一、选择题

1.D

2.B

3.C

二、填空题

1.0

2.$F(x)(1-F(y))$

3.$\frac{1}{2}$.

三、解答题

1. 2.(1) 利用规范性:

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P(X=x_i)=p_{i\cdot}$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 A\cos x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dxdy=1.$$

$$\Rightarrow A=\frac{2}{\pi}.$$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^1\frac{2}{\pi}\cos x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dy=\cos x.$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\cos x\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}dx=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}.$$

(3)

$$P(X\le\frac{\pi}{3})=\int_0^{\frac{\pi}{3}}f_X(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos xdx=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

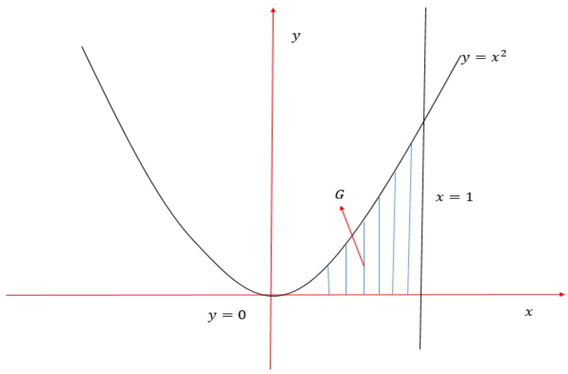
$$P(Y\ge\frac{1}{2})=\int_1^{\frac{1}{2}}f_Y(y)dy=\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}}dy=\frac{2}{3}.$$

(4) 因为对一切 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

成立, 所以 X 与 Y 独立.

3. (1) 经计算可得 $m(G)=\frac{1}{3}$, 于是



$$f(x,y)=\begin{cases}3, & 0\le x\le 1, 0\le y\le x^2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2)

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^{x^2}3dy=3x^2.$$

也可以根据公式

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y,x)$$

因为 (X,Y) 在 G 上是均匀分布, 所以 $f_{Y|X}(y|x)\sim U(0,x^2)$. 于是

$$f_X(x)=\frac{f(x,y)}{f_{Y|X}(y|x)}=\begin{cases}3x^2, & (x,y)\in G;\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

同理可得

$$f_Y(y)=3(1-\sqrt{y}).$$

(3) 因为

$$f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

所以 X 与 Y 不独立.