Горелкина
РК6-32Б
Вариант №4

Домашнее задание №2 по курсу теории вероятностей и математической статистики. Часть №2. Непрерывные случайные величины.

Исходные данные

R_1	G_1	B_1	R_2	G_2	B_2	R_3	G_3	B_3
11	6	8	10	5	10	8	5	6

Задача 1. Известно, что плотность распределения $f(x)$ одномерной случайной величины X представляет собой трапецию, для которой: $f(R_1) = 0,\ f(R_1 + G_1) = h,\ f(R_1 + G_1 + B_1) = h,\ f(R_1 + G_1 + B_1 + R_2) = 0$.

Необходимо:

1. рассчитать величину h;

2. записать аналитическое выражение для функции плотности распределения $f(x)$;

3. записать аналитическое выражение для функции распределения $F(x)$;

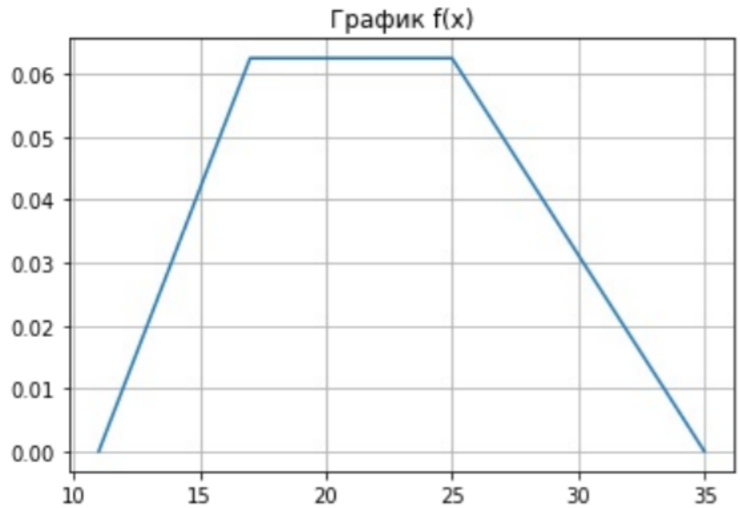
4. рассчитать математическое ожидание случайной величины $M(X)$;

5. рассчитать дисперсию случайной величины $D(X)$.

Решение:

Исходя из условия нормировки, площадь под графиком функции плотности распределения должна равняться 1. Площадь трапеции $S = h \cdot \dfrac{a+b}{2}$. В нашем случае $a = R_1 + G_1 + B_1 - R_1 - G_1 = B_1 = 8,\ b = R_1 + G_1 + B_1 + R_2 = 24$. Отсюда получаем $h = \dfrac{1}{16}$.

Функция плотности распределения является кусочно-заданной. Для наглядности изобразим её график.



Чтобы записать аналитические выражения для участков, используем каноническое уравнение прямой.

$$\frac{x-11}{17-11}=\frac{y-0}{\frac{1}{16}-0}\Rightarrow y=\frac{x-11}{96},\ x\in[11,17)$$

$$\frac{x-25}{35-25}=\frac{y-\frac{1}{16}}{0-\frac{1}{16}}\Rightarrow y=\frac{35-x}{160},\ x\in[25,35]$$

$$f(x)=\begin{cases} 0,\ x\in(-\infty,11), \\ \frac{x-11}{96},\ x\in[11,17), \\ \frac{1}{16},\ x\in[17,25), \\ \frac{35-x}{160},\ x\in[25,35], \\ 0,\ x\in(35,+\infty). \end{cases}$$

Чтобы найти функцию распределения, проинтегрируем каждый участок функции плотности распределения.

$$\int \frac{x-11}{96}\,dx = \frac{x^2}{192} - \frac{11\cdot x}{96} + C,\ \frac{11^2}{192} - \frac{11\cdot 11}{96} + C = 0\ \Rightarrow C = \frac{121}{192}$$

$$\int \frac{dx}{16} = \frac{x}{16} + C,\ \frac{17}{16} + C = \frac{17^2}{192} - \frac{11\cdot 17}{96} + \frac{121}{192} \Rightarrow C = -\frac{7}{8}$$

$$\int \frac{35-x}{160}\,dx = -\frac{x^2}{320} + \frac{7\cdot x}{32} + C,\ -\frac{35^2}{320} + \frac{7\cdot 35}{32} + C = 1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = -\frac{181}{64}$$

Получаем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty, 11), \\ \dfrac{x^2}{192} - \dfrac{11\cdot x}{96} + \dfrac{121}{192},\ x \in [11, 17), \\ \dfrac{x}{16} - \dfrac{7}{8},\ x \in [17, 25), \\ -\dfrac{x^2}{320} + \dfrac{7\cdot x}{32} - \dfrac{181}{64},\ x \in [25, 35], \\ 1,\ x \in (35, +\infty). \end{cases}$$

Математическое ожидание найдём по определению:

$$M(X) = \int\limits_{\mathbb{R}} x\cdot f(x)\,dx = \int\limits_{11}^{17} x\cdot\frac{x-11}{96}\,dx + \int\limits_{17}^{25} x\cdot\frac{dx}{16} + \int\limits_{25}^{35} x\cdot\frac{35-x}{160}\,dx =$$

$$= \frac{45}{16} + \frac{21}{2} + \frac{428}{48} = \frac{1067}{48} = 22.2291(6)$$

Дисперсию найдём по определению:

$$D(X) = \int\limits_{\mathbb{R}} (x - M(X))^2 \cdot f(x)\, dx = \int\limits_{11}^{17} (x - M(X))^2 \cdot \frac{x-11}{96}\, dx +$$
$$+ \int\limits_{17}^{25} (x - M(X))^2 \cdot \frac{dx}{16} + \int\limits_{25}^{35} (x - M(X))^2 \cdot \frac{35-x}{160}\, dx =$$
$$= 10.174 + 65.308 + 13.380 = 88.862.$$

Задача 2. Имеется функция $\varphi(x) = (x - (R_2 + G_2)) \cdot (x - (R_2 + G_2 + B_2))$. Будем рассматривать случайную величину Y как результат вычисления функции φ для случайного аргумента X (рассмотренного в задаче 1).

Необходимо:

1. записать аналитическое выражение для функции плотности распределения $f(y)$;

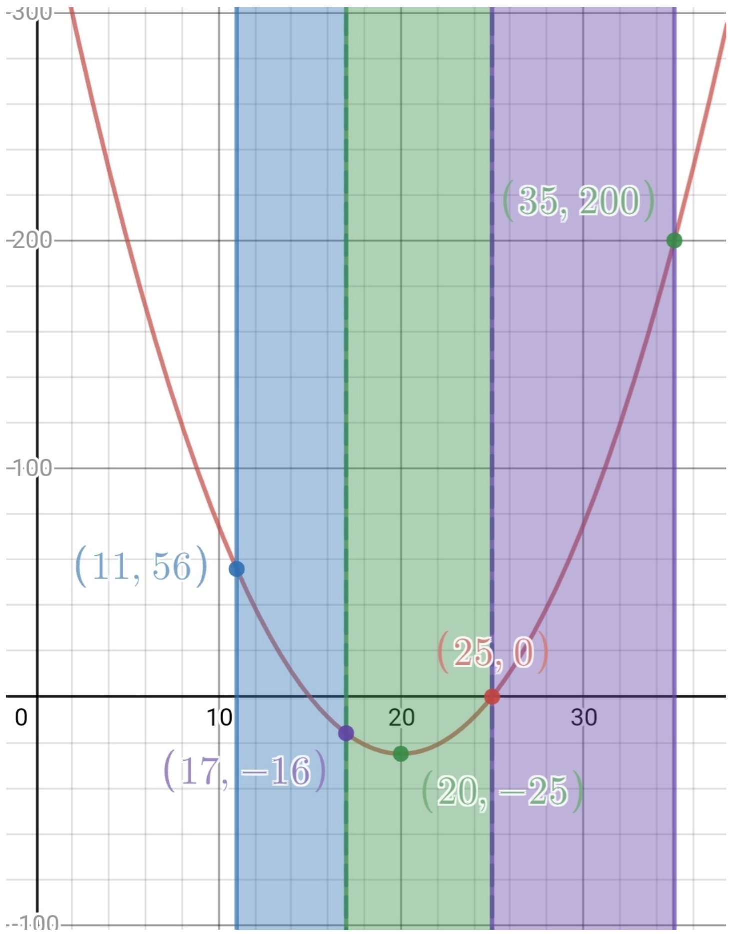
2. записать аналитическое выражение для функции распределения $F(y)$;

3. рассчитать математическое ожидание случайной величины $M(Y)$;

4. рассчитать дисперсию случайной величины $D(Y)$.

Решение:

Подставим значения $\varphi(x) = (x-(R_2+G_2))\cdot(x-(R_2+G_2+B_2)) = (x-15)\cdot(x-25) = (x-20)^2-25$. Изобразим данную функцию и интервалы, на которых задана функция $f(x)$ из первой задачи.



У нас имеется два промежутка монотонности $x \in [11, 20]$, $x \in [20, 35]$, на которых наша функция убывает и возрастает соответственно. Найдем $\psi_1(y)$, $\psi_2(y) : \varphi(\psi_1(y)) = \varphi(\psi_2(y)) = y$. Они равны $\psi_1(y) = 20 - \sqrt{y+25}$, $\psi_2(y) = 20 + \sqrt{y+25}$. Запишем выражения для $f(\psi_1), f(\psi_2)$.

$$f(\psi_1) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty, 11), \\ \dfrac{9-\sqrt{25+y}}{96},\ x \in [11, 17), \\ \dfrac{1}{16},\ x \in [17, 25), \\ \dfrac{15+\sqrt{25+y}}{160},\ x \in [25, 35], \\ 0,\ x \in (35, +\infty). \end{cases}$$

$$f(\psi_2) = \begin{cases} 0,\ x \in (-\infty, 11), \\ \dfrac{9+\sqrt{25+y}}{96},\ x \in [11, 17), \\ \dfrac{1}{16},\ x \in [17, 25), \\ \dfrac{15-\sqrt{25+y}}{160},\ x \in [25, 35], \\ 0,\ x \in (35, +\infty). \end{cases}$$

Воспользуемся формулой: $f(y) = \sum f(\psi_i) \cdot |\psi_i'|$. Так как $f(x)$ является кусочно-заданной, а $\varphi(x)$ имеет два промежутка монотонности, то будем искать $f(y)$ на следующих промежутках: $[-25, -16)$, $[-16, 0)$, $[0, 56)$, $[56, 200]$. Найдём необходимые производные: $|\psi_1'| = |\psi_2'| = \dfrac{1}{2 \cdot \sqrt{25+y}}$.

$$f(\psi_1) \cdot |\psi_1'| + f(\psi_2) \cdot |\psi_2'|, \quad (\ x_1, x_2 \in [17, 25)\ ), \quad y \in [-25, -16),$$

$$f(\psi_1) \cdot |\psi_1'| + f(\psi_2) \cdot |\psi_2'|, \quad (\ x_1 \in [11, 17)\ ,\ x_2 \in [17, 25)\ ),$$

$$y \in [-16, 0),$$

$$f(\psi_1) \cdot |\psi_1'| + f(\psi_2) \cdot |\psi_2'|, \quad (\ x_1 \in [11, 17)\ ,\ x_2 \in [25, 35]\ ),$$

$$y \in [0, 56),$$

$$f(\psi_2) \cdot |\psi_2'| \ \ (\ x_2 \in [25, 35] \ ), \ y \in [56, 200].$$

В итоге получаем:

$$f(y) = \begin{cases} 0, \ y \in (-\infty, -25), \\ \dfrac{1}{16 \cdot \sqrt{25+y}}, \ y \in [-25, -16), \\ \dfrac{5}{64 \cdot \sqrt{25+y}} - \dfrac{1}{192}, \ y \in [-16, 0), \\ \dfrac{3}{32 \cdot \sqrt{25+y}} - \dfrac{1}{120}, \ y \in [0, 56), \\ \dfrac{15}{320 \cdot \sqrt{25+y}} - \dfrac{1}{320}, \ y \in [56, 200], \\ 0, \ y \in (200, +\infty). \end{cases}$$

Проверим, равняется ли 1 площадь под графиком функции плотности распределения.

$$S = \frac{3}{8} + \frac{11}{48} + \frac{17}{60} + \frac{9}{80} = 1.$$

Значит, функция найдена верно.

Чтобы найти функцию распределения, проинтегрируем каждый участок функции плотности распределения.

$$\int \frac{dy}{16 \cdot \sqrt{25+y}} = \frac{\sqrt{25+y}}{8} + C, \ \frac{\sqrt{25-25}}{8} + C = 0 \ \Rightarrow C = 0$$

$$\int \left(\frac{5}{64 \cdot \sqrt{25+y}} - \frac{1}{192} \right) dy = \frac{5 \cdot \sqrt{25+y}}{32} - \frac{y}{192} + C,$$

$$\frac{5\cdot\sqrt{25-16}}{32}+\frac{16}{192}+C=\frac{\sqrt{25-16}}{8}\Rightarrow C=-\frac{17}{96}$$

$$\int\left(\frac{3}{32\cdot\sqrt{25+y}}-\frac{1}{120}\right)dy=\frac{3\cdot\sqrt{25+y}}{16}-\frac{y}{120}+C,$$

$$\frac{3\cdot\sqrt{25}}{16}+C=\frac{5\cdot\sqrt{25}}{32}-\frac{17}{96}\Rightarrow C=-\frac{1}{3}$$

$$\int\left(\frac{15}{320\cdot\sqrt{25+y}}-\frac{1}{320}\right)dy=\frac{15\cdot\sqrt{25+y}}{160}-\frac{y}{320}+C,$$

$$\frac{15\cdot\sqrt{225}}{160}-\frac{200}{320}+C=1\Rightarrow C=\frac{7}{32}$$

Функция распределения:

$$F(y)=\begin{cases} 0,\ y\in(-\infty,-25),\\ \dfrac{\sqrt{25+y}}{8},\ y\in[-25,-16),\\ \dfrac{5\cdot\sqrt{25+y}}{32}-\dfrac{y}{192}-\dfrac{17}{96},\ y\in[-16,0),\\ \dfrac{3\cdot\sqrt{25+y}}{16}-\dfrac{y}{120}-\dfrac{1}{3},\ y\in[0,56),\\ \dfrac{15\cdot\sqrt{25+y}}{160}-\dfrac{y}{320}+\dfrac{7}{32},\ y\in[56,200],\\ 1,\ y\in(200,+\infty).\end{cases}$$

Математическое ожидание найдём по формуле:

$$M(Y) = M(\varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x) \cdot f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{11}^{17} (x^2 - 40x + 375) \cdot \frac{x-11}{96}\, dx + \int\limits_{17}^{25} (x^2 - 40x + 375) \cdot \frac{dx}{16} +$$

$$\int\limits_{25}^{35} (x^2 - 40x + 375) \cdot \frac{35-x}{160}\, dx =$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{28}{3} + \frac{125}{8} = \frac{20}{3} = 6.(6)$$

Дисперсию найдём по формуле:

$$D(Y) = D(\varphi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(x) - M(\varphi(x)))^2 \cdot f(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{11}^{17} (x^2 - 40x + 375 - 6.(6))^2 \cdot \frac{x-11}{96}\, dx + \int\limits_{17}^{25} (x^2 - 40x + 375 -$$

$$6.(6))^2 \cdot \frac{dx}{16} + \int\limits_{25}^{35} (x^2 - 40x + 375 - 6.(6))^2 \cdot \frac{35-x}{160}\, dx =$$

$$= 48.63 + 342.93 + 1159.72 = 1551.28$$