正太分布与自然指数分布族

王友乐

电话：18980082143

邮箱：**Eleconnection@126.com**

2015 年 5 月 12 日

1. 正态分布及其密度函数和分布函数
2. 正态分布的数字特征与线性性质
3. 二维正态分布
4. 自然指数分布族

正态分布及其密度函数和分布函数

定义

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

则称 X 服从**标准正态分布**, 记为 $X \sim N(0,1)$.

性质：

(1)$\Phi(0) = \frac{1}{2}$;

(2)$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

正态分布及其密度函数和分布函数

定义

$\mu, \sigma > 0$ 是任意常数，若随机变量 X 有

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

则称 X 服从参数为 μ, σ^2 的**正态分布**，记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

正态分布及其密度函数和分布函数

定理

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则

(1)X 的分布函数为

$$F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma}), -\infty < x < +\infty; \tag{2}$$

(2)

$$P(a < x \leq b) = \Phi(\frac{b-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma}); \tag{3}$$

(3)X 的概率密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty. \tag{4}$$

正态分布的数字特征与线性性质

定理

1. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 X 的期望与方差分别为

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2. \tag{5}$$

2. 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 当 $b \neq 0$ 时, 有

$$Y = a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2). \tag{6}$$

3.$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则

$$Z = Z + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2). \tag{7}$$

二维正态分布

定义

设二维随机变量 (X, Y) 有二维密度函数

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\{-\frac{1}{2(1-r^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

则称 (X, Y) 服从二维正态分布，记为

$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; r)$，其中 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |r| < 1$ 为分布参数.

其中 $r = R(X, Y)$，即 r 是 X 与 Y 的相关系数.

二维正态分布

定理

1. 若 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; r)$, 则

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2).$$

2.$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; r)$. 则 X 与 Y 相互独立的充分必要条件为 $r = 0$.

3. 二维随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布的充要条件是 X 与 Y 的任意线性组合 $Z = aX + bY$ 服从一维正态分布, 即 $Z \sim N(E(Z), D(Z))$.