解析函数的级数理论知识点总结与典型例题

lishu20050916@tongji.edu.cn

复数项级数与幂级数（掌握基本概念）

- 复数项级数的定义由微积分中的级数定义推广到复数域，其敛散性的判断与实数项级数基本一致，这里不再赘述（课本P73-74）
- 幂级数的定义（定义3.4）

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ 称为以 z_0 为中心的幂级数.

求幂级数的收敛半径

记R为$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$的收敛半径，则幂级数：

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$在圆域$|z-z_0|<R$内绝对收敛

在环域$|z-z_0|>R$内发散

在边界$|z-z_0|=R$外需另行判段（一般不涉及）

对幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$，(*) 极限不存在，不代表$R$不存在

(1) 若$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}=\lambda$，则该幂级数的收敛半径$R=\lambda^{-1}$

(2) 若$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lambda$，则该幂级数的收敛半径$R=\lambda^{-1}$

Taylor级数（一定要记住几个基本初等函数的Taylor级数）

$f(z)$在区域D内解析，z_0为D内一点，则只要圆域$\{|z-z_0|<R\}\subset D$，就有：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ 在圆域上成立}$$

其中：$a_n=\dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$，为$f(z)$在$z_0$点的Taylor系数。

特别地，$z_0=0$时，$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$ 为Maclaurin级数

原点处：

① $e^z=1+z+\dfrac{z^2}{2!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n!}$ $(R=+\infty)$

② $\sin z=z-\dfrac{z^3}{3!}+\dfrac{z^5}{5!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$ $(R=+\infty)$

③ $\cos z=1-\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^4}{4!}+\cdots=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$ $(R=+\infty)$

④ $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}z^{n+1}$

$\ln(1-z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{z^n}{n}$ $|z|<1$

⑤ $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n$ $|z|<1$

例题

1. $\frac{1}{2-z}$在0处的幂级数;

2. $\frac{1}{2-z}$在1处的幂级数;

3. $\tan z$在0处Taylor展开的前三个非零项;

解析函数的零点（判断零点重数）

$f(z_0)=0$、z_0为$f(z)$的零点；

$$f(z)=a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots$$

①、$a_1, a_2, \cdots a_n$不全为零时，记出现的第一个非零系项为a_m，

$$f(z)=(z-z_0)^m\underbrace{\varphi(z)}_{\neq 0}.$$

在$|z-z_0|<\delta$，z_0为孤立的，且称z_0为$f(z)$的m重零点；

②、$a_1, a_2, \cdots a_n$全为零时 $\Rightarrow f(z)\equiv 0$.

局部决定整体.

推论：当$f(z_0)=g(z_0)$时 在$|z-z_0|<\delta$内，$f\equiv g$（解析函数的唯一性）

1. $f(z) = z(z-1)^3$

2. $f(z) = z^3(e^z - 1)$

Laurent级数的定义

Taylor级数： $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ $|z-z_0|<R$

Laurent级数： $\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n + \boxed{\sum_{n=-1}^{-\infty} C_n (z-z_0)^n}$

主要部分

收敛环域

$r<|z-z_0|<R$

Taylor/Laurent系数：

$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw$ $\begin{cases} C: & |z-z_0|<R \quad a_n \quad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \\ C: & r<|z-z_0|<R \quad C_n \end{cases}$

Laurent级数的计算（利用初等函数的Taylor级数）

直接法：$C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw.$

间接法：

1. $\frac{1}{z(z-1)(z-2)}$ $\begin{cases} 0<|z|<1 \\ 1<|z|<2 \\ |z|>2 \end{cases}$

2. $e^{\frac{1}{z}}$ $|z|>0$

3. $\frac{\sin z}{z}$

Laurent级数的应用

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1}$$

孤立奇点定义分类（要学会判断奇点类型）

奇点：函数不解析的点.

孤立奇点：设z_0为函数的一个奇点，若$f(z)$在z_0的某个去心邻域$\{0<|z-z_0|<\delta\}$解析.

非孤立奇点：$f(z)$在该邻域中总有除z_0以外的不解析点.

例：

■：奇点

■：孤立奇点

$\frac{1}{z}$	$\boxed{\frac{1}{(z-1)(z-2)}}$	$e^{\frac{1}{z}}$
0	$0,1,2$	0
0	$0,1,2$	0
$\frac{z}{\sin z}$	$\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$	$\ln z$
$k\pi$	$0,\ \frac{1}{k\pi}$ ($k\in Z$且$\neq0$)	$z=0$或$z<0$
$k\pi$（无限个）	$\frac{1}{k\pi}$	均不孤立

若$f(z)$只有有限个奇点，则它们均孤立.

孤立奇点定义分类（要学会判断奇点类型）

孤立奇点的分类(以Laurent级数为依据)

$f(z)$在$0<|z-z_0|<r$上解析. $f(z_0)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_n(z-z_0)^n$

① 该级数没有负幂次项、z_0为可去奇点;

②、该级数有有限个负幂次项，z_0为极点,

③、该级数有无限个负幂次项，z_0为本性奇点.

对于极点，记最小的幂指数为$-m$，即:

$$f(z)=\sum_{n=-m}^{\infty} C_n(z-z_0)^n$$

称m为该极点的级.

解析函数在孤立奇点处的极限（判断奇点类型的另一个依据）

1、若z_0为$f(z)$的一个可去奇点，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = C_0$

2、若z_0为$f(z)$的一个极点，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \quad 0<|z-z_0|<r,\ g(z_0)\neq 0.$$

3、若z_0为$f(z)$的一个本性奇点，则$\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$即不存在也不为$\infty$

充要条件．

孤立奇点定义分类（要学会判断奇点类型）

1. $\dfrac{\quad}{z(z-1)(z-2)}$ $\begin{cases} z_0=0 \\ z_0=1 \\ z_0=2 \end{cases}$

2. $\sin\frac{1}{z}$

3. $\dfrac{(z-1)^2}{(z-1)(z-2)}$

4. $\dfrac{\sin z}{z}$

5. $\dfrac{z}{\sin z}$

6. $\dfrac{\sin z(e^z-1)}{z^3}$

解析函数在无穷远点的奇性

在扩充平面 $\overline{\mathbb{C}}$ 上，我们将 $f(\frac{1}{w})$，$w=0$ 的奇点类型定义为 $f(z)$ 在 ∞ 的奇点类型.

例：

z	$\frac{1}{w}$	0：1级极点
z^2	$\frac{1}{w^2}$	0. 2级极点.
z^2+1	$\frac{1}{w^2}+1$	2级～
$\frac{1}{z}$	$\frac{1}{\frac{1}{w}}$	可去奇点
e^z	$e^{\frac{1}{w}}$	本性奇点
$\frac{1}{\sin z}$	$\frac{1}{\sin\frac{1}{w}}$	非孤立奇点　（奇点的极限点一定是非孤立奇点）
$\frac{z^2+1}{z+1}$	$\frac{(\frac{1}{w})^2+1}{(\frac{1}{w})+1}$	1级极点　$z+\cdots+\frac{c}{z+1}$ → 1级极点；$z+\cdots$：1级极点；$\frac{c}{z+1}$ → 可去极点

$\frac{z+1}{z^2+1}=0$　可去奇点

$\to\infty$

一些定理：

① 若 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上有无穷多个奇点，则 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上必有非孤立奇点

② 若 f 在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上一切奇点均孤立，且无本性奇点，当且仅当 f 为有理函数