1 填空题

1.$\frac{3}{4}$

2.$\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$

3.$\frac{1}{2}$

4.$\mu^3 + \mu\sigma^2$

5.$\frac{1}{9}$

6.0.9280

7.6

8.$F(10, 5)$

2 解答题

1. 设 A_1 表示" 利率上调",A_2 表示" 利率下调",A_3 表示" 利率不变",B 表示" 股票上涨". 根据题目有

$$P(A_1) = 20\% \qquad P(A_2) = 60\% \qquad P(A_3) = 20\%$$

$$P(B|A_1) = 90\% \quad P(B|A_2) = 5\% \quad P(B|A_3) = 60\%$$

于是

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) = 33\%$$

2. 积分区域 G 如图 1 所示. 联合密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

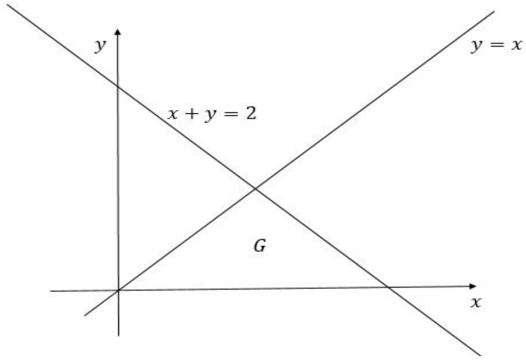

图 1

- 由图 1 可求得 X 的密度函数.

$$f_X(x) = \begin{cases} \int_0^x 1dy = x & x \in (0,1] \\ \int_0^{2-x} 1dy = 2-x & x \in (1,2) \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

- 由图 1 可求得 Y 的密度函数为

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-y)}, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

•

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)\cdot E(Y) \\
&= \int_0^1 \int_y^{2-y} xy \cdot 1 dxdy - (\int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x)dx) \\
&- (\int_0^1 2y(1-y)dy) = -1.
\end{aligned}
$$

3.

• 根据 $P\{X^2 = Y^2\} = 1$ 立即可得

$$P(X=0,Y=0) + P(X=1,Y=-1) + P(X=1,Y=1) = 1$$

$$\Rightarrow P(X=0,Y=-1) = P(X=0,Y=1) = P(X=1,Y=0) = 0$$

于是可得联合分布律为

X \ Y	-1	0	1	P(X)
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
P(Y)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

表 1 (X,Y) 的联合分布律

• $Z = XY$ 的取值为 $-1, 0, 1$. 且

$$
\begin{aligned}
P(Z=-1) &= P(X=1,Y=-1) = \frac{1}{3} \\
P(Z=0) &= P(X=0,Y=1) + P(X=0,Y=0) \\
&+ P(X=0,Y=-1) + P(X=1,Y=0) = \frac{1}{3} \\
P(Z=1) &= P(X=1,Y=1) = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow Z \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

•

$$\begin{aligned}\rho_{XY} &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = \frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} \\ &= \frac{E(Z)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} \\ &= 0\end{aligned}$$

4.

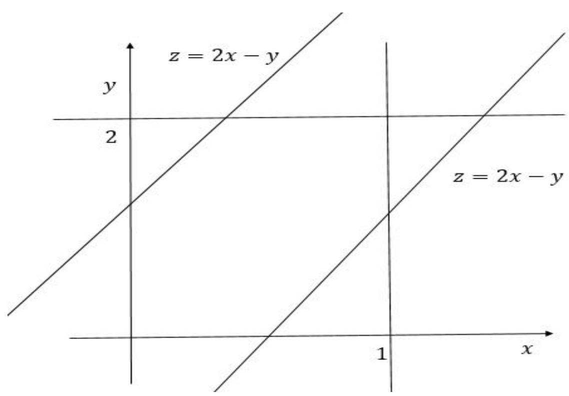

图 2

由图 2 可求得 Z 的值域为 $(-2,2)$. 则取 $z \in (-2,2)$.

- 当 $z \in (-2,0)$ 时,

$$\begin{aligned}F_Z(z) = P(2X-Y \le z) &= \int_0^{1+\frac{z}{2}} \int_{2x-2}^{2} \frac{1}{2} dy dx \\ &= \frac{1}{4}(2+z)(1+\frac{z}{2})\end{aligned}$$

- 当 $z \in (0,2)$ 时,

$$F_Z(z) = P(2X - Y \le z) = 1 - \int_{\frac{z}{2}}^{1} \int_{0}^{2x-z} \frac{1}{2} dy dx$$
$$= 1 - \frac{1}{4}(z-2)(\frac{z}{2} - 1)$$

综上即得

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{4} + \frac{1}{2} & z \in (-2,0) \\ \frac{1}{2} - \frac{z}{4} & z \in (0,2) \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

5.

- 当 $\alpha = 1$ 时, 利用矩估计

$$f(x;\beta) = \begin{cases} \frac{\beta}{x^{\beta+1}} & x > 1 \\ 0 & x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \widehat{\beta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X} - 1}$$

- 对数极大似然函数为 $\ln L(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (\ln \beta - (\beta+1) \ln X_i)$,

$$\Rightarrow \frac{d \ln L(\beta)}{d\beta} = \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} \ln X_i$$
$$\Rightarrow \widehat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}$$

- 当 $\beta = 2$ 时, 对数极大似然函数为 $\ln L(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \ln 2 + 2 \ln \alpha - 3 \ln X_i$

$$\Rightarrow \frac{a \ln L\alpha}{d\alpha} = \frac{2n}{\alpha} > 0.$$

可知 $\ln L(\alpha)$ 随着 α 的增加而增加, 故可知, 当 $\ln L(\alpha)$ 取最大值时必在 α 的上界, 即

$\min(X_1, \cdots, X_n)$.

6.

$$p = P(X < 1) = \int_0^1 \frac{x}{5} dx = \frac{1}{5}$$

设 Y 表示 100 次观测中观测值小于 1 的次数, 则有 $Y \sim B(100, p)$. 则根据中心极限定理有

$$\begin{aligned} P(Y \geq 21) &= 1 - P(Y < 21) \\ &\approx 1 - \Phi\left(\frac{21 - 100p}{\sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &\approx 0.4013 \end{aligned}$$

7.

- 均值和方差均未知, 于是统计量为

$$\begin{aligned} t &= \frac{\overline{x} - \mu}{S/3} \sim t(8) \\ \Rightarrow & t_{0.05} \leq \frac{\overline{x} - \mu}{S/3} \leq t_{0.95} \\ & \overline{X} = 1.0333, S = 0.2449 \\ \Rightarrow & \text{置信度为 } 90\% \text{ 的置信区间为} [0.8815, 1.1852] \end{aligned}$$

- 提出假设

$$H_0 : \mu \leq 1 \qquad H_1 : \mu > 1$$

假设 H_0 成立, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\overline{X} - \mu}{S/3} &\sim t(8) \\ \frac{\overline{X} - 1}{S/3} &\leq \frac{\overline{X} - \mu}{S/3} \end{aligned}$$

在给定显著水平 $\alpha = 0.1$ 下, 事件

$$(\frac{\overline{X}-1}{S/3} > t_{1-\alpha}) \subset (\frac{\overline{X}-\mu}{S/3} > t_{1-\alpha})$$

则

$$P(\frac{\overline{X}-1}{S/3} > t_{1-\alpha}) \leq P(\frac{\overline{X}-\mu}{S/3} > t_{1-\alpha}) = \alpha$$

经计算可得 $\frac{\overline{X}-1}{S/3} \approx 0.4041 < t_{0.90}(8) \approx 1.3968$, 不能拒绝原假设, 所以汞含量没有显著超标.

3 附加题

因为 $\overline{X}$ 与 S^2 独立, 所及可计算

$$E(\overline{X}) = \mu \qquad D(\overline{X}) = \tfrac{\sigma^2}{n}$$
$$E(S^2) = \sigma^2 \quad D(S^2) = \tfrac{2\sigma^4}{n-1}$$

于是

$$E(\overline{X}+S^2)E(\overline{X}) + E(S^2)$$
$$= \mu + \sigma^2$$
$$D(\overline{X}+S^2) = D(\overline{X}) + D(S^2)$$
$$= \frac{\sigma^2}{n} + \frac{\sigma^4}{n-1}$$