## 解析函数的级数理论知识点总结与典型例题

lishu20050916@tongji.edu.cn

#### 复数项级数与幂级数(掌握基本概念)

- 复数项级数的定义由微积分中的级数定义推广到复数域,其敛散性的判断与实数项级数基本一致,这里不再赘述(课本P73-74)
- 幂级数的定义 (定义3.4)

### 求幂级数的收敛半径

记R为 Zan(Z-Zo)"的收敛裕,则幂级数: 2 an(≥-≥。)"在圆域 | ≥-≥。) < R内绝对收敛 在环域 12-2017尺内发散 在边界 12-2-1-R外需另行判段(一般不涉及) 对界级数型 an(8-20), (\*) 极限不幸,不代表只有柱 1)差加加了一个,则该界级数的收敛半往尺三人 (2) 若如(1) 三人,则该幂级数的收敛箱尺三人

# Taylor级数 (一定要记住几个基本初等函数的Taylor级数)

于(2)在区域D内解析, 2.为D内-点,则只要圆域(12-20)<尺(CD,就有: f(Z)= Zan(Z-Zo) 在圆域上成立 其: an= f(n)(20) . 为fizi在8点前 Taylor 系数. 特别地, Zo =0时, f(z)= = 5 f(n)(0) zn 为 Maclaurin 级数

原.如文:  

$$0 e^{2} = 1 + 2 + \frac{2^{2}}{2!} + \dots = \frac{2}{k!} \cdot \frac{2^{n}}{n!}$$
 (R=+∞)

②. 
$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-1} (R = +\infty)$$

原点处:
$$0 e^{z} = 1 + 2 + \frac{z^{2}}{2!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n}}{n!} \qquad (R = +\infty)$$

$$\Theta \ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} z^{n+1}$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n+1} z^{n+1}$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} z^{n+1}$$

$$\ln(1-z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n} z^{n+1}$$

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n$$
 |Z|<

#### 例题

- 1. 立在0处的幂级数;
- 2. 立在1处的幂级数;
- 3 tanz在o处Taylor展开的前三个非爱玩。

## 解析函数的零点 (判断零点重数)

在12-21-6,20为孤立的,且称之为于12)的重要点。

②.a., a., ... an 全为零时 => f(z)=0. 局部决定基件. 推论: 当f(z.)=9(Z.))时在 |Z-Z| < 5內, f=g (解析函数的唯一性)

$$1. f(z) = Z(Z-1)^3$$

2. 
$$f(z) = z^3(e^z - 1)$$

### Laurent级数的定义

Taylor 级数: 
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$
  $|z-z_0| < R$ 

Laurent 级数:  $\sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n$  收敛孙域
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-z_0)^n \qquad r < |z-z_0| < R$$

Taylor / Laurent 3数:  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}} dw$   $\begin{cases} c : r < |z-z_0| < R \\ c : r < |z-z_0| < R \end{cases}$   $G$ 

#### Laurent级数的计算 (利用初等函数的Taylor级数)

直接法: 
$$C_{n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} \frac{f(w)}{(w-Z_{0})^{n+1}} dw$$
.

阅接法:  $0 < |Z| < |$ 
 $1 < |Z| < 2$ 
 $|Z| > 2$ 
 $|Z| > 2$ 

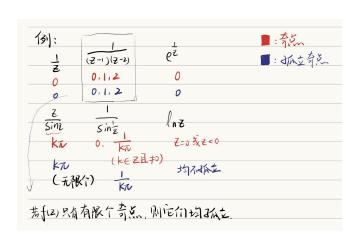
Laurent 级数的范围

$$\frac{1}{Z^2(Z-1)} = \frac{A}{Z} + \frac{B}{Z^2} + \frac{C}{Z-1}$$

### 孤立奇点定义分类 (要学会判断奇点类型)

奇点: 函数不解析的点.

孤立奇点:设区。为函数的一个奇点,若f(区)在区。的某个去心邻域(0<12-20)<6)解析. 非孤劳点、f(区)在该邻域中总有路区。以外的不解析点。



## 孤立奇点定义分类 (要学会判断奇点类型)

孤立奇点的分类(W.Laurent级数为依据)

- ①该级数没有负幂次项、云。为可去奇点:
- ②、该级数有有限介质幂次项, 己的极热,
- ③、该级数有无限个负幂次乘, 己为本性奇流。

对于极热, 记最小的幂指数为一个, 即:
f(z)- 是 Cn(z-z,)

和m为该报点的级.

#### 解析函数在孤立奇点处的极限 (判断奇点类型的另一个依据)

3、花子的方(云)的一个本性有点,则是或方(云)即不存在也不为100

充要条件.

### 孤立奇点定义分类 (要学会判断奇点类型)

$$5. \frac{2}{\sin 2}$$

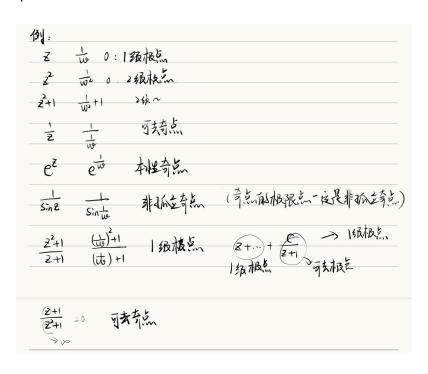
$$2. Sin \frac{1}{2}$$

3. 
$$\frac{(z-1)^2}{(z-1)(z-2)}$$

$$6. \frac{\sin 2(e^2 1)}{z^3}$$

### 解析函数在无穷远点的奇性

在扩充平面で上、我们将 f(点), w=o的奇点类型定义为f(ਣ)在心的奇点类型。



一些强强:

- ① 芳f在尼上有无穷多个奇点,则f在尼上女有非私立奇点
- ②在f在仓上一切专点均孤立,且无利坚委机,当且仅当于为有理。多数