1. 设 A 表示事件" 一个人真正在说谎",B 表示事件" 被检测为说谎". 则根据题目可知

$$P(A)=1\%,\quad P(B|A)=88\%,\quad P(B|\overline{A})=14\%$$

(1)

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})\\&=1\%\cdot 88\%+99\%\cdot 14\%\\&=14.74\%.\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}P(\overline{A}|B)&=\frac{P(\overline{A})P(B|\overline{A})}{P(B)}\\&=94.03\%.\end{aligned}$$

2.(1) 无放回的抽取

X 表示抽取的次数, 那么 X 的取值可能为 $1,2,3$. 于是

$$\begin{aligned}P(X=1)&=\frac{\binom{6}{1}}{\binom{8}{1}}=\frac{3}{4}\\P(X=2)&=\frac{\binom{2}{1}\binom{6}{1}}{A_8^2}=\frac{3}{14}\\P(X=3)&=\frac{A_2^2}{A_8^2}=\frac{1}{28}\end{aligned}$$

所以 X 的分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\\frac{3}{4}&\frac{3}{14}&\frac{1}{28}\end{pmatrix}$$

显然分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1\\\frac{3}{4} & 1\le x<2\\\frac{27}{28} & 2\le x<3\\1, & x\ge 3.\end{cases}$$

(2) 有放回抽取

Y 表示抽取的次数, 显然 Y 可能的取值为 $1,2,3,4,\cdots,n,\cdots$.Y 服从几何分布, 因此每次抽取抽到次品的概率为

$$p=\frac{\binom{2}{1}}{\binom{8}{1}}=\frac{1}{4}$$

因此有

$$P(Y=k)=p^{k-1}(1-p)=\frac{3}{4^k},k=1,2,3,\cdots$$

所以 Y 的概率分布为

$$Y\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & \cdots \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{16} & \cdots & \frac{3}{4^k} & \cdots \end{pmatrix}$$

3.X 的密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

因为 $X\sim e(3)$,$Y=1-e^{-3X}$, 所以取 $y\in(0,1)$, 那么

$$\begin{aligned} F_Y(y)&=P(1-e^{-3X}\le y) \\ &=P(X\le -\frac{1}{3}\ln(1-y)) \\ &=y. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Y(y)=\begin{cases} 1, & y\in(0,1) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

4. 由题可知 X 服从参数为 $(2,\frac{1}{4})$ 的 Γ 分布, 于是

$$\begin{aligned} P(\{X>8\})&=1-F(8) \\ &=\int_8^{+\infty}\frac{x}{16}e^{-\frac{x}{4}}dx \\ &=3e^{-2}. \end{aligned}$$

Y 可能的取值为 $0,1,2,3$. 所以

$$\begin{aligned} P(Y\ge 3)&=\binom{3}{3}(3e^{-2})^3 \\ &=27e^{-6}. \end{aligned}$$

5. (1)

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=1)+P(X=0,Y=2)\\
&= 0.25+0.10+0.30=0.65\\
P(X=1) &= P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=1)+P(X=1,Y=2)\\
&= 0.15+0.15+0.05=0.35.\\
P(Y=0) &= P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=0)\\
&= 0.25+0.15=0.4\\
P(Y=1) &= P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=1)\\
&= 0.10+0.15=0.25\\
P(Y=2) &= P(X=0,Y=2)+P(X=1,Y=2)\\
&= 0.30+0.05=0.35.
\end{aligned}$$

所以 X, Y 的分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.65 & 0.35 \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.4 & 0.25 & 0.35 \end{pmatrix}$$

(2) 由 (1) 可知

$$E(X)=0.35 \quad E(Y)=0.95$$

由 (X,Y) 的联合分布律可求得

$$\begin{aligned}
E(XY) &= 1\times 0.15+2\times 0.05\\
&= 0.25.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY)-E(X)E(Y)\\
&= 0.25-0.35\cdot 0.95\\
&= -0.0825.
\end{aligned}$$

(3) $Z=|X-Y|$ 的可能取值为 $0,1,2$. 可求得

$$\begin{aligned}
P(Z=0)&=P(X=0,Y=0)+P(X=1,Y=1)\\
&=0.25+0.15=0.4\\
P(Z=1)&=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=1,Y=2)\\
&=0.10+0.15+0.05=0.30\\
P(Z=2)&=P(X=0,Y=2)\\
&=0.30.
\end{aligned}$$

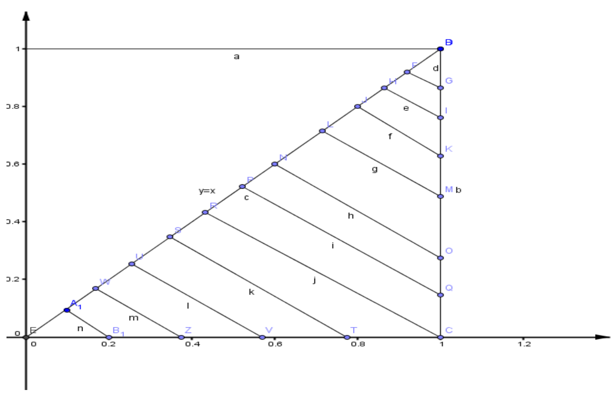
所以 Z 的分布律为

$$Z\sim\begin{pmatrix}0&1&2\\0.40&0.30&0.30\end{pmatrix}$$

求得

$$E(Z)=0\times0.40+1\times0.30+2\times0.30=0.90.$$

6.



(1) 根据密度函数的规一性有

$$\begin{aligned}
&\iint_G f(x,y)dxdy=1\\
\Rightarrow&\int_0^1\int_0^x Axydydx=1\\
\Rightarrow&A=8.
\end{aligned}$$

(2) 如图可知

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^x 8xydy \\
&= 4x^3. \\
\Rightarrow f_X(x) &= \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \\
f_Y(y) &= \int_y^1 8xydx \\
&= 4y - 4y^3. \\
\Rightarrow f_Y(y) &= \begin{cases} 4y - 4y^3, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

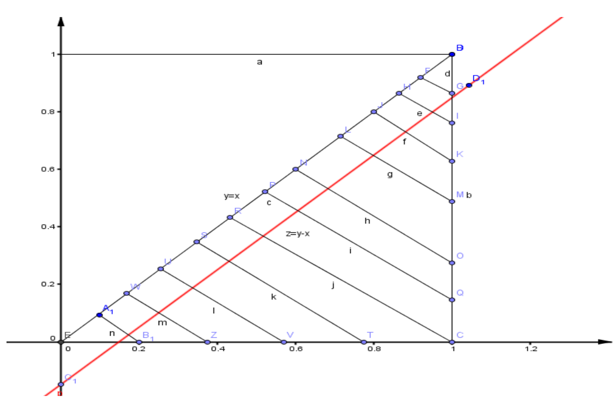
(3) 从 (2) 可知

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\
\Rightarrow f_{Y|X}(y|x) &= \begin{cases} \frac{2y}{x^2}, & 0 < y < x < 1, \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
P(Y \le \frac{1}{4}|X = \frac{1}{3}) &= \int_0^{\frac{1}{4}} f_{Y|X=\frac{1}{3}}(y|\frac{1}{3})dy = \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{2y}{(\frac{1}{3})^2}dy \\
&= \frac{9}{16}.
\end{aligned}
$$

(5) 如图



由图可知 $Z \in (-1,0)$, 取 $z \in (-1,0)$, 则

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(Y - X \le z) \\ &= \int_{-z}^{1}\int_{0}^{x+z} 8xydydx \\ &= -\frac{1}{3}(z+1)^3(z-3). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_Z(z) = \begin{cases} -\frac{4}{3}(z+1)^2(z-2), & z \in (-1,0), \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(6) 显然

$$f_X(x) \cdot f_Y(y) \neq f(x,y)$$

所以 X 与 Y 不独立.