## 一、填空题

1.A
2.D

**证明.** 可知 $n \in (0,1)$.

$$F_N(n) = P(\min(X,Y) \le n)$$

$$= P(Y=0)P(\min(X,Y) \le n|Y=0) + P(Y=1)P(\min(X,Y) \le n|Y=1)$$

其中用了全概率公式.

$$\Rightarrow P(Y=0)P(0 \le z|Y=0) + P(Y=1)P(X \le n|Y=1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - e^{-\lambda n}) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda n}.$$

$$F_N(n) = \begin{cases} 0, & n \le 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda n}, & n \in (0,1) \\ 1, & n \ge 1 \end{cases}$$

## 二、填空题

1.$\frac{1}{2}$.
2.$\frac{1}{2}f_Y(z) + \frac{1}{2}f_Y(z-1)$.

## 三、解答题

1.(1).$P = C_n^k \cdot (0.2)^k \cdot (0.8)^{n-k}$.
(2). 由题知 $Y \sim P(30), X|Y=n \sim B(n, 0.2)$. 于是

$$P(X=k, Y=n) = P(Y=n)P(X=k|Y=n)$$

$$= \frac{30^n}{n!} \cdot e^{-30} \cdot C_n^k \cdot (0.2)^k \cdot (0.8)^{n-k}.$$

分布律如下表所示.

| X \ Y | 0 | 1 | $\cdots$ | n | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | $24e^{-30}$ | $\cdots$ | $\frac{30^n}{n!}\cdot e^{-30}\cdot(0.8)^n$ | $\cdots$ |
| 1 | 0 | $6e^{-30}$ | $\cdots$ | $\frac{30^n}{n!}\cdot e^{-30}\cdot C_n^1\cdot(0.2)^1\cdot(0.8)^{n-1}$ | $\cdots$ |
| 2 | 0 | 0 | $\cdots$ | $\frac{30^n}{n!}\cdot e^{-30}\cdot C_n^2\cdot(0.2)^2\cdot(0.8)^{n-2}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| n | 0 | 0 | $\cdots$ | $\frac{30^n}{n!}\cdot e^{-30}\cdot(0.2)^n$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |

Table 1: $(X,Y)$ 的联合分布律

2.

$$f_X(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dy=\frac{1}{2}.$$

$$f_Y(y)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}(1+xy)dx=\frac{1}{2}.$$

因为 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$, 所以 $X,Y$ 不独立. 取 $z\in(0,1)$.

$$F_{X^2}(z)=P(X^2\leq z)=P(-\sqrt{z}\leq X\leq\sqrt{z})=\sqrt{z}.$$

$$F_{Y^2}(z)=P(Y^2\leq z)=P(-\sqrt{z}\leq Y\leq\sqrt{z})=\sqrt{z}.$$

$$\begin{aligned}F(X^2\leq u,Y^2\leq v)&=P(-\sqrt{u}\leq X\leq\sqrt{u},-\sqrt{v}\leq Y\leq\sqrt{v})\\&=\int_{-\sqrt{u}}^{\sqrt{u}}\int_{-\sqrt{v}}^{\sqrt{v}}\frac{1}{4}(1+xy)dxdy=\sqrt{uv}.\end{aligned}$$

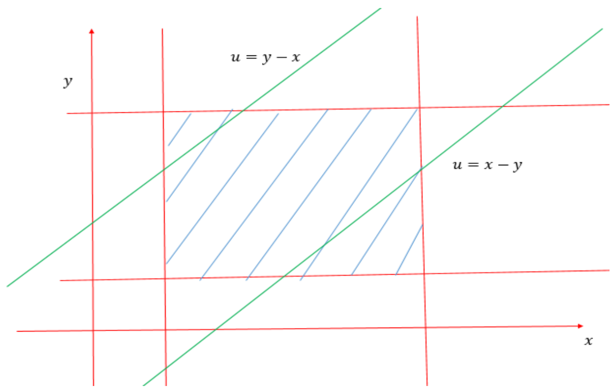
于是可得

$$F(X^2\leq u,Y^2\leq v)=F(X^2\leq u)\cdot F(Y^2\leq v).$$

3. 由题可知 $(X,Y)$ 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x\le 3, 1\le y\le 3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$U=|X-Y|$, 取 $u\in(0,2)$.




$$F_U(u)=P(|X-Y|\le u)=1-\frac{(2-u)^2}{4}=u-\frac{u^2}{4}.$$

$$\Rightarrow p(u)=\begin{cases}1-\frac{u}{2}, & u\in(0,1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$