Задача 1

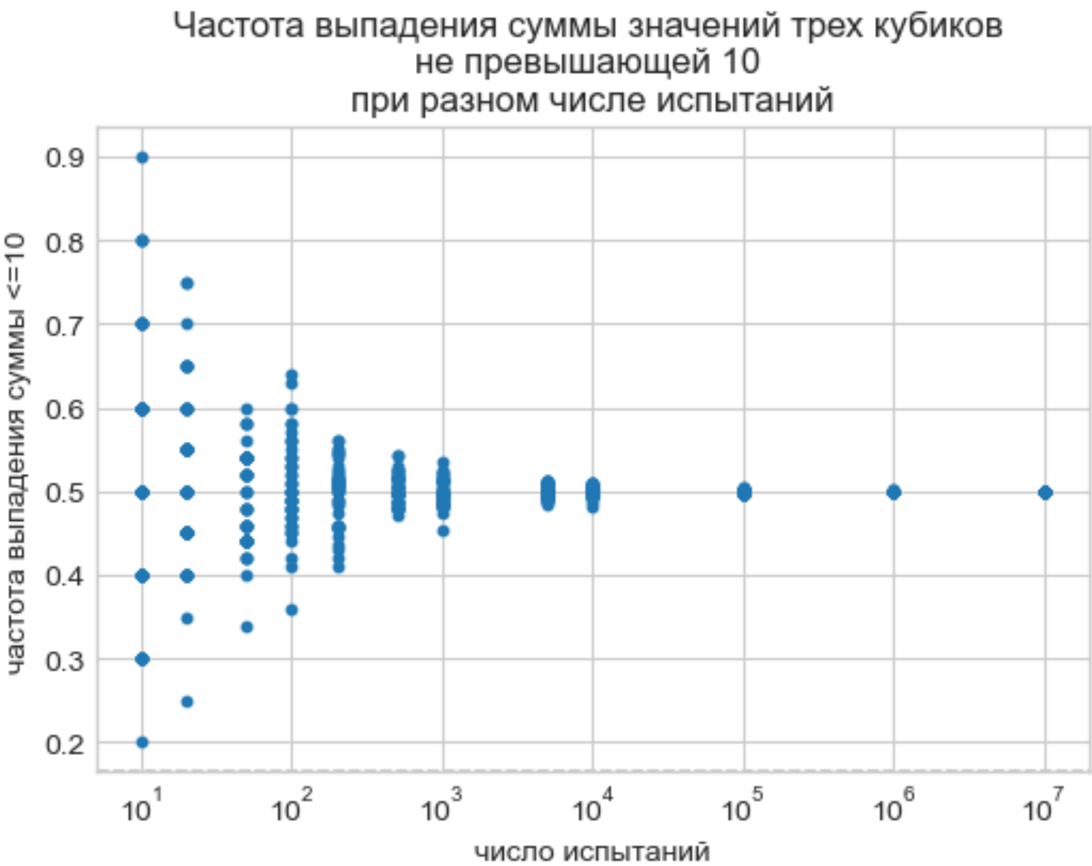
Подбрасываются три игральных кубика. Оцените вероятность того, что сумма значений этих кубиков не будет превышать 10. *Подсказка*: оценкой вероятности может служить, например, относительная частота при большом числе опытов. Попробуйте реализовать наибольшее число опытов, которое позволяют ваш компьютер и ваше терпение.

In [13]:
```
import numpy as np
```

In [14]:
```
def lt10_frequency(n: int) -> float:
    """a - выпавший результат первого кубика
       b - второго
       c - третьего

    :param n: число испытаний
    """
    a = np.random.randint(1, 7, size=n)
    b = np.random.randint(1, 7, size=n)
    c = np.random.randint(1, 7, size=n)

    m = ((a + b + c) <= 10).sum()

    return m / n
```

In [15]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
from tqdm.notebook import trange

plt.style.use('seaborn-whitegrid')
```

In [17]:
```
ns = [10, 20, 50, 100, 200, 500, 1000, 5000, 10 ** 4, 10 ** 5, 10 *
* 6, 10 ** 7]

x = []
y = []

for _ in trange(50):
    for n in ns:
        x.append(n)
        y.append(lt10_frequency(n))

plt.figure(dpi=100)

plt.scatter(x, y, s=10)

plt.axhline(y=1 / 6, c='black', ls='dashed', lw=1).set_zorder(0)

plt.xscale('log')

plt.title('Частота выпадения суммы значений трех кубиков \nне превы
шающей 10 \nпри разном числе испытаний')
plt.xlabel('число испытаний')
plt.ylabel('частота выпадения суммы <=10')

plt.show()
```



Ответ: 0,5

Задача 2

Имеется колода в 52 карты. Найти число возможностей вытянуть из неё 4 карты так, чтобы среди них был хотя бы один туз.

$C_4^1 = 4$ - это количество способов, которыми мы можем извлечь одного туза из 4х.

Из оставшихся в колоде 48 карт(4 туза вычитаем из 52) нам нужно выбрать любые три карты. Найдем для этого количество сочетаний:

$$C_{48}^3 = \frac{48!}{3!\,(48-3)!} = \frac{48!}{3!\,45!} = \frac{46 \cdot 47 \cdot 48}{3!} = \frac{46 \cdot 47 \cdot 48}{2 \cdot 3} = 17296$$

In [20]:
```
def combinations(n: int, k: int) -> int:
    """Число сочетаний.
    """

    return np.math.factorial(n) // (np.math.factorial(k) * np.math.
factorial(n - k))
```

In [23]:
```
combinations(48, 3)
```

Out[23]: 17296

Общее количество сочетаний будет равно:

In [25]:
```
_ = combinations(4, 1) * combinations(48, 3)
_
```

Out[25]: 69184

Задача 3

Из 60 вопросов, входящих в экзаменационные билеты, студент знает 50. Какова вероятность того, что среди трёх наугад выбранных вопросов студент знает: а) все? б) два?

а) Обозначим событие A= вытянул все три выученных билета

Для начала найдем общее число исходов, т.е. из всех билетов нужно вытянуть три

$C_{60}^3 = 34220$

In [ ]:

In [40]:
```
combinations(60, 3)
```

Out[40]: 34220

Затем найдем число благоприятных исходов, когда из 50 выученных билетов вытянули 3

$C_{50}^{3} = 19600$

In [32]:
```
combinations(50, 3)
```

Out[32]: 19600

Тогда вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{C_{50}^{3}}{C_{60}^{3}} = \frac{19600}{34220} = 0.573$$

б) а) Обозначим событие B = вытянул два выученных билета

Общее число исходов

$C_{60}^{3} = 34220$

Затем найдем число благоприятных исходов, когда из 50 выученных билетов вытянули 2

$C_{50}^{2} = 1225$

Из оставшихся 10 билетов вытянуть один:

$C_{10}^{1} = 10$

Тогда вероятность будет равна:

$$P(B) = \frac{C_{50}^{2} \cdot C_{10}^{1}}{C_{60}^{3}} = \frac{1225 \cdot 10}{34220} = 0.358$$

Задача 4

Бросается игральная кость. Пусть событие `A` - появление чётного числа, событие `B` - появление числа больше трёх. Являются ли эти события независимыми?

Благоприятными исходами для события `A` будут выпадение 2,4 и 6; для события `B` - 4, 5 и 6.

$P(A) = 3/6 = 1/2$

$P(B) = 3/6 = 1/2$

$P(AB) = 2/6 = 1/3$ (Случай когда выпадет 4 или 6)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Поскольку $P(A|B) \neq P(A)$, заключаем, что события A и B зависимы.

Задача 5

Допустим, имеется некоторая очень редкая болезнь (поражает 0.1% населения). Вы приходите к врачу, вам делают тест на эту болезнь, и тест оказывается положительным. Врач говорит вам, что этот тест верно выявляет 99% больных этой болезнью и всего лишь в 1% случаев даёт ложный положительный ответ.

Вопрос: какова вероятность, что вы действительно больны ей?

Подсказка: используйте формулу Байеса с раскрытием знаменателя с помощью формулы полной вероятности.

Пусть событие T^+ - означает положительный тест на болезнь.

Если точность теста 99% тогда вероятность того, что тест даст положительный результат у больного человека будет равна: $P(T^+|\text{Б}) = \frac{99}{100} = 0.99;$

Вероятность того, что тест даст положительный результат у здорового человека: $\mathrm{P}(T^+|\text{З}) = \frac{1}{100} = 0.01$

Вероятность заразиться болезнью будет равна: $\mathrm{P}(\text{Б}) = \frac{0.01}{100} = 0.001$

Вероятность, что человек здоров: $\mathrm{P}(\text{З}) = 1 - \mathrm{P}(\text{Б}) = 1 - 0.001 = 0.009$

Можем рассчитать полную вероятность того, что тест даст положительный результат, т.к. все события выше составляют полную группу событий и они несовместны:

$$\mathrm{P}(\mathrm{T}^+) = \mathrm{P}(T^+|\text{Б}) \cdot \mathrm{P}(\text{Б}) + \mathrm{P}(T^+|\text{З}) \cdot \mathrm{P}(\text{З}) = 0.99 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 = 0.01098$$

Нам необходимо найти вероятность того, что тест дал положительный результат (Т+), но человек здоров (З). Выразим эту вероятность по формуле Байеса

$$P(\text{З}|\text{Т}+) = \frac{P(\text{Т} + |\text{З}) \cdot P(\text{З})}{P(T+)} = \frac{0.01 \cdot 0.999}{0.01098} = 0.91$$

In [ ]: