1.(1)

X Y	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}$	$\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}$
1	0	$\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}$	$\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}$	$\frac{C_3^2C_2^1}{C_7^4}$
2	$\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}$	$\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}$	$\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}$	0

于是求得边缘分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4} & \frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4} & \frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4} & \frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_7^4} \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4} & \frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_7^4} & \frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4} \end{pmatrix}$$

(2)

$$P(X=1|Y=2)=\frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)}=\frac{\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}}{\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}}\approx 66.67\%$$

$$P(Y=1|X=2)=\frac{P(X=2,Y=1)}{P(X=2)}=\frac{\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}}{\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}}\approx 57.14\%$$

$$P(Y=1|X\neq 2)=\frac{P(X\neq 2,Y=1)}{P(X\neq 2)}=\frac{P(Y=1)-P(X=2,Y=1)}{1-P(X=2)}\approx 85.71\%$$

(3) 在条件 $Y=2$ 下,X 服从分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}}{\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}} & \frac{\frac{C_3^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}}{\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}} & \frac{\frac{C_3^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}}{\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}} & \frac{\frac{C_3^3C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^1}{C_7^4}}{\frac{C_2^2C_2^2}{C_7^4}+\frac{C_3^1C_2^2C_2^1}{C_7^4}+\frac{C_3^2C_2^2C_2^1}{C_7^4}} \end{pmatrix}$$

(4) 从 $P(X=0,Y=0)\neq P(X=0)\times P(Y=0)$ 知 X,Y 不独立.

2.(1)

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{3}{3(1-\sqrt{(y)})}=\frac{1}{1-\sqrt{y}}.$$

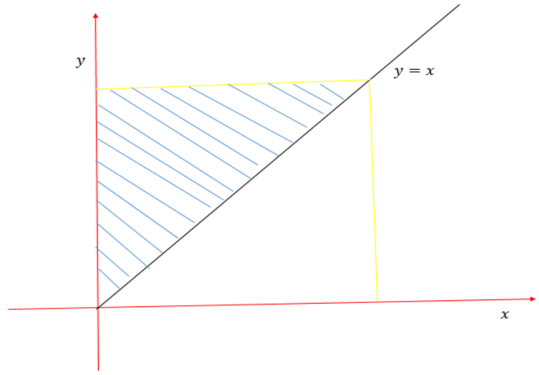
$$f_{Y|X}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{3}{3x^2}=\frac{1}{x^2}.$$

(2)

$$P(X<\frac{2}{3}|Y=\frac{1}{4})=\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{1}{1-\sqrt{\frac{1}{4}}}dx=\frac{1}{3}.$$

$$P(X<\frac{2}{3}|Y>\frac{1}{4})=\frac{P(X<\frac{2}{3},Y>\frac{1}{4})}{P(Y>\frac{1}{4})}=\frac{\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{4}{9}}\int_{\sqrt{y}}^{\frac{2}{3}}3dxdy}{\int_{\frac{1}{4}}^{1}2(1-\sqrt{y})dy}\approx 9.3\%$$

3. 积分区域如图所示



(1)

$$f_X(x)=\int_x^1 3ydy=\frac{3}{2}(1-x^2)$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 3ydx=3y^2$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$ 所以 X,Y 不独立.

(2)

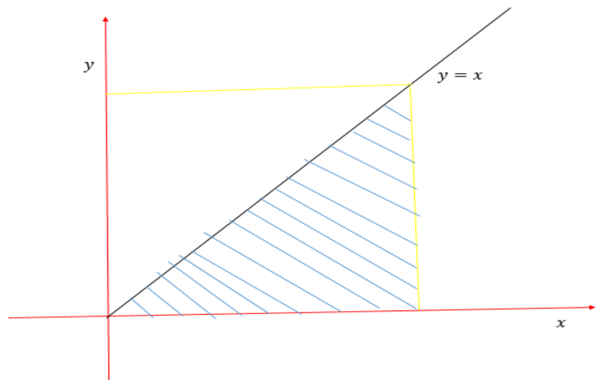
$$f_{X|Y}(x,y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{y}.$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{2y}{1-x^2}$$

4. 当 $x\in(0,1)$ 时,$Y|X=x$ 服从 $(0,x)$ 上的均匀分布. 于是

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & y\in(0,x)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 3x^2 \cdot \frac{1}{x} = 3x.$$



$$f_Y(y) = \int_y^1 3x dx = \frac{3}{2}(1-y^2)$$

$$\Rightarrow P(Y < \frac{1}{2}) = \int_0^1 \frac{3}{2}(1-y^2) dy = \frac{11}{16}$$