多维随机变量及其分布

王友乐

电话：18980082143

邮箱：**Eleconnection@126.com**

2015 年 4 月 9 日

1. 二维随机变量及其分布函数
2. 边缘分布及随机变量的独立性
3. 条件分布与条件密度
4. 二维随机变量函数的分布
5. 多维随机变量

二维随机变量及其分布函数

定义

设 X 与 Y 是定义在同一样本空间 Ω 上的两个随机变量, 则称 (X,Y) 为**二维随机变量**.

定义

设 (X,Y) 是二维随机变量, 对任意实数 x,y, 称

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y) \tag{1}$$

为二维随机变量 (X,Y) 的**二维分布函数**, 或称 X 与 Y 的**联合分布函数**.

二维随机变量及其分布函数

定理

设 $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的二维分布函数，则

(1)$F(x,y)$ 分别关于 x 及 y 单调不减，即当 $x_1 < x_2$ 时，有 $F(x_1,y) \le F(x_2,y)$；当 $y_1 < y_2$ 时，有 $F(x,y_1) \le F(x,y_2)$.

(2)$F(-\infty,-\infty) = F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = 0, F(+\infty,+\infty) = 1$.

(3)$F(x,y)$ 关于 x 及 y 都右连续，即对任意实数 x,y，有

$$F(x+0,y) = F(x,y), \quad F(x,y+0) = F(x,y).$$

(4) 对任意 $x_1 < x_2, y_1 < y_2$，有

$$F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0.$$

二维随机变量及其分布函数

如果二维随机变量 (X,Y) 只取有限个或可数无穷个点对 $(x_i,y_i), i,j=1,2,\cdots$ ，则称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**.

定义

设二维离散型随机变量 (X,Y) 所有可能取值为 $(x_i,y_i), i,j=1,2,\cdots$ ，记

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j), \qquad i,j,=1,2,\cdots, \tag{2}$$

则称上式为 (X,Y) 的**二维概率分布**或**分布律**, 或称为 X 与 Y 的**联合概率分布**.

(X,Y) 的二维概率分布

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\cdots$

X 与 Y 的联合概率分布有如下性质: $(1)p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \cdots$;
$(2) \sum_{ij} p_{ij} = 1.$

在 n 重独立试验中, 若每次试验只有 A_1, A_2, A_3 三个可能的结果, 且 $0 < p_i = P(A_i) < 1, i = 1, 2, 3$, 则 $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. 令随机变量 X 及 Y 分别表示 n 次试验中 A_1 与 A_2 发生的次数, 则知 X 与 Y 有联合概率分布

$$P(X = k_1, Y = k_2) = \frac{n!}{k_1!k_2!(n - k_1 - k_2)!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} p_3^{n-k_1-k_2} \tag{3}$$

$k_1 + k_2 = 0, 1, \cdots, n, k_1, k_2 \geq 0$, 并称 (X, Y) 服从参数为 p_1, p_2, n 的**三项分布**, 记为 $(X, Y) \sim T(n; p_1, p_2)$.

定义

对二维随机变量 (X,Y), 如果存在二元非负函数 $f(x,y)$, 使得对任意实数 x,y, 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(x,y)dxdy \tag{4}$$

则称 (X,Y) 是**二维连续性随机变量**, 称 $f(x,y)$ 为 (X,Y) 的**二维概率密度函数**, 或称为 X 和 Y 的**联合密度函数**, 简称为**密度函数**或**密度**.

二维密度函数具有以下性质:

(1)$f(x,y)\geq 0,(x,y)\in\mathbb{R}^2$;

(2)$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1.$

定理

二维连续性随机变量 (X,Y) 有密度函数 $f(x,y)$, 则 (1)$F(x,y)$ 是连续函数且在 $f(x,y)$ 的连续点 (x,y), 有

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}; \tag{5}$$

(2) 对平面上任意区域 $G \subset \mathbb{R}^2$, 若 $f(x,y)$ 在 G 上可积, 有

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy; \tag{6}$$

(3) 对平面上任一条曲线 L, 有

$$P((X,Y)\in L)=0.$$

定义

令 G 是平面上一个有界区域, 若二维随机变量 (X,Y) 有密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{m(G)}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{7}$$

其中 $m(G)$ 为 G 的面积, 则称 (X,Y) 在 G 上**均匀分布**, 记为 $(X,Y)\sim U(G)$.

边缘分布及随机变量的独立性

定理

设 $F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的二维分布函数, 则 X 及 Y 的边缘分布函数 $F_X(x), F_Y(y)$ 有

$$\begin{aligned} F_X(x) &= F(x,+\infty), x \in \mathbb{R}; \\ F_Y(y) &= F(+\infty,y), y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{8}$$

定理

$F(x,y)$ 是二维随机变量 (X,Y) 的二维分布函数,$F_X(x), F_Y(y)$ 分别为 X,Y 的边缘分布函数. 若对任意 x,y, 有

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X 与 Y **相对独立**.

定理

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $g(x)$ 与 $h(y)$ 分别是 x 与 y 的连续函数, 则 $X_1 = g(X)$, 与 $Y_1 = h(Y)$ 也相互独立.

边缘分布及随机变量的独立性

设 (X,Y) 是二维离散型随机变量, 有二维概率分布

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i, j = 1, 2, \cdots .$$

X, Y 都是一维离散型随机变量, 有各自的分布律

$$p_{i\cdot} = P(X = x_i), i = 1, 2, \cdots .$$
$$p_{\cdot j} = P(Y = y_i), j = 1, 2, \cdots .$$

相对于二维概率分布,X 与 Y 各自的分布叫做**边缘概率分布**, 简称**边缘分布**.

边缘分布及随机变量的独立性

定理

X 与 Y 的边缘分布可由二维概率分布求出, 即

$$\begin{aligned} p_{i\cdot} &= \sum_j p_{ij}, i = 1, 2, \cdots ; \\ p_{\cdot j} &= \sum_i p_{ij}, j = 1, 2, \cdots . \end{aligned} \tag{9}$$

定理

随机变量 X 与 Y 独立 $\Longleftrightarrow$

$$p_{ij} = p_{i\cdot} p_{\cdot j}, i, j = 1, 2, \cdot.$$

定理

(X, Y) 的二维密度函数为 $f(x, y)$,X 与 Y 的边缘密度函数分别为 $f_X(x), f_Y(y)$, 则

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy; \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx. \end{aligned} \tag{10}$$

定理

X 与 Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{11}$$

在三个密度函数的公共连续点上成立.

当 $P(Y=y)>0$ 时，记

$$F_{X|Y}=P(X\le x|Y=y), x\in\mathbb{R} \tag{12}$$

称为 $Y=y$ 条件下 X 的**条件分布函数**.

条件分布与条件密度

定义

y_j 任意给定，且 $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}>0$，称

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i=1,2,\cdots \tag{13}$$

为 $Y=y_j$ 条件下 X 的**条件概率分布**.

同理，也可定义 $P(X=x_i)=p_{t\cdot}>0$,

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \tag{14}$$

为 $X=x_i$ 条件下 Y 的**条件概率分布**.

条件概率分布

条件分布性质:

$$\begin{array}{l}(1)P(X=x_i|Y=y_j)\geq 0, i=1,2,\cdots;\\(2)\sum_i P(X=x_i|Y=y_j)=\sum_i \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}=1.\end{array} \tag{15}$$

条件概率分布

定义

设 (X, Y) 为二维连续型随机变量，若对任意 $\varepsilon > 0$，有 $P(y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon) > 0$，且对每个实数 x，极限

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} P(X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon) \tag{16}$$

存在，则定义此极限为连续型随机变量 $Y = y$ 条件下 X 的**条件分布函数**，记为 $F_{X|Y}(x|y) = P(X \leq x | Y = y) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P(X \leq x | y-\varepsilon < Y \leq y+\varepsilon)$

条件概率分布

定理

设 (X,Y) 有二维密度 $f(x,y)$, 从而 X 及 Y 有边缘密度 $f_X(x), f_Y(y)$, 则

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x|y) &= \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} dy, x \in \mathbb{R} \\ F_{Y|X}(y|x) &= \int_{-\infty}^{y} \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy, y \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{17}$$

推论

条件密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, \quad f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

求 $f_Z(z)$ 的一般方法:

(1) 确定 Z 的值域 $R(Z)$.

(2) 对任意 $z \in R(Z)$, 求 Z 的分布函数 $F_Z(z)$, 即

$$F_Z(x) = P(Z \leq z) = P(g(X,Y) \leq z) = P((X,Y) \in G(z))$$
$$= \iint_{G(z)} f(x,y)dxdy.$$

其中 $(X,Y) \in G(Z) \subset \mathbb{R}^2$ 由不等式 $g(X,Y) \leq z$ 等价解除.

(3)$f_z(z) = F_Z'(z)$.

多维随机变量

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 n 个定义在同一样本空间 Ω 上的随机变量, 则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n **维随机变量**.

令随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立, 且 X_i 有分布函数 $F_i(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$. 再令 $M = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, $N = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$, 则 M 与 N 的分布函数如下:

$$
\begin{aligned}
F_M(x) =& P(\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} \le x) \\
=& P(X_1 \le x, X_2 \le x, \cdots, X_n \le x) \\
=& P(X_1 \le x) P(X_2 \le x) \cdots P(X_n \le x) \\
=& F_1(x) F_2(x) \cdots F_n(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_N(z) &= P(\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}) \\
&= 1 - P(\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \cdots, X_n > x) \\
&= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > 2) \cdots P(X_n > x) \\
& 1 - [1 - F_1(x)][1 - F_2(x)] \cdots [1 - F_n(x)].
\end{aligned}
$$