Задача A: Неправильный квадрат

Заданное целое положительное число n нужно представить в виде произведения двух целых положительных чисел a и b, отличающихся на единицу ($b = a + 1$), или сказать, что это невозможно.

Разбор

Первое решение. Заметим, что a не может быть слишком большим: $31\,623 \cdot 31\,624 = 1\,000\,045\,752 > 1\,000\,000\,000$. Значит, можно просто перебрать все a от 1 до $31\,622$ и для каждого проверить, верно ли, что $a \cdot (a + 1) = n$.

Второе решение. Заметим, что $\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 \leqslant n \leqslant \lceil\sqrt{n}\rceil^2$. Поэтому $a \geqslant \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ и $b \leqslant \lceil\sqrt{n}\rceil$. Поскольку $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \leqslant \lceil\sqrt{n}\rceil$, а $a+1 = b$, единственный возможный ответ — это $a = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ и $b = \lceil\sqrt{n}\rceil$. Осталось проверить, правильный ли он: верно ли, что $b = a + 1$ и $a \cdot b = n$.

Задача B: Секретный язык

Секретный язык — это вставка буквы «`a`» между каждыми двумя соседними буквами слова.

Задано слово. Если это слово, записанное на секретном языке, выведите исходное слово. В противном случае выведите «`Suspicious!`».

Разбор

Просто проверим, что количество букв нечётно, а каждая вторая — буква «`a`». Если это так, выведем все нечётные буквы в порядке их следования.

Задача C: Три забора

Заданы начальная точка на плоскости и три забора. Первый забор — окружность. Второй забор — прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат. Третий забор — треугольник. Выясните, сколько раз необходимо перелезть через забор, чтобы выбраться (то есть иметь возможность уйти сколь угодно далеко от начального положения).

Гарантируется, что все четыре заданных объекта попарно не имеют общих точек, а все фигуры — невырожденные.

Разбор

Для каждого забора в отдельности проверим, что точка находится внутри него.

Для окружности это просто проверка того, что расстояние между точкой и центром окружности меньше её радиуса.

Принадлежность точки прямоугольнику со сторонами, параллельными осям координат, проверяется отдельно по каждой координате.

В случае треугольника (назовём его ΔABC) это означает, что точка (назовём её O) лежит справа от трёх векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{CA}$, или же слева ото всех трёх этих векторов. Это можно проверить, вычислив три косых произведения $\overline{AB} \wedge \overline{AO}$, $\overline{BC} \wedge \overline{BO}$ и $\overline{CA} \wedge \overline{CO}$ и посмотрев на их знак. Косое произведение векторов (x_1, y_1) и (x_2, y_2) равно $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$.

Задача D: Письма мэра

Есть n братьев, получивших по одному письму, но не умеющих читать. Каждый брат считает кого-то из братьев самым умным. Каждый день каждый из братьев пересылает все свои письма тому из братьев, кого он считает самым умным. Сколько писем будет у каждого из братьев через t дней?

Разбор

Первое решение. Пусть $f^k(i)$ — номер брата, у которого ровно через k дней окажется письмо, находящееся в данный момент у i-го брата. Изначально нам известны значения $f^1(i) = a_i$. Сначала найдём $f^2(i) = f^1(f^1(i))$ для всех i. Затем получим $f^4(i) = f^2(f^2(i))$. Аналогично найдём f^8, f^{16} и так далее. После этого, рассмотрев двоичное представление числа t, можно выяснить, как перемещаются письма ровно за t дней. Например, если $t = 13 = 1101_2 = 1 + 4 + 8$, то $f^{13}(i) = f^8(f^4(f^1(i)))$.

Второе решение. Можно для каждого письма вычислить предпериод и период того пути между братьями, который оно проделает. При этом можно избавиться от предпериодов, сделав изначально первые n действий.

Третье решение. Можно представить изменения количества писем у каждого брата за один день в виде умножения на матрицу $n \times n$. Эту матрицу можно быстро возвести в степень t, как в первом решении.

Задача E: Многодневные часы

Есть n сестёр. У сестры с номером i, считая с единицы, на часах есть стрелка, поворачивающаяся равномерно и делающая один оборот за i дней. Все эти стрелки стартовали с нулевого деления одновременно (в один и тот же знаменательный день). Прошло какое-то строго положительное количество дней. Заданы примерное количество дней e, прошедших с этого знаменательного дня, а также показания всех n часов. Найдите ближайшее к e количество дней, которое могло пройти на самом деле (минимальное в случае нескольких ответов). Гарантируется, что показания всех часов корректны.

Разбор

Прежде всего заметим, что заданные остатки от деления d на 1, 2, $\ldots$, n однозначно определяют $d \bmod \text{НОК}(1, 2, \ldots, n)$. Здесь НОК — это наименьшее общее кратное данных чисел. Для $n = 20$ это число равно $16 \cdot 9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 = 232\,792\,560$.

В этой задаче есть следующая тонкость. Пусть у нас есть два ближайших подходящих к e числа — $d_1 \leqslant e$ и $d_2 \geqslant e$ — и мы хотим из них выбрать ближайшее: то, для которого модуль разности $|d_i - e|$ минимален. Необходимо вспомнить, что ответ должен быть строго положительным, а значит, не рассматривать вариант, меньший e, если $d_1 \leqslant 0$, даже если $|d_1 - e| \leqslant |d_2 - e|$.

Первое решение. Можно просто проверить несколько ближайших дней на соответствие показаниям часов. Такое решение может успевать, а может не успевать выдать ответ за отведённое время в зависимости от того, насколько оптимально делается проверка. Например, если проверку на соответствие начинать с бóльших модулей, она достаточно часто будет прерываться после первых же одного-двух модулей.

Второе решение. Можно воспользоваться китайской теоремой об остатках. Каждый следующий модуль небольшой, поэтому можно просто прибавлять предыдущее НОК до тех пор, пока остаток не станет таким, как нужно. Например, пусть $d \bmod 1 = 0$, $d \bmod 2 = 1$, $d \bmod 3 = 2$, $d \bmod 4 = 1$ и $d \bmod 5 = 4$. Начнём с $d = 0$ и будем прибавлять 1, пока не будет выполнено $d \bmod 2 = 1$. Далее будем прибавлять 2, пока не окажется, что $d \bmod 3 = 2$; после этого $d = 5$. Равенство $d \bmod 4 = 1$ уже верно. Наконец, будем прибавлять $12 = \text{НОК}(1, 2, 3, 4)$ до тех пор, пока не окажется верным последнее неравенство: $d = 5 \to 17 \to 29$.

Разработчики комплекта задач:

Иван Казменко (gassafm@gmail.com)
Наталья Гинзбург (naagin@gmail.com)