

Stable Matching

Lisandro Martinez

March 17, 2020

1 Problema

Gale-Shapley: Dado un conjunto de preferencias entre empleadores y candidatos es posible asignar los candidatos a los empleadores de forma tal que para cada uno de los empleadores E y para cada candidato C que no se encuentra contratado para trabajar en la empresa se cumpla al menos una de los siguientes dos casos:

1. E prefiere a cada uno de los candidatos contratados en vez de C .
2. C prefiere su actual situación antes que trabajar para E .

Si se cumple, el resultado es **stable**: el auto-interes de cada uno de los participantes hara que se mantenga el orden.

Variante a analizar: Dados un conjunto de hombres V y un conjunto de mujeres M , como producir un sistema en el que cada uno termine casado con su mejor opcion

2 Definiciones

Un conjunto de Varones M y un conjunto de mujeres W :

$$M = \{m_1, m_2, \dots m_n\}$$

$$W = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$$

- $M \times W$: conjunto de todos los posibles pares ordenados de la forma (m, w) , donde $m \in M$ y $w \in W$
- Matching S : conjunto ordenado de pares de $M \times W$ en el que cada miembro de M y cada miembro de W aparece *como mucho en un par de S*

- Perfect Matching S' : es un Matching en el que cada miembro de M y cada miembro de W aparecen *exactamente en un par de S'*
Un perfect matching es una manera sencilla de emparejar los hombres con las mujeres, de modo tal que cada uno termine casado con alguien y nadie se case con mas de una persona.
- Preferences: cada $m \in M$ establece un ranking de mujeres con las que querría casarse en orden decreciente.
- Instability: Existen dos pares m, w y m', w' en S en los que m prefiere a w' por sobre w y w prefiere a m por sobre m' . En este caso no existiría nada que les impida a m y a w' abandonar a sus respectivas parejas y comprometerse entre ellos. El par m, w' es una inestabilidad con respecto de S , dado que no pertenece a S , pero m y a w' se prefieren entre si antes que a sus respectivas parejas.
- Stable Matching: un matching es estable si *i* es perfecto y *ii* no existe ninguna inestabilidad con respecto a S . **Nota:** *es posible que exista mas de un stable matching para una instancia del problema*
- Valid partner: w es un valid partner de m si existe un stable matching que contenga el par $((m, w))$
- Best valid partnet: w es valid partner de m si w es un valid partner de m y no existe una mujer que se encuentra por encima de w en la lista de preferencias y que sea un valid partner

3 Diseño del algoritmos

- Existe un stable matching para cada conjunto de listas de preferencias entre hombres y mujeres.
- Es posible construir un algoritmo eficiente que toma como entrada la lista de preferencias y produce un stable matching.

3.1 Observaciones

- Al comienzo, tanto los hombres como las mujeres se encuentran solteros. un hombre soltero elije a la mujer que se encuentra primera en su ranking y le hace una propuesta de casamiento. La mujer acepta la proposición y los dos pasan a estar comprometidos.

- En algún momento de la ejecución del algoritmo algunos hombres y mujeres se encuentran comprometidos y otros solteros. El próximo paso consiste en:
 1. El hombre m le propone casamiento a la mujer que se encuentra primera en su lista de preferencias.
 2. Si la mujer w esta soltera, acepta la proposición y se comprometen Si, por contraposición, la mujer w ya se encuentra comprometida con m' puede ocurrir una de las siguientes opciones:
 - (a) w prefiere a m' por sobre m , w rechaza a m y continúa comprometida con m' .
 - (b) w prefiere a m por sobre m' , w se compromete con m y m' queda soltero.

3.2 Algoritmo Gale-Shapley

Initialize each person to be free.

```

while (some man is free and hasn't proposed to every woman) {
  Choose such a man m
  w = 1st woman on m's list to whom m has not yet proposed
  if (w is free)
    assign m and w to be engaged
  else if (w prefers m to her fiancé m')
    assign m and w to be engaged, and m' to be free
  else
    w rejects m
}

```

4 Análisis del algoritmo

4.1 Demostraciones

4.1.1 Demostración de la finalización del algoritmo

- (1,1): w permanece comprometida desde el momento en el que recibe la primera propuesta. Solo cambia de pretendiente si m se encuentra en mejor posición que m' en su lista de preferencias.

- (1,2): m le realiza propuestas de casamiento a las mujeres de su lista de preferencias de mejor a peor.

Claim. El algoritmo G-S termina después de un máximo de n^2 iteraciones del *while*.

Proof. Se utiliza las proposiciones de matrimonio como medida de *progreso*. □

4.1.2 Demostración de perfección

El conjunto S , resultado de la ejecución del algoritmo, es un perfect matching. Hay que demostrar que ningún hombre puede terminar soltero al finalizar la ejecución del algoritmo, dado que la única forma de salir del *While* es que no hayan quedado hombres solteros. En ese caso, el conjunto de parejas es un perfect matching.

Claim. (1,4) Si m es un hombre soltero en algún momento de la ejecución del algoritmo, entonces existe una mujer m a la que no le ha propuesto matrimonio.

Proof. (by contradiction) Existe un punto de la ejecución del algoritmo en el que m le ha propuesto matrimonio a todas las mujeres se encuentra soltero, Por (1,1) todas las mujeres se encuentran comprometidas. Dado que el conjunto de pares forman un matching, deben existir n hombres comprometidos en ese punto de la ejecución del algoritmo. Existen solo n hombres en total y m no está comprometido, contradiciéndose. □

4.1.3 Demostración de S como perfect matching

Claim. (1,5) El conjunto S , resultado de la ejecución del algoritmo es un perfect matching.

Proof. El conjunto de pares siempre forman un matching. Suponiendo que el algoritmo termina con un hombre soltero m , todos los hombres deben haberle propuesto matrimonio a todas las mujeres, de otro modo no habría terminado la ejecución del algoritmo. Esto contradice (1,4), por el cual no puede existir un hombre soltero que no le haya propuesto matrimonio a todas las mujeres. □

4.1.4 Demostración de S como stable matching

Claim. (1,6) Al finalizar el algoritmo el conjunto S es un stable matching

Proof. (by contradiction) Se asume que existe un inestabilidad con respecto a S . Una inestabilidad dos pares (m, w) y (m', w') con las siguientes propiedades:

- m prefiere a m' a w

- w' prefiere a m a m'

En la ejecución del algoritmo que produjo S , la última proposición de matrimonio fue realizada a w . Si m no le propuso casamiento a w' , w está por encima de w' en la lista de preferencias de m (contradiciendo que m prefiere a w'). Si le propuso matrimonio a w' , entonces w' lo rechazó por m'' . Entonces, $m'' = m$ es la pareja de w' o w' prefiere su pareja actual m' a m'' . Cualquiera de las dos alternativas contradice la suposición de que w' prefiere a m en vez de a m' . Por lo tanto S es un stable matching \square

Claim. Dado un conjunto de pares $(m, best(m)) : m \in M$, denominado S^* Toda ejecución del algoritmo Gale-Shapley devuelve un conjunto S^*

Observaciones:

Proof. (by contradiction) Supuesto una ejecución \mathcal{E} de G-S en la que se produce el conjunto S en el cual un hombre esta casado con una mujer que no es su best valid partner. Dado que los hombres le proponen casamiento a las mujeres en su lista de preferencias de mejor a peor, debe existir un hombre que fue rechazado por un valid partner durante la ejecución. Considerando el primer hombre rechazado por un valid partner m , debe ser debido a que w es best valid partner de m . \mathcal{E} .

El rechazo de w a m puede haber ocurrido porque m le propuso matrimonio y fue rechazado por w en favor de la pareja previa de w o porque w rompió su compromiso con m en favor de m' . De cualquiera de los dos modos w permanece comprometida con un hombre distinto de m que ella prefiere. Dado que w es un valid partner de m , existe un stable matching S' en el que (m, w) m y w se encuentran comprometidos. \square