

# Stable Matching

Lisandro Martinez

March 15, 2020

HOLA

## 1 Problema

Gale-Shapley: Dado un conjunto de preferencias entre empleadores y candidatos es posible asignar los candidatos a los empleadores de forma tal que para cada uno de los empleadores  $E$  y para cada candidato  $C$  que no se encuentra contratado para trabajar en la empresa se cumpla al menos una de los siguientes dos casos:

1.  $E$  prefiere a cada uno de los candidatos contratados en vez de  $C$ .
2.  $C$  prefiere su actual situación antes que trabajar para  $E$ .

Si se cumple, el resultado es **stable**: el auto-interes de cada uno de los participantes hara que se mantenga el orden.

**Variante a analizar:** Dados un conjunto de hombres  $V$  y un conjunto de mujeres  $M$ , como producir un sistema en el que cada uno termine casado con su mejor opcion

## 2 Definiciones

Un conjunto de Varones  $M$  y un conjunto de mujeres  $W$ :

$$M = \{m_1, m_2, \dots m_n\}$$

$$W = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$$

- $M \times W$ : conjunto de todos los posibles pares ordenados de la forma  $(m, w)$ , donde  $m \in M$  y  $w \in W$

- Matching  $S$ : conjunto ordenado de pares de  $M \times W$  en el que cada miembro de  $M$  y cada miembro de  $W$  aparece *como mucho en un par de  $S$*
- Perfect Matching  $S'$ : es un Matching en el que cada miembro de  $M$  y cada miembro de  $W$  aparecen *exactamente en un par de  $S'$*   
Un perfect matching es una manera sencilla de emparejar los hombres con las mujeres, de modo tal que cada uno termine casado con alguien y nadie se case con mas de una persona.
- Preferences: cada  $m \in M$  establece un ranking de mujeres con las que querría casarse en orden decreciente.
- Instability: Existen dos pares  $m, w$  y  $m', w'$  en  $S$  en los que  $m$  prefiere a  $w'$  por sobre  $w$  y  $w$  prefiere a  $m$  por sobre  $m'$ . En este caso no existiría nada que les impida a  $m$  y a  $w'$  abandonar a sus respectivas parejas y comprometerse entre ellos. El par  $m, w'$  es una inestabilidad con respecto de  $S$ , dado que no pertenece a  $S$ , pero  $m$  y a  $w'$  se prefieren entre si antes que a sus respectivas parejas.
- Stable Matching: un matching es estable si *i* es perfecto y *ii* no existe ninguna inestabilidad con respecto a  $S$ . **Nota:** *es posible que exista mas de un stable matching para una instancia del problema*

### 3 Diseno del algoritmos

- Existe un stable matching para cada conjunto de listas de preferencias entre hombres y mujeres.
- Es posible construir un algoritmo eficiente que toma como entrada la lista de preferencias y produce un stable matching.

#### 3.1 Observaciones

- Al comienzo, tanto los hombres como las mujeres se encuentran solteros. un hombre soltero elije a la mujer que se encuentra primera en su ranking y le hace una propuesta de casamiento. La mujer acepta la proposición y los dos pasan a estar comprometidos.
- En algún momento de la ejecución del algoritmo algunos hombres y mujeres se encuentran comprometidos y otros solteros. El próximo paso consiste en:

1. El hombre  $m$  le propone casamiento a la mujer que se encuentra primera en su lista de preferencias.
2. Si la mujer  $w$  esta soltera, acepta la proposición y se comprometen Si, por contraposición, la mujer  $w$  ya se encuentra comprometida con  $m'$  puede ocurrir una de las siguientes opciones:
  - (a)  $w$  prefiere a  $m'$  por sobre  $m$ ,  $w$  rechaza a  $m$  y continúa comprometida con  $m'$ .
  - (b)  $w$  prefiere a  $m$  por sobre  $m'$ ,  $w$  se compromete con  $m$  y  $m'$  queda soltero.

### 3.2 Algoritmo Gale-Shapley

Initialize each person to be free.

```

while (some man is free and hasn't proposed to every woman) {
  Choose such a man m
  w = 1st woman on m's list to whom m has not yet proposed
  if (w is free)
    assign m and w to be engaged
  else if (w prefers m to her fiancé m')
    assign m and w to be engaged, and m' to be free
  else
    w rejects m
}

```

## 4 Análisis del algoritmo

### 4.1 Demostración de la finalización del algoritmo

- (1,1):  $w$  permanece comprometida desde el momento en el que recibe la primera propuesta. Solo cambia de pretendiente si  $m$  se encuentra en mejor posición que  $m'$  en su lista de preferencias.
- (1,2):  $m$  le realiza propuestas de casamiento a las mujeres de su lista de preferencias de mejor a peor.

**Claim.** El algoritmo G-S termina después de un máximo de  $n^2$  iteraciones del *while*.

*Proof.* Se utiliza las proposiciones de matrimonio como medida de *progreso*. □