長庚大學期中、期末考試答案用紙

科目 訊號與系統

108 學年度 第 2 學期 末 考 資工 系 姓名 陳立翔 學號 B0729048

3 (a) Convolution Theorem 為卷積定理，摺積定理指出函數卷積的傅立葉轉換是函數傅立葉轉換的乘積。

(b) 令 f, g 屬於 $L^1(\mathbb{R}^n)$，F 為 f 的傅立葉轉換，G 為 g 的傅立葉轉換

$$F(v) = \mathcal{F}\{f\} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot v} dx$$

$$G(v) = \mathcal{F}\{g\} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-2\pi i x \cdot v} dx$$

let h be the convolution of f and g

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(z-x) dx.$$

我們發現

$$\iint |f(z) g(x-z)| dx dz = \int |f(z)| \int |g(z-x)| dx dz = \int |f(z)| \|g\|_1 dx = \|f\|_1 \|g\|_1$$

∴ 通過 Fubini's Theorem，可將 h 的傅立葉轉換 H 由積分式定義為

$$H(v) = \mathcal{F}\{h\} = \int_{\mathbb{R}} h(z) e^{-2\pi i z \cdot v} dz = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) g(z-x) dx dz$$

觀察到 $|f(x) g(z-x) e^{-2\pi i z \cdot v}| = |f(x) g(z-x)|$，再次應用 Fubini's Theorem.

$$H(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) e^{-2\pi i z \cdot v} dz \right) dx.$$

代入 $y = z - x$，$dy = dz$

$$H(v) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(z-x) e^{-2\pi i z \cdot v} dz \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i y \cdot v} dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \cdot v} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(y) e^{-2\pi i y \cdot v} dy \right) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \cdot v} dx \int_{\mathbb{R}} g(y) e^{-2\pi i y \cdot v} dy = F(v) \cdot G(v)$$

∴ $H(v) = F(v) \cdot G(v)$，得證 Convolution Theorem.

（請翻面繼續作答）

長庚大學期中、期末考試答案用紙

科目＿＿＿＿＿

＿＿＿學年度 第＿＿學期＿＿＿考＿＿＿＿＿系 姓名＿＿＿＿＿＿ 學號＿＿＿＿＿＿

2. (a). $h[n] = [f_0g_0,\ f_1g_0+f_0g_1,\ f_2g_0+f_1g_1+f_0g_2,\ f_2g_1+f_1g_2,\ f_2g_2]$

$f_0g_0 \quad f_0g_1 \quad f_0g_2$

$f_1g_0 \quad f_1g_1 \quad f_1g_2$

$f_2g_0 \quad f_1g_1 \quad f_2g_2$

(b). $y[n] = [1, 2, 2, 2, 1]$

1. (a). $X_1[k] = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

(b). $X_2[k] = [8, 0, 0, 0, 0, 0, 0 0]$

$$W_8 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & -i & -iw & -1 & -w & i & iw \\ 1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -iw & i & w & -1 & iw & -i & -w \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -w & -i & iw & -1 & w & i & -iw \\ 1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\ 1 & iw & i & -w & -1 & -iw & -i & w \end{bmatrix} \underset{(b)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}} \quad \underset{(c).}{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

(c). $X_3[k] = [0, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0]$

(d) $X_4[k] = [3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$

(e). $X[k] = -X[N-k]$

(f). $X_5[n]$