

几何概率、条件概率及乘法公式

王友乐

电话: 18980082143

邮箱: Eleconnection@126.com

2015 年 3 月 17 日

一、选择题

1.B

2.D

3.D

二、填空题

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}$

2. $\frac{3}{8}$

3. $\frac{6}{7}$

三、解答与证明题

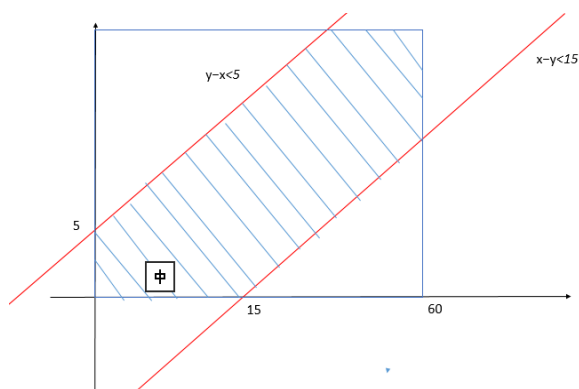
1. 设王到达的时间为 x , 张到达的时间为 y . 由题意知样本空间为

$$\Omega = [0, 60] \times [0, 60].$$

用 A 表示事件两人会面, 那么

$$A = \{(x, y) | 0 < y - x < 5, 0 < x - y < 15\}$$

如图所示,



于是概率为

$$P(A) = 1 - \frac{1/2 \times 45^2 + 1/2 \times 55^2}{60^2} \approx 29.86\%$$

2. 设 $A = \{\text{能活到 10 岁}\}$, $B = \{\text{能活到 15 岁}\}$ 于是问题化为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.67}{0.92} \approx 72.83\%$$

3.

$$P(A|\bar{B}) = \frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{P(A) - P(AB)}{1 - P(B)} = \frac{P(A - B)}{1 - P(B)} = \frac{0.14}{0.6} \approx 23.33\%$$

$$\begin{aligned}
P(B|\bar{A} \cup B) &= \frac{P(\bar{A}B \cup B)}{P(\bar{A} \cup B)} = \frac{P(B)}{P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B)} \\
&= \frac{P(B)}{P(\bar{A}) + P(AB)} = \frac{P(B)}{1 - P(A - B)} \approx 46.51\%
\end{aligned}$$

4. 首先将不等式右边改写为

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1 - p_2}{p_1} &= \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1} \\
P(B|A) &= \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A) + P(B) - P(AB)}{P(A)} \geq \frac{p_1 + p_2 - 1}{p_1} = 1 - \frac{1 - p_2}{p_1}.
\end{aligned}$$

其中利用了 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, 和 $P(A \cup B) \leq 1$.

5. 总共进行了 3 次攻击, 分别记为 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次攻击击落}\}$.

(1) 甲机被击落只能发生在第 2 次攻击时, 所以有

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= P(\bar{A}_1)P(A_2|\bar{A}_1) + P(A_1)P(A_2|A_1) \\
&= 0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0 = 24\%.
\end{aligned}$$

(2) 乙机被击落可以发生在第 1 次和第 3 次. 记事件乙被击落为 B , 于是有

$$\begin{aligned}
P(B) &= P(A_1) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\
&= P(A_1) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(A_3|\bar{A}_1 \bar{A}_2) \\
&= 0.2 + 0.8 \times 0.7 \times 0.4 = 42.40\%
\end{aligned}$$