马尔可夫过程 排队过程

1 排队过程的基本参数和问题

排队模型的一般描述：A/R/S/N

排队系统的基本参数

排队的基本问题

排队问题的李特公式

2．排队问题的分析方法

3. 排队问题的 Little 定律

4．排队问题举例：

例 1 排队问题 M/M/1/∞（无限队长）

(1) $\xi(t)$ 是一个参数连续状态离散的马尔可夫过程。

(2) 求解 Q 矩阵：

(3) 研究稳态 $t \to \infty$ 的状态概率分布

(4) 达到稳定状态后，系统中顾客的平均数 L，

(5) 达到稳定状态后，系统中排队等待顾客的平均值 L_Q，

(6) 达到稳定状态后，顾客在系统中的平均时间 W，

(7) 达到稳定状态后，顾客在系统中等待的平均时间 WQ：

(8) Little 定律：

M/M/1/∞ 排队模型 总结：

系统中平均的顾客数和平均延迟与负载的关系：

例 2 排队问题 M/M/1/N（有限队长）

例 3 顾客成批到达的排队问题

例 4 电话交换问题（M/M/N/N）

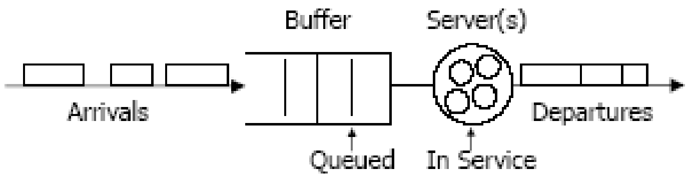
例 5 M/M/s/∞排队系统

例 6 队长为 k>s、s 个服务员的排队问题 M/M/s/k

例 7 机器维修问题

1 排队过程的基本参数和问题

排队模型的一般描述：A/R/S/N



排队系统的基本参数

A：顾客到达系统的规律（典型的是泊松到达率），
R：顾客在系统中接受服务的规律（典型的是负指数分布），
S：系统中服务人员的个数（典型的是一个服务员），
N：系统中排队队长的限制（典型的有限队长 N）。

排队的基本问题

在排队系统的平均顾客数 L，
在排队等候的平均顾客数 L_Q，
顾客在系统中平均花费的时间 W，
顾客在排队等候的平均时间 W_Q。

排队问题的李特公式

$$L = \lambda W\text{，}\ L_Q = \lambda W_Q$$

2．排队问题的分析方法

马尔可夫模型的排队问题，M/M/……

确定：

系统状态转换图，
Q 矩阵，
稳态的线性方程组，

得到：

稳态分布的递推关系和稳态解，

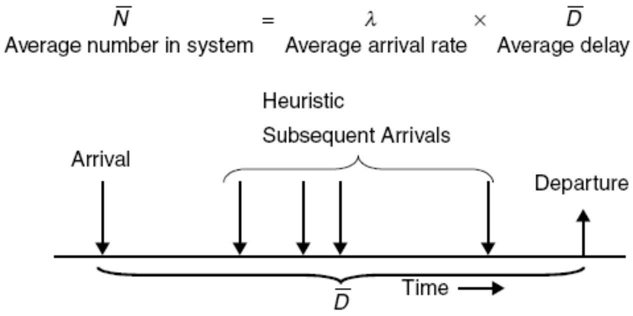
分析：

系统中的平均顾客数、平均队长、系统中的时间、平均等待时间、李特公式。

3．排队问题的 Little 定律

$$L = \lambda W\text{，}\ L_Q = \lambda W_Q$$

排队系统中普适性的定律，统计量服从的公式，对到达过程、服务时间分布、服务规则无特殊要求。



4. 排队问题举例：

M/M/1/∞、M/M/1/N、M/M/S、M/M/N/N、M/M/s/∞、M/M/s/k(k>s)

机器维修问题

例 1 排队问题 M/M/1/∞（无限队长）

设有一个服务台，到达服务台的顾客数是服从泊松分布的随机变量，即顾客流是泊松过程。单位时间到达服务台的平均人数为 λ 。服务台只有一个服务员，对顾客的服务时间是负指数分布的随机变量，平均服务时间是 1/μ。服务台空闲时间到达的顾客立刻得到服务，如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候，加入排队行列。

在 t 时刻服务台的顾客数组成一个生灭过程。求

（1）在排队系统的平均顾客数 L；

（2）在排队等候的平均顾客数 L_Q；

（3）顾客在系统中平均花费的时间 W；

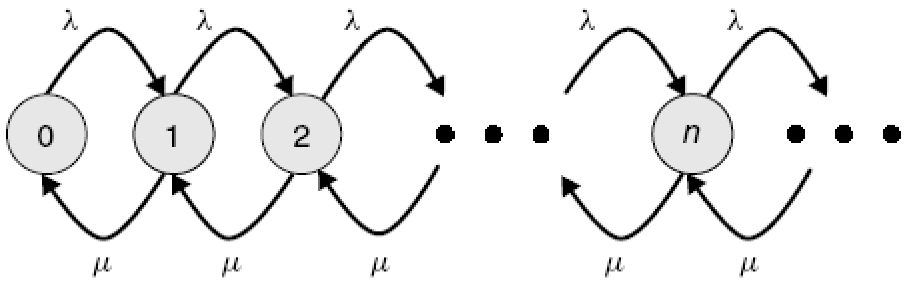
（4）顾客在排队等候的平均时间 W_Q。

解：

设 $\xi(t)$ 代表在 t 时刻系统内的顾客人数，则状态空间为 I：{0,1,2,3，⋯⋯，}。

(1) $\xi(t)$ 是一个参数连续状态离散的马尔可夫过程。

M/M/1/∞系统的状态转换图：



M/M/1/∞是一个生灭过程。

(2) 求解 Q 矩阵：

根据系统顾客到达规律和服务时间的分布

状态数增加表示有新的顾客到来，系统状态数增加的强度是 λ；

状态数减小表示有顾客接受服务完而离开系统，系统状态数减小的强度是 μ；

系统同时增加或减小两个和两个以上的顾客的概率是趋于 0 的。

Δt 时间内系统增加一个顾客的概率是：

$$P_{i,i+1}(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 0,1,2,\cdots$$

则：$q_{i,i+1} = \lim\limits_{\Delta t -> 0} \dfrac{P_{i,i+1}(\Delta t)}{\Delta t} = \lambda, \quad i = 0,1,2,\cdots$

Δt 时间内，因服务完毕离开而减少一个顾客的概率是：

$$P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu \cdot \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 1,2,3,\cdots$$

则：$q_{i,i-1} = \lim\limits_{\Delta t -> 0} \dfrac{P_{i,i-1}(\Delta t)}{\Delta t} = \mu, \quad i = 1,2,3,\cdots$

而：系统同时增加或减小两个和两个以上的顾客的概率是趋于 0 的,

$$P_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad i = 0,1,2,(i+1) < j \le 3 或 i = 1,2,3,0 \le j < (i-1)$$

则：

$$q_{i,j} = 0, \quad i = 0,1,2,(i+1) < j \le 3 或 i = 1,2,3,0 \le j < (i-1)$$

根据 $\sum\limits_{j} q_{ij} = 0$，得

$$q_{i,i} = -\sum_{j \in I, j \ne i} q_{i,j}, \quad i = 0,1,2,3,\cdots$$

则：

因此，系统的 Q 矩阵为：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

(3) 研究稳态 $t \to \infty$ 的状态概率分布

稳态方程

$$w(t) \cdot Q = \frac{d}{dt} w(t) = 0,$$

即

$$\sum_{k} w_k(t) \cdot q_{kn} = 0,$$

$$w_0 \cdot q_{00} + w_1 \cdot q_{10} = 0$$

$$w_{n-1} \cdot q_{n-1\,n} + w_n \cdot q_{n\,n} + w_{n+1} \cdot q_{n+1\,n} = 0$$

即，

$$-\lambda w_0 + \mu w_1 = 0$$

$$\lambda \cdot w_{n-1} - (\lambda + \mu) w_n + \mu \cdot w_{n+1} = 0, \quad n > 0$$

由此可得，

$$\mu\, w_1 = \lambda\, w_0$$

$$\mu \cdot w_{n+1} = \lambda \cdot w_n, \quad n > 1$$

上述方程称为生灭过程的稳态平衡流方程。

达到稳定状态的概率分布记：$w_n = p_n$，满足以下关系

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

$$\cdots \qquad \qquad \cdots$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\cdots \qquad \qquad \cdots$$

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda}{\mu}} \cdot p_0$$

由此得到：

当 $\lambda < \mu$ 时，系统稳态分布存在

M/M/1/∞系统的稳态分布为：

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right), \quad n > 1$$

(4) 达到稳定状态后，系统中顾客的平均数 L，

$$
\begin{aligned}
L &= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right) \\
&= \left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\Big|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}} \\
&= (1-\rho)\rho\frac{d}{d\rho}\frac{1}{(1-\rho)}\Big|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}} = (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2}\Big|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}} \\
&= \frac{\rho}{(1-\rho)}\Big|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}} \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
$$

(5) 达到稳定状态后，系统中排队等待顾客的平均值 L_Q，

$$
\begin{aligned}
L_Q &= \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot p_n = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n - \sum_{n=1}^{\infty} p_n \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - (1-p_0) \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \left[1-\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\right] \\
&= \frac{\lambda}{\mu-\lambda} - \frac{\lambda}{\mu} \\
&= \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}
\end{aligned}
$$

(6) 达到稳定状态后，顾客在系统中的平均时间 W，

每个顾客的平均服务时间是 1/μ，顾客到达系统时系统中有 n 个顾客，它将在系统中停留（n+1）个顾客的服务时间。

$$
\begin{aligned}
W &= \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\mu}\cdot p_n = \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n + \frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} p_n \\
&= \frac{1}{\mu}\frac{\lambda}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu} \\
&= \frac{1}{\mu-\lambda}
\end{aligned}
$$

(7) 达到稳定状态后，顾客在系统中等待的平均时间 WQ：

$$W_Q = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{1}{\mu} \cdot p_n = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot p_n$$
$$= \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

(8) Little 定律：

$$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad W = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad L = \lambda W$$

$$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}, \quad W_Q = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{\mu - \lambda}, \quad L_Q = \lambda W_Q$$

M/M/1/∞ 排队模型 总结：

泊松到达，到达率 λ

指数分布服务时间，平均服务时间 1/μ，

$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$，系统负载因子，$\rho < 1$ 时系统稳定

服务规则：FCFS；

在排队系统的平均顾客数：$L = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1 - \rho}$

在排队等候的平均顾客数：$L_Q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{(1 - \rho)}$

顾客在系统中平均花费的时间(延迟时间)：$W = \frac{1}{\mu - \lambda}$

顾客在排队等候的平均时间：$W_Q = \frac{1}{\mu} \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$

系统中平均的顾客数和平均延迟与负载的关系：

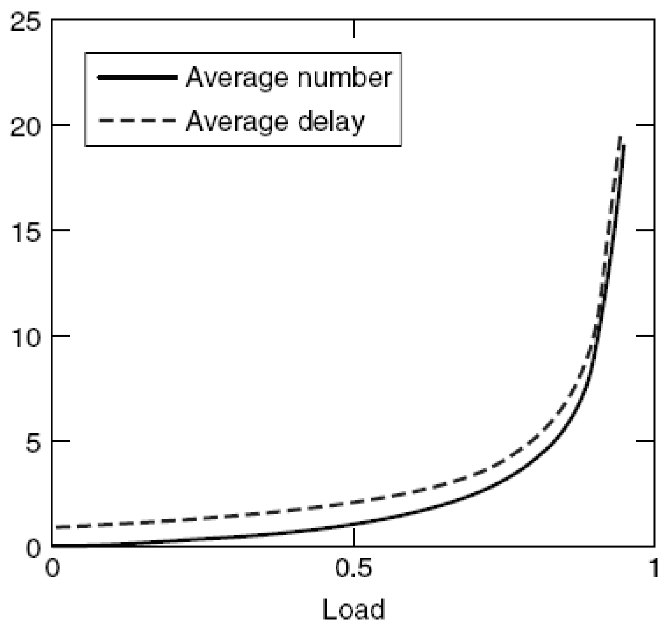


Figure 3.12 Traffic load versus average delay and number of customers.

$\rho = \lambda/\mu$，负载因子，平均服务时间内到达的顾客数。

轻负载情况下 $\lambda << \mu$，延迟近似为平均服务时间，基本是线性关系

负载较重时，系统不稳定，拐点之后的负载小变化导致系统滞留顾客数和延迟急剧增加；

$\lambda \approx \mu$，极度繁忙，几乎无限延迟

延迟时间的分布：

$$d(t) = (\mu - \lambda)e^{-(\mu-\lambda)t}; \quad t \geq 0$$

参数为 $\mu - \lambda$ 的指数分布，

例 2 排队问题 M/M/1/N（有限队长）

设有一个服务台，到达服务台的顾客数是服从泊松分布的随机变量，即顾客流是泊松过程。单位时间到达服务台的平均人数为 λ。服务台只有一个服务员，对顾客的服务时间是负指数分布的随机变量，平均服务时间是 $1/\mu$。服务台空闲时间到达的顾客立刻得到服务；如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候，加入排队行列；

如果服务台的顾客总数到达 N 个，则新来的顾客将离去。在 t 时刻服务台的顾客数组成一个生灭过程。求

在排队系统的平均顾客数 L

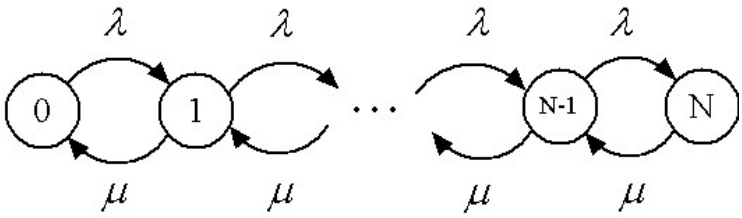
在排队等候的平均顾客数 L_Q

顾客在系统中平均花费的时间 W

顾客在排队等候的平均时间 W_Q。

解：M/M/1/N 是一个生灭过程

（1） 绘出系统的状态转换图



（2）

（3） 列出 Q 矩阵

（4） 给出稳态状态分布的线性方程组

给出系统达到稳定状态后的线性方程组

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$\lambda p_1 = \mu p_2$$
$$\cdots$$
$$\lambda p_k = \mu p_{k+1}$$
$$\cdots$$
$$\lambda p_N = \mu p_N$$

达到稳定状态的概率分布，满足以下关系

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$p_N = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N p_0$$

$$1 = \sum_{n=0}^{N} p_n = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 = \frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot p_0$$

$$p_0 = \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \qquad p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

（4）达到稳定状态后，系统中顾客的平均数 L，

$$L = \sum_{n=0}^{N} n \cdot p_n = \sum_{n=0}^{N} n \cdot \left(\lambda/\mu\right)^n \left(1-\lambda/\mu\right) \Big/ \left[1-\left(\lambda/\mu\right)^{N+1}\right]$$

$$= \left(1-\rho\right)\Big/\left(1-\rho^{N+1}\right)\rho \frac{d}{d\rho}\frac{1-\rho^{N+1}}{1-\rho}\Bigg|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \rho\left(1-\rho\right)\Big/\left(1-\rho^{N+1}\right) \cdot \frac{1+N\rho^{N+1}-(N+1)\rho^N}{\left(1-\rho\right)^2}\Bigg|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$= \rho\Big/\left(1-\rho\right) \cdot \frac{1+N\rho^{N+1}-(N+1)\rho^N}{\left(1-\rho^{N+1}\right)}\Bigg|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

（5）达到稳定状态后，系统中排队等待顾客的平均值 L_Q，

$$L_Q = \sum_{n=1}^{N} \left(n-1\right) \cdot p_n = \sum_{n=0}^{N} n \cdot p_n - \sum_{n=1}^{N} p_n$$
$$= L - \left(1-p_0\right)$$

（6）达到稳定状态后，顾客在系统中的平均时间 W：

每个顾客的平均服务时间是 1/μ，顾客到达系统时系统中有 n 个顾客，它将在系统中停留（n+1）个顾客的服务时间，而顾客到达时系统中最多有 N-1 个顾客，到达的顾客才会等待服务：

$$W=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)\frac{1}{\mu}\cdot p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{N-1}n\cdot p_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{N-1}p_n$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[\sum_{n=0}^{N}n\cdot p_n-Np_N+1-p_N\right]$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[L-Np_N+1-p_N\right]$$

（7）达到稳定状态后，顾客在系统中等待的平均时间 W_Q，

$$W_Q=\sum_{n=0}^{N-1}n\frac{1}{\mu}\cdot p_n=\frac{1}{\mu}\left[\sum_{n=0}^{N}n\cdot p_n-Np_N\right]$$
$$=\frac{1}{\mu}\left[L-Np_N\right]$$

L 和 W 的关系：

$$L=\sum_{n=0}^{N}n\cdot p_n=\sum_{n=0}^{N}n\cdot\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\Bigg/\left[1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N\right]$$
$$=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\left.\frac{1+N\rho^{N+1}-(N+1)\rho^N}{1-\rho^{N+1}}\right|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$W=\frac{1}{\mu}\left[L-(N+1)p_N+1\right]=\frac{1}{\mu}\left.\left[L-(N+1)\frac{\rho^N(1-\rho)}{1-\rho^{N+1}}+1\right]\right|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left.\left[L-\frac{1}{1-\rho^{N+1}}\left[1-\rho^{N+1}-(N+1)\rho^N+(N+1)\rho^{N+1}\right]\right]\right|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left.\left[L-\frac{1}{1-\rho^{N+1}}\left[1+N\rho^{N+1}-(N+1)\rho^N\right]\right]\right|_{\rho=\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$=\frac{1}{\mu}\left[L-\frac{\mu-\lambda}{\lambda}L\right]$$
$$=\frac{1}{\lambda}L$$

L_Q 和 W_Q 的关系：（略）

李特公式仍旧成立。

$$L=\lambda W$$

$$L_Q=\lambda W_Q$$

结论：排队问题的李特公式

$$L = \lambda W$$

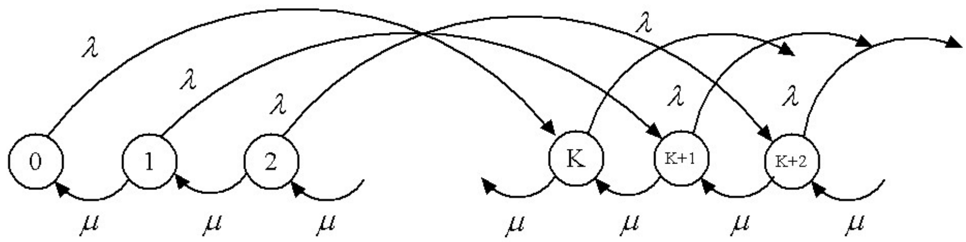
$$L_Q = \lambda W_Q$$

例 3 顾客成批到达的排队问题

设有一个排队服务系统，有一个服务人员。假设顾客成批到达服务点，每批的顾客数是常数 K，在（0，T）时间间隔内到达的顾客批数是服从泊松分布的随机变量，单位时间内到达的平均批数为 λ；假设服务员每次对一位顾客服务，平均服务时间是 1/μ。求在排队系统的平均顾客数 L，在排队等候的平均顾客数 L_Q，顾客在系统中平均花费的时间 W，顾客在排队等候的平均时间 W_Q。

解：

绘出系统的状态转换图：



给出系统达到稳定状态后的线性方程组：

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$
$$(\lambda + \mu) p_{n-1} = \mu p_n, \qquad 1 \le n \le (k-1)$$
$$(\lambda + \mu) p_n = \lambda p_{n-k} + \mu p_{n+1}, \quad n \ge k$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

由此解出系统的稳态分布。

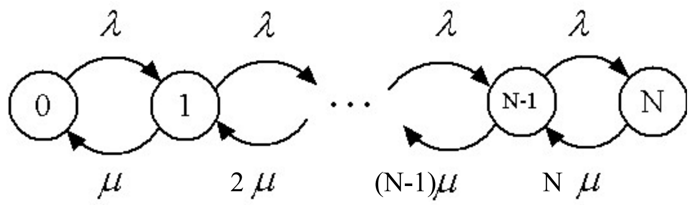
例 4 电话交换问题（M/M/N/N）

某电话总机有 n 条外线。在某一用户呼叫到来时，如果有空闲线路，则该呼叫占用其中某一空闲线路进行通话。如果通话结束，则该线路使用完毕而成为空闲线路，等待下一次呼叫。如果呼叫到来时遇到 n 条线路均被占用，则该呼叫遭到拒绝。假设呼叫时按照泊松律到达，即在 $(t,t+\Delta t)$ 内到达一次呼叫的概率是 $\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t)$，到达二次或二次以上呼叫的概率是 $o(\Delta t)$；假设某一线路在某时刻 t 被占用，而这条线路在 $(t,t+\Delta t)$ 时间间隔内空闲出来的概率是 $\mu\cdot\Delta t+o(\Delta t)$，即通话时间大于等于 t 的概率 $P_r\{T\geq t\}=e^{-\mu t}$。

求 k 条线路被占用的概率。

解：

设系统的状态用 t 时刻占用线路数表示，系统的状态转换图为：



稳态解：

$$p_1=\frac{\lambda}{\mu}p_0$$

$$p_n=\frac{\lambda}{n\mu}p_{n-1},\qquad 1\leq n\leq N$$

考虑到上述递推关系和规一化条件：

$$p_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0,\qquad 1\leq k\leq N$$

$$\sum_{k=0}^{n}p_k=1$$

得：t 时刻 k 条线路占线的概率

$$p_k=\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\Bigg/\sum_{j=0}^{N}\frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$$

阻塞概率：

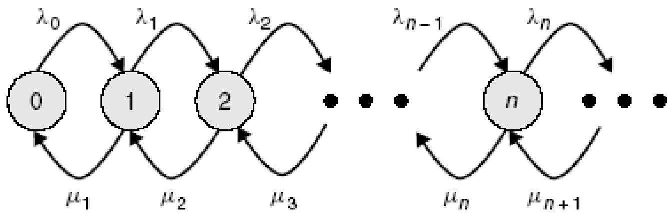
$$p_N = \frac{1}{N!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \Big/ \sum_{j=0}^{N} \frac{1}{j!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j$$

例 5 M/M/s/∞排队系统

无限队长、s 个服务员的排队问题 M/M/s/∞,求系统的稳态解，平均排队长度、系统中平均顾客数、顾客在系统中的平均时间、顾客在系统中的平均排队时间

解：

绘出系统的状态转换图：



M/M/s/∞排队系统是一个生灭过程，到达率和离去率为：

$$\lambda_n = \lambda$$
$$\mu_n = n\mu, \qquad if \quad n < s$$
$$\mu_n = s\mu, \qquad if \quad n \geq s$$

给出稳态的线性方程组，以及稳态概率的递推关系，

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0$$
$$p_2 = \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, \qquad k \leq s$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$p_{s+1} = \frac{1}{s}\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+1} p_0$$
$$\cdots \qquad \cdots$$
$$p_{s+r} = \frac{1}{s^r}\frac{1}{s!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{s+r} p_0$$

稳态概率：

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1} \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n + \frac{1}{s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^s \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{s\mu}} \right]^{-1}$$

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot p_0 \qquad n \le s$$

$$p_n = \frac{1}{s^{n-s} \cdot s!} \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^n \cdot p_0 \qquad n > s$$

系统中的平均顾客数：

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} np_n = \sum_{n=0}^{s} np_n + \sum_{n=s+1}^{\infty} np_n$$

系统中的平均排队等待的顾客数：

$$L_Q = \sum_{n=s+1}^{\infty} (n-s) p_n$$

系统中的顾客平均排队等待的时间：

顾客等待时总有 s 个服务员在为顾客服务，顾客平均离去率是 sμ,等待一个顾客离开的时间是 1 /sμ, 则：

$$W_Q = \sum_{n=s}^{\infty} (n-s+1) \frac{1}{s\mu} p_n = \frac{1}{s\mu} \sum_{n=s}^{\infty} (n-s) p_n + \frac{1}{s\mu} \sum_{n=s}^{\infty} p_n$$

顾客在系统中的平均时间：

$$W = \sum_{n=s}^{\infty} \frac{n-s+1}{s\mu} p_n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\mu} p_n$$

例 6 队长为 k>s、s 个服务员的排队问题 M/M/s/k

队长为 k>s、s 个服务员的排队问题 M/M/s/k,求系统的稳态解。

解：

系统的状态是 I:0,1,2, s,s+1, k。

系统是一个生灭过程。

$$\lambda_n = \lambda, \quad 0 \le n < k$$
$$\lambda_n = 0, \quad k \le n$$
$$\mu_n = n\mu, \quad 0 < n < s$$
$$\mu_n = s\mu, \quad s \le n \le k$$

例 7 机器维修问题

设有 M 台机器，在运行过程的任何时刻，都可能发生故障而需要维修。机器从开始运行到需要维修的时间间隔服从负指数分布的随机变量。某机器在时刻 t 处于运行状态，而在（t,t+Δt）需要维修的概率是 λΔt+0(Δt)；反之，若机器在时刻 t 处于维修状态，而在（t,t+Δt）恢复运行状态的概率是 μΔt+0(Δt)。为了管理机器配备一名维修工，那么有一台机器发生故障时，该机器可以立刻得到维修，当维修工正在维修某台机器时，新发生故障的机器排队等待维修。若发生故障的机器有 n 台，则一台机器正在维修，而 n－1 台机器排队等待维修，系统处于状态 n；若所有机器处于运行状态，系统处于状态 0。因此系统有 M+1 个状态：0，1，2，　　，M。

求　（1）系统处于稳态的概率分布；

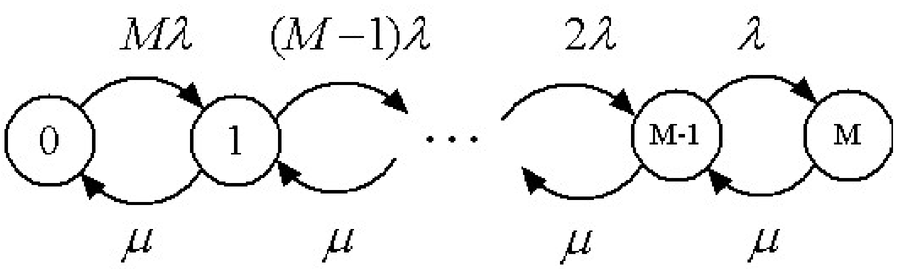
（2）处于不工作状态机器的平均数；

（3）处于等待维修状态机器的平均数。

解：

发生故障的机器有 n 台，记系统处于状态 n，系统的工作过程是一个生灭过程，状态空间为{0，1，2，……，M}。

系统的状态转换图：



计算系统在稳定状态后的概率分布：

给出系统达到稳定状态后的线性方程组

$$M\lambda p_0 = \mu p_1$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$(M-n)\lambda p_n = \mu p_{n+1}, \quad 0 \le n < M$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\lambda p_{M-1} = \mu p_M$$

由此可以得到，

$$p_1 = M\frac{\lambda}{\mu}p_0$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$p_n = M(M-1)\cdots(M-n+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$$

$$\cdots \qquad\qquad \cdots$$

$$p_M = M!\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^M p_0$$

利用归一化条件得到：

$$p_0\sum_{k=0}^{M} M(M-1)\cdots(M-k+1)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = p_0\sum_{k=0}^{M}\frac{M\;\;!}{(M-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k = 1$$

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{M}\frac{M\;\;!}{(M-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1}$$

$$p_n = \frac{M\;\;!}{(M-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \Bigg/ \left[\sum_{k=0}^{M}\frac{M\;\;!}{(M-k)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]$$

计算系统中不工作机器的平均值：

$$L = \sum_{n=0}^{M} np_n = \sum_{n=1}^{M} np_n$$

考虑到系统达到稳定状态后的线性方程组：

$$(M-n)\lambda p_n = \mu p_{n+1}, \quad 0 \le n < M$$

即：

$$\lambda\sum_{n=0}^{M-1}(M-n)p_n = \mu\sum_{n=0}^{M-1}p_{n+1}$$

$$\lambda\sum_{n=0}^{M-1}(M-n)\,p_n=\mu\sum_{n=0}^{M-1}p_{n+1}$$

$$M\lambda\sum_{n=0}^{M-1}p_n-\lambda\sum_{n=0}^{M-1}n\,p_n=\mu\sum_{n=1}^{M}p_n$$

$$M\sum_{n=0}^{M-1}p_n-\sum_{n=0}^{M-1}n\,p_n=\frac{\mu}{\lambda}\sum_{n=1}^{M}p_n$$

$$M\left(1-p_M\right)-(L-Mp_M)=\frac{\mu}{\lambda}\left(1-p_0\right)$$

$$L=M-\frac{\mu}{\lambda}\left(1-p_0\right)$$

计算等待维修机器数的平均值：

$$\begin{aligned}L_Q&=\sum_{n=1}^{M}(n-1)p_n\\&=\sum_{n=1}^{M}n\,p_n-\sum_{n=1}^{M}p_n\\&=L-(1-p_0)\\&=M-\frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1-p_0)\end{aligned}$$