马尔可夫过程

5 马尔可夫过程的研究

6 关于负指数分布的补充说明：

1 概论

1.1 定义：马尔可夫过程

$\xi(t)$：

参数域为T，连续参数域。以下分析中假定$T=[0,\infty)$；

状态空间为 I，离散状态。以下分析中取$I=\{0,1,2,\cdots\}$；

对于$t_1<t_2<\cdots<t_m<t_{m+1}\in T$，若在$t_1<t_2<\cdots<t_m\in T$这些时刻观察到随机过程的值是$i_1,i_2,\cdots i_m$，则 $t_{m+1}>t_m\in T$时刻的条件概率满足:

$$P\{\xi(t_{m+1})=j/\xi(t_1)=i_1,\cdots,\xi(t_m)=i_m\}=P\{\xi(t_{m+1})=j/\xi(t_m)=i_m\},\quad j\in I$$

则称这类随机过程为具有马尔可夫性质的随机过程或马尔可夫过程。

1.2 定义：齐次马尔可夫过程

对于马尔可夫过程$\xi(t)$，如果转移概率$P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}$只是时间差$\tau=t_2-t_1$的函数,这类马尔可夫过程称为齐次马尔可夫过程。

1. 3 性质

马尔可夫过程具有过程的无后效性;

参数连续状态离散的马尔可夫过程的条件转移概率为：

$$P\{\xi(t_2)=j/\xi(t')\quad 0\le t'\le t_1\}=P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}\quad t_1\le t_2,i,j\in I$$

马尔可夫过程的有限维联合分布律可以用转移概率来表示

$$P\{\xi(t_3)=k,\xi(t_2)=j,\xi(t_1)=i\}$$
$$=P\{\xi(t_3)=k/\xi(t_2)=j\}P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}P\{\xi(t_1)=i\}\quad t_1\le t_2\le t_3,i,j,k\in I$$

马尔可夫过程的有限维条件分布律可以用转移概率来表示

1.4 跳跃强度

状态转移概率

$$P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}$$

状态转移概率满足：

$$P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}\geq 0$$

$$\sum_{j\in I}P\{\xi(t_2)=j/\xi(t_1)=i\}=1$$

齐次马尔可夫过程的状态转移概率：

$$P_{ij}(\tau)$$

满足：

$$P_{ij}(\tau)\geq 0，\ \sum_{j\in I}P_{ij}(\tau)=1$$

跳跃强度

$$P_{ij}(\Delta t)=P_{ij}(0)+q_{ij}\cdot\Delta t+0(\Delta t)=\delta_{ij}+q_{ij}\cdot\Delta t+0(\Delta t)$$

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to o}\frac{P_{ij}(\Delta t)-P_{ij}(0)}{\Delta t}$$

其中 $P_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

称 q_{ij} 为参数连续状态离散齐次马尔可夫过程的跳跃强度

当 $i\neq j$ 时，$q_{ij}=\lim\limits_{\Delta t\to o}\dfrac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}$

当 $i=j$ 时，$q_{ij}=\lim\limits_{\Delta t\to o}\dfrac{P_{ij}(\Delta t)-1}{\Delta t}$

跳跃强度的性质：

$$\sum_j q_{ij}=0$$

转移率矩阵（跳跃强度矩阵）：

称 $Q=\{q_{ij}\}$ 为过程的转移率矩阵；

1.5 马尔可夫过程研究的问题

马尔可夫过程的描述：

转移率矩阵：

$$Q=\left[q_{i\,j}\right]$$

状态转移概率矩阵：

$$\mathbf{P}(\tau)=\left[P_{i\,j}(\tau)\right]$$

从特定状态转移到任意状态的转移概率矩阵：

记作$\mathbf{p}_i(\tau)$，为$\mathbf{P}(\tau)=\left[P_{i\,j}(\tau)\right]$的第 i 行的行矢量

从任意状态转移到特定状态的转移概率矩阵：

记作$\mathbf{s}_j(\tau)$，为$\mathbf{P}(\tau)=\left[P_{i\,j}(\tau)\right]$的第 j 行的列矢量

t 时刻系统状态的概率分布律矩阵：

$$\mathbf{w}(t)=\left[w_i(t)\right]=\left[w_0(t),w_1(t),\cdots w_k(t),\cdots\right]$$

从实际物理问题，确定马尔可夫过程描述，相应的 Q 矩阵

根据 Q 矩阵，确定某一时刻在各个状态上的概率分布；

根据 Q 矩阵，确定经过一段时间的状态转移概率；

渐进分析：确定当$t\to\infty$时，在各个状态上的概率分布；

典型问题：机器维修问题

设某机器的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，平均正常工作时间为 $1/\lambda$，它损坏后的修复时间也是一个负指数分布的随机变量，它的平均修复时间为 $1/\mu$。

如机器在 t=0 时是正常工作的，问在 t=10 时机器正常工作的概率如何？

2 前进方程和后退方程

2.1 福克-普朗克方程

设 t 时刻系统状态概率记为： $\mathbf{w}(t)$ ，初始概率为 $\mathbf{w}(0)$

若已知初始概率和转移率矩阵 Q：如何求 $\mathbf{w}(t)$？

根据全概率公式，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{w}_j(t+\Delta t) &= \sum_k \mathrm{w}_k(t)\cdot P_{kj}(\Delta t) \\
&= \mathrm{w}_j(t)\cdot P_{jj}(\Delta t) + \sum_{k\neq j} \mathrm{w}_k(t)\cdot P_{kj}(\Delta t) \\
&= \mathrm{w}_j(t)[1+q_{jj}\cdot\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{k\neq j} \mathrm{w}_k(t)\cdot[q_{kj}\cdot\Delta t + o(\Delta t)] \\
&= \mathrm{w}_j(t) + \sum_k \mathrm{w}_k(t)\cdot[q_{kj}\cdot\Delta t + o(\Delta t)]
\end{aligned}$$

$$\frac{d\mathrm{w}_j(t)}{dt} = \sum_k \mathrm{w}_k(t)\cdot q_{kj}$$

写成矩阵形式有

$$\frac{d}{dt}\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t)\mathbf{Q}$$

初始条件： $\mathbf{w}(0)$

由此，可以根据初始概率和转移率矩阵得到 $\mathbf{w}(t)$。

若已知初始概率和转移概率矩阵 P：如何求 $\mathbf{w}(t)$？

根据全概率公式：

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(0)P(t)$$

<u>求解机器维修问题</u>

2.2 切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

$$\begin{aligned}
&P\{\xi(t_3)=j/\xi(t_1)=i\} \\
&\quad = \sum_{k\in I} P\{\xi(t_2)=k/\xi(t_1)=i\}\cdot P\{\xi(t_3)=j/\xi(t_2)=k\} \\
&\quad\quad (t_1<t_2<t_3,\quad i,j\in I)
\end{aligned}$$

齐次马尔可夫过程的切普曼-柯尔莫哥洛夫方程：

$$P_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in I}P_{ik}(t)\cdot P_{kj}(\tau),\qquad t>0,\tau>0,\quad i,j\in I$$

2.2 柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程

根据转移率矩阵 Q 求经过时间 t 以后的转移概率。

从切普曼-柯尔莫哥洛夫方程，可以得到

$$\begin{aligned}P_{ij}(t+\Delta t)&=\sum_{k}P_{ik}(t)\cdot P_{kj}(\Delta t)\\&=P_{ij}(t)\cdot P_{jj}(\Delta t)+\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)\cdot P_{kj}(\Delta t)\\&=P_{ij}(t)[1+q_{jj}\cdot\Delta t+o(\Delta t)]+\sum_{k\neq j}P_{ik}(t)\cdot[q_{kj}\cdot\Delta t+o(\Delta t)]\\&=P_{ij}(t)+\sum_{k}P_{ik}(t)\cdot[q_{kj}\cdot\Delta t+o(\Delta t)]\end{aligned}$$

由此得到关于状态转移概率的一个方程：

柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程：

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_{k}P_{ik}(t)q_{kj}$$

初始条件：$P_{ij}(0)=\begin{cases}1 & (i=j)\\0 & (i\neq j)\end{cases}$

考虑矩阵柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程中的第 i 行，将矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 的第 i 行记作 $\mathbf{p}_i(t)$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i(t)=\mathbf{p}_i(t)\mathbf{Q}$$

初始条件是

$\mathbf{p}_i(0)$ 是第 i 个元素为 1、其他元素为零的列矢量。

由此可以根据 Q 矩阵，确定经过时间 t 从状态 i 到其它状态转移的概率。

柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程的矩阵形式：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t)=\mathbf{P}(t)\mathbf{Q}$$

初始条件：$\mathbf{P}(0)=\mathbf{I}$

上述方程表示了根据 Q 矩阵，确定经过时间 t 状态转移概率矩阵。

2.3 柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程

根据转移率矩阵 Q 求经过时间 t 以后的转移概率。

$$
\begin{aligned}
P_{ij}(\Delta t+t) &= \sum_k P_{ik}(\Delta t)\cdot P_{kj}(t) = P_{ii}(\Delta t)\cdot P_{ij}(t) + \sum_{k\neq i} P_{ik}(\Delta t)\cdot P_{kj}(t) \\
&= [1+q_{ii}\cdot\Delta t + o(\Delta t)]\cdot P_{ij}(t) + \sum_{k\neq j}[q_{ik}\cdot\Delta t + o(\Delta t)]\cdot P_{kj}(t) \\
&= P_{ij}(t) + \sum_k [q_{ik}\cdot\Delta t + o(\Delta t)]\cdot P_{kj}(t)
\end{aligned}
$$

由此得到关于状态转移概率的一个方程：

柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程：

$$
\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_k q_{ik} P_{kj}(t)
$$

初始条件是

$$
P_{ij}(0) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i\neq j) \end{cases}
$$

考虑矩阵柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程中的第 j 列，将矩阵 $\mathbf{P}(t)$ 的第 j 列记作 $\mathbf{s}_j(t)$

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{s}_j(t) = \mathbf{Q}\,\mathbf{s}_j(t)
$$

初始条件是

$\mathbf{s}_j(0)$：是第 j 个元素为 1、其他元素为零的列矢量。

由此可以根据 Q 矩阵，确定从各状态出发，经过时间 t 到 j 状态的转移概率。

柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程的矩阵形式：

$$
\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}\,\mathbf{P}(t)
$$

初始条件是

$$
\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}
$$

上述方程表示了根据 Q 矩阵，确定经过时间 t 状态转移概率矩阵。

前进方程，先选择初始态去分析，

后退方程，先选择结束态去分析。

前进方程和后退方程都是解决根据 Q 矩阵，确定转移概率矩阵的问题。

例 4

3 举例

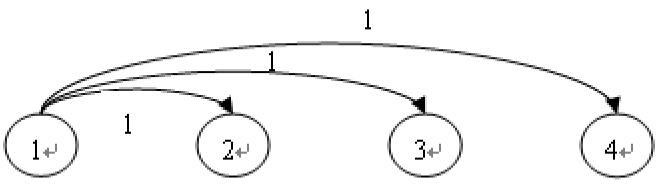
例 1

设有一个时间连续、状态离散的马尔可夫过程 $\{\xi(t), t \ge 0\}$，它的状态空间是 I:{1,2,　,m}。当 $i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,m$ 时 $q_{ij} = 1$；当 $i = j = 1,2,\cdots,m$ 时 $q_{ij} = 1-m$。求 $P_{ij}(t)$。

解：

写出马尔科夫过程的 Q 矩阵或者绘出系统的状态转换图。

给出 m=4 的一个例子：写出这个马尔科夫过程的 Q 矩阵，或者绘出系统的状态转换图。



$$
Q = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & -3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & -3 \end{array}
$$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{p}_i Q$$

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = (1-4)P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)$$

对应统一的形式为

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = (1-m)P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)$$

给出 $P_{ij}(t)$ 的联立微分方程组

$$\frac{d}{dt}P_{ij}(t) = -(m-1)P_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)$$

考虑到规一化条件，

$$\sum_k P_{ik}(t) = 1$$

$$1 - P_{ij}(t) = \sum_{k \neq j} P_{ik}(t)$$

进一步得到微分方程是，

$$\frac{d}{dt} P_{ij}(t) = -(m-1)P_{ij}(t) + \left[1 - P_{ij}(t)\right]$$
$$= -mP_{ij}(t) + 1$$

解微分方程（待定系数法）得到

$$P_{ij}(t) = Ae^{-mt} + 1/m$$

考虑系统的初始条件，

$$P_{ij}(0) = 0,\ if \quad i \neq j$$
$$P_{ij}(0) = 1,\ if \quad i = j$$

相应微分方程的解是，

$$P_{ii}(t) = (m-1)/me^{-mt} + 1/m$$
$$P_{ij}(t) = -1/me^{-mt} + 1/m$$

求出 Q 矩阵

建立状态转移概率的微分方程、状态转移概率的归一化条件；

例 2 机器维修问题

设某机器的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，平均正常工作时间为 1/λ，它损坏后的修复时间也是一个负指数分布的随机变量，它的平均修复时间为 1/μ。

如机器在 t=0 时是正常工作的，问在 t=10 时机器正常工作的概率如何？

解 1：

(1) 设$\xi(t)$代表在 t 时刻机器的状态，有两个状态：工作中、维修中

则状态空间记为 I：{ 0,1}。

机器从正常工作到故障的时间间隔是负指数分布的；

机器从维修到恢复工作的时间间隔是副指数分布的；

负指数分布是无记忆的、无后效性的。

$\xi(t)$是一个参数连续状态离散的马尔可夫过程。

（2）求解 Q 矩阵：

根据持续工作时间和故障修复时间的负指数分布特性，更新计数过程服从泊松分布，Δt 时间内系统状态转移概率如下：

$$P_{0,0}(\Delta t) = 1 - \lambda \cdot \Delta t$$

$$P_{0,1}(\Delta t) = \lambda \cdot \Delta t$$

$$P_{1,0}(\Delta t) = \mu \Delta t$$

$$P_{1,1}(\Delta t) = 1 - \mu \cdot \Delta t$$

因此，系统的 Q 矩阵为：

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

(3)　利用福克－普朗克方程求解

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}\left[w_0(t) \quad w_1(t)\right] = \left[w_0(t) \quad w_1(t)\right]Q = \left[w_0(t) \quad w_1(t)\right]\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}w_0(t) = -\lambda w_0(t) + \mu w_1(t)$$

$$\frac{d}{dt}w_1(t) = \lambda w_0(t) - \mu w_1(t)$$

初始条件：$w_0(0) = 1, \qquad w_1(0) = 0$

解得：

$$w_0(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$w_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

解 2: 利用系统的后退方程求解

（终结状态是正常工作的 0 状态），

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} P_{00}(t) \\ P_{10}(t) \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} P_{00}(t) \\ P_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_{00}(t) \\ P_{10}(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt}P_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t)$$
$$\frac{d}{dt}P_{10}(t) = \mu P_{00}(t) - \mu P_{10}(t)$$

初始条件：$P_{00}(0) = 1, P_{10}(0) = 0$

由微分方程组可以得到，

$$\begin{aligned}\mu\frac{d}{dt}P_{00}(t) + \lambda\frac{d}{dt}P_{10}(t) \\ &= \mu[-\lambda P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t)] + \lambda[\mu P_{00}(t) - \mu P_{10}(t)] \\ &= 0\end{aligned}$$

即 $\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = C$，

考虑到初始条件有，

$$\mu P_{00}(0) + \lambda P_{10}(0) = \mu \cdot 1 + \lambda \cdot 0 = \mu = C$$

即 $\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = \mu, \quad \lambda P_{10}(t) = \mu[1 - P_{00}(t)]$

代入微分方程组，解 $P_{00}(t)$ 的微分方程

$$\frac{d}{dt}P_{00}(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu[1 - P_{00}(t)] = -(\lambda + \mu)P_{00}(t) + \mu$$
$$\frac{d}{dt}P_{00}(t) + (\lambda + \mu)P_{00}(t) = \mu$$

得到微分方程的解，

$$P_{00}(t) = Ae^{-(\lambda+\mu)t} + \mu/(\lambda + \mu)$$

由初始条件得到 $A = \dfrac{\lambda}{\lambda + \mu}$

$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} - \frac{\mu}{\lambda + \mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

根据全概率公式：

若：$w_0(t = 0) = 1, \qquad w_1(t = 0) = 0$

$$\mathbf{w}(t)=\mathbf{w}(0)P(t)$$

$$\begin{aligned}w_0(t=10)&=P_{00}(t=10)w_0(t=0)+P_{10}(t=10)w_1(t=0)\\&=P_{00}(t=10)\end{aligned}$$

$$w(t=10)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-10(\lambda+\mu)}$$

解 3：

t=0 到 t=10 期间，机器可以一直正常工作的概率，

t=0 到 t=10 期间，机器可以损坏一次又修复正常工作的概率，

t=0 到 t=10 期间，机器可以损坏 n 次又修复正常工作的概率，

可以按全概率公式，计算机器在 t=0 时正常工作，到 t=10 时机器正常工作的概率。

例 3 排队问题（M/M/1/3）

设有一个服务台， t=0 时刻服务人员空闲着。到达服务台的顾客数是服从泊松分布的随机变量，即顾客流是泊松过程。单位时间到达服务台的平均人数为 λ 。服务台只有一个服务员，对顾客的服务时间是负指数分布的随机变量，平均服务时间是 1/μ。服务台空闲时间到达的顾客立刻得到服务，如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候；如果顾客到达时发现已经有两人在等候，则他就离开而不再回来。

(1) 分析该过程的马尔可夫特性

(2) 求该过程的 Q 矩阵

(3) 求 t 时刻系统内有 n 个顾客的概率

解：设 $\xi(t)$ 代表在 t 时刻系统内的顾客人数，则状态空间为 I：{0,1,2,3}。

（1）$\xi(t)$ 是一个参数连续状态离散的马尔可夫过程。

（2）求解 Q 矩阵：

根据系统顾客到达规律和服务时间的分布

Δt 时间内系统增加一个顾客的概率是：

$$P_{i,i+1}(\Delta t)=\lambda\cdot\Delta t+o(\Delta t),\quad i=0,1,2$$

则：$q_{i,i+1}=\lim\limits_{\Delta t->0}\dfrac{P_{i,i+1}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda,\quad i=0,1,2$

Δt 时间内，因服务完毕离开而减少一个顾客的概率是：

$$P_{i,i-1}(\Delta t) = \mu \cdot \Delta t + o(\Delta t), \quad i = 1,2,3$$

则：$q_{i,i-1} = \lim\limits_{\Delta t -> 0} \frac{P_{i,i-1}(\Delta t)}{\Delta t} = \mu, \quad i = 1,2,3$

而：系统同时增加或减小两个和两个以上的顾客的概率是趋于 0 的,

$$P_{i,j}(\Delta t) = o(\Delta t), \quad i = 0,1,2,(i+1) < j \le 3 \text{或} i = 1,2,3, 0 \le j < (i-1)$$

则：

$$q_{i,j} = 0, \quad i = 0,1,2,(i+1) < j \le 3 \text{或} i = 1,2,3, 0 \le j < (i-1)$$

根据 $\sum_j q_{ij} = 0$，得

$$q_{i,i} = -\sum_{j \in I, j \ne i} q_{i,j}, \quad i = 0,1,2,3$$

则：

$$q_{i,i} = \begin{cases} -\lambda, & i = 0 \\ -(\lambda + \mu), & i = 1,2 \\ -\mu, & i = 3 \end{cases}$$

因此，系统地 Q 矩阵为：

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

（3） t 时刻系统内有 n 个顾客的概率分布

根据福克-普朗克方程：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{w}(t) = \mathbf{w}(t)\mathbf{Q}$$

初始条件：$\mathbf{w}(0)$

由此，可以根据初始概率和转移率矩阵得到 $\mathbf{w}(t)$。

即：

$$\frac{d}{dt}w_0(t) = -\lambda w_0(t) + \mu w_1(t)$$
$$\frac{d}{dt}w_1(t) = \lambda w_0(t) - (\lambda+\mu)w_1(t) + \mu w_2(t)$$
$$\frac{d}{dt}w_2(t) = \lambda w_1(t) - (\lambda+\mu)w_2(t) + \mu w_3(t)$$
$$\frac{d}{dt}w_3(t) = \lambda w_2(t) - \mu w_3(t)$$

系统的初始条件是，

$$w_0(0) = 1$$
$$w_i(0) = 0, \quad i = 1,2,3$$

对联合微分方程组求解。

例 4 连续参数随机游动问题

设在[1,5]的线段上有一个质点作随机游动，此质点只能停留在 1，2，3，4，5，诸点上。质点任何时刻都可能发生移动，其移动的规则是：

（1）若在时刻 t 质点位于 2，3，4 中的一点，则在（t+Δt）中以概率λΔt + O(Δt)向右移动一格，以概率μΔt + O(Δt)向左移动一格；

（2）若在时刻 t 质点位于 1，则在（t+Δt）中以概率λΔt + O(Δt)向右移动一格；

（3）若在时刻 t 质点位于 5，则以后远停留在 5；

（4）在（t+Δt）发生其他移动的概率是 O(Δt)。

求 $p_{ij}(t)$ 满足的微分方程。

解：

写出马尔科夫过程的 Q 矩阵或者绘出系统的状态转换图。系统由 1，2，3，4，5 等 5 个状态。相应的 Q 矩阵是，

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

根据柯尔莫哥洛夫-费勒前进方程，可以列出 $p_{ij}(t)$ 满足的微分方程：

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_k P_{ik}(t)q_{kj}, \quad i,j\in I$$

初始条件：$P_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$

根据柯尔莫哥洛夫-费勒后退方程，可以列出 $p_{ij}(t)$ 满足的微分方程：

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt}=\sum_k q_{ik}P_{kj}(t), \quad i,j\in I$$

初始条件：$P_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$

求出 Q 矩阵

建立状态转移概率的微分方程、状态转移概率的归一化条件。

4 马尔可夫过程的渐进特性

设 $p_i(t)$ 表示 t 时刻马尔可夫过程处于状态 i 的概率。

4.1 引理 1

当 $t\to\infty$ 时，$p_i(t)$ 趋于一个与初始分布 $p_i(0)$ 无关的极限，其充要条件是相应的转移概率 $p_{ij}(t)$ 对于任何一个 i 趋于同一极限。

4.2 定理 2

对于任何时间连续、状态离散且有限的马尔可夫过程，若存在一个 t_0 使得对任何 i,r 有 $p_{ir}(t_0)>0$，那么 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j$ 存在且与 i 无关。

4.3 定理

对于任何时间连续、时间离散的马尔可夫过程，若存在一个 t_0，使得对于任何 i，$r\in I$ 有 $p_{ir}>0$，则

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j, \quad \lim_{t\to\infty} p_j(t)=p_j$$

机器维修问题

可以解得转移概率如下：

$$P_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{01}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{11}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

因此转移概率存在极限分布：

$$\lim_{t\to\infty}P_{i0}(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty}P_{i1}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

t 时刻的状态分布存在极限：

$$w_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$w_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$\lim_{t\to\infty}w_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty}w_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty}w_0(t)=\lim_{t\to\infty}p_{i0}(t)$$

$$\lim_{t\to\infty}w_1(t)=\lim_{t\to\infty}p_{i1}(t)$$

5 马尔可夫过程的研究

建立马尔可夫过程的模型

马尔可夫过程的状态、状态空间、相应的概率，

马尔可夫过程的状态转移概率、齐次马尔科夫过程的状态转移概率

齐次马尔科夫过程的状态转移概率矩阵

从任意状态转移到特定状态的概率

从特定状态转移到任意状态的概率

状态转移跳跃率

确定马尔可夫过程 Q 矩阵

确定马尔可夫过程的基本方程

马尔可夫过程状态概率的微分方程

切普曼-柯尔莫哥洛夫方程

从状态 i 出发到达任意状态的转移概率前进微分方程

从任意状态出发到达状态 j 的转移概率后退微分方程

求解基本方程

解微分方程组

用拉氏变换

利用母函数求解

建立均值函数微分方程求解

建立稳态概率微分方程求解

6 关于负指数分布的补充说明

例 1、顾客接受服务的时间服从负指数分布，其服务时间是 t 的概率密度函数是，

$$f_s(t)=Ce^{-at}$$

由归一化条件，$\int_0^\infty f_s(t)dt=1$ 得到

$$f_s(t)=ae^{-at}$$

由平均服务时间，$\int_0^\infty t\cdot f_s(t)dt=\frac{1}{\mu}$ 得到

$$f_s(t)=\mu e^{-\mu t}$$ 。

例 2、顾客接受服务的时间服从负指数分布，其服务时间是 t 的概率密度函数是，

$$f_s(t) = \mu e^{-\mu t}$$

工作寿命大于 u 的概率是，

$$\int_u^\infty f_s(t)dt = \int_u^\infty \mu e^{-\mu t}dt = e^{-\mu u}$$

工作寿命大于 t 的条件下，继续工作寿命大于 u 的概率是：

$$\begin{aligned}
&\int_{t+u}^\infty f_s(t)dt \Big/ \int_t^\infty f_s(t)dt \\
&= \int_{t+u}^\infty \mu e^{-\mu t}dt \Big/ \int_t^\infty \mu e^{-\mu t}dt \\
&= e^{-\mu(t+u)} \big/ e^{-\mu t} \\
&= e^{-\mu u}
\end{aligned}$$

结论：

顾客接受服务的时间服从负指数分布，其继续工作的寿命与他过去接受服务的时间无关。

负指数分布是无记忆的、无后效性的。

例 3 关于负指数分布的离去率。

首先计算负指数分布的服务过程，在 T 时刻的离去概率。顾客在(0,T)区间得到服务，在(T,T+Δt)区间离开的概率可以写作，

$$\int_T^{T+\Delta t} f_s(t)dt = \int_T^{T+\Delta t} \mu e^{-\mu t}dt = -e^{-\mu(T+\Delta t)} + e^{-\mu T} = e^{-\mu T} \cdot \mu \quad \Delta t \text{ 。}$$

这个概率是两个联合事件的概率，即在(0,T)区间没有离去（得到服务），而在(T,T+Δt)区间离开的联合概率。这两个事件是相互独立的，顾客在(0,T)区间得到服务，在(T,T+Δt)区间离开的概率等于在(0,T)区间没有离去（得到服务）的概率与在(T,T+Δt)区间离开的概率之积。

在(0,T)区间没有离去的概率是，

$$\int_T^\infty f_s(t)dt = \int_T^\infty \mu e^{-\mu t}dt = e^{-\mu T}$$

在(T,T+Δt) 区间离开的概率是，

$$e^{-\mu T} \cdot \mu \Delta t \big/ e^{-\mu T} = \mu \Delta t \text{ 。}$$

7 关于独立增量过程的马尔科夫性质的证明

设$\{N(t), t \geq 0\}$是一个独立增量过程，它必定是一个马尔科夫过程。

证明：

对于独立增量过程$\{N(t), 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}\}$，有

$$\begin{aligned}
&P\left[N(t_{n+1}) = x_{n+1} / N(t_1) = x_{1,} \cdots, N(t_m) = x_m,, \cdots, N(t_n) = x_n\right] \\
&\quad = P\left[N(t_{n+1}) - N(t_n) = x_{n+1} - x_n / N(t_1) = x_{1,} \cdots, N(t_m) = x_m,, \cdots, N(t_n) = x_n\right] \\
&\quad = P\left[N(t_{n+1}) - N(t_n) = x_{n+1} - x_n\right]
\end{aligned}$$

对于独立增量过程$\{N(t), 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}\}$，显然又有

$$\begin{aligned}
&P\left[N(t_{n+1}) = x_{n+1} / N(t_n) = x_n\right] \\
&\quad = P\left[N(t_{n+1}) - N(t_n) = x_{n+1} - x_n / N(t_n) = x_n\right] \\
&\quad = P\left[N(t_{n+1}) - N(t_n) = x_{n+1} - x_n\right]
\end{aligned}$$

因此独立增量过程是一个马尔科夫过程，即

$$\begin{aligned}
&P\left[N(t_{n+1}) = x_{n+1} / N(t_1) = x_{1,} \cdots, N(t_m) = x_m,, \cdots, N(t_n) = x_n\right] \\
&\quad = P\left[N(t_{n+1}) = x_{n+1} / N(t_n) = x_n\right]
\end{aligned}$$