一、选择题

1.C

2.B

证明. 因为 $\min(X,2)\in(0,2]$, 所以取 $y\in(0,2]$, 则

$$F_Y(y)=P(\min(X,2)\le y)=P(X\le y)=1-e^{-\lambda x}.$$

于是 Y 的分布为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0 & y<=0\\ 1-e^{-\lambda x} & 0<y\le 2\\ 1 & y>2.\end{cases}$$

二、填空题

1.$\frac{9}{64}$

2.$\frac{4\sqrt{2}}{\Gamma(\frac{5}{2})}$.

三、解答题

1.(1)

$$P(|X|<1.8)=\frac{1.8\times 2}{4}=90\%.$$

(2)

$$P=1-C_{10}^{0}(90\%)^{0}(10\%)^{1}0-C_{10}^{1}(90\%)^{1}(10\%)^{9}=1-1.9\times 10^{-9}.$$

(3)

$$P(|X|>1.8)=\frac{0.2\times 2}{4}=0.1.$$

$$\lambda=100\times 0.1=10.$$

$$P=1-\frac{10^0}{0!}e^{-10}-\frac{10^1}{1!}e^{-10}=1-11e^{-10}$$

2.(1) 根据密度函数的规范性:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A}{e^x+e^{-x}}dx=1$$

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^xe^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx=1$$

$$A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-x}}{e^x+e^{-x}}de^x=1$$

变量代换 $y=e^x$, 得:

$$A\int_{0}^{\infty}\frac{\frac{1}{y}}{y+\frac{1}{y}}dy=1$$

$$A\int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+y^2}dy\Rightarrow A\arctan y|_0^{\infty}=1.$$

$$\Rightarrow A\times\frac{\pi}{2}=1\Rightarrow A=\frac{2}{\pi}.$$

(2)

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\frac{\pi}{2}}{e^t+e^{-t}}dt$$

$$\Rightarrow\frac{\pi}{2}\arctan e^t|_{-\infty}^{x}=\frac{2}{\pi}\arctan e^x.$$

$$P(0\le X\le 1)=\frac{2}{\pi}\arctan e^x|_0^1=\frac{\pi}{2}\arctan e-\frac{1}{2}.$$

(3) 取 $y\in(0,1]$.

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^{-|X|}\le y)=P(|X|\ge\ln\frac{1}{y})$$

$$\Rightarrow 1-[\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{y}-\frac{2}{\pi}\arctan y]$$

于是, 密度函数为

$$f(y)=\frac{4}{\pi}\frac{1}{1+y^2}.$$

3.(1) 令 $A=\{$的一次重病$\},C_1=\{$年龄 15 岁以下$\},C_2=\{$年龄 15 岁到 50 岁$\},C_3=\{$年龄 50 岁以上$\}$. 于是

$$P(A)=P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)+P(C_3)P(A|C_3)$$

$$=P(X\le 15)\times 0.1+P(15<X\le 50)\times 0.02+P(X>50)\times 0.2$$

$$\approx 0.0221+0.0069+0.0869=11.59\%$$

(2)

$$P(C_1|A)=\frac{P(C_1)P(A|C_1)}{P(A)}\approx 19.09\%$$

$$P(C_2|A)=\frac{P(C_2)P(A|C_2)}{P(A)}\approx 5.94\%$$

$$P(C_3|A)=\frac{P(C_3)P(A|C_3)}{P(A)}\approx 75\%$$