1 填空题

1. 设 A,B,C 是随机事件,A 与 C 互不相容,$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$, 则 $P(B|\overline{C})=$ ____.

2. 设两两独立的事件 A,B,C 满足:$ABC=\Phi,P(A)=P(B)=P(C)$, 且 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$, 则 $P(A)=$ ____.

3. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度函数,$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度函数, 若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\le 0 \\ f_2(x), & x>0 \end{cases}$ 为密度函数, 则 $a=$ ____.

4. 设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0)$, 则 $E[XY^2]=$ ____.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从区间 $(0,3)$ 上的均匀分布, 则概率 $P\{\max\{X,Y\}\le 1\}=$ ____.

6. 设 $X\sim B(5,0.8),Y\sim N(1,1),X$ 与 Y 相互独立, 则 $P\{0<X+Y<10\}\ge$ ____.

7. 设总体 X 服从参数为 2 的泊松分布,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则当 $N\to\infty$ 时,$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 ____.

8. 设总体 $X\sim N(0,2^2),X_1,X_2,\cdots,X_{15}$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则随机变量 $Y=\frac{X_1^2+\cdots,X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从 ____ 分布 (必须填出参数).

2 解答题

1. 假设某时期内影响股票价格变化的因素只有银行利率的变化, 经分析, 该时期内利率上调的概率为 20%, 利率下调的概率为 60%, 利率不变的概率为 20%, 而股票在利率上涨时也上涨的概率

为 90%, 在利率不变时上涨的概率为 60%, 在利率下调时上涨的概率为 60%, 在利率下调时上涨的概率为 5%. 求这只股票上涨的概率.

2. 设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布, 其中 G 是由 $x-y=0, x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的三角区域.

- 求 X 的概率密度函数 $f_X(x)$;
- 求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$;
- 求 $Cov(X,Y)$.

3. 设随机变量 X 和 Y 的概率分布分别为 $X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, Y \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$, 且 $P\{X^2=Y^2\}=1$.

- 求 X 与 Y 的联合概率分布;
- 求 $Z=XY$ 的概率分布;
- 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

4. 已知二维随机变量 (X,Y) 服从区域 $G=\{0<x<1, 0<y<2\}$ 上均匀分布, 试求 $Z=2X-Y$ 的密度函数.

5. 设总体 X 的概率密度函数为 $f(x;\alpha,\beta)=\begin{cases} \frac{\beta\alpha^\beta}{x^{\beta+1}}, & x>\alpha \\ 0, & x\le\alpha \end{cases}$ 其中参数 $\alpha>0, \beta>1$, 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的样本.

- 当 $\alpha=1$ 时, 求参数 β 的矩估计量;

- 当 $\alpha = 1$ 时, 求参数 β 的最大似然估计量;
- 当 $\beta = 2$ 时, 求参数 α 的最大似然估计量.

6. 设随机变量 X 在区间 $[0, 5]$ 上服从均匀分布, 对 X 进行 100 次独立观测, 用中心极限定理计算至少有 21 次观测值小于 1 的概率.($\Phi(0.95) = 0.829; \Phi(0.25) = 0.5987; \Phi(1.645) = 0.95; \Phi(1.96) = 0.975$)

7. 食品监管部门规定, 鲜奶中汞的含量不得超过 $1 \times 10^{-2} mg/kg$, 现食品监管部门对某鲜奶厂生产的鲜奶随机检测 9 次, 测得汞含量数据如下 (单位:$10^{-2} mg/kg$).

1.1	1.3	0.9	1.2	0.7	0.8	1.4	0.8	1.1

设鲜奶中汞的含量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

- 求出鲜奶厂生产鲜奶中汞含量均值 μ 的置信度为 90% 置信区间;
- 检验该鲜奶厂生产鲜奶中汞含量是否显著超标 ($\alpha = 0.1$).

附:t 分布下分位点值:$t_{0.9}(8) = 1.3968, t_{0.95}(8) = 1.8595, t_{0.9}(9) = 1.3830, t_{0.95}(9) = 1.8331$

3 附加题

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是正太总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,$\overline{X}$ 与 $\S^2$ 分别是其样本均值与样本方差, 试求 $E(\overline{X} + S^2), D(\overline{X} + S^2)$.