极限定理

王友乐

电话：18980082143

邮箱：**Eleconnection@126.com**

2015 年 5 月 13 日

极限定理

1. 大数律
   - 切比雪夫不等式
   - 大数律
2. 中心极限定理

大数律

定理

设随机变量 X 的数学期望与方差都存在, 则对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{1}$$

或

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \tag{2}$$

大数律

定义

设 $\{X_n\}$ 是一随机变量序列,a 为常数, 若对任意 $\varepsilon > 0$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1, \tag{3}$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ **依概率收敛于** a, 记为 $X_n \xrightarrow{P} a$.

定理

随机变量序列 $\{X_n\}$ 中, 若 $E(X_n) = \mu_n, D(X_n) = \sigma_n^2$ 存在, 且 $n \to \infty$ 时, 有 $\sigma_n^2 \to 0$, 则

$$X_n - \mu_n \xrightarrow{P} 0. \tag{4}$$

大数律

一个随机变量序列 $\{X_k\}$ 中, 若任意有限个随机变量都相互独立, 则称 $\{X_k\}$ 为独立的随机变量序列.

对一个随机变量序列 $\{X_k\}$, 记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$, 若 $\overline{X} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} 0$, 则称随机变量序列 $\{X_k\}$ 服从**大数律**.

定理 (切比雪夫大数律)

对独立随机变量序列 $\{X_k\}$, 若 $E(X_k), D(X_k)$ 都存在,$k = 1, 2, 3, \cdots$, 且有常数 C, 使得 $D(X_k) \le C, k = 1, 2, \cdots$, 则有

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) \xrightarrow{P} 0. \tag{5}$$

大数律

推论 (独立同分布大数律)

设 $\{X_k\}$ 是独立同分布随机变量序列, 且 $E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2, k = 1, 2, \cdots$. 则

$$\overline{X} \xrightarrow{P} \mu. \tag{6}$$

推论 (伯努利大数律)

在 n 次伯努利试验中, 事件 A 发生的频率为 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$, 且 A 发生的概率为 $p = P(A)$, 则

$$f_n(A) \xrightarrow{P} p = P(A). \tag{7}$$

中心极限定理

定理 (林德伯格 -列维中心极限定理)

设随机变量序列 $\{X_k\}$ 独立同分布, 且 $E(X_k)=\mu, D(X_k)=\sigma^2, k=1,2,\cdots$. 记

$$Y_n=\frac{\sum_{k=1}^{n}X_k-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k-\mu}{\sigma/\sqrt{n}},$$

则对任意 $x\in\mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P(X_n\le x)=\Phi(x). \tag{8}$$

中心极限定理

定理 (棣莫弗 -拉普拉斯中心极限定理)

设随机变量序列 $\{X_n\}$ 中,$X_n \sim B(n,p)$, 则对任意 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\lim_{n\to\infty} P(\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \le x) = \Phi(x). \tag{9}$$

推论

$X \sim B(n,p), n$ 充分大时, 有

$$P(a < X \le b) \approx \Phi(\frac{b-np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{a-np}{\sqrt{npq}}). \tag{10}$$