数就是经过 n 步到达吸收态的概率。

(4)：确定发送和间歇的平均时间

即：求 on 状态和 off 状态的平均持续时间

求平均时间的表达式为

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_n s^{n-1} \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} P(s) \Big|_{s=1}$$

则发送时间和间歇时间的平均长度是

$$\begin{aligned}
T_{off \rightarrow on} &= \frac{d}{ds} P_{off \rightarrow on}(s) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{(1-p_{off})s}{1-p_{off}s} \right] \Big|_{s=1} \\
&= \left[\frac{(1-p_{off})(1-p_{off}s) - (1-p_{off})s(-p_{off})}{(1-p_{off}s)^2} \right] \Big|_{s=1} \\
&= \frac{1-p_{off} - p_{off}s + p_{off}^2s + p_{off} \cdot s - p_{off}^2s}{(1-p_{off} \cdot s)^2} \Big|_{s=1} \\
&= \frac{1}{1-p_{off}} \\
T_{on \rightarrow off} &= \frac{d}{ds} P_{on \rightarrow off}(s) \Big|_{s=1} = \frac{1}{1-p_{on}}
\end{aligned}$$

总结

确定一步转移概率、状态转移图、求稳态分布。

确定到达某个吸收状态过渡时间的概率分布、过渡时间概率分布的母函数、期望。

例 4 同步检测系统分析

（通信系统同步寿命、非同步滞留时间分析）

一个通信系统进行正常工作时，本地接收机应该处于和接收信号相互同步的状态；当本地接收机处于和接收信号相互失步的状态时，通信系统应该进行搜索同步的工作。因此通信系统应该随时监测本地接收机是否和接收信号相互同步，以便同步时维持同步保持正常工作，失步时及时进入搜索状态。

同步监测机制：当接收机工作而接收机和接收信号同步时，应该尽力维持正常工作，保持长的同步工作寿命；当接收机工作而接收机和接收信号失步时，应该尽快发现失步，保证短的失步滞留时间。

假设通信系统工作时，系统状态记为 0，通信系统搜索时，系统状态记为 1；接收机和接收信号同步时记作 Syn 状态，接收机和接收信号失步时记作 Asyn 状态。

接收机和接收信号同步 Syn 状态时，系统应该尽力保持在 0 状态；

接收机和接收信号失步 Asyn 状态时，系统应该尽快离开 0 状态。

假设通信系统都有同步电路，它以周期 T 不断地检测它的状态，如果处于理想无噪声的同步状态，则输出一个正比与信号幅度的电平 a，如果处于非同步状态，则输出零电平。

但是系统中存在均值为零、方差为 σ^2 加性白高斯噪声，在同步和非同步时输出电平 r 的

分布分别是,

$$f_{syn}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right),$$

$$f_{Asyn}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

同步电路设定一个门限, 输出电平高于门限被判作同步, 输出电平低于门限被判作失步。

接收机和接收信号同步 Syn 状态时, 判定系统处于同步的概率是

$$p_{0 \rightarrow 0, Syn} = 1 - \int_0^{Th} f_{Syn}(r) dr$$

接收机和接收信号失步 Asyn 状态时, 判定系统处于同步的概率是

$$p_{0 \rightarrow 0, Asyn} = 1 - \int_0^{Th} f_{Asyn}(r) dr$$

(1) 同步寿命问题

试考虑通信系统在起始时刻同步工作的同步保护过程。

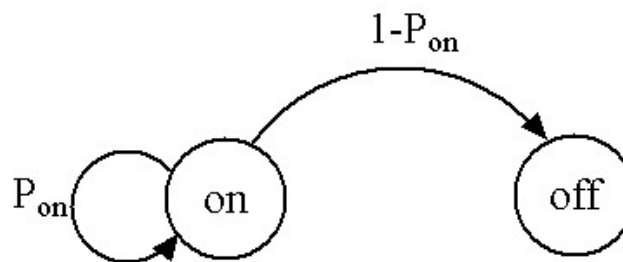
在起始时刻, 系统处于工作状态 0, 而且接收机和接收信号同步 Syn 状态。如果它的同步检测电路输出电平高于门限, 它就将留在工作状态 0, 维持系统的工作状态不变; 如果它的检测电路输出电平低于门限, 它将离开工作状态 0 进入搜索状态 1, 而失去同步。

画出它的状态转换图, 确定系统从状态 0 到状态 1 所用时间的概率分布, 系统平均工作寿命 (同步时在状态 0 的时间)。

同步寿命问题的状态空间为{0,1}

整个过程中, 接收机和接收信号是相互同步 Syn 的状态

状态转换图如下



则从 0 状态到达 1 状态的概率母函数可以记作 $p_{0 \rightarrow 1, Syn}(s)$ 。类似于例 1，有

$$\begin{aligned} P_{0 \rightarrow 1, Syn}(s) &= \frac{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn})s}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn} \cdot s)} \\ &= \left[1 + p_{0 \rightarrow 0, Syn}s + p_{0 \rightarrow 0, Syn}^2 s^2 + p_{0 \rightarrow 0, Syn}^3 s^3 + \cdots \right] (1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn})s \end{aligned}$$

则发送时间和间歇时间的平均长度是

$$\begin{aligned} T_{0 \rightarrow 1, Syn} &= \frac{d}{ds} P_{0 \rightarrow 1, Syn}(s) \Big|_{s=1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn})s}{1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn}s} \right] \Big|_{s=1} \\ &= \frac{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn})(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn}s) - (1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn})s(-p_{0 \rightarrow 0, Syn})}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn} \cdot s)^2} \Big|_{s=1} \\ &= \frac{1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn} - p_{0 \rightarrow 0, Syn}s + p_{0 \rightarrow 0, Syn}^2 \cdot s + p_{0 \rightarrow 0, Syn}s - p_{0 \rightarrow 0, Syn}^2 \cdot s}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn} \cdot s)^2} \Big|_{s=1} \\ &= \frac{1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn}}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn} \cdot s)^2} \Big|_{s=1} \\ &= \frac{1}{1 - p_{0 \rightarrow 0, Syn}} \end{aligned}$$

(2) 失步滞留问题

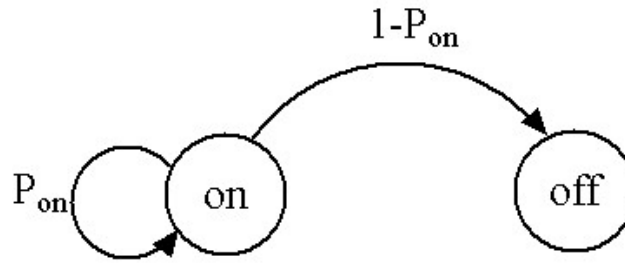
试考虑通信系统在起始时刻失步工作的假锁滞留过程。

在起始时刻，系统处于假锁工作状态 0，而且接收机和接收信号同步 Asyn 状态。如果它的同步检测电路输出电平高于门限，它就将留在工作状态 0，维持系统的假锁工作状态不变；如果它的检测电路输出电平低于门限，它将进入离开工作状态 0 进入搜索状态 1，而搜索同步。

画出它的状态转换图，确定系统从状态 0 到状态 1 所用时间的概率分布，系统平均工作寿命（同步时在状态 0 的时间）。

假锁滞留问题的状态空间为 {0,1}

整个过程中，接收机和接收信号是相互同步 Asyn 的状态
状态转换图如下



则从 0 状态到达 1 状态的概率母函数可以记作 $p_{0 \rightarrow 1, Asyn}(s)$ 。类似于例 1，有

$$\begin{aligned}
 P_{0 \rightarrow 1, Asyn}(s) &= \frac{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})s}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn} \cdot s)} \\
 &= \left[1 + p_{0 \rightarrow 0, Asyn}s + p_{0 \rightarrow 0, Asyn}^2 s^2 + p_{0 \rightarrow 0, Asyn}^3 s^3 + \dots \right] (1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})s
 \end{aligned}$$

则发送时间和间歇时间的平均长度是

$$\begin{aligned}
 T_{0 \rightarrow 1, Asyn} &= \left. \frac{d}{ds} P_{0 \rightarrow 1, Asyn}(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} \left[\frac{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})s}{1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn}s} \right] \right|_{s=1} \\
 &= \left. \frac{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn}s) - (1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})s(-p_{0 \rightarrow 0, Asyn})}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})^2} \right|_{s=1} \\
 &= \left. \frac{1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn} - p_{0 \rightarrow 0, Asyn}s + p_{0 \rightarrow 0, Asyn}^2 \cdot s + p_{0 \rightarrow 0, Asyn}s - p_{0 \rightarrow 0, Asyn}^2 \cdot s}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})^2} \right|_{s=1} \\
 &= \left. \frac{1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn}}{(1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn})^2} \right|_{s=1} \\
 &= \frac{1}{1 - p_{0 \rightarrow 0, Asyn}}
 \end{aligned}$$

确定一步转移概率、状态转移图。确定到达吸收状态的概率分布、到达吸收状态概率分布的母函数、到达吸收状态的期望和方差。

(3) 改进同步步监测方法后的同步寿命问题和失步滞留问题

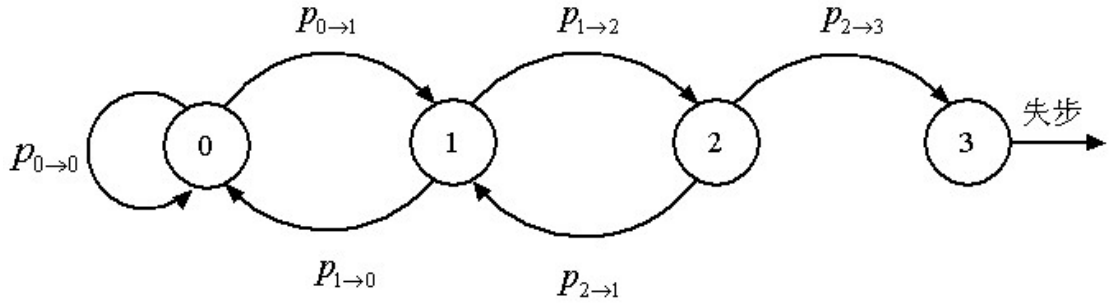
分别考虑通信系统在起始时刻同步工作的和失步工作的情形

如果问题 1 的同步电路设置有 00, 01, 02, 1 四个状态。仍然考虑通信系统在起始时刻

处于工作状态 0。如果它的检测电路输出电平高于门限，它就将进入低一序号的工作状态，从 02 到 01，从 01 到 00，从 00 到 00；如果它的检测电路输出电平低于门限，它将进入高一序号的工作状态，从 00 到 01，从 01 到 02，从 02 到 1；系统在状态 00，01，02 时，它维持系统的正常工作状态不变，系统进入搜索状态 1，它就启动搜索同步，离开原来的工作状态。

画出它的状态转换图，确定系统从状态 00 到状态 1 所用时间的概率分布，系统平均工作寿命（接收机和接收信号同步时，在状态 00，01，02 的时间），以及系统的失步的滞留时间（接收机和接收信号失步时，在状态 00，01，02 的时间）。

此题的状态空间为{00,01,02,1}，根据题意可以画出系统的状态转换图，



接收机和接收信号同步时，系统的转移概率

$$p_{00 \rightarrow 01} = p_{01 \rightarrow 02} = p_{02 \rightarrow 1} = \int_0^{T_h} f_{syn}(r) dr$$

$$p_{00 \rightarrow 00} = p_{01 \rightarrow 00} = p_{02 \rightarrow 01} = \int_{T_h}^{\infty} f_{syn}(r) dr$$

确定非同步时，系统的转移概率

$$p_{00 \rightarrow 01} = p_{01 \rightarrow 02} = p_{02 \rightarrow 1} = \int_0^{T_h} f_{Asyn}(r) dr$$

$$p_{00 \rightarrow 00} = p_{01 \rightarrow 00} = p_{02 \rightarrow 01} = \int_{T_h}^{\infty} f_{Asyn}(r) dr$$

确定系统从状态 0 到状态 3 所用时间的概率母函数、以及概率分布。

设状态 0 到达吸收态 1 的概率母函数是 $P_{00}(s)$ ，则有方程式

$$P_{00}(s) = p_{00 \rightarrow 01}s \cdot P_{01}(s) + p_{00 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \quad (2-1-1)$$

$$P_{01}(s) = p_{01 \rightarrow 02}s \cdot P_{02}(s) + p_{01 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \quad (2-1-2)$$

$$P_{02}(s) = p_{02 \rightarrow 1}s \cdot P_1(s) + p_{02 \rightarrow 01}s \cdot P_{01}(s) \quad (2-1-3)$$

$$P_1(s) = 1 \quad (2-1-4)$$

从方程组中解出概率母函数 $P_{00}(s)$ 。

将 $P_1(s)=1$ 代入方程，得到 $P_{02}(s)$

$$P_{02}(s) = p_{02 \rightarrow 1}s + p_{02 \rightarrow 01}s \cdot P_{01}(s)$$

接着得到 $P_{01}(s)$

$$\begin{aligned} P_{01}(s) &= p_{01 \rightarrow 02}s \cdot [p_{02 \rightarrow 1}s + p_{02 \rightarrow 01}s \cdot P_1(s)] + p_{01 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \\ &= p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 1}s + p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s \cdot P_{01}(s) + p_{01 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \\ P_{01}(s) &= \frac{p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 1}s + p_{01 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s)}{1 - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s} \end{aligned}$$

再得到 $P_{00}(s)$

$$\begin{aligned} P_{00}(s) &= p_{00 \rightarrow 01}s \cdot P_{01}(s) + p_{00 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \\ &= p_{00 \rightarrow 01}s \cdot \frac{p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 1}s + p_{01 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s)}{1 - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s} + p_{00 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \\ P_{00}(s) &= \frac{p_{00 \rightarrow 01}s \cdot p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 1}s}{1 - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s} + \frac{p_{00 \rightarrow 01}s \cdot p_{01 \rightarrow 00}s}{1 - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s} P_{00}(s) + p_{00 \rightarrow 00}s \cdot P_{00}(s) \\ P_{00}(s) &= \frac{\frac{p_{00 \rightarrow 01}s \cdot p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 1}s}{1 - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s}}{1 - p_{00 \rightarrow 00}s - \frac{p_{00 \rightarrow 01}s \cdot p_{01 \rightarrow 00}s}{1 - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s}} \end{aligned}$$

整理后得到概率母函数 $P_{00}(s)$ 的解，

$$P_{00}(s) = \frac{p_{00 \rightarrow 01}s \cdot p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 1}s}{\left[1 - p_{00 \rightarrow 00}s - p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s - p_{00 \rightarrow 01}s \cdot p_{01 \rightarrow 00}s + p_{00 \rightarrow 00}s \cdot p_{01 \rightarrow 02}s \cdot p_{02 \rightarrow 01}s\right]}$$

将概率母函数 $P_{00}(s)$ 展开成 s 的幂级数，相应 s 的 n 次幂的系数是经过 n 步到达吸

收态的概率。

虽然同步时的系统和非同步时的系统的概率母函数 $P_{00}(s)$ 的表达式相同，但是具体的状态转移概率 $p_{0 \rightarrow 0}$ 、 $p_{0 \rightarrow 1}$... 并不相同，故有不同的结果。

确定同步时系统平均工作寿命

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} P_0(s) \bigg|_{s=1}$$

确定非同步时系统平均滞留时间

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} P_0(s) \bigg|_{s=1}$$

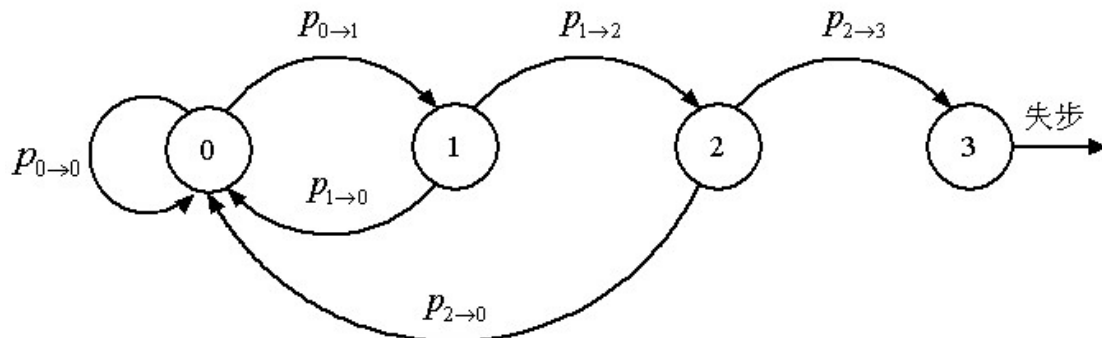
确定一步转移概率、状态转移图。确定到达吸收状态的概率分布、到达吸收状态概率分布的母函数、到达吸收状态的期望。

(4) 改进同步监测方法后的同步寿命问题和失步滞留问题

如果上题的同步电路设置有 00, 01, 02, 1 四个状态。仍然考虑通信系统在起始时刻处于工作状态 0。如果它的检测电路输出电平高于门限，它就将进入工作状态 0，从 00 到 00，从 01 到 00，从 02 到 00；如果它的检测电路输出电平低于门限，它将进入高一序号的工作状态，从 00 到 01，从 01 到 02，从 02 到 1；系统在状态 0, 1, 2 时，它维持系统的工作状态不变，系统进入搜索状态 1，它就启动搜索同步，离开原来的工作状态。试分别考虑通信系统在起始时刻同步工作的和失步工作的情形，画出它的状态转换图，确定系统从状态 0 到状态 3 所用时间的概率分布，系统平均工作寿命（同步时在状态 00, 01, 02 的时间），以及系统的失步的滞留时间（失步时在状态 00, 01, 02 的时间）。

解第四问：

此题的状态空间为 {00, 01, 02, 1}，根据题意画出系统的状态转换图，



确定同步时，系统的转移概率

$$p_{00 \rightarrow 01} = p_{01 \rightarrow 02} = p_{02 \rightarrow 1} = \int_0^{Th} f_{syn}(r) dr$$

$$p_{00 \rightarrow 00} = p_{01 \rightarrow 00} = p_{02 \rightarrow 00} = \int_{Th}^{\infty} f_{syn}(r) dr$$

确定非同步时，系统的转移概率

$$p_{00 \rightarrow 01} = p_{01 \rightarrow 02} = p_{02 \rightarrow 1} = \int_0^{Th} f_{Asyn}(r) dr$$

$$p_{00 \rightarrow 00} = p_{01 \rightarrow 00} = p_{02 \rightarrow 00} = \int_{Th}^{\infty} f_{Asyn}(r) dr$$

确定系统从状态 0 到状态 3 所用时间的概率母函数、以及概率分布。

设状态 0 到达吸收态 3 的概率母函数是 $P_{00}(s)$ ，则有方程式

$$P_{00}(s) = p_{00 \rightarrow 01} s \cdot P_{01}(s) + p_{00 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s)$$

$$P_{01}(s) = p_{01 \rightarrow 02} s \cdot P_{02}(s) + p_{01 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s)$$

$$P_{02}(s) = p_{02 \rightarrow 1} s \cdot P_1(s) + p_{02 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s)$$

$$P_1(s) = 1$$

从方程组中解出概率母函数 $P_{00}(s)$ 。

将 $P_1(s) = 1$ 代入方程，得到 $P_{02}(s)$

$$P_{02}(s) = p_{02 \rightarrow 03} s + p_{02 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s)$$

接着得到 $P_{01}(s)$

$$\begin{aligned} P_{01}(s) &= p_{01 \rightarrow 02} s \cdot [p_{02 \rightarrow 1} s + p_{02 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s)] + p_{01 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s) \\ &= p_{01 \rightarrow 02} s \cdot p_{02 \rightarrow 1} s + [p_{01 \rightarrow 02} s \cdot p_{02 \rightarrow 00} s + p_{01 \rightarrow 00} s] \cdot P_{00}(s) \end{aligned}$$

再得到 $P_{00}(s)$

$$\begin{aligned} P_{00}(s) &= p_{00 \rightarrow 01} s \cdot [p_{01 \rightarrow 02} s \cdot p_{02 \rightarrow 1} s + (p_{01 \rightarrow 02} s \cdot p_{02 \rightarrow 00} s + p_{01 \rightarrow 00} s) \cdot P_{00}(s)] \\ &\quad + p_{00 \rightarrow 00} s \cdot P_{00}(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{00}(s) &= p_{00 \rightarrow 01} s \cdot p_{01 \rightarrow 02} s \cdot p_{02 \rightarrow 1} s \\ &\quad + [p_{00 \rightarrow 01} s \cdot p_{01 \rightarrow 02} s \cdot p_{02 \rightarrow 00} s + p_{00 \rightarrow 01} s \cdot p_{01 \rightarrow 00} s + p_{00 \rightarrow 00} s] \cdot P_{00}(s) \end{aligned}$$

整理后得到概率母函数 $P_{00}(s)$ 的解，

$$P_{00}(s) = \frac{P_{00 \rightarrow 01} s \quad P_{01 \rightarrow 02} s \quad P_{02 \rightarrow 1} s}{1 - P_{00 \rightarrow 00} s - P_{00 \rightarrow 01} s \quad P_{01 \rightarrow 00} s - P_{00 \rightarrow 01} s \quad P_{01 \rightarrow 02} s \quad P_{02 \rightarrow 00} s}$$

将概率母函数 $P_0(s)$ 展开成 s 的幂级数，相应 s 的 n 次幂的系数是经过 n 步到达吸收态的概率。

确定同步时系统平均工作寿命

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} P_0(s) \bigg|_{s=1}$$

确定非同步时系统平均滞留时间

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot n = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n s^{n-1} \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} \sum_{n=1}^{\infty} p_n s^n \bigg|_{s=1} = \frac{d}{ds} P_0(s) \bigg|_{s=1}$$

确定一步转移概率、状态转移图。确定到达吸收状态的概率分布、到达吸收状态概率分布的母函数、到达吸收状态的期望值。

例 5 一阶数字锁相环模型 1 (稳态特性分布)

数字锁相环有 $\{-M, 1-M, 2-M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1, M\}$ 等 $2M+1$ 各状态。每单位时间完成一次相位检测, 检测数字锁相环的相位是超前还是滞后。鉴相器的输出与相位差 θ 有关, 且受到系统加性白高斯噪声 n 的影响。如果鉴相器的输出 v 是负值, 环路振荡器的相位超前, 则将环路的数字振荡器的相位向后调整; 如果鉴相器的输出 v 是正值, 环路振荡器的相位滞后, 则将环路的数字振荡器的相位向前调整。

求数字锁相环的稳态概率分布。

解:

假设, 锁相环的状态是 $\{-M, 1-M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M-1, M\}$, 它们之间只能进行相邻状态的转移, 而且相邻状态之间状态转移概率是确知的。

达到稳定状态后, 相应的状态转移方程是

$$\begin{aligned} w_{-M}(n) p_{-M \rightarrow 1-M} &= w_{1-M}(n) p'_{1-M \rightarrow -M} \\ w_{1-M}(n) p_{1-M \rightarrow 2-M} &= w_{2-M}(n) p'_{2-M \rightarrow 1-M} \\ &\dots \\ w_{-2}(n) p_{-2 \rightarrow -1} &= w_{-1}(n) p'_{-1 \rightarrow -2} \\ w_{-1}(n) p_{-1 \rightarrow 0} &= w_0(n) p'_{0 \rightarrow -1} \\ w_0(n) p'_{0 \rightarrow 1} &= w_1(n) p_{1 \rightarrow 0} \\ w_1(n) p'_{1 \rightarrow 2} &= w_2(n) p_{2 \rightarrow 1} \\ &\dots \\ w_{M-2}(n) p'_{M-2 \rightarrow M-1} &= w_{M-1}(n) p_{M-1 \rightarrow M-2} \\ w_{M-1}(n) p'_{M-1 \rightarrow M} &= w_M(n) p_{M \rightarrow M-1} \end{aligned}$$

相应的稳态概率的递推关系是

$$\begin{aligned} w_{-M}(n) &= w_{1-M}(n) \frac{p'_{1-M \rightarrow -M}}{p_{-M \rightarrow 1-M}} \\ w_{1-M}(n) &= w_{2-M}(n) \frac{p'_{2-M \rightarrow 1-M}}{p_{1-M \rightarrow 2-M}} \\ &\dots \end{aligned}$$

$$w_{-2}(n) = w_{-1}(n) \frac{p'_{-1 \rightarrow -2}}{p_{-2 \rightarrow -1}}$$

$$w_{-1}(n) = w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow -1}}{p_{-1 \rightarrow 0}}$$

$$w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow 1}}{p_{1 \rightarrow 0}} = w_1(n)$$

$$w_1(n) \frac{p'_{1 \rightarrow 2}}{p_{2 \rightarrow 1}} = w_2(n)$$

...

$$w_{M-2}(n) \frac{p'_{M-2 \rightarrow M-1}}{p_{M-1 \rightarrow M-2}} = w_{M-1}(n)$$

$$w_{M-1}(n) \frac{p'_{M-1 \rightarrow M}}{p_{M \rightarrow M-1}} = w_M(n)$$

即

$$w_{-M}(n) = w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow -1}}{p_{-1 \rightarrow 0}} \frac{p'_{-1 \rightarrow -2}}{p_{-2 \rightarrow -1}} \dots \frac{p'_{2-M \rightarrow 1-M}}{p_{1-M \rightarrow 2-M}} \frac{p'_{1-M \rightarrow -M}}{p_{-M \rightarrow 1-M}}$$

$$w_{1-M}(n) = w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow -1}}{p_{-1 \rightarrow 0}} \frac{p'_{-1 \rightarrow -2}}{p_{-2 \rightarrow -1}} \dots \frac{p'_{2-M \rightarrow 1-M}}{p_{1-M \rightarrow 2-M}}$$

...

$$w_{-2}(n) = w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow -1}}{p_{-1 \rightarrow 0}} \frac{p'_{-1 \rightarrow -2}}{p_{-2 \rightarrow -1}}$$

$$w_{-1}(n) = w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow -1}}{p_{-1 \rightarrow 0}}$$

$$w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow 1}}{p_{1 \rightarrow 0}} = w_1(n)$$

$$w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow 1}}{p_{1 \rightarrow 0}} \frac{p'_{1 \rightarrow 2}}{p_{2 \rightarrow 1}} = w_2(n)$$

...

$$w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow 1}}{p_{1 \rightarrow 0}} \frac{p'_{1 \rightarrow 2}}{p_{2 \rightarrow 1}} \dots \frac{p'_{M-2 \rightarrow M-1}}{p_{M-1 \rightarrow M-2}} = w_{M-1}(n)$$

$$w_0(n) \frac{p'_{0 \rightarrow 1}}{p_{1 \rightarrow 0}} \frac{p'_{1 \rightarrow 2}}{p_{2 \rightarrow 1}} \dots \frac{p'_{M-2 \rightarrow M-1}}{p_{M-1 \rightarrow M-2}} \frac{p'_{M-1 \rightarrow M}}{p_{M \rightarrow M-1}} = w_M(n)$$

再加上概率的归一化条件，则可以求出系统的稳态概率。

假设数字锁相环的状态转移概率如下

$$p_{ij} = \begin{cases} 1/2^{|i|+1}, & i \geq 0, j = i+1, \text{ or } i \leq 0, j = i-1 \\ 1-1/2^{|i|+1} & i \geq 0, j = i-1, \text{ or } i \leq 0, j = i+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

则，可以进一步给出相应的数值解。

确定状态转移图、确定稳态分布。

给定状态转移概率分布、确定稳态分布数值解。

例 6 一阶数字锁相环模型 2 (环路的寿命)

设有一个正弦信号振荡器 $V \sin(\omega t + \varphi)$ ，一个参考的正弦信号源 $A \cos \omega t$ ，和它们的鉴相器，鉴相器的输出是 $D = (VA/2) \sin \varphi$ 。振荡器周期地（经过周期 T ）检测它和参考信号的相位差，即鉴相器的输出 D 。如果 D 是正的，则调整它的相位滞后 π/M ，如果 D 是负的，则调整它的相位超前 π/M 。但是系统中存在均值为零、方差为的 σ^2 加性白高斯噪声 n ，鉴相器的输出是 $D + n$ 。

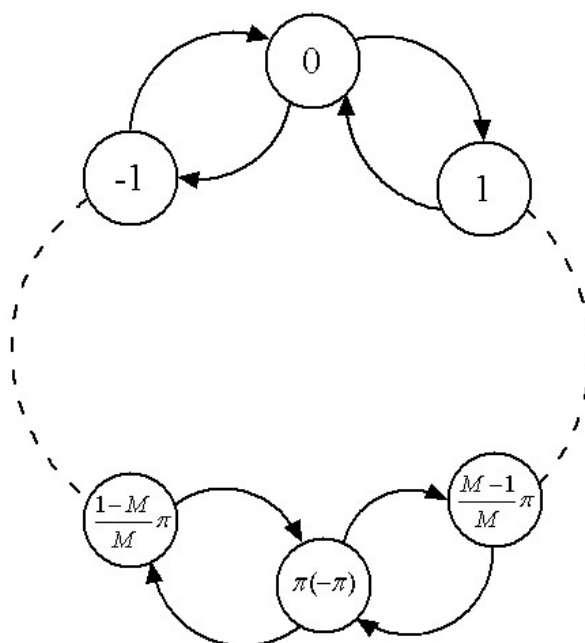
(1) 如果系统的起始相位差是 $\varphi = 0$ ，系统的状态集就是

$$-\pi, -\pi \frac{M-1}{M}, \dots, -\pi \frac{2}{M}, -\pi \frac{1}{M}, 0, \pi \frac{1}{M}, \pi \frac{2}{M}, \dots, \pi \frac{M-1}{M},$$

(1) 振荡器在各个状态下的状态转移概率

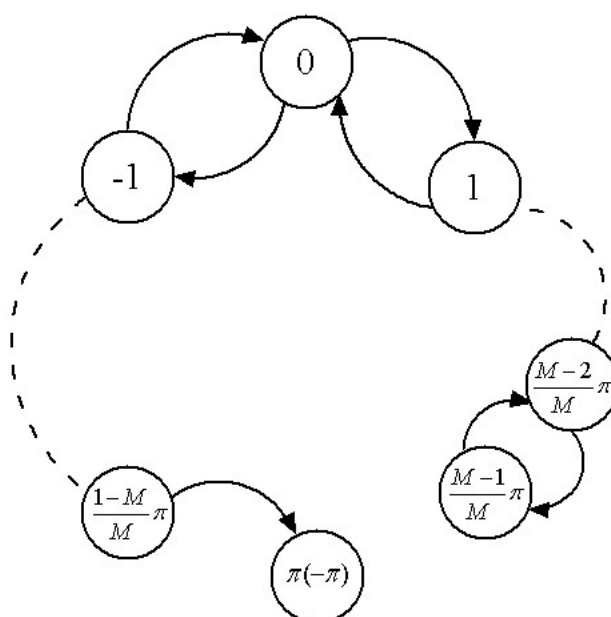
$$\begin{aligned} p_{i \rightarrow i-1} &= p_{-i \rightarrow 1-i} = \int_{-\infty}^{A \sin(i\pi/M)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ p_{i \rightarrow i+1} &= p_{-i \rightarrow -1-i} = 1 - \int_{-\infty}^{A \sin(i\pi/M)} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right] dt \\ p_{0 \rightarrow 1} &= p_{0 \rightarrow -1} = 1/2 \end{aligned}$$

确定一步转移概率、状态转移图。



将状态 $-\pi = \pi$, 改成吸收壁, 状态 $\pi \frac{M-1}{M}$, 改成反射壁。

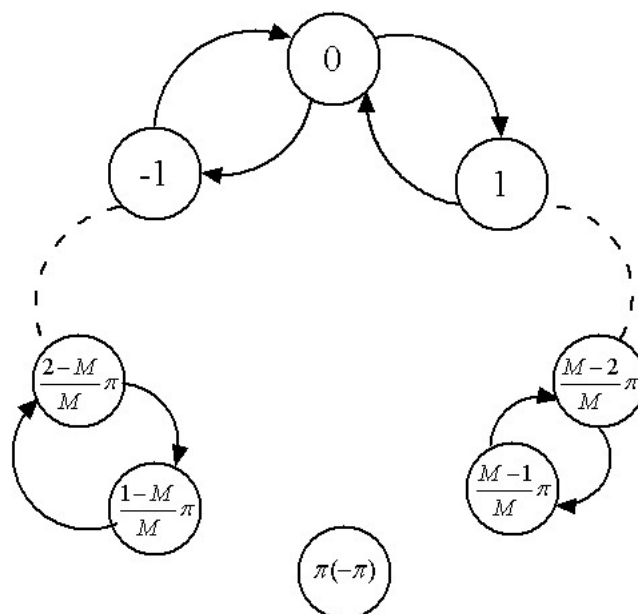
(2) 振荡器从状态 0 出发, 到达吸收态的概率分布, 以及相应的平均时间



将状态 $-\pi \frac{M-1}{M}, \pi \frac{M-1}{M}$, 改成反射壁。

(3) 振荡器在各个状态下的稳态概率

解:



给定状态转移概率分布、确定稳态分布数值解。

例 7 PN 码的捕获模型（平均捕获时间和捕获概率分布）

直接序列扩展频谱系统的 PN 码同步捕获电路，是由可调整时延的 PN 码发生器、以及相关器组成的。捕获电路的输入是要同步的 PN 码信号，它和本地 PN 码信号进行时间相关运算。如果它们是同步的，相关器的输出电平 r 正比于相关时间、以及接收信号的幅度，如果它们是不同步的，相关器的输出电平 r 等于零。但是系统中存在均值为零、方差为的 σ^2 加性白高斯噪声，在同步和非同步时输出电平 r 的分布分别是，

$$f_{syn}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + a^2}{2\sigma^2}\right\} \cdot I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right),$$

$$f_{Asyn}(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right\}。$$

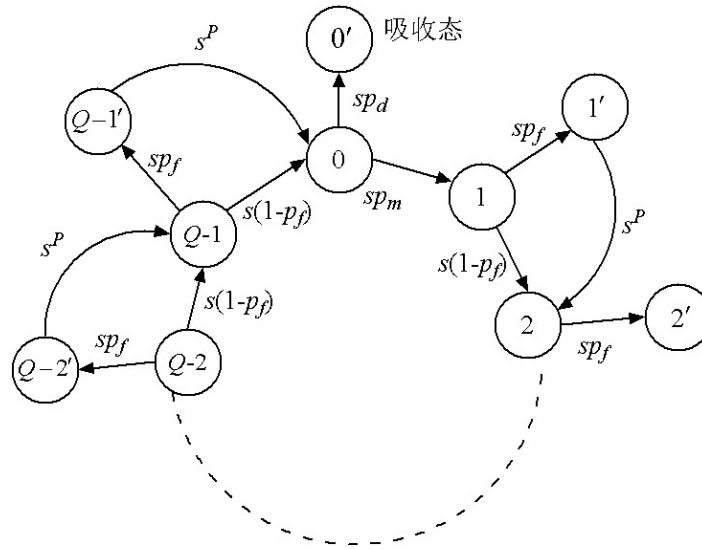
同步电路设定一个门限，输出电平高于门限被判作同步，输出电平低于门限被判作失步。本地 PN 码和接收参考信号 PN 码之间的相对时延共有 Q 个状态，其中状态 0 对应同步状态，它们之间的相对时延是 0；其他状态 $\{1, 2, 3, \dots, Q-1\}$ 是非同步状态，它们之间的相对时延大于一个 PN 码片的时间。对于每一个状态都有一个搜索状态和一个工作状态。捕获电路处于搜索状态，如果它的同步检测输出电平高于门限，它就转移到相应的工作状态；如果它的同步检测输出电平低于门限，它就转移到下一个搜索状态（从 0 到 1，从 1 到 2， \dots ，从 $Q-2$ 到 $Q-1$ ，从 $Q-1$ 到 0）。同步状态 0 的工作状态是一个吸收

态。其他非同步状态的工作状态是一个寿命是 P 的状态转移过程，最后转移到下一个搜索状态。

- (1) 试画出同步捕获电路的状态转移图，写出从任意一个搜索状态到达同步工作状态（吸收态）的概率分布或概率母函数。

解：

根据题意画出同步捕获电路的状态转移图，其中各个搜索状态用状态 $0, 1, 2, \dots, Q-2, Q-1$ 来表示，每个搜索态相应的工作态用 $0', 1', 2', \dots, Q-2', Q-1'$ 来表示。



从一个非同步的搜索状态到达下一个搜索状态的概率母函数是，

$$H_0(s) = H_w(s) + H_f(s)$$

其中 $H_w(s)$ 是从一个搜索态直接到下一个搜索态的概率母函数，它的表达式是

$$H_w(s) = (1 - p_f)s$$

而 $H_f(s)$ 是从一个搜索态经过虚警滞留时间 P 再到下一个搜索态的概率母函数，它的表达式是

$$H_f(s) = p_f s^{P+1}$$

其中 p_f 是非同步的搜索状态下的虚警概率， P 是虚警后滞留的时间。

$$p_f = \int_{Th}^{\infty} f_{Asyn}(r) dr$$

处于同步搜索状态 0 时，它到达吸收态的概率母函数是，

$$P_0(s) = H_d(s) + H_m(s) \cdot [H_0(s)]^{Q-1} P_0(s)$$

$$P_0(s) = H_d(s) / [1 - H_m(s) \cdot [H_0(s)]^{Q-1}]$$

其中 $H_d(s)$ 是从同步搜索态直接到同步工作状态的概率母函数，其表达式为

$$H_d(s) = p_d s$$

而 $H_m(s)$ 是从同步搜索态到下一个非同步搜索状态的概率母函数，其表达式为

$$H_m(s) = p_m s$$

其中 p_d 是同步的搜索状态下的检测概率， $p_m = 1 - p_d$ ， P 是同步的搜索状态下的漏报概率。

$$p_m = \int_0^{Th} f_{syn}(r) dr$$

$$p_d = \int_{Th}^{\infty} f_{syn}(r) dr$$

考虑从任意一个搜索状态到达同步工作状态（吸收态）的概率分布或概率母函数。

处于同步搜索状态 Q-1 时，它到达吸收态的概率母函数是，

$$\begin{aligned} P_{Q-1}(s) &= H_0(s) \cdot P_0(s) \\ &= H_0(s) \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z)) \end{aligned}$$

处于同步搜索状态 Q-2 时，它到达吸收态的概率母函数是，

$$P_{Q-2}(s) = [H_0(s)]^2 \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z))$$

处于同步搜索状态 q 时，它到达吸收态的概率母函数是，

$$P_q(s) = [H_0(s)]^{Q-q} \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z))$$

处于同步搜索状态 1 时，它到达吸收态的概率母函数是，

$$P_1(s) = [H_0(s)]^{Q-1} \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z))$$

考虑初始时刻在搜索状态呈随机分布，到达同步工作状态（吸收态）的概率分布或概率

母函数。

初始状态是均匀地分布在 Q 个搜索状态下，相应的概率母函数是，

$$\begin{aligned}
 P_{acq}(s) &= \sum_{q=0}^{Q-1} \frac{1}{Q} P_q(s) \\
 &= \sum_{q=1}^Q \frac{1}{Q} [H_0(s)]^{Q-q} \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z)) \\
 &= \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} [H_0(s)]^q \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z))
 \end{aligned}$$

$$P_{acq}(s) = \frac{1}{Q} \frac{H_d(s)}{1 - H_m(s) \cdot [H_0(s)]^{Q-1}} \frac{1 - [H_0(s)]^Q}{1 - [H_0(s)]}$$

考虑初始时刻在搜索状态呈随机分布，到达同步工作状态（吸收态）的平均捕获时间，

$$\begin{aligned}
 \bar{T}_{acq} &= \left. \frac{d}{ds} P_{acq}(s) \right|_{s=1} = \left. \frac{d}{ds} \left\{ \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} [H_0(s)]^q \cdot H_d(z) / (1 - H_m(z) \cdot H^{Q-1}(z)) \right\} \right|_{s=1} \\
 &= \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} q [H_0(s)]^{q-1} H'_0(s) \cdot H_d(s) / (1 - H_m(s) \cdot H_0^{Q-1}(s)) \\
 &\quad + \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} [H_0(s)]^q \cdot H'_d(s) / (1 - H_m(s) \cdot H_0^{Q-1}(s)) \\
 &\quad + \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} [H_0(s)]^q \cdot H_d(s) / (1 - H_m(s) \cdot H_0^{Q-1}(s))^2 \cdot \{ H'_m(s) \cdot H_0^{Q-1}(s) \\
 &\quad \quad H_m(s)(Q-1)H_0^{Q-2}(s)H'_0(s) \}
 \end{aligned}$$

考虑到 $H_0(s)|_{s=1} = 1$, $\{H_d(s) + H_m(s)\}_{s=1} = 1$

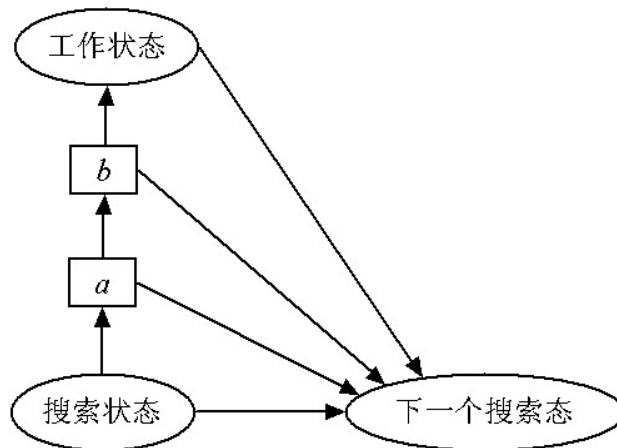
有

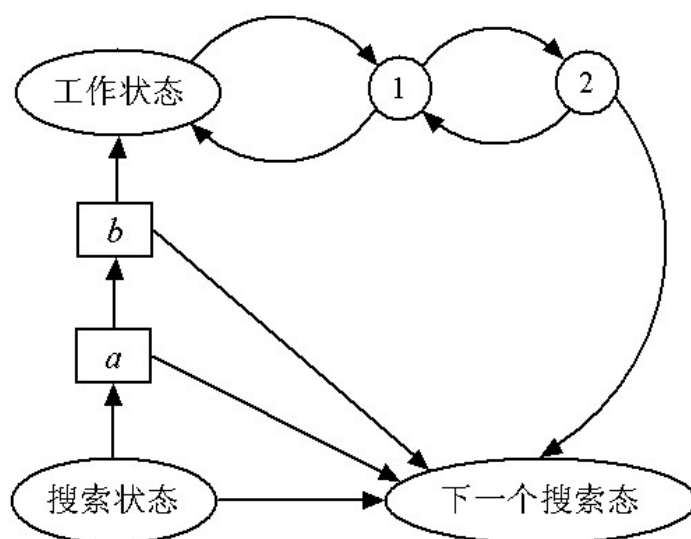
$$\begin{aligned}
T_{acq} &= \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} q H'_0(s) \cdot H_d(s) / (1 - H_m(s)) + \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \cdot H'_d(s) / (1 - H_m(s)) \\
&\quad + \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \cdot H_d(s) / (1 - H_m(s))^2 \cdot \{H'_m(s) + H_m(s)(Q-1)H'_0(s)\} \\
&= \frac{1}{Q} H'_0(s) \sum_{q=0}^{Q-1} q + \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \cdot H'_d(s) / (1 - H_m(s)) \\
&\quad + \frac{1}{Q} \sum_{q=0}^{Q-1} \cdot \{H'_m(s) + H_m(s)(Q-1)H'_0(s)\} / (1 - H_m(s)) \\
&= \frac{Q-1}{2} H'_0(s) + \{H'_d(s) + H'_m(s)\} / (1 - H_m(s)) \\
&\quad + H_m(s)(Q-1)H'_0(s) / (1 - H_m(s)) \\
&= \frac{Q-1}{2} H'_0(s)(1 + H_m(s)) / (1 - H_m(s)) + \{H'_d(s) + H'_m(s)\} / (1 - H_m(s))
\end{aligned}$$

(2) 如果非同步的工作状态都对应一个（例 2）所给出的非同步滞留和同步寿命的转移过程，试写出从任意一个搜索状态到达同步工作状态（吸收态）的概率分布。并考虑电路的初始状态是随机分布的，求出相应到达同步工作状态的概率分布，以及平均的捕获时间。

解：

应该修改 $H_w(s) = (1 - p_f)s$ $H_f(s) = p_f s^{P+1}$ 的表达式。





确定一步转移概率、状态转移图。确定到达吸收状态的概率分布、到达吸收状态概率分布的母函数、到达吸收状态的期望和方差。