概率的性质与古典概率

2015 年 3 月 11 日

一、选择题

1.D

2.C

3.D

二、填空题

1.$\frac{2}{9}$

2.$\frac{1}{12}$

3.$1-q$

三、解答与证明题

1.

$$P(A)-P(B)\leq P(A-B)\leq P(A\leq P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$$

从左到右等号成立的条件是

$$B\subset A \qquad AB=\phi \qquad B\subset A \qquad AB=\phi$$

2.

证明.

$$P(A(B\cup C))=P(AB\cup AC)=P(AB)+P(AC)-P(ABC)$$

因为 $P(A(B\cup C))\leq P(A), P(ABC)\leq P(BC)$, 推出

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\leq P(AB)+P(AC)-P(ABC)\leq P(A).$$

3.

每个人离开电梯的可能性相等, 且所有可能的结果是有限个, 因此这是古典概型问题.

(1) 每个人都有 8 种选择, 所有样本总数为 8^5, 每层至多一人离开, 即没有人一起离开. 故样本数为 $C_8^5A_5^5$, 概率为

$$P=\frac{C_8^5A_5^5}{8^5}\approx 20.51\%$$

(2) 由题可知与上问是对立的. 因此概率为

$$P=1-\frac{C_8^5A_5^5}{8^5}\approx 79.49\%$$

(3) 有一层是两个人一起离开的, 楼层有 C_8^1 个选择,5 个人中任选两个一起, 有 C_5^2 种可能, 其余的三人只能是分开走, 或者一起走, 所以分别有 $C_7^3A_3^3, C_7^1$. 因此

概率为

$$P=\frac{C_8^1\cdot C_5^2(C_7^3A_3^3+C_7^1)}{8^5}\approx 52.98\%$$

4.

(1) 有放回抽取:

$$P(A)=\frac{C_1^2}{C_6^1}\cdot\frac{C_1^2}{C_6^1}=\frac{1}{9}$$

$$P(B)=\frac{C_1^2}{C_6^1}\cdot\frac{C_1^4}{C_6^1}=\frac{4}{9}$$

$$P(C)=P(A\cup B)=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

(2) 不放回抽取:

排列:

$$P(A)=\frac{A_2^2}{A_6^2}=\frac{1}{15}$$

$$P(B)=A_2^1\frac{A_4^1A_2^1}{A_2^6}=\frac{8}{15}$$

$$P(C)=P(A\cup B)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{3}{5}$$

组合: 不放回抽取两次, 可以看做是一次抽取, 所以有

$$P(A)=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}$$

$$P(B)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{8}{15}$$

$$P(C)=P(A\cup B)=\frac{1}{15}+\frac{8}{15}=\frac{3}{5}$$

5.

样本总数是 4 个人拿牌的所有可能, 因此样本总数是 $C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$, 样本数是 4 人中其中一人拿了 7 张黑桃、3 张红桃、1 张方块、2 张梅花. 因此样本数为 $C_4^1C_{13}^7C_{13}^3C_{13}^1C_{13}^2\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}$. 因此概率为

$$P=\frac{C_4^1C_{13}^7C_{13}^1C_{13}^2\cdot C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}C_{39}^{13}C_{26}^{13}C_{13}^{13}}=\frac{C_4^1C_{13}^7C_{13}^3C_{13}^1C_{13}^2}{C_{52}^{13}}$$