考研数学高等数学强化讲义

主讲：张宇

张宇：新东方在线名师，博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部"国家精品课程建设骨干教师"，全国畅销书《高等数学 18 讲》、《考研数学题源探析经典 1000 题》作者，高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试参考书（大纲解析）》编者之一，2007 年斯洛文尼亚全球可持续发展大会受邀专家（发表 15 分钟主旨演讲）. 首创"题源教学法"，对考研数学的知识结构和体系有全新的解读，对考研数学的命题与复习思路有极强的把握和预测能力，让学生轻松高效夺取高分.

欢迎使用新东方在线电子教材

目 录

第一讲 极限......1
第二讲 一元函数微积分学......8
第三讲 多元函数微分学......24
第四讲 二重积分......31
第五讲 微分方程......35
第六讲 无穷级数（数一、三）......39
第七讲 多元函数积分学的预备知识（数一）......50
第八讲 多元函数积分学（数一）......56

第一讲 极限

综述

1. 定义与性质
2. 函数极限的计算
3. 数列极限的计算
4. 应用：无穷小比阶；连续与间断

内容展开

极限的定义与性质

1. 定义

1） $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

（$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）

2） $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

考点有三：

①极限运算的过程性　　$x\to 0$

若 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \exists$，则 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 中处处有定义；

若 $f(x)$ 在 $x\to 0$ 中有无定义点，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不 $\exists$.

如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x\cos\frac{1}{x})}{x\cos\frac{1}{x}}$　有0点是无定义的，极限不存在。

② $\varepsilon-\delta$，$\varepsilon-N$ 的考法

存在n>=N时，恒友|xn-a|<=1/2^k <=> lim{n->无穷}xn=a

xn 和 a 的距离要多小有多小，可以任意小。

③取 ε，证明 $f(x)$，x_n 的范围.

假设： lim{n->无穷}an=a≠0，证明当n充分大时，|an|>|a|/2

前面利用了||an|-|a|| <=|an-a| <e然后==》
lim{n->∞}|an|=|a|,　　　　　### 但是不知道为什么要这样子？？？
|a|-e<=|an|<=|a|+e
取e = |a|/2 ==》 |an| >=|a|/2

2．性质

①唯一性　　若 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A\exists$，则 A 唯一.

【例】已知 $I=\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+k[x])$ 存在，求 I，k.

1）x->0+, lim(x->0+)I==(使用倒带换1/x = t) lim(x->+无穷) ==无穷/无穷 洛必达 = 2

2）x->0-,==>k=-2

②局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\exists$，则 $\exists M>0$，$\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|<M$.

【例】设 $f(x)=\dfrac{(x^3-1)\sin x}{(x^2+1)|x|}$，讨论其在定义域上的有界性.

③局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)=A>0$（或<），则在 $x\to\bullet$ 中，$f(x)>0$（或<）.　　脱帽

推论：若 $x\to\bullet$ 中，$f(x)\geq 0$（或≤），若 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\exists$，则 $\lim\limits_{x\to\bullet} f(x)\geq 0$（或≤）.　　戴帽

【例】设 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处（　）

（A）取极大值　　（B）取极小值　　（C）不取极值　　（D）不确定

函数极限的计算

综述：（1）化简先行

（2）判别类型（七种未定式）

（3）使用工具（洛必达法则、泰勒公式）

（4）注意事项

【例】求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x}{x^2}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{100}}$

（3）$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

（4）$\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x\cdot\ln(1-x)$

【注】重要公式：$\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\alpha}\ln^{\beta} x = 0$（$\alpha > 0$，$\beta > 0$）

（5）$\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x}) - 2\ln 2\cdot x]$

（6）$\lim\limits_{x\to 0^+}(2x-\tan x^2)^{\sin x}$

（7）$\lim\limits_{x\to \pi^-}(\pi - x + \sin x)^{\sin x}$

（8）$\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{(1+\frac{1}{x})^{x^2}}$

（9）若$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+f(x)}{x^2\sin^2 x}=1$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x+f(x)}{x^2\sin^2 x}$.

数列极限的计算

1．通项已知且易于连续化，用**归结原则**

【例】求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2})^{\sqrt{n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n+\sin n}}$

2．通项已知但不易连续化，用**夹逼准则**

【例】（Ⅰ）证明：当 $x>0$ 时，$\dfrac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$.

（Ⅱ）设 $x_n=(1+\dfrac{1}{n^2})(1+\dfrac{2}{n^2})\cdots(1+\dfrac{n}{n^2})$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3．对通项由递推公式给出的，用**单调有界准则**

【例】（Ⅰ）设 $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$ 的最小值；

（Ⅱ）设 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求此极限.

极限的应用：无穷小比阶，判别连续与间断

【例 1】设 $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小量，求 $p(x)$.

【例 2】若 $\int_0^{x-\ln(1+x)}\dfrac{\sin t^2}{t}dt$ 与 cx^k 为等价无穷小量，求 c， k.

【例 3】 $f(x)=\dfrac{|x|^{x}-1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点有_____个.

【例 4】设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-4)}{\sin\pi x}, & x<0,\\ \dfrac{x(x^2-1)}{x-1}, & x\geq 0\end{cases}$

求其间断点并判别类型.

第二讲 一元函数微积分学

综述

1．概念
2．计算
3．应用
4．证明

一、概念

综述：导数、微分、不定积分、定积分、变限积分、反常积分

1．导数

【注】$f(x)$在x_0点处可导

$\Leftrightarrow$ $f(x)$在x_0点处导数存在

$\Leftrightarrow$ $f'(x_0)$存在

命题角度：

（1）具体型（易）

（2）半抽象半具体型（中）

（3）抽象型（难）

【例 1】设$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求$F'(x)$.

【例 2】设$\delta>0$，$f(x)$在$[-\delta,\delta]$上有定义，$f(0)=1$，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0$，证明：$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

【例 3】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}\exists$，能否推出 $f'(0)$ 存在？

【例 4】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}\exists$，能否推出 $f'(0)$ 存在？

【例 5】设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(ax)-f(x)}{x}=b$，$a$，$b$ 为常数，$|a|>1$，证明：$f'(0)=\dfrac{b}{a-1}$.

2．微分　$y=f(x)$

① $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$　真实增量

② $A\Delta x$　线性增量

③ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}=0\Rightarrow y=f(x)$ 在 x_0 处可微

故一点可导 $\Leftrightarrow$ 一点可微

考点：$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$

$$dy=A\Delta x=y'(x_0)\Delta x=Adx$$

【例】设 $f(u)$ 可导，$y=f(x^2)$，当 x 在 $x=-1$ 处取 $\Delta x=-0.1$ 时，Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)=$________.

3．不定积分

①定义：$\forall x \in I$，都有$F'(x)=f(x)$，则称$F(x)$是$f(x)$在I上的一个原函数.

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

否则：$\exists x_0 \in I$，使得$F'(x_0)\neq f(x_0)$，则$F(x)$不是$f(x)$在I上的原函数.

②原函数存在定理

1）连续；2）跳跃；3）可去；4）无穷；5）振荡.

1）连续函数必有原函数（考过证明）

设$f(x)$在I上连续，证明$F(x)=\int_a^x f(t)dt\ (a,x\in I)$必可导，且$F'(x)=f(x)$，$\forall x\in I$.

2）含跳跃间断点的函数在此区间必没有原函数.

3）、4）同2）

5）只具体计算，不抽象证明

【例1】$F(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

【例2】$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$是否有原函数？

4．定积分

【例】在$[-1,2]$上，判断以下函数是否存在原函数和定积分？

① $f(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ 1, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$

② $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

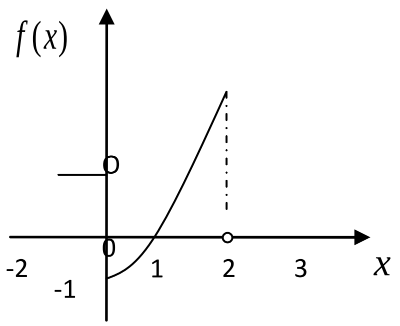
③ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

④ $f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

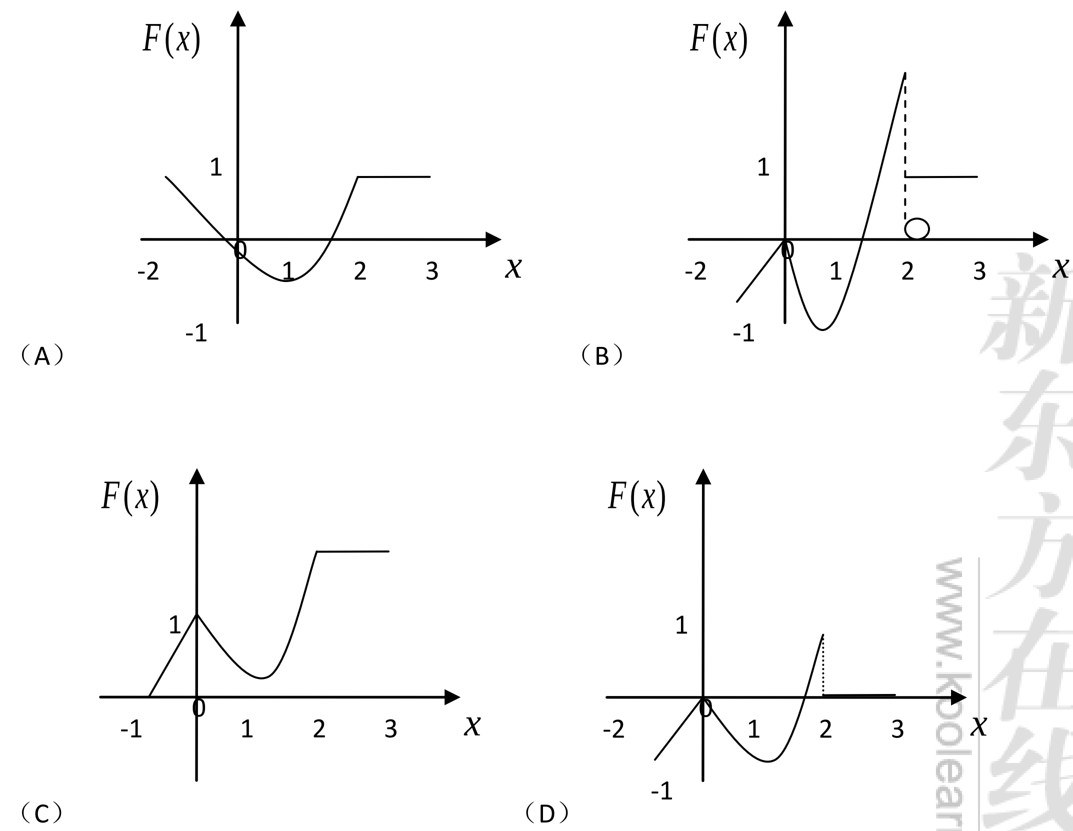
【注】① $f(x)$连续$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$可导； $f(x)$可积$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$连续.

$\Rightarrow F(x)=\int_a^x f(t)dt$ “天生”就连续！

【例】设函数$y=f\left(x\right)$在区间$\left[-1,3\right]$上的图形为：



则函数 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ 的图形为（　　）



②关于奇偶、周期、有界、单调

（1）奇偶性

1）若可导函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$__________.

2）若可导函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$__________.

3）若可积函数 $f(x)$ 是奇函数，则 $F(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt(a\neq 0) \end{cases}$

4）若可积函数 $f(x)$ 是偶函数，则 $F(x)=\begin{cases} \int_0^x f(t)dt \\ \int_a^x f(t)dt(a\neq 0) \end{cases}$

【例 1】设 $f(x)$ 是奇函数，除 $x=0$ 外处处连续，$x=0$ 为其第一类间断点，则

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是（　　）

（A）连续的奇函数　　（B）连续的偶函数

（C）$x=0$ 为间断点的奇函数　　（D）$x=0$ 为间断点的偶函数

【例 2】设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$a\neq 0$，则下列函数中一定是 y 的偶函数的个数为______.

①$\int_a^y dx\int_0^x f(u)du$；②$\int_0^y dx\int_a^x f(u)du$；③$\int_0^y dx\int_a^x x^2 f(u)du$；④$\int_a^y dx\int_a^x xf(u)du$

（2）周期性

1）若可导函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则其导数 $f'(x)$ 也是以 T 为周期的.

2）若可积函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 以 T 为周期的充要条件是

$\int_0^T f(x)dx=0$.

【定理】若可积函数 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $\int_0^T f(x)dx=\int_a^{a+T} f(x)dx$，$\forall a$.

（3）有界性

【例】设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，则（　）

（A）$f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

（B）$f'(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(X,+\infty)$ 内有界

（C）$f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

（D） $f'(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内有界

③关于定积分的精确定义

【例 1】 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\frac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2})$

【例 2】求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b^{\frac{1}{n}}-1)\sum\limits_{i=0}^{n-1}b^{\frac{i}{n}}\sin b^{\frac{2i+1}{2n}}$， $b>1$.

5．变限积分 $\int_a^x f(t)dt$， $\int_x^b f(t)dt$， $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt$

1）属于定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 范畴

2）求导公式

$$(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(t)dt)'=f[\varphi_2(x)]\cdot\varphi_2{}'(x)-f[\varphi_1(x)]\cdot\varphi_1{}'(x)$$

【例】设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\left(\int_0^x tf(x^2-t^2)dt\right)_x'=$_______.

6．反常积分

①定义 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx$，a 为瑕点

②判别依据

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p>1\Rightarrow \text{收敛}\\ p\le 1\Rightarrow \text{发散}\end{cases}$$

$$\int_0^{1}\frac{1}{x^p}dx\begin{cases}p<1\Rightarrow \text{收敛}\\ p\ge 1\Rightarrow \text{发散}\end{cases}$$

【例 1】设 $\alpha>0$，讨论 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx$ 的敛散性.

【例 2】设 $k>0$，讨论 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^k}$ 的敛散性.

二、计算

1．求导

综述：一般题——求导规则、符号写法

高阶题——泰勒公式、莱布尼兹公式

【例 1】设 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x^{\beta}}, & (\beta>0)\ x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，讨论 α，β 满足何种关系时，$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

【例 2】设 $y=f(x)$ 由 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

【例 3】设 $y=x^3\sin x$，求 $y^{(6)}(0)$.

【例 4】设 $y=\dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}(0)$.

【例 5】设 $y=\dfrac{x^n}{1-x}+x\cos^2 x$，求 $y^{(n)}(n\ge 2)$.

2．求积分

综述：凑微分法、换元法、分部积分法、有理函数积分法

【例 1】$\int\sqrt{\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2}}dx$

【例 2】$\int\dfrac{dx}{(2x+1)\sqrt{3+4x-4x^2}}$

【例 3】$I=\int\ln(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{x}})dx\ (x>0)$

【例 4】$I=\int\sqrt{\dfrac{e^x-1}{e^x+1}}dx$

【例 5】$I=\int_3^{+\infty}\dfrac{dx}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$

三、应用

1．几何应用（主体）

（1）导数（极值点、最值点、拐点、单调性、凹凸性、渐近线——性态）

1^0 极值点与单调性

1）判别极值的“一阶”充分条件

① $x\in(x_0-\delta,x_0)$， $f'(x)<0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$， $f'(x)>0$ $\Rightarrow$ x_0 为极小值点；

② $x\in(x_0-\delta,x_0)$， $f'(x)>0$； $x\in(x_0,x_0+\delta)$， $f'(x)<0$ $\Rightarrow$ x_0 为极大值点.

【例】已知 $y=y(x)$ 满足 $x^2+y^2y'=1-y'$， $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极值.

2）判别极值的“高阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $\begin{cases} f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

当 n 为偶数时，若 $\begin{cases} f^{(n)}(x_0)>0\Rightarrow x_0\text{极小值点} \\ f^{(n)}(x_0)<0\Rightarrow x_0\text{极大值点} \end{cases}$

【例】设 $y=y(x)$ 满足 $y^{(4)}-3y''+5y=e^{\cos x}$，其中 $y(2)=y'(2)=y''(2)=y'''(2)=0$，讨论 y 在 $x=2$ 的性态.

2^0 拐点与凹凸性

1）判别拐点的“二阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 点的左右邻域内 $f''(x)$ 变号 $\Rightarrow(x_0,f(x_0))$ 为曲线上的拐点.

2）判别拐点的“更高阶”充分条件

设 $f(x)$ 在 x_0 处 n 阶可导，且 $\begin{cases} f''(x_0)=f'''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0, \\ f^{(n)}(x_0)\neq 0 \end{cases}$

当 n 为奇数时，$(x_0, f(x_0))$ 为拐点.

【例 1】 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点为（ ）

（A）$(1,0)$ （B）$(2,0)$ （C）$(3,0)$ （D）$(4,0)$

【例 2】设 $f(x)$ 二阶可导，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在 $[0,1]$ 上，（ ）

（A） $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$

（B） $f'(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

（C） $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\geq g(x)$

（D） $f''(x)\geq 0$ 时，$f(x)\leq g(x)$

3^0 渐近线——求解程序

1）找 $y(x)$ 的无定义点或定义区间的端点 x_0.

若 $\lim\limits_{x\to x_0} y(x)=\infty$（或 $x\to x_0^+$、$x\to x_0^-$），则 $x=x_0$ 为铅直渐近线；反之亦反.

2）若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=A(\exists)$，则 $y=A$ 为水平渐近线；

若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y(x)=\infty$，则转向 3）

3）若 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{y(x)}{x}=a\ (\exists,\neq 0)$，$\lim\limits_{x\to\pm\infty}[y(x)-ax]=b(\exists)$，则 $y=ax+b$ 为斜渐近线.

【例】曲线 $y=\sqrt{4x^2+x}\ln(2+\frac{1}{x})$ 的渐近线有______条.

4^0 最值点

1）在 $[a,b]$ 上，

①令 $f'(x)=0\Rightarrow x_0$ 为驻点；

② $f'(x)$ 不存在 $\Rightarrow x_1$ 不可导点；

③端点 a ， b .

$\Rightarrow f(x_0)$、$f(x_1)$、$f(a)$、$f(b)$ ，比较大小

$\Rightarrow M,m$

2）在 (a,b) 上，①②同上，

③ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ， $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$

【例】求 $f(x)=e^{-x^2}\sin x^2$ 的值域.

（2）积分（测度）

1^0 平面图形的面积

①在直角坐标系下： $S=\int_a^b |y_1(x)-y_2(x)|dx$

②在极坐标系下： $S=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)|d\theta$

2^0 旋转体的体积

绕 x 轴旋转 $V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

绕 y 轴旋转 $V_y = 2\pi\int_a^b x\left|f(x)\right|$

3^0 平均值 $\overline{y} = \dfrac{\int_a^b y(x)dx}{b-a}$

4^0 弧长 $ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$

①直角坐标系下，$S = \int_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

②极坐标系下，$S = \int_\alpha^\beta \sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}d\theta$

③参数方程下，$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\phi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}dt$，其中$\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

5^0 旋转体的侧面积 $S = \int_a^b 2\pi\left|f(x)\right|\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

注：4^0、5^0 均为数一、二考查内容，数三不要求

【例】设曲线 $y = e^{-\frac{1}{2}x}\sqrt{\sin x}$ 在 $x \ge 0$ 部分与 x 轴所围平面区域记为 D，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积 V .

2．物理应用（数一、二）

综述：① $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；②静水压力；③抽水做功；④质点引力

【例】一椭圆形钢板正好垂直浸没于水（相对密度 $\rho=1$ ）中，其短轴垂直于水面，长轴长和短轴长分别为 $2a$ ， $2b$.求钢板一侧所受的静水压力.

2．经济应用（数三）

综述：①边际；②弹性；③积分

【例】设某产品的总成本函数为 $C(x)=100+3x+\frac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$，x 为产量（假定等于需求量），p 为价格.求（Ⅰ）边际成本;（Ⅱ）边际收益;（III）边际利润;（Ⅳ）收益的价格弹性.

四、逻辑（证明）

中值定理“ξ”

不等式证明

方程的根（等式证明）

1．中值定理：研究对象的复杂化、区间的复杂化

【例 1】设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上二阶导数连续，$f(0)=0$.

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式;

（Ⅱ）证明：存在 $\eta\in[-a,a]$，使得 $f''(\eta)=\frac{3\int_{-a}^{a}f(x)dx}{a^3}$.

【例 2】设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导， $f(0)=0$， $f(1)=1$.

证明：存在不同的 ξ_1， ξ_2， $\xi_3\in(0,1)$，使得 $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)+f'(\xi_3)=3$.

2．方程根

1）存在性：零点定理 $f(a)\cdot f(b)<0\Rightarrow f(\xi)=0$

2）唯一性：

单调性 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)\nearrow$； $f'(x)<0\Rightarrow f(x)\searrow$

罗尔原话：若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f^{(n-1)}(x)=0$ 至多有 $k+1$ 个根.

【例】证明 $\ln x-e^x+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx=0$ 有且仅有两个根.

3．不等式

【例 4】设 $f(x)$ 、 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\nearrow$， $0\le g(x)\le 1$.

证明：（Ⅰ） $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$， $x\in[a,b]$；

（Ⅱ） $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$.

第三讲　多元函数微分学

综述

1．概念——5 个

2．计算——微分法

3．应用——极值与最值

一、概念

1．极限的存在性

（1）二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$

【关键】除了“穷举法”、“洛必达法则”与“单调有界准则”外，可照搬一元函数求极限的方法，用于多元函数的二重极限，比如：等价无穷小替换，夹逼准则，无穷小×有界=无穷小，等等.

【例 1】设 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

【例 2】求 $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{2}\\ y\to \frac{1}{2}}} \dfrac{\tan(x^2+2xy+y^2-1)}{x+y-1}$.

【例 3】求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}-\sin\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

【例 4】求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y+y^4)}{x^2+y^2}$

【例 5】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$.

（2）累次极限

2．连续性

若$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称 $f(x,y)$ 在(x_0,y_0)处连续.

【例】 $f(x,y)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

【注】若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\neq f(x_0,y_0)$，称为间断，但多元时，不讨论间断类型.

3．偏导数的存在性

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=z_x{}'(x_0,y_0)=f_x{}'(x_0,y_0)$$

$$f_x{}'(x_0,y_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$f_y{}'(x_0,y_0)=\lim_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

考法：

①考单调

$\forall (x,y)\in D$，若 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_x{}'(x,y)>0\Rightarrow f(x,y)$ 对 x 单增

$\Rightarrow$若 $x_1>x_2$，则 $f(x_1,y_0)>f(x_2,y_0)$.

【例】在全平面上，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，若 $f(x_1,y_1)>f(x_2,y_2)$，则（　）

（A）$x_1>x_2$，$y_1>y_2$　　（B）$x_1<x_2$，$y_1>y_2$

（C）$x_1>x_2$，$y_1<y_2$　　（D）$x_1<x_2$，$y_1<y_2$

②考计算

【例】设 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^6}}$，求 $f_x{}'(0,0)$，$f_y{}'(0,0)$.

4．可微性

① $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$　全增量

② $A\Delta x+B\Delta y$　线性增量　$\begin{cases}A=f_x{}'(x_0,y_0)\\ B=f_y{}'(x_0,y_0)\end{cases}$

③ $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0\Rightarrow f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

于是，$\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$，即

① $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-A\Delta x-B\Delta y=o(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2})$

② $f(x,y)-f(x_0,y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)=o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$

全微分 $dz\big|_{(x_0,y_0)}=f_x'(x_0,y_0)dx+f_y'(x_0,y_0)dy$，

$dz=f_x'(x,y)dx+f_y'(x,y)dy$，$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

【例】设连续函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，求 $dz\big|_{(0,1)}$.

5．偏导数的连续性

设 $z=f(x,y)$，

①用定义求 $f_x'(x_0,y_0)$，$f_y'(x_0,y_0)$

②用公式求 $f_x'(x,y)$，$f_y'(x,y)$

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f_x'(x,y)=f_x'(x_0,y_0)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f_y'(x,y)=f_y'(x_0,y_0)$.

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的偏导数连续.

逻辑关系：

【例】设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求 $f''_{xy}(0,0)$， $f''_{yx}(0,0)$.

二、计算（多元微分法）

①链式求导法则

$z=f(u,v,w)$， $\begin{cases}u=u(y)\\ v=v(x,y)\\ w=w(x)\end{cases}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\cdot\frac{dw}{dx}$$

②对于高阶导数

无论 z 对谁求导，也无论 z 已经求了 n 阶导，求导之后的新函数仍具有与原来函数完全相同的复合结构.

③注意书写规范

【例 1】设 $z=f(e^x\cos y,x^2+y^2)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

【例 2】已知函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数， $f(1,1)=2$， $f_1'(1,1)=0$， $f_2'(1,1)=0$，

$z=f(x+y,f(x,y))$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

三、应用——极值与最值（多元）

1．理论依据

（1）函数取极值的必要条件

设$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0) $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在}\\ \text{取极值}\end{cases}$，则$f_x'(x_0,y_0)=0, f_y'(x_0,y_0)=0$.

【注】1）适用于三元及以上函数

2）非充分条件

极值点：①在驻点中找；②在不可偏导点找

（2）函数取极值的充分条件

$$\text{记}\begin{cases}f_{xx}''(x_0,y_0)=A\\ f_{xy}''(x_0,y_0)=B\\ f_{yy}''(x_0,y_0)=C\end{cases}\text{，则}\Delta=B^2-AC\begin{cases}<0\Rightarrow\text{极值}\begin{cases}A<0\Rightarrow\text{极大值}\\ A>0\Rightarrow\text{极小值}\end{cases}\\ >0\Rightarrow\text{非极值}\\ =0\Rightarrow\text{方法失效，另谋他法（定义法）}\end{cases}$$

【注】不适用于三元及以上函数.

（3）条件极值与拉格朗日乘数法

问题提法：求目标函数$u=f(x,y,z)$在约束条件$\begin{cases}\varphi(x,y,z)=0\\ \psi(x,y,z)=0\end{cases}$下的极（最）值，则

1）构造辅助函数

$$F(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z)$$

2）$\begin{cases} F'_x = 0 \\ F'_y = 0 \\ F'_z = 0 \\ F'_\lambda = 0 \\ F'_\mu = 0 \end{cases}$

3）解上述方程组 $\Rightarrow P_i(x_i, y_i, z_i)\ (i = 1, 2, \cdots) \Rightarrow u(P_i)\begin{cases} u_{\max} \\ u_{\min} \end{cases}$

根据实际问题，必存在最值，所得即所求.

2．例题分析

【例 1】设 $f(x, y) = kx^2 + 2kxy + y^2$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值，求 k 的取值范围.

【例 2】求 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 在约束条件 $\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$ 下的最大值与最小值.

【例 3】求 $u = xy + 2yz$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ 下的最大值与最小值.

第四讲　二重积分

综述

1．概念与性质（重点：对称性）

2．计算结构

基础题：直角坐标系，极坐标系

技术题：换序、对称性、形心公式的逆用

3．综合题

一、概念与性质

1．概念比较

2．对称性

1）普通

设 D 关于 y 轴对称，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$

设 D 关于 x 轴对称，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y)\end{cases}$

设 D 关于原点对称，$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y)\end{cases}$

【例】设 D 由 $y=x^3$，$y=1$，$x=-1$ 围成，则 $I=\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)d\sigma=$（　）

（A）0　　（B）$2\iint\limits_{D_1} xyd\sigma$

（C）$2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin yd\sigma$　　（D）$2\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)d\sigma$

其中，D_1 为 D 在第一象限的部分.

2）轮换

如：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续恒正，证明：$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx \geq (b-a)^2$.

若将 D 中的 x 与 y 对调后，区域 D 不变，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(y,x)d\sigma$. 叫轮换对称性.

【例 1】设区域 $D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\leq 1, x\geq 0, y\geq 0\right\}$，$f(x)$ 为 D 上的正值连续函数，a,b 为常数，求 $I=\iint\limits_D \frac{a\sqrt{f(x)}+b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}d\sigma$.

【自练】计算 $I=\iint\limits_D \sin(x^3+y^3)d\sigma$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle| |x|+|y|\leq 1\right\}$.

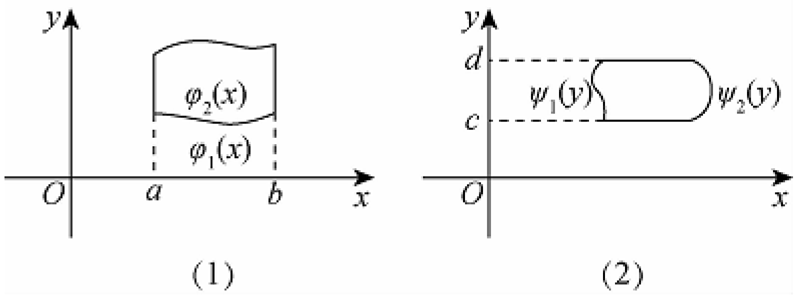
二、计算

1．基础题

（1）直角坐标系下的计算法

① $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ 其中 D 为 X 型区域：$\varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)$，$a\leq x\leq b$；

② $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ 其中 D 为 Y 型区域：$\psi_1(y)\leq x\leq \psi_2(y)$，$c\leq y\leq d$.



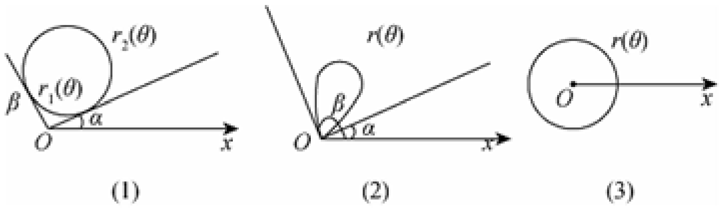
(1) (2)

（2）极坐标系下的计算法

① $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D外部）

② $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D内部）

③ $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{r(\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr.$ （极点O在区域D边界上）



(1) (2) (3)

2．技术题

（3）换序

【例 1】交换$\int_{-1}^0dy\int_2^{1-y}f(x,y)dx$的积分次序.

【例 2】交换$\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{1+\cos\theta}^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$的积分次序.

（4）对称性

（5）形心公式的逆用（仅数一）

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x d\sigma}{\iint\limits_D 1 d\sigma},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y d\sigma}{\iint\limits_D 1 d\sigma}\Rightarrow$$

若D为规则图形（即：形心、图形面积易知），则$\iint\limits_D x d\sigma=\bar{x}\cdot S_D$，$\iint\limits_D y d\sigma=\bar{y}\cdot S_D$.

【例】计算$I=\iint\limits_D (x+y)d\sigma$，$D=\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le x+y+1\right\}$.

三、综合题分析

【例 1】计算$I=\iint\limits_D \frac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}d\sigma$，$D=\left\{(x,y)\middle| 1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$.

【例 2】$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\,drd\theta$，$D=\left\{(r,\theta)\middle| 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le\sec\theta\right\}$.

第五讲　微分方程

综述

1．概念及其应用

2．一阶方程的求解

3．高阶方程的求解

一、概念及其应用

1．微分方程：$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$

2．微分方程的阶数：方程中 y 的最高阶导数的次数

3．通解：解中所含独立常数的个数等于方程的阶数

【例 1】设 $y=y(x)$ 为 $y''-2y'+4y=0$ 的满足 $y(x_0)>0$，$y'(x_0)=0$ 的解，则 $f(x)$ 在 x_0 处（　）

（A）取极大值　　（B）取极小值

（C）某邻域单增　　（D）某邻域单减

【例 2】设 $p(x)$ 与 $q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$q(x)<0$，且设 $y=y(x)$ 为方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 满足 $y(a)=y(b)=0$ 的解，求 $y(x)$ 的表达式，$\forall x\in[a,b]$.

二、一阶方程的求解

1．变量可分离型

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)=g(x)h(y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)}=g(x)dx$$

$$\Rightarrow \int\frac{dy}{h(y)}=\int g(x)dx$$

【例】求 $y'+y^2\tan x=\tan x$ 的通解.

2．齐次型

形如：$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{y}{x})$

令 $\dfrac{y}{x}=u$，则 $y=ux,\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}x+u$，代入得

$$\frac{du}{dx}x+u=f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{dx}{x}$$

【例】求 $ydx-(x+\sqrt{x^2+y^2})dy=0\ (y>0)$ 的通解.

3．一阶线性型

形如：$y'+p(x)y=q(x)$

两边同乘积分因子$e^{\int p(x)dx}$得

$$e^{\int p(x)dx}\left(y'+p(x)y\right)=e^{\int p(x)dx}q(x)$$

两边积分得

$$e^{\int p(x)dx}y=\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C$$

$$\Rightarrow y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+C\right]$$

【例】求$y'=\dfrac{y}{2x}+\dfrac{x^2}{2y}$的通解.

【注】尚有两种类型的方程，貌似二阶，实可降阶.

（1） $y''=f(x,y')$型——缺y

令$y'=p,y''=p'$，$\Rightarrow p'=f(x,p)$

（2） $y''=f(y,y')$——缺x

令$y'=p,y''=\dfrac{dp}{dx}=\dfrac{dp}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=p\dfrac{dp}{dy}$，$\Rightarrow p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)$

三、高阶方程的求解

1. $y''+py'+qy=0$ 二阶常系数线性齐次方程

$\lambda^2+p\lambda+q=0\Rightarrow\lambda_1,\lambda_2$

①$\Delta=p^2-4q>0$，$\lambda_1\neq\lambda_2$，通解$y=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

②$\Delta=p^2-4q=0$，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，通解$y=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

③$\Delta=p^2-4q<0$，$\lambda_{1,2}=\dfrac{-p\pm\sqrt{4q-p^2}i}{2}=-\dfrac{p}{2}\pm\dfrac{\sqrt{4q-p^2}i}{2}=\alpha+\beta i$，通解

$y=e^{\alpha x}[C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x]$

【例】设 $\cos x$ 与 xe^x 为 4 阶常系数线性齐次微分方程的两个解，则首项系数为 1 的该方程为________.

2．1） $y''+py'+qy=e^{\alpha x}\cdot P_m(x)$

设 $y^*=e^{\alpha x}\cdot Q_m(x)\cdot x^k, k=\begin{cases}0 & \alpha\text{不是齐次特征方程的根}\\ 1 & \alpha\text{是齐次特征方程的单根}\\ 2 & \alpha\text{是齐次特征方程的重根}\end{cases}$

【例】 $y''-4y=e^x(2x+3)$

2） $y''+py'+qy=e^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$

设 $y^*=e^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}\sin\beta x]x^k \quad (l=\max\{m,n\})$

$k=\begin{cases}0 & \alpha\pm\beta i\text{不是齐次特征方程的根}\\ 1 & \alpha\pm\beta i\text{是齐次特征方程的单根}\end{cases}$

【例】 $y''+4y=2\cos 2x$

第六讲　无穷级数（数一、三）

综述

1．数项级数的判敛
2．幂级数的收敛域
3．展开与求和

引言

1．概念（本质）

（1）级数的定义　给定一个数列$u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$，则称$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$为(常数项)无穷级数，简称(常数项)级数，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$.

（2）级数的部分和　称$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$ 为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和.

（3）级数的敛散性　若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（存在），则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，极限$S$叫做该级数的和，并写成$S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$；若$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$不存在，则称级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

（4）如果$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

2．分类

$$
\text{级数}\begin{cases}
\text{（常）数项级数}\begin{cases}
\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\geq 0)\text{——正项级数}\\
\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)\text{——交错级数}\\
\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(u_n\text{符号无限制})\text{——任意项级数}
\end{cases}\\
\text{函数项级数——幂级数}\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n
\end{cases}
$$

一、数项级数的判敛

1．正项级数（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n\geq 0$）的判敛

1）收敛原则

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Leftrightarrow \{S_n\}$ 有上界.

【例】设 $a_n > 0\ (n=1,2,\cdots)$，$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$，则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的__________条件.

2）比较判别法

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，且 $u_n \le v_n$，则 $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散} \end{cases}$

3）比较判别法的极限形式

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \overset{\frac{0}{0}}{=} \begin{cases} 0 \quad \Rightarrow u_n \text{是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases} \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛，则} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛} \\ \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散，则} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散} \end{cases} \\ \infty \quad \Rightarrow v_n \text{是高阶无穷小} \Rightarrow \begin{cases} \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛，则} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛} \\ \text{若} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{发散，则} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散} \end{cases} \\ A \ne 0 \Rightarrow u_n \text{与} v_n \text{是同阶无穷小} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{与} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{同敛散} \end{cases}$$

4）比值判别法（达朗贝尔判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \Rightarrow \text{级数收敛}\\ \rho>1 & \Rightarrow \text{级数发散}\\ \rho=1 & \Rightarrow \text{该法失效，另谋他法（一般转而用比较判别法）}\end{cases}$$

5）根值判别法（柯西判别法）

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho\begin{cases}\rho<1 & \Rightarrow \text{级数收敛}\\ \rho>1 & \Rightarrow \text{级数发散}\\ \rho=1 & \Rightarrow \text{该法失效，另谋他法（一般转而用比较判别法）}\end{cases}$$

【例 1】判别下列级数的敛散性

（1） $\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}dx$

（2） $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n}-\ln(1+\frac{1}{n})]$

【例 2】判别 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 在 $x=2$ 、3 处的敛散性.

【例 3】设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$0<a_n<\dfrac{\pi}{2}$，$0<b_n<\dfrac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

（Ⅰ）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

（Ⅱ）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$收敛.

2．交错级数$(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n,u_n>0)$的判敛

莱布尼茨判别法　若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$满足条件：

(1)　$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$；　　(2)　$u_n\ge u_{n+1}$　($n=1, 2, 3, \cdots$)；

则级数收敛.

【例 1】判别$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$的敛散性.

【例 2】判别$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$的敛散性.

3．任意项级数（$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$u_n$符号无限制）的判敛

1）思路上：一般都是先把一般项u_n加上绝对值，变成正项级数后再去讨论问题，即

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$.于是，判别正项级数敛散性的种种方法均可能派上用场.

2）理论上：

若$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛.

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 但$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$发散$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$条件收敛.

【例 1】判别$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{n}$的敛散性.

【例 2】设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则判别$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n |a_n|}{\sqrt{n^2+\alpha}} (\alpha > 0)$的敛散性.

二、幂级数的收敛域

1．幂级数

若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一般项$u_n(x)$是幂函数，则称$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$为幂级数，它是一种特殊且常用的函数项级数，其一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots \quad ;$$

其标准形式为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ ；其中a_n为幂级数的系数.

收敛点与发散点　若给定$x_0 \in I$，有$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛，则称点$x_0$为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点；若

给定 $x_0 \in I$，有 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称点 x_0 为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的发散点.

收敛域 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的所有收敛点的集合称为它的收敛域.

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的首要任务是判别敛散性，因为只有收敛了才有继续讨论它的意义，具体说来，将某个 x_0 代入级数 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$，判别此数项级数是否收敛，我们的目标当然是：找到所有收敛点的集合，即收敛域.

2．阿贝尔定理

当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq 0)$ 处收敛时，对于满足 $|x| < |x_1|$ 的一切 x，幂级数**绝对收敛**；当幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_2 (x_2 \neq 0)$ 处发散时，对于满足 $|x| < |x_2|$ 的一切 x，幂级数**发散**.

3．求收敛域的程序

1）对级数加绝对值变为正项级数；

2）用正项级数的判别法（比值法、根值法）计算；

3）单独讨论级数在端点处的敛散性.

综合 2、3 得出收敛域.

【例】$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 3^n}$ 的收敛域为________.

三、展开与求和

1．展开

如果函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处存在任意阶导数，则称

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

为函数 $f(x)$ 在 x_0 处的**泰勒级数**，记作 $f(x)\sim\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$，其中“～”叫做“可展开为”

特别当 $x_0=0$，则称 $f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$ 为函数 $f(x)$ 的**麦克劳林级数**，记作 $f(x)\sim\sum\limits_{h=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

【例 1】将 $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x-2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

【例 2】将 $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ 展开成 $(x-3)$ 的幂级数.

注：几个重要函数的展开式

（1）$e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$

（2）$\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}x^n+\cdots,\quad(-1<x<1)$

（3）$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n+\cdots,\quad(-1<x<1)$

（4）$\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\quad(-1<x\le 1)$

（5）$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

（6）$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)\ !}+\cdots\ (-\infty<x<+\infty)$

（7）$(1+x)^\alpha=1+\alpha\ x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$

这里，（1）至（6）右端x的取值范围是指收敛域，而对于（7），问题比较复杂，其收敛区间的端点是否收敛与α的取值有关，可以证明(这里不证)：

当$\alpha\le -1$时,收敛域为$(-1,1)$；当$-1<\alpha<0$时,收敛域为$(-1,1]$；当$\alpha>0$时,收敛域为$[-1,1]$.

2．求和 $\sum a_nx^n=y(x)$

【例 1】求$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot x^n$，$|x|<1$.

【例 2】求$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，$|x|<1$.

注：几个重要级数的和函数

(1)$\sum_{n=k}^{\infty}cx^n=\frac{cx^k}{1-x}\quad(|x|<1,k\in Z^+)$.

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad(-1<x<1).$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n}=x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}\qquad(-1<x<1).$$

$$(4)\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}=x^2\frac{1}{(1-x)^2}=\frac{x^2}{(1-x)^2}\qquad(|x|<1).$$

$$(5)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)''=\left(\frac{1}{1-x}\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}\qquad(|x|<1).$$

$$(6)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{n-1}dt=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)\qquad(-1\le x<1).$$

四、傅里叶级数（仅数一）

1．狄利克雷收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数，如果在 $[-l,l]$ 上 $f(x)$ 满足：

（1）连续或只有有限个第一类间断点；

（2）只有有限个极值点；

则 $f(x)$ 的傅里叶级数处处收敛，记其和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

且
$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\text{为连续点}\\ \dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2} & x\text{为第一类间断点}\\ \dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2} & x\text{为端点}\end{cases}$$

【例】设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\le x\le 0,\\ x-1, & 0<x\le 1\end{cases}$ 的周期为 2 的傅里叶级数为 $S(x)$，则在 $x=-\frac{1}{2}$，$x=0$，$x=1$，$x=\frac{3}{2}$ 处，$S(x)$ 分别收敛于________，________，________，________.

2．周期为 $2l$ 的周期函数的傅里叶级数

设周期为$2l$的周期函数$f(x)$满足狄利克雷收敛定理的条件，则它的傅里叶级数为

$$f(x)\sim S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中系数a_n和b_n分别为

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

考研的实际考题分为以下三种情况：

1、将普通周期函数$f(x)$在$[-l,l]$上展开为傅里叶级数

$$\text{展开系数为}\begin{cases} a_0=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)dx \\ a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

2、将奇偶周期函数$f(x)$在$[-l,l]$上展开为傅里叶级数

$$\text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时，展开系数为}\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式，故也称为正弦级数.

$$\text{当 } f(x) \text{ 为偶函数时，展开系数为}\begin{cases} a_0=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)dx \\ a_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n=0 \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式，故也称为余弦级数.

3、将非对称区间$[0,l]$上的函数$f(x)$展开为正弦级数或者余弦级数

$$[0,l]\text{上的}f(x)\begin{cases} \xrightarrow[\text{需作奇延拓}]{\text{若要求展开成正弦级数}}\text{得到}[-l,l]\text{上的奇函数}f(x) \\ \xrightarrow[\text{需作偶延拓}]{\text{若要求展开成余弦级数}}\text{得到}[-l,l]\text{上的偶函数}f(x) \end{cases}$$

$$\text{当 } f(x) \text{ 为奇函数时，展开系数为}\begin{cases} a_0=0 \\ a_n=0 \\ b_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \end{cases}$$

此时的傅里叶展开式由于只含正弦函数表达式，即展开为了正弦级数.

当 $f(x)$ 为偶函数时，展开系数为 $\begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)dx \\ a_n = \dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}dx \quad (n=1,2,3,\cdots) \\ b_n = 0 \end{cases}$

此时的傅里叶展开式由于只含余弦函数表达式，即展开为了余弦级数.

【例 1】设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx$，$n=1,2,\cdots$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$，则求 $S(-\dfrac{9}{4})$.

【例 2】将 $f(x)=1-x^2 (0\le x\le \pi)$ 展开成余弦级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

第七讲 多元函数积分学的预备知识（数一）

综述

1．向量代数与空间解析几何

2．多元微分学的几何应用

3．场论初步

一、向量代数与空间解析几何

1．向量运算及其应用

设$\vec{a}=\left\{a_x,a_y,a_z\right\}$，$\vec{b}=\left\{b_x,b_y,b_z\right\}$，$\vec{c}=\left\{c_x,c_y,c_z\right\}$

①$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$

②$\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$

③$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0\Leftrightarrow\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$$

2．空间平面与空间直线

①空间平面　　平面的法线向量$\vec{n}=\left(A,B,C\right)$

一般式　$Ax+By+Cz+D=0$

点法式　$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

②空间直线　　直线的方向向量$\vec{\tau}=\left(l,m,n\right)$

点向式　$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$

3．空间曲线与空间曲面

①曲线在坐标面上的投影曲线

以Γ投至xoy面为例.

（1）将Γ：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$中的$z$消去$\Rightarrow \varphi(x,y)=0$

（2）则投影曲线包含于曲线$\begin{cases} \varphi(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$中，其他投影类推.

【例 1】将空间曲线$\begin{cases} 2z-y=0 \\ x^2+y^2+z^3-yz=1 \end{cases}$投影至$xoy$面，求其投影曲线及所围区域.

②旋转曲面方程

1）问题提法：曲线Γ：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$绕直线$L$：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$旋转一周所得曲面$\Sigma$.

2）求法

设$M_0=(x_0,y_0,z_0)$，$s=(m,n,p)$.在母线Γ上任取一点$M_1=(x_1,y_1,z_1)$，则过M_1的纬圆上任何一点$P(x,y,z)$满足条件$\overrightarrow{M_1P}\perp s$和$\overrightarrow{M_0P}=\overrightarrow{M_0M_1}$，即

$$\begin{cases} m(x-x_1)+n(y-y_1)+p(z-z_1)=0 \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2 \end{cases}$$

这两个方程与方程$F(x,y,z)=0$和$G(x,y,z)=0$一起消去x_1，y_1，z_1便得到旋转曲面的方程.

【例 1】求Γ：$\begin{cases} x-y+2z-1=0 \\ x-3y-2z+1=0 \end{cases}$绕$y$轴旋转一周所得曲面$\Sigma$的方程.

【例 2】设直线 L 过 $A(1,0,0)$， $B(0,1,1)$，将 L 绕 z 轴旋转一周得曲面 Σ，求 Σ 的方程.

二、多元微分学的几何应用

1．空间曲面的切平面

（1）设空间曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出， $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的点，则

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量（垂直于该点切平面的向量）为

$$\vec{n}=\{F_x'(x_0,y_0,z_0),F_y'(x_0,y_0,z_0),F_z'(x_0,y_0,z_0)\}$$

且法线方程为 $$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z'(x_0,y_0,z_0)}$$

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$F_x'(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y'(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z'(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

（2）设空间曲面 Σ 由方程 $z=f(x,y)$ 给出，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z,$ 则

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量（垂直于该点切平面的向量）为

$$\vec{n}=\{f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0),-1\}$$

且法线方程为 $$\frac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

曲面 Σ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切平面方程为

$$f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$$

【例】曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为________.

2．空间曲线的切线

①空间曲线 Γ 由参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$ 给出，t 为参数，曲线上一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，当 $t=t_0$ 时，

曲线在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的切向量 $\tau=\left\{x'(t)\big|_{t_0},y'(t)\big|_{t_0},z'(t)\big|_{t_0}\right\}$.

②空间曲线 Γ 由交面式方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 给出，

取切向量 $\vec{\tau}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ F_x'\big|_{P_0} & F_y'\big|_{P_0} & F_z'\big|_{P_0} \\ G_x'\big|_{P_0} & G_y'\big|_{P_0} & G_z'\big|_{P_0} \end{vmatrix}=\{l,m,n\}$

【例】设点 P 为椭球面 S： $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xoy 面垂直，求点 P 的轨迹 C.

三、场论初步

1．方向导数

（1）定义法

设函数$u=u(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$的某空间邻域$U\subset R^2$内有定义，l为从点P_0出发的射线，$P(x,y)$为l上且在U内的任一点，且令

$$\begin{cases} x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha \\ y-y_0=\Delta y=t\sin\alpha \end{cases}$$

以$t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$表示$P$与$P_0$之间的距离，若极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)-u(x_0,y_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数$u=u(x,y)$在点P_0沿方向l的方向导数，记作$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$.

（2）公式法

设函数$u=u(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微，则$u=u(x,y)$在点P_0处沿任一方向l的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\sin\alpha .$$

【例】设$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$，求$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}$（任给$\vec{l}$）.

2．梯度

设二元函数$u=u(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$具有一阶偏导数，则定义

$$\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}=\left\{u'_x(P_0),u'_y(P_0)\right\}$$

为函数$u=u(x,y)$在点P_0处的**梯度**.

3．两者关系

由方向导数的计算公式$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\sin\alpha$与梯度的定义$\left.\mathbf{grad}u\right|_{P_0}=\left\{u'_x(P_0),u'_y(P_0)\right\}$，可得到

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}=\left\{u'_x(P_0),u'_y(P_0)\right\}\bullet\left\{\cos\alpha,\sin\alpha\right\}=\mathbf{grad}u\big|_{P_0}\bullet\overrightarrow{l^o}$$

$$=\left|\mathbf{grad}u\big|_{P_0}\right|\left|\overrightarrow{l^o}\right|\cos\theta=\left|\mathbf{grad}u\big|_{P_0}\right|\cos\theta$$

其中θ为$\mathbf{grad}u\big|_{P_0}$与$\overrightarrow{l^o}$的夹角，当$\cos\theta=1$时，$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{P_0}$有最大值.

于是我们可以得出结论：函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得方向导数最大值的方向一致，而它的模为方向导数的最大值.

4．散度 $divU$

$$\vec{U}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

$$div\vec{U}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

5．旋度 $\overrightarrow{rot}\vec{U}$

$$\overrightarrow{rot}\vec{U}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

第八讲 多元函数积分学（数一）

三重积分

综述

1．概念与性质

2．计算

一、概念

设三元函数 $f(x,y,z)$ 定义在三维有界空间区域 Ω 上，则三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i \,.$$

注 （1）将 Ω 无限分割的 $\boxed{\Delta v_i > 0}$，λ 为所有 Δv_i 的直径的最大值，强调该极限与对区域 Ω 的分割方式无关；

（2）从几何上来说很抽象了，是四维空间的图形体积，无法画出图形；但是其物理背景仍然可以被我们所理解，就是以 $f(x,y,z)$ 为点密度的空间物体的质量：

$$M = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv$$

（3）要了解三重积分的存在性．设空间有界闭区域 Ω 的边界是分片光滑曲面，当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，或者当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上有界，且在 Ω 上除了有限个点、有限条光滑曲线和有限块光滑曲面外都是连续的，则它在 Ω 上可积,也就是三重积分存在．在考研数学中，一般总假设 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续，也就是三重积分总是存在的.

二、计算结构

1．基础题

①坐标系

1^0 直角坐标系：$dV = dxdydz$

2^0 柱面坐标系：$dV = d\theta \cdot rdrdz$

3^0 球面坐标系：$dv = r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta$，$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} d\varphi \int_{r_1(\varphi,\theta)}^{r_2(\varphi,\theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi dr$$

②计算的三个方面

1^0先一后二法（投影法）

先做关于某个变量（如z）的定积分，然后做关于另外两个变量（如x,y）的二重积分，具体说来，如果先对z积分，则要将Ω投影到xoy面上，得到投影区域D_{xy}，过D_{xy}内任意一点(x,y)作平行于 z 轴的直线，使之穿过Ω，先碰到Ω的记为$z=z_1(x,y)$，后离开Ω的记为$z=z_2(x,y)$， 则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y.z)dv = \iint_{D_{xy}} d\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y.z)dz$$

2^0先二后一法（截面法）

先做关于某两个变量（如x,y）的二重积分，然后做关于另一变量（如z）的定积分，具体说来，如果先对x,y积分，则要将Ω投影到z轴得坐标$z\in[e,f]$，然后对任给$z\in[e,f]$，用$z=h$的平面（平行于xoy平面）去截Ω，得到一个平面闭区域D_z，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv = \int_c^d dz \iint_{D_z} f(x,y,z)dxdy$$

【注】以下情况优先考虑先二后一法：（1）被积函数仅是z的函数，（2）用垂直于z的平面去截Ω所得$D(z)$是圆域或其部分（比如旋转体）.

3^0柱面坐标系就是“直角坐标系+极坐标系”，是我们都学过且熟悉的知识. 联系直角坐标系与柱坐标系的桥梁为：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

其中， $0\le r\le +\infty, 0\le\theta\le 2\pi, -\infty\le z\le +\infty$

于是，柱面坐标系中的体积元素: $dv = rdrd\theta dz$，且积分写为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{\Omega} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r dr d\theta dz .$$

4^0球面坐标系：$r \to \varphi \to \theta$

【例 1】计算 $I = \iiint_{\Omega} zdv$，其中Ω是由$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$围成的.

【例 2】计算 $I = \iiint_{\Omega} zdv$，其中$\Omega = \left\{(x,y,z) \middle| z \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}z, 0 \le z \le 4\right\}$

2．技术题

①换序

【例】计算 $I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_{x+y}^1 \frac{\sin z}{z} dz$.

②形心公式

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} xdv}{\iiint\limits_{\Omega} dv} \Rightarrow \iiint\limits_{\Omega} xdv=\bar{x}\cdot V$$

【例】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(2x+y-z)dv$，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|(x-1)^2+(y-2)^2+z^2\le a^2, a>0\right\}$.

③对称性

1^0 普通对称性

假设 Ω 关于 xoz 面对称，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\begin{cases}2\iiint\limits_{\Omega_1} f(x,y,z)dv, & f(x,y,z)=f(x,-y,z)\\ 0, & f(x,y,z)=-f(x,-y,z)\end{cases}$$

其中 Ω_1 是 Ω 在 xoz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况类似，请大家自己独立作出.

2^0 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后，Ω 不变，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega} f(y,x,z)dv$$

这就是**轮换对称性**.

【例】计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)dv$，$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\le a^2, a>0\right\}$.

第一型曲线积分

一、概念

设数量函数 $f(x,y)$ 定义在空间光滑曲线 L 上，则 $f(x,y)$ 沿曲线 L 的第一型曲线积分为

$$\int_L f(x,y)ds=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta l_i$$

注（1）将 L 无限分割的$\boxed{\Delta l_i>0}$，$\lambda=\max\left\{\Delta l_i\right\}$，强调该极限与对曲线 L 的分割方式无关；

（2）其物理背景是以 $f(x,y)$ 为线密度的空间物质曲线的质量：$M=\int_L f(x,y)ds$

（3）定积分定义在“直线段”上，而第一型曲线积分是定义在“曲线段”上，第一型曲线积分是定积分的推广，这样就不难理解为什么后面要把第一型曲线积分化为定积分计算了.

（4）了解两个可积条件即可：设空间曲线 L 是分段光滑曲线，当 $f(x,y)$ 在 L 上连续, 或者当 $f(x,y)$ 在 L 上有界, 且在 L 上除了有限个点外都是连续的，则它在 L 上的第一型曲线积分存在. 在考研数学中，一般总假设 $f(x,y)$ 在 L 上连续，也就是第一型曲线积分总是存在的.

二、计算结构

1．基础题——化为定积分

① 若平面曲线 L 由参数式 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$）给出，则 $ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}dt$，

且 $$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}dt$$

② 若平面曲线 L 由 $\begin{cases} y=y(x) \\ x=x \end{cases}\left(a\le x\le b\right)$ 给出，则 $ds=\sqrt{1+\left[y'(x)^2\right]}dx$，

且 $$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left[y'(x)^2\right]}dx$$

③ 若平面曲线 L 由 $L:r=r\left(\theta\right)$ $\left(\alpha\le\theta\le\beta\right)$ 给出，则 $ds=\sqrt{\left[r(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta$,

且 $$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{\left[r(\theta)\right]^2+\left[r'(\theta)\right]^2}d\theta$$

2．技术题

① 边界方程带入被积函数（由于被积函数就定义在边界方程上，故应将边界方程的表达式带入到被积函数中，从而简化计算，这一点要切记.）

② 形心公式的逆用（由 $\bar{x}=\dfrac{\int_L xds}{\int_L ds}\Rightarrow\int_L xds=\bar{x}\cdot l_L$，其中 l_L 为 L 的长度.）

③ 对称性

1^0 普通对称性

假设 L 关于 y 轴对称，则

$$\int_L f(x,y)ds=\begin{cases}2\int_{L_1} f(x,y)ds, & f(x,y)=f(-x,y)\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y)\end{cases}$$

其中 L_1 是 L 的右半平面.

关于 x 轴对称的情况与此类似.

2^0 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后，L 不变，则

$$\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$$

这就是轮换对称性.

【例】计算 $I=\oint_L (x\sin\sqrt{x^2+y^2}+x^2+3y^2-5y)ds$，其中 $L:\dfrac{x^2}{3}+(y-1)^2=1$，其周长为 a.

第一型曲面积分

一、概念

设数量函数 $f(x,y,z)$ 定义在空间有界光滑曲面 Σ 上，则 $f(x,y,z)$ 沿曲面 Σ 的第一型曲面积分为

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

注 （1）将 Σ 无限分割的 $\boxed{\Delta S_i>0}$，λ 为所有 ΔS_i 的直径的最大值，强调该极限与对曲面 Σ 的分割方式无关；

（2）其物理背景是以 $f(x,y,z)$ 为面密度的**空间物质曲面的质量**：$M=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS$

（3）二重积分定义在“二维平面”上，第一型曲面积分定义在“空间曲面”上，第一型曲面积分是二重积分的推广，这样就不难理解为什么后面要把第一型曲面积分化为二重积分计算了.

（4）了解两个可积条件即可：设空间曲面 Σ 是分段光滑曲面，当 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，或者当 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，且在 Σ 上除了有限个点和有限条光滑曲线外都是连续的，则它在 Σ 上的第一型曲面积分存在. 在考研数学中，一般总假设 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，也就是第一型曲面积分总是存在的.

二、计算结构

1．基础题——化为二重积分

（1）将 Σ 投影到某一平面（比如 xoy 面）上 $\Rightarrow$ 投影区域 D（比如 D_{xy}）

（2）将 $\begin{cases} z=z(x,y) \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$ 代入 $f(x,y,z)$

（3）计算 z_x'，$z' \Rightarrow dS=\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}dxdy$

这就把第一型曲面积分化为了二重积分（如化成关于 x,y 的二重积分），得到

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{D_{xy}} f(x,\ y,z(x,y))\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

化成关于其他变量的二重积分与此类似.

【注】一个隐蔽的计算陷阱

Σ 投影至某坐标面时，Σ 上任何两点的投影点不能重合（$z = z(x, y)$ 为单值函数）

若重合，则 1）转投其他面；2）分成若干投影不会重合的面.

2．技术题

（1）边界方程带入被积函数（由于被积函数定义在边界方程上，故应将边界方程的表达式带入被积函数，从而简化计算，这一点要切记.）

（2）形心公式的逆用（由 $\bar{x} = \dfrac{\iint\limits_{\Sigma} x dS}{\iint\limits_{\Sigma} dS} \Rightarrow \iint\limits_{\Sigma} x dS = \bar{x} \cdot S$，其中 S 为 Σ 的面积.）

（3）对称性

1^0 普通对称性

假设 Σ 关于 xoz 面对称，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \begin{cases} 2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)dS, & f(x,y,z) = f(x,-y,z) \\ 0, & f(x,y,z) = -f(x,-y,z) \end{cases}$$

其中 Σ_1 是 Ω 在 xoz 面前面的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

2^0 轮换对称性

若把 x 与 y 对调后，Σ 不变，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint\limits_{\Sigma} f(y,x,z)dS$$

这就是轮换对称性.

【例】设 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z) \in \Sigma$，π 为 Σ 在点 P 处的切平面. $\rho(x,y,z)$ 是点 $O(0,0,0)$ 到平面π 的距离，求 $I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{z}{\rho(x,y,z)} dS$.

第二型曲线积分

一、概念

预备知识

（1）场

从数学上说，场就是空间区域Ω上的一种对应法则.

（1）如果Ω上的每一点$P(x,y,z)$都对应着一个数量u，则在Ω上就确定了一个数量函数

$$u=u(x,y,z)$$

它表示一个数量场，比如温度场就是一个数量场.

（2）如果Ω上的每一点$P(x,y,z)$都对应着一个向量$\mathbf{F}$，则在Ω上就确定了一个向量函数

$$\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$$

它表示一个向量场，比如引力场就是一个向量场.

（2）变力做功

问题可以这样来描述：在一个向量场—变力场中，设某质点在变力$\mathbf{F}(x,y,z)$作用下，沿着有向曲线Γ从起点 A 移动到终点 B，问总共做了多少功？分析如下.

设沿着有向曲线Γ在$P(x,y,z)$点移动了一个微位移$d\bar{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$，并在这种情形下将变力$\mathbf{F}(x,y,z)$近似看做常力，则该力在此微位移上的微功$dW=\mathbf{F}(x,y,z)\bullet d\bar{r}$，于是变力$\mathbf{F}(x,y,z)$沿着有向曲线$\Gamma$从起点 A 移动到终点 B所做的总功为

$$W=\int_\Gamma dW=\int_\Gamma \mathbf{F}(x,y,z)\bullet d\bar{r}=\int_\Gamma\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}\bullet\{dx,dy,dz\}$$

$$=\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

于是就引出了第二型曲线积分的概念.

概念

第二型曲线积分的被积函数$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$（或$\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$）定义在平面曲线$L$（或空间曲线$\Gamma$）上，其物理背景是变力$\mathbf{F}(x,y)$（或$\mathbf{F}(x,y,z)$）在平面曲线$L$（或空间曲线$\Gamma$）上从起点移动到终点所做的总功：

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

或

$$\int_\Gamma P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

【注】（1）定积分、二重积分、三重积分、第一型曲线积分、第一型曲面积分有着完全一致的背景描述，都是一个数量函数在定义区域上计算几何量（面积，体积等）；

（2）第二型曲线积分是一个向量函数沿有向曲线的积分，无几何量可言，于是，有些性质和计算方法都不一样了，一定要加以对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

（3）设空间曲线Γ是分段光滑曲线，在考研数学中，一般总假设$\mathbf{F}(x,y,z)$在Γ上连续，也就是第二型曲线积分总是存在的.

二、计算结构

1．基础题——化为定积分

如果平面曲线L由参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ （$t:\alpha \to \beta$）给出，其中$t=\alpha$对应着起点 A，$t=\beta$对应着终点 B，则可以将平面第二型曲线积分化为定积分：

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_\alpha^\beta \left[P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t) \right] dt$$

这里的α，β谁大谁小无关紧要，关键是分别和起点与终点对应.

2．技术题

1）边界方程代入被积函数

2）对称性（与前有别）

假设L关于y轴对称，则

$$I = \begin{cases} 0, & Q(x,y) = Q(-x,y) \\ 2\int_{L_1}, & Q(x,y) = -Q(-x,y) \end{cases}$$

其中L_1是y轴右侧部分.

其他情况类似.

3）格林公式

设平面有界闭区域D由分段光滑闭曲线 L 围成，$P(x,y),Q(x,y)$在D上连续且具有一阶连续偏导数，L取正向，则

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma$$

其中，所谓L取正向，是指当一个人沿着L的正向前进时，左手始终在L所围成的D内.

成立要求：①L封闭且取正向；②P，Q，$\frac{\partial Q}{\partial x}$，$\frac{\partial P}{\partial y}$在$D$中连续.

注 一般来说，考试题目不可能直接满足能够使用格林公式的条件，命题人可以破坏两种条件：

（1）L不是封闭曲线，也就是没有围成一个平面有界闭区域D；

（2）即使L围成了一个平面有界闭区域D，但是$P(x,y),Q(x,y),\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$在$D$上不连续；

这两种情况下，不可以直接使用格林公式.

针对（1），我们可以采取“补线法”，补上一条或者若干条线，封闭出一个平面有界闭区

域D，就可以用格林公式了.
针对（2），我们可以采取“挖去法”，把不连续点（可称为“奇点”）挖去，使得条件得以满足，从而使用格林公式.

【例 1】已知L是第一象限中从点$(0,0)$沿圆周$x^2+y^2=2x$到点$(2,0)$，再沿圆周$x^2+y^2=4$到点$(0,2)$的曲线段，计算曲线积分$I=\int_L 3x^2ydx+(x^3+x-2y)dy$.

【例 2】求$I=\oint_{L^+}\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, 其中$L: x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$.

第二型曲面积分

一、概念

在一个向量场（比如电场，磁场或者某种不可压缩流体的速度场）中，Σ 为该场中的某一有向分片光滑曲面，并指定了曲面的外侧，则向量函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 通过曲面 Σ 的通量（比如电场中的电通量，磁场中的磁通量，或者某流体的流量）为

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\vec{S}=\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet\overrightarrow{n^0}dS$$

其中 $\overrightarrow{n^0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ 是有向曲面 Σ 在指定侧的单位法向量.

且由 $d\vec{S}=\{dydz,dzdx,dxdy\}$，得

$$\iint_{\Sigma}\mathbf{F}\bullet d\vec{S}=\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

于是就引出了第二型曲面积分的概念.

第二型曲面积分的被积函数 $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 定义在空间曲面 Σ 上，其物理背景是向量函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 通过曲面 Σ 的通量：

$$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$$

【注】（1）第二型曲面积分是一个向量函数通过某有向曲面的通量（无几何量可言），要加强和前面所学积分的横向对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

（2）设空间曲面 Σ 是一有向分片光滑曲面，在考研数学中，一般总假设 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 在 Σ 上连续，也就是第二型曲面积分总是存在的.

二、计算结构

1．基础题——化为二重积分

对于第二型曲面积分 $\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz+Q(x,y,z)dzdx+R(x,y,z)dxdy$，可以将其拆成三个积分：$\iint_{\Sigma}P(x,y,z)dydz$，$\iint_{\Sigma}Q(x,y,z)dzdx$，$\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$，分别投影到相应的坐标面上，化为二重积分计算，然后再加回去. 直观上，我们比较习惯投影到 xoy 面上去，所以以 $\iint_{\Sigma}R(x,y,z)dxdy$ 为例.

无论空间曲面 Σ 是由显式 $z=z(x,y)$ 还是隐式 $F(x,y,z)=0$ 给出的，我们都需要做三件事（无逻辑上的先后顺序，哪件事情最利于解题就先做哪件）：

（1）将 Σ 投影到某一平面（比如 xoy 面）上 $\Rightarrow$ 投影区域 D（比如 D_{xy}）

（2）将 $z=z(x,y)$ 或 $F(x,y,z)=0$ 代入 $f(x,y,z)$

（3）将 $dxdy$ 写成“$\pm dxdy$”

其中Σ为上侧、右侧、前侧时取“+”，否则取“－”

这就把第二型曲面积分化为了二重积分，得到

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$$

同样需要指出的是，投影时Σ上的任何两点的投影点不能重合，请回看上一讲的相关内容.

2．技术题

（1）边界方程代入被积函数

（2）对称性

假设Σ关于xoz面对称，则

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)dxdz = \begin{cases} 2\iint_{\Sigma_1} Q(x,y,z)dxdz & Q(x,y,z) = -Q(x,-y,z) \\ 0 & Q(x,y,z) = Q(x,-y,z) \end{cases}$$

其中Σ_1是Ω在xoz面右半部分.

其他情况类似.

（3）高斯公式

设空间有界闭区域Ω由有向分片光滑闭曲面Σ围成，$P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$在Ω上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

此外，根据两类曲面积分之间的关系，高斯公式也可表为

$$\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dv$$

其中，Σ是Ω的整个边界曲面的外侧，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\Sigma$上点$(x,y,z)$处的法向量的方向余弦.

成立要求：①Σ封闭且取外侧；②P，Q，R，$\frac{\partial P}{\partial x}$，$\frac{\partial Q}{\partial y}$，$\frac{\partial R}{\partial z}$在$\Omega$中连续.

注 一般来说，考试题目不可能直接满足能够使用高斯公式的条件，命题人可以破坏两种条件：

（1）Σ不是封闭曲面，也就是没有围成一个空间有界闭区域Ω；

（2）即使Σ围成了一个空间有界闭区域Ω，但是$P,Q,\frac{\partial P}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial y},\frac{\partial R}{\partial z}$在$\Omega$上不连续；

这两种情况下，不可以直接使用高斯公式.

针对（1），我们可以采取“补面法”，补上一片或者若干片曲面，封闭出一个空间有界闭区域Ω，就可以用高斯公式了.

针对（2），我们可以采取“挖去法”，把不连续点（可称为“奇点”）挖去，使得条件得以满足，从而使用高斯公式.

【例】求 $I=\oint\limits_{\Sigma_{外}}\dfrac{xdydz+z^2dxdy}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $\Sigma:\begin{cases}x^2+y^2=R^2\\ z=R\\ z=-R\end{cases}$ 所围表面取外侧.