

Stable Matching

Lisandro Martinez

March 14, 2020

HOLA

1 Problema

Gale-Shapley: Dado un conjunto de preferencias entre empleadores y candidatos es posible asignar los candidatos a los empleadores de forma tal que para cada uno de los empleadores E y para cada candidato C que no se encuentra contratado para trabajar en la empresa se cumpla al menos una de los siguientes dos casos:

1. E prefiere a cada uno de los candidatos contratados en vez de C .
2. C prefiere su actual situación antes que trabajar para E .

Si se cumple, el resultado es **stable**: el auto-interes de cada uno de los participantes hara que se mantenga el orden.

Variante a analizar: Dados un conjunto de hombres V y un conjunto de mujeres M , como producir un sistema en el que cada uno termine casado con su mejor opcion

2 Definiciones

Un conjunto de Varones M y un conjunto de mujeres W :

$$M = \{m_1, m_2, \dots m_n\}$$

$$W = \{w_1, w_2, \dots w_n\}$$

- $M \times W$: conjunto de todos los posibles pares ordenados de la forma (m, w) , donde $m \in M$ y $w \in W$

- Matching S : conjunto ordenado de pares de $M \times W$ en el que cada miembro de M y cada miembro de W aparece *como mucho en un par de S*
- Perfect Matching S' : es un Matching en el que cada miembro de M y cada miembro de W aparecen *exactamente en un par de S'*
Un perfect matching es una manera sencilla de emparejar los hombres con las mujeres, de modo tal que cada uno termine casado con alguien y nadie se case con mas de una persona.
- Preferences: cada $m \in M$ establece un ranking de mujeres con las que querria casarse en orden decreciente.
- Instability: Existen dos pares m, w y m', w' en S en los que m prefiere a w' por sobre w y w prefiere a m por sobre m' . En este caso no existiría nada que les impida a m y a w' abandonar a sus respectivas parejas y comprometerse entre ellos. El par m, w' es una inestabilidad con respecto de S , dado que no pertenece a S , pero m y a w' se prefieren entre si antes que a sus respectivas parejas.
- Stable Matching: un matching es estable si *i* es perfecto y *ii* no existe ninguna inestabilidad con respecto a S . **Nota:** *es posible que exista mas de un stable matching para una instancia del problema*

3 Diseno del algoritmos

- Existe un stable matching para cada conjunto de listas de preferencias entre hombres y mujeres.
- Es posible construir un algoritmo eficiente que toma como entrada la lista de preferencias y produce un stable matching.

3.1 Observaciones

- Al comienzo, tanto los hombres como las mujeres se encuentran solteros. un hombre soltero elije a la mujer que se encuentra primera en su ranking y le hace una propuesta de casamiento. La mujer acepta la proposición y los dos pasan a estar comprometidos.
- En algún momento de la ejecución del algoritmo algunos hombres y mujeres se encuentran comprometidos y otros solteros. El próximo paso consiste en:

1. El hombre m le propone casamiento a la mujer que se encuentra primera en su lista de preferencias.
2. Si la mujer w esta soltera, acepta la proposición y se comprometen Si, por contraposición, la mujer w ya se encuentra comprometida con m' puede ocurrir una de las siguientes opciones:
 - (a) w prefiere a m' por sobre m , w rechaza a m y continúa comprometida con m' .
 - (b) w prefiere a m por sobre m' , w se compromete con m y m' queda soltero.

3.2 Algoritmo Gale-Shapley

Initialize each person to be free.

```
while (some man is free and hasn't proposed to every woman) {
  Choose such a man m
  w = 1st woman on m's list to whom m has not yet proposed
  if (w is free)
    assign m and w to be engaged
  else if (w prefers m to her fiancé m')
    assign m and w to be engaged, and m' to be free
  else
    w rejects m
}
```

4 Análisis del algoritmo

4.1 Demostración de la finalización del algoritmo

- (1,1): w permanece comprometida desde el momento en el que recibe la primera propuesta. Solo cambia de pretendiente si m se encuentra en mejor posición que m' en su lista de preferencias.
- (1,2): m le realiza propuestas de casamiento a las mujeres de su lista de preferencias de mejor a peor.

Claim. El algoritmo G-S termina después de un máximo de n^2 iteraciones del *while*.

Proof. Se utiliza las proposiciones de matrimonio como medida de *progreso*. □