概率论的基础知识

王友乐

电话：18980082143
邮箱：**Eleconnection@126.com**

2015 年 3 月 11 日

样本空间与随机事件

定义

Ω 表示一个试验的所有可能的结果的集合,Ω 称为该试验的样本空间, 而这个试验的任何可能的结果称为一个样本点, 记为 ω.

事件

称样本空间的一个子集为一个随机事件, 简称为事件. 事件用大写的 A, B, C 等表示. 事件 A 在一次试验中发生, 当且仅当试验中出现的样本点 $\omega \in A$.

必然事件、不可能事件及基本事件

Ω 本身是 Ω 的子集, 包含所有的样本点, 在每一次试验中都发生, 称为**必然事件**.

ϕ 是 Ω 的空子集, 不包含任何样本点, 在任何一次试验中都不 ϕ 发生, 称为**不可能事件**.

仅含一个样本点 ω 的事件 $B=\{\omega\}$ 称为**基本事件**.

事件的差、互斥事件及对立事件

事件 $A - B$ 称为事件 A 与 B 的**差**, 表示 A 发生而 B 不发生的事件.

若 $AB = \phi$, 即事件 A 与 B 不可能同时发生, 称事件 A 与 B 是**互斥**或**互不相容**的.

若事件 A 与 B 有 $AB = \phi$, 且 $A \cup B = \Omega$, 则称 A 与 B 为**互逆**事件.

完备事件组

若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥, 且 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$, 称 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为一个完备事件组, 或称为样本空间 Ω 的一个有限划分.

事件的运算

(1) 交换律：$A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2) 结合律：$\begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C; \end{cases}$

(3) 分配率：$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C); \end{cases}$

(4) 对偶率：$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}, \overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

事件发生的概率

定义

在 n 次重复试验中，若事件 A 发生了 k 次，则称 k 为事件 A 发生的频数，称 $\frac{k}{n}$ 为事件 A 发生的概率，记为 $f_n(A) = \frac{k}{n}$.

性质

(1)$0 \leq f_n(A) \leq 1$;

(2)$f_n(\Omega) = 1, f_n(\phi) = 0$;

(3) 若 $A_1, A_2, \ldots, A_r$ 为 r 个两两互斥的事件，则

$$f_n(\bigcup_{i=1}^{r} A_i) = \sum_{i=1}^{r} f_n(A_i).$$

定义

设 Ω 为一个试验的样本空间. 对 Ω 中任意一个事件 A, 对应一个实数 $P(A)$. 若这个集合函数 $P(\cdot)$ 满足以下三个条件, 则称 $P(A)$ 为事件 A 发生的**概率**:

(1) 非负性:$P(A) \geq 0$;

(2) 规范性:$P(\Omega) = 1$;

(3) 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 是可列个两两互斥的事件, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

性质

(1)$P(\phi)=0$;

(2) 若 n 个事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 两两互斥, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3)$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(4)$P(A-B)=P(A)-P(AB)$. 特别地, 若 $B \subset A$, 有

$$P(A-B)=P(A)-P(B),$$

且 $P(A) \geq P(B)$.

事件发生的概率

性质

(5) 对任意事件 A, 有

$$P(A) \leq 1.$$

(6) 对任意两事件 A, B, 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

例题

已知事件 A, B 满足 $A \subset B$, 则 $P(B - A) \neq (\quad)$.

$(A) P(B) - P(A)$ $\qquad$ $(B) P(B) - P(A) + P(AB)$

$(C) P(\overline{A}B)$ $\qquad$ $(D) P(B) - P(AB)$

等可能概型

定义

若一个随机试验具有以下两个特点:

(1) 试验只有有限个可能结果;

(2) 每个可能结果在试验中出现的可能性相等.

这样的随机试验的概率模型称为**古典概率模型**, 简称**古典概型**.

古典概型的两个特点可表述为:

(1)$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$;

(2)$P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = \cdots = P\{\omega_n\}$.

因为基本事件是两两互斥的, 所以有

$1 = P(\Omega) = P\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\} = \sum_{i=1}^{n} P\{\omega_i\} = nP\{\omega_1\}$.

得到 $P\{\omega_1\} = P\{\omega_2\} = \cdots = P\{\omega_n\} = \frac{1}{n}$.

等可能概型

例题

把 C, C, E, E, I, N, S 这七个字母随机地排列成一行，则正好排成英文单词 SCIENCE 的概率是 ____.

等可能概型

定义

一个随机试验，若所有可能结果"等可能"地出现在一个有界的欧式区域 Ω 内，则称这个试验的概率模型为**几何概型**.

例题

甲、乙两人约定在早上 *7* 点到 *8* 点之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人 *15min*，过时即离去，求两人能会面的概率.

习题

在区间 $[0,1]$ 上任取二个随机点 x, y，则 "$x+y\leq\frac{1}{4}$" 的概率为____.

条件概率及派生的三个公式

定义

A, B 为同一试验的两事件, 且 $P(B) > 0$. 称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件 B 发生条件下 A 发生的条件概率.

性质

(1)$P(A|B) \geq 0$;

(2)$P(\Omega|B) = 1$;

(3) 若事件 $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ 两两互斥, 则

$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$.

注意：**条件概率也是概率**.

条件概率及派生的三个公式

乘法公式

当 $P(B) > 0, P(A) > 0$, 由条件概率定义, 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

这个公式称为**乘法公式**.

条件概率及派生的三个公式

定理

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个完备事件组, 且 $P(A_i) > 0 (i = 1, 2, \ldots, n)$. B 是任一事件, 则

(1)(全概率公式)

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) P(B|A_i);$$

(2)(贝叶斯公式) 若 $P(B) > 0$, 还有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)P(B|A_j)},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

条件概率及派生的三个公式

例题

某种动物活到 10 岁的概率为 0.92, 活到 15 岁的概率为 0.67. 求一只该种动物活到了 10 岁后还能活到 15 岁的概率.

解

- 设 $A=\{$能活到 10 岁$\}, B=\{$能活到 15 岁$\}$;
- $P=\{$活到 10 岁后还能活到 15 岁$\}=P(B|A)$;
- $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.67}{0.92}\approx 72.8\%$

例题

某种动物活到 10 岁的概率为 0.92, 活到 15 岁的概率为 0.67. 求一只该种动物活到了 10 岁后还能活到 15 岁的概率.

解

- 设 $A=\{$能活到 10 岁$\}, B=\{$能活到 15 岁$\}$;
- $P=\{$活到 10 岁后还能活到 15 岁$\}=P(B|A)$;
- $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}=\dfrac{0.67}{0.92}\approx 72.8\%$

例题

某种动物活到 10 岁的概率为 0.92, 活到 15 岁的概率为 0.67. 求一只该种动物活到了 10 岁后还能活到 15 岁的概率.

解

- 设 $A=\{$能活到 10 岁$\}, B=\{$能活到 15 岁$\}$;
- $P=\{$活到 10 岁后还能活到 15 岁$\}=P(B|A)$;
- $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.67}{0.92}\approx 72.8\%$

条件概率及派生的三个公式

例题

一个家庭中有三个小孩, 已知其中一个是女孩, 则这个家庭至少有一个男孩的概率是 ____

解

- 样本空间为
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (M,M,M),(F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$
- B 表示" 其中有一个是女孩",A 表示" 三个都是女孩". 于是
- $B = \left\{ \begin{array}{c} (F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$
$A = \{(F,F,F)\}$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

条件概率及派生的三个公式

例题

一个家庭中有三个小孩，已知其中一个是女孩，则这个家庭至少有一个男孩的概率是 ____

解

- 样本空间为

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (M,M,M),(F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$

- B 表示"其中有一个是女孩",A 表示"三个都是女孩". 于是
- $$B = \left\{ \begin{array}{c} (F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$

  $A = \{(F,F,F)\}$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}.$

条件概率及派生的三个公式

例题

一个家庭中有三个小孩，已知其中一个是女孩，则这个家庭至少有一个男孩的概率是 ____

解

- 样本空间为
$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (M,M,M),(F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$
- B 表示”其中有一个是女孩”,A 表示”三个都是女孩”. 于是
- $$B = \left\{ \begin{array}{c} (F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$
$A = \{(F,F,F)\}$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

例题

一个家庭中有三个小孩, 已知其中一个是女孩, 则这个家庭至少有一个男孩的概率是 ____

解

- 样本空间为

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{c} (M,M,M),(F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$

- B 表示”其中有一个是女孩”,A 表示”三个都是女孩”. 于是
- $$B = \left\{ \begin{array}{c} (F,M,M),(M,F,M),(F,F,M), \\ (M,M,F),(F,M,F),(M,F,F),(F,F,F) \end{array} \right\}$$

  $A = \{(F,F,F)\}$
- $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B) = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

定义

对同一试验的任意两事件 A, B, 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

称事件 A 与 B 独立.

定理

若事件 A 与 B 相互独立, 则 A 与 $\overline{B}, \overline{A}$ 与 $B, \overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立.

定义

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geq 2)$ 是 n 个事件, 若 $A_i, A_j (i \neq j)$ 是其中任意两事件, 有

$$P(A_i A_j) = P(A_i) P(A_j),$$

则称这 n 个事件两两独立.

定义

设 $A_1, A_2, \ldots, A_n (n \geq 2)$ 是 n 个事件，若对其中任意 $k (2 \leq k \leq n)$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_k}$ 有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}),$$

则称这 n 个事件相互独立.

定义

将随机试验 E 重复进行 n 次, 若每次试验的结果互不影响, 即每次试验各可能结果出现的概率都不依赖于其他各次试验的结果, 这样的试验称为 n 重**独立试验**.

特别地, 每次试验结果只有两个结果:"成功"与"失败", 即 A 与 $\overline{A}$, 且 $0 < P(A) < 1$, 这样的试验称为 n 重**伯努利试验**, 相应的数学模型叫做**伯努利概型**.

定理

在 n 重伯努利试验中，设 A 在各次试验中发生的概率为 $p = P(A)(0 < p < 1)$，则在 n 次试验中 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k = 0, 1, 2, \cdots, n.$$

定理

n 重独立试验中, 每次试验可能的结果是 $A_1, A_2, \cdots, A_k$, 且 $0 < p_i = P(A_i) < 1, i = 1, 2, \cdots, k$, 且 $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$, 则 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 在 n 次试验中各发生 $r_1, r_2, \cdots, r_k$ 次的概率为

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \cdots r_k!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k},$$

其中 $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$.

例题

在一大批产品中随机抽取 4 次，每次一件. 已知 4 件产品中有一等品的概率为 $\frac{80}{81}$，则这批产品的一等品率是 ____.

解

- 从一大批产品中抽取少量产品出来，不会明显的改变一等品率，因此假设一等品率为 p.
- 设 A_k 表示"抽出 k 件一等品 $k=1,2,3,4$", B 表示"抽出产品中有一等品".
-
$$P(B) = P(\bigcup_{k=1}^{4}) = \sum_{k=1}^{4} P(A_k) = \sum_{k=1}^{4} C_4^k p^k (1-p)^{4-k}$$

事件的独立性及伯努利概型

例题

在一大批产品中随机抽取 4 次，每次一件. 已知 4 件产品中有一等品的概率为 $\frac{80}{81}$，则这批产品的一等品率是 ____.

解

- 从一大批产品中抽取少量产品出来，不会明显的改变一等品率，因此假设一等品率为 p.
- 设 A_k 表示"抽出 k 件一等品 $k=1,2,3,4$",B 表示"抽出产品中有一等品".
- $$P(B)=P(\bigcup_{k=1}^{4})=\sum_{k=1}^{4}P(A_k)=\sum_{k=1}^{4}C_4^k p^k(1-p)^{4-k}$$

例题

在一大批产品中随机抽取 4 次，每次一件. 已知 4 件产品中有一等品的概率为 $\frac{80}{81}$，则这批产品的一等品率是 ____.

解

- 从一大批产品中抽取少量产品出来，不会明显的改变一等品率，因此假设一等品率为 p.
- 设 A_k 表示"抽出 k 件一等品 $k=1,2,3,4$",B 表示"抽出产品中有一等品".
- $$P(B)=P(\bigcup_{k=1}^{4})=\sum_{k=1}^{4}P(A_k)=\sum_{k=1}^{4}C_4^k p^k(1-p)^{4-k}$$