Горелкина
РК6-32Б
Вариант №4

Домашнее задание №4 по курсу теории вероятностей и математической статистики.
Генератор случайных чисел. Имитационное моделирование.

Исходные данные

R_1	G_1	B_1	R_2	G_2	B_2	R_3	G_3	B_3
11	6	8	10	5	10	8	5	6

Задание 1.

Постройте свой генератор с параметрами $a = R_1,\ c = G_1,\ X_0 = B_1,\ m = 100$ Составьте таблицу элементов последовательности до первого повторения, определите период генератора.

Постройте свой генератор с рационально выбранными параметрами $a = 41,\ c = 53,\ X_0 = B_1,\ m = 100$ Составьте таблицу элементов последовательности до первого повторения, убедитесь в достижении максимального периода генератора.

Возьмите первые $n = 50$ значений из ранее полученной таблицы. Разбейте отрезок [0, 99] на $r = 10$ равных частей [0, 9], [10, 19], . . . , [90, 99]. Определите число элементов усечённой последовательности n_i , попавших в соответствующий диапазон и постройте гистограмму.

Требуется определить такое значение уровня значимости, с которым можно принять гипотезу о том, что статистическая выборка соответствует равномерному распределению. Полученный уровень значимости можно будет рассматривать как характеристику качества работы генератора случайных чисел, с помощью которого была получена статистическая выборка.

Требуется рассчитать выборочные характеристики (выборочное среднее, смещённую и исправленную оценки выборочной дисперсии) для $n = 5, 10, 25, 50$n = 5, 10, 25 и сравнить их с соответствующими характеристиками теоретического равномерного распределения (математическим ожиданием и дисперсией). Результаты свести в таблицу, с указанием величины отклонений от теоретических значений.

Решение

По условию $\lambda = \dfrac{1}{T_c},\ \mu = \dfrac{1}{T_s},\ \nu = \dfrac{60}{T_w}$. Положим $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu},\ \beta = \dfrac{\nu}{\mu}$.

Рассмотрим общий случай, когда в системе имеется n операторов, m ячеек в очереди.

Вероятность того, что все каналы свободны: $P_0 = \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \sum_{q=1}^{m} \frac{\rho^q}{\prod\limits_{j=1}^{q} n + j\beta} \right)^{-1}$.

Вероятность отказа: $P_{n+m} = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \dfrac{\rho^m}{\prod\limits_{j=1}^{m} n + j\beta} \cdot P_0$.

Вероятность существования очереди: $P_m = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \displaystyle\sum_{q=1}^{m-1} \frac{\rho^q}{\prod\limits_{j=1}^{q} n + j\beta} \cdot P_0$.

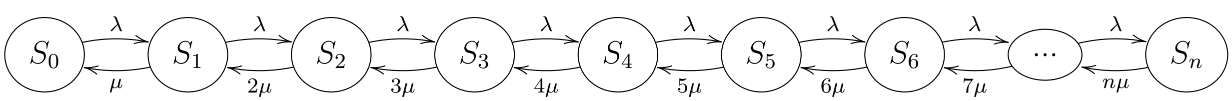
Математическое ожидание числа занятых операторов: $E_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot k + \sum_{j=1}^{m} P_{n+1} \cdot n$.

Математическое ожидание длины очереди: $E_m = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} P_{n+1} \cdot k$.

Коэффициент загрузки операторов $K_o = \dfrac{E_n}{n}$. Коэффициент занятости очереди $K_q = \dfrac{E_m}{m}$.

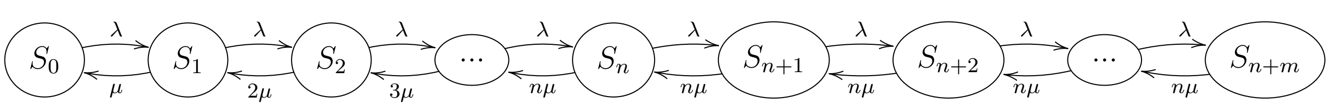
Решим задание, рассматривая каждую из задач как частный случай, с помощью предельных переходов (в случае бесконечных очередей) будем находить нужные показатели.

1. Рассмотрим систему без очереди: $M_\lambda|M_\mu|n|0$



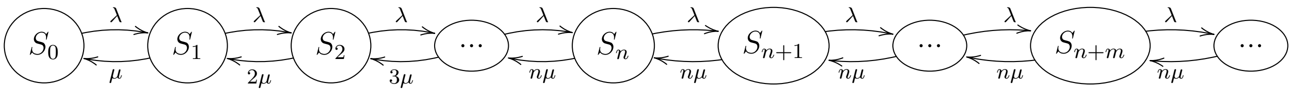
Относиельная пропускная способность $Q = 1 - P_n$, абсолютная пропускная способность $A = \lambda \cdot Q$. Математическое ожидание числа занятых операторов $E_n = \dfrac{A}{\mu} = \dfrac{\lambda \cdot Q}{\mu} = \rho \cdot (1 - P_n)$.

2. Рассмотрим систему с ограниченной очередью: $M_\lambda|M_\mu|n|m$



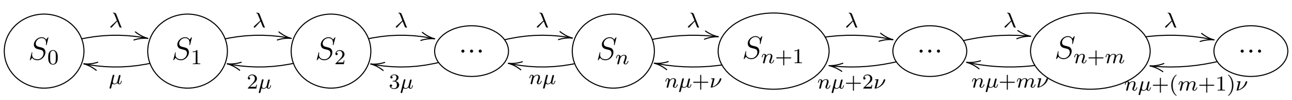
Вероятность существования очереди $P_m = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \dfrac{1 - \rho^m \cdot n^{-m}}{1 - \rho \cdot n} \cdot P_0$.

3. Рассмотрим систему без ограничений на длину очереди: $M_\lambda|M_\mu|n|\infty$



Вероятность отказа $P_n = 0$, тогда $Q = 1$, $A = \lambda$, $E_n = \rho$, $K_n = \dfrac{E_n}{n}$. Формула для P_0 получается при предельном переходе $m \mapsto \infty$ для P_0 из предыдущего пункта, то есть $P_0 = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!} + \dfrac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \dfrac{1}{n - \rho} \right)^{-1}$. Вероятность существования очереди $P_m = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot \dfrac{1}{n - \rho} \cdot P_0$.
Математическое ожидание длины очереди $E_m = \dfrac{\rho^{n+1}}{n!} \cdot \dfrac{1}{(n - \rho)^2} \cdot P_0$.

4. Рассмотрим систему без ограничений на длину очереди, учитывающей фактор ухода клиентов из очереди: $M_\lambda|M_\mu|n|\infty_\nu$



$$P_0 = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^n}{n!} \cdot \sum_{q=1}^{m} \frac{\rho^q}{\prod\limits_{j=1}^{q} n + j\beta} \right)^{-1}.$$

Все дальнейшие вычисления и посторения графиков реализованы с помощью языка программирования Python и находятся в файле prob3_clac.pdf.