全概率公式与贝叶斯公式、
事件的独立性与伯努利概型

王友乐

电话：18980082143

邮箱：Eleconnection@126.com

2015 年 3 月 25 日

一、选择题

1.C

2.D

3.C

证明.

$$P(A|B)+P(\overline{A}|\overline{B})=1\Rightarrow P(A|B)=$$

$$1-P(\overline{A}|\overline{B})\Rightarrow P(A|B)=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

$$\Rightarrow P(A|B)-P(AB)=P(A)-P(AB)\Rightarrow P(A|B)=P(A).$$

二、填空题

1.$[1-(1-p)^2]p^2$ 或 $p^3(2-p)$.

2.80%.

3.49.

三、解答题

1. 记

$$A=\{\text{乘火车}\},B=\{\text{轮船}\},C=\{\text{乘汽车}\},D=\{\text{飞机}\},E=\{\text{迟到}\}$$

于是

$$P(E)=P(A)P(E|A)+P(B)P(E|B)+P(C)P(E|C)+P(D)P(E|D)$$

$$=0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0=15\%$$

2. 分别计算三个条件概率

$$P(A|E)=\tfrac{P(A)P(E|A)}{P(E)}=50\%$$
$$P(B|E)=\tfrac{P(B)P(E|B)}{P(E)}\approx 44.44\%$$
$$P(C|E)=\tfrac{P(C)P(E|C)}{P(E)}\approx 5.56\%$$

比较可知, 最有可能是坐火车.

2. 问题是实际患有关节炎而检验结果为未患有的概率. 设

$$A=\{\text{实际患有关节炎}\},B=\{\text{检验结果为患有关节炎}\}$$

由题意有

$$P(A)=10\%,\quad P(B|A)=85\%,\quad P(B|\overline{A})=4\%$$

于是

$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)P(\overline{B}|A)}{P(A)P(\overline{B}|A)+P(\overline{A})P(\overline{B}|\overline{A})}\approx 1.71\%.$$

3.(1)

$$A_k=\{甲中取出\ k\ 件次品\},B=\{乙中取出次品\}$$

$$P(B)=\sum_{k=0}^{2}P(A_k)P(B|A_k)$$

$$=\frac{C_{10}^2}{C_{15}^2}\frac{C_3^1}{C_{17}^1}+\frac{C_{10}^1C_5^1}{C_{15}^2}\frac{C_4^1}{C_{17}^1}+\frac{C_5^2}{C_{15}^2}\frac{C_5^1}{C_{17}^1}\approx 21.57\%$$

(2) 记 F_1 表示选中甲,F_2 表示选中乙. 且 $P(F_1)=P(F_2)=50\%$. 记 $T=\{有一件正品和一件次品\}$.

$$P(T)=P(F_1)P(T|F_1)+P(F_2)P(T|F_2)$$

$$=50\%\times\frac{C_{10}^1C_5^1}{A_{15}^2}A_2^2+50\%\times\frac{C_{12}^1C_3^1}{A_{15}^2}A_2^2\approx 40.95\%.$$

首先要考虑选中的箱子是甲或乙, 因此要讨论两种情况, 用全概率公式. 记 $C_i=\{第\ i\ 次抽取的是正品\}$, 于是

标准解法:

$$P(C_1|\overline{C}_2)=\frac{P(C_1\overline{C}_2)}{P(\overline{C}_2)}=\frac{P(F_1)P(C_1\overline{C}_2|F_1)+P(F_2)P(C_1\overline{C}_2|F_2)}{\sum_i P(F_i)P(\overline{C}_2|F_i)}$$

$$=\frac{P(F_1)P(C_1|F_1)P(\overline{C}_2|C_1F_1)+P(F_2)P(C_1|F_2)P(\overline{C}_2|C_1F_2)}{\sum_i P(F_i)P(\overline{C}_2|F_i)}$$

$$=\frac{50\%\cdot\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}\cdot\frac{C_5^1}{C_{14}^1}+50\%\cdot\frac{C_{12}^1}{C_{15}^1}\frac{C_3^1}{C_{14}^1}}{50\%\cdot\frac{C_5^1C_{14}^1}{A_{15}^2}+50\%\cdot\frac{C_3^1C_{14}^1}{A_{15}^2}}\approx 76.79\%.$$

考研解法:

$$P(C_1|\overline{C}_2)=P(F_1)P(C_1|\overline{C}_2F_1)+P(F_2)P(C_1|\overline{C}_2F_2)$$

$$=P(F_1)P_{F_1}(C_1|\overline{C}_2)+P(F_2)P_{F_2}(C_1|\overline{C}_2)$$

$$=50\%\times\frac{\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}\frac{C_5^1}{C_{14}^1}}{\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}\frac{C_5^1}{C_{14}^1}+\frac{C_{10}^1}{C_{15}^1}\frac{C_5^1}{C_{14}^1}}+50\%\times\frac{\frac{C_{12}^1}{C_{15}^1}\frac{C_3^1}{C_{14}^1}}{\frac{C_{12}^1}{C_{15}^1}\frac{C_3^1}{C_{14}^1}+\frac{C_3^1}{C_{15}^1}\frac{C_2^1}{C_{14}^1}}$$

其中 P_{F_i} 表示在 F_i 的情况下的条件概率.

$$P(C_1|\overline{C}_2)\approx 78.57\%.$$

4. 由题意知车来加汽油的概率为 80%, 加柴油的概率为 20%. 问题是独立重复试验, 得

$$P(k=3) = C_5^3(80\%)^3(20\%)^2 = 20.48\%$$

$$P(k \geq 1) = 1 - P(k=0) = 1 - (20\%)^5 \approx 99.97\%$$