REPORT

WEEK 8

ASSIGNMENT WEEK 8

Pemodelan PD Parsial: Pengeringan Silinder

1. Seorang mahasiswa ingin mempelajari proses pemungutan senyawa oleoresin pada rimpang jahe. Percobaan dilakukan dengan melakukan proses *reactive extraction solid-liquid* dimana sejumlah rimpang jahe yang telah dipotong berbentuk bola dimasukkan ke dalam labu leher tiga yang berisi ethanol (solvent). Rimpang jahe dapat dianggap berbentuk bola dengan ukuran yang seragam.

a. Susunlah model matematika beserta kondisi batas yang sesuai untuk mencari konsentrasi A di dalam bola dan larutan.

b. Selesaikanlah persamaan di atas. Data untuk pemodelan (semua satuan dianggap sudah sesuai):

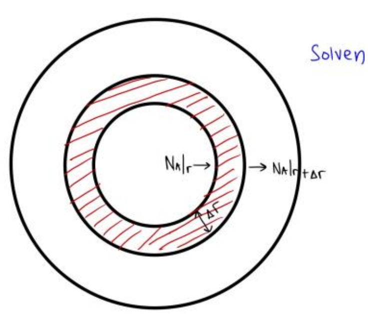
Nr=30;	kr=1e-3;	tspan=linspace(0,400,401);
CA0=5e-1;	VL=2e3;	
De=1e-3;	R=2;	
eps=4e-1;	Nb=1e2;	

Jalankan simulasi yang menggambarkan konsentrasi oleoresin (A) di dalam jahe pada berbagai posisi radial dan waktu, serta gambarkan pula plot konsentrasi oleoresin (A) di dalam larutan sebagai fungsi waktu.

Penyelesaian:

- **Ilustrasi Elemen Volume**

Pemodelan perpindahan massa pada elemen volume rimpang jahe berbentuk bola.



Elemen Volume Bola = $4\pi r^2 \Delta r$

- **Asumsi**

  Kecepatan laju reaksi A mengikuti persamaan berikut:

  $(-r_A) = k_r C_A^{1.5}$

<u>Neraca Massa A pada Elemen Volume Rimpang Jahe</u>

$$ROMI - ROMO = ROMA$$

$$A\,N_a|_r - A\,N_a|_{r+\Delta r} = V\frac{\partial Ca}{\partial t}$$

$$-De4\pi r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\bigg|_r - \left(-De4\pi r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\bigg|_{r+\Delta r} + k_r C_A^{1.5}\Delta V\right) = \varepsilon 4\pi r^2 \Delta r\frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$De4\pi r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\bigg|_{r+\Delta r} - De4\pi r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\bigg|_r - k_r C_A^{1.5}4\pi r^2\Delta r = \varepsilon 4\pi r^2\Delta r\frac{\partial C_A}{\partial t}$$

Dengan menggunakan limit $\Delta r \to 0$, maka diperoleh persamaan :

$$\lim_{\Delta r\to 0}\left(\frac{\left(r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\Big|_{r+\Delta r} - r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\Big|_r\right)}{\Delta r} - \frac{k_r}{De}C_A^{1.5}r^2\right) = \frac{\varepsilon r^2}{De}\frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$\frac{De}{\varepsilon r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial C_A}{\partial r}\right) - \frac{k_r}{De}C_A^{1.5}r^2\right) = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$\frac{De}{\varepsilon r^2}(r^2\frac{\partial C_A}{\partial r} + 2r\frac{\partial C_A}{\partial r} - \frac{k_r}{De}C_A^{1.5}r^2) = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$\frac{De}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_A}{\partial r} - \frac{k_r}{De}C_A^{1.5}\right) = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

<u>Neraca Massa A di Larutan Ethanol</u>

$$ROMI - ROMO = ROMA$$

$$A\,N_a|_{r=R} - 0 = V_L\frac{\partial C_{Af}}{\partial t}$$

$$-De4\pi R^2 N_a\frac{\partial C_A}{\partial r}\bigg|_{r=R} - 0 = V_L\frac{\partial C_{Af}}{\partial t}$$

$$-\frac{De}{V_L}4\pi R^2 N_a\frac{\partial C_A}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\partial C_{Af}}{\partial t}$$

<u>Boundary Conditions:</u>

IC$_{\text{silinder}}$: $t = 0 \to C(r,0) = C_{A0}$

IC$_{\text{larutan}}$: $t = 0 \to C_{Af} = 0$

BC1 : $r = 0; \mathrm{t} = \mathrm{t} \to \frac{dc}{dr} = 0$

BC2 $: r = R; t = t \rightarrow C_A = C_{Af}$

<u>Pemodelan matematis menggunakan *finite difference approximation* (FDA)</u>

1. Konsentrasi zat ditengah silinder

$$\frac{De}{\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 C_A}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C_A}{\partial r} - \frac{k_r}{De}C_A^{1.5}\right) = \frac{\partial C_A}{\partial t}$$

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}(i) = \frac{De}{\varepsilon}\left(\frac{C_A(i+1) - 2C_A(i) + C_A(i-1)}{\Delta r^2} + \frac{2}{r_i}\frac{C_A(i+1) + C_A(i-1)}{2\Delta r} - \frac{k_r}{De}(C_A(i))^{1.5}\right)$$

2. Batas kiri

$$\frac{\partial Ca}{\partial r} = 0$$

$$\frac{-3C_A(i) + 4C_A(i+1) - C_A(i+2)}{2\Delta r} = 0$$

$$\frac{-3C_A(0) + 4C_A(1) - C_A(2)}{2\Delta r} = 0$$

$$-3\,C_A(0) + 4C_A(1) - C_A(2) = 0$$

$$C_A(0) = \frac{4C_A(1) - C_A(2)}{3}$$

3. Batas kanan

$$C_A = C_{Af}$$

$$C_A(-2) = C_A(-1)$$

4. Konsentrasi pada larutan

$$-\frac{De}{V_L}4\pi R^2 N_a \left.\frac{\partial C_A}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\partial C_{Af}}{\partial t}$$

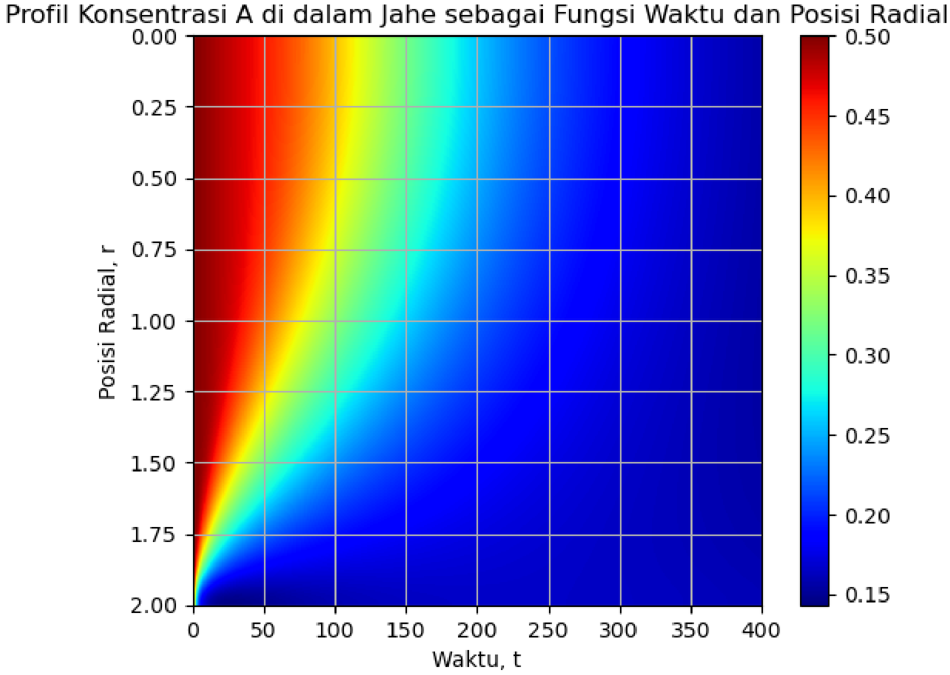
$$-\frac{De}{V_L}4\pi R^2 N_a \frac{3C_A(-2) - 4C_A(-3) + C_A(-4)}{2\Delta r} = \frac{dC_{Af}}{dt}$$

In [9]:

```python
"""
Nama : Liska Dewi Muktiarani
NIM  : 21/477837/TK/52633
"""
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp as sol

#Data Perhitungan
Nr = 30
Ca0 = 5e-1
De = 1e-3
eps = 4e-1
kr = 1e-3
VL = 2e3
R = 2
Nb = 1e2
Nt = 401
t_akhir = 400
tspan = np.linspace(0,t_akhir,Nt)
rspan = np.linspace(0,R,Nr)
dr = rspan[1] - rspan[0]

#Fungsi
def ODE(t, Ca):
    dCadt = np.zeros(Nr+1)
    #BC 1 (r=0)
    Ca[0] = (4*Ca[1]-Ca[2])/3
    #BC 2 (r=R)
    Ca[-2] = Ca[-1]
    #PD Parsial
    for i in range(1,Nr-1):
        dCadt[i] = De/eps*((Ca[i+1]-2*Ca[i]+Ca[i-1])/dr**2+2/rspan[i]*(Ca[i+1]-Ca[i-1])/2/dr-kr/De*Ca[i]**1.5)
        dCadt[-1] = -De/VL*Nb*4*np.pi*R**2*(3*Ca[-2]-4*Ca[-3]+Ca[-4])/2/dr
    return dCadt

#Main Program
IC = np.zeros(Nr+1)
IC[0:Nr] = Ca0
Ca = sol(ODE,t_span=[0,t_akhir],y0=IC,t_eval=tspan).y

#Recalculation IC, r=0, dan r=R
Ca[0:Nr,0] = Ca0
Ca[0,:] = (4*Ca[1,:]-Ca[2,:])/3
Ca[-2,1:] = Ca[-1,1:]
Cabola = Ca[0:-2,:]
Cacairan = Ca[-1,:]

#Plot Data
plt.figure(0)
plt.imshow(Cabola,cmap='jet', extent =[0,t_final,R,0],aspect = t_akhir/R, interpolation ='bicubic')
plt.colorbar()
plt.grid()
plt.title('Profil Konsentrasi A di dalam Jahe sebagai Fungsi Waktu dan Posisi Radial')
plt.xlabel('Waktu, t')
plt.ylabel('Posisi Radial, r')
```

Out[9]:

```
Text(0, 0.5, 'Posisi Radial, r')
```

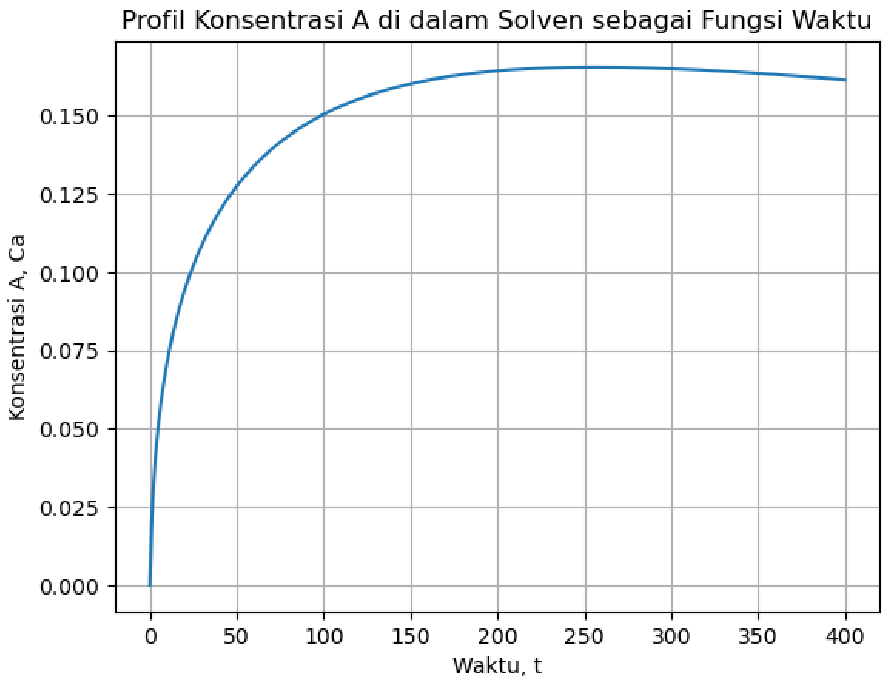


Pembahasan

Berdasarkan grafik dapat dilihat bahwa konsentrasi Oleoresin tertinggi terletak saat waktu t = 0 dan posisi radial, r = 0. Semakin jauh posisi radial dari pusat bola (r = R), maka semakin rendah konsentrasi Oleoresin pada jahe, artinya semakin tinggi konsentrasi Oleoresin yang terambil oleh solven. Semakin lama juga proses ekstraksi menggunakan solven berlangsung, maka akan semakin rendah konsentrasi Oleoresin pada jahe dan semakin banyak Oleoresin yang terekstrak pada solven.

In [10]:
```
plt.figure(1)
plt.plot(tspan, Cacairan)
plt.grid()
plt.title('Profil Konsentrasi A di dalam Solven sebagai Fungsi Waktu')
plt.xlabel('Waktu, t')
plt.ylabel('Konsentrasi A, Ca')
```

Out[10]:
```
Text(0, 0.5, 'Konsentrasi A, Ca')
```



Pembahasan

Berdasarkan grafik di atas dapat dilihat bahwa profil konsentrasi Oleoresin pada solven meningkat seiring dengan lamanya waktu reaksi. Perpindahan massa dari Oleoresin menuju solven pada awal reaksi berlangsung cepat hingga pada saat t = 200, kecepatan perpindahan massa berangsur mulai melambat karena gradien konsentrasi antara Oleoresin pada bola dan solven yang semakin berkurang. Dapat disimpulkan bahwa waktu optimum yang dibutuhkan untuk mengekstrak Oleoresin dari jahe adalah kurang lebih t = 200.