# Øving 3

Laga av Even Finnøy

① Uttrykket for $\cos\theta$, gitt at vi vet $\tau, d, c$:

$$\cos\alpha = \frac{l}{d}, \quad l = -c\tau$$

$$\underline{\underline{\cos\alpha = \frac{-c\tau}{d}}}$$

② Gitt:

$$f = \frac{c\tau}{d}$$

a) $\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|_{max} = 0.01$

$\left|\frac{\Delta d}{d}\right|_{max} = 0.02$

Maks relativ feil blir:

$$\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|_{max} = 0.01 + 0.02 = \underline{0.03}$$

b) Siden det er snakk om maks relativ feil, er den ikke avhengig av noen av verdien.

c)

```python
import numpy as np

N = int(1e4)

c = 343  # m/s
tau0 = 1.0 # seconds
d0 = 1.0  # meters
f0 = c * tau0 / d0 # Hz

tau_error = 0.01
d_error = 0.02

scale_tau = (1 + 2 * tau_error * (np.random.rand(N) - 0.5))
scale_d = (1 + 2 * d_error * (np.random.rand(N) - 0.5))

vector_tau = tau0 * scale_tau
vector_d = d0 * scale_d
vector_f = c * vector_tau / vector_d

rel_error = (vector_f - f0) / f0
max_rel_error = np.max(np.abs(rel_error))

print(f"Maks relativ feil i frekvensestimatet: {max_rel_error * 100:.2f} %")
print(f"Teoretisk relativ feil: {(tau_error + d_error) * 100:.2f} %")
```

```
Maks relativ feil i frekvensestimatet: 3.01 %
Teoretisk relativ feil: 3.00 %
```

③ Gitt:

$$\theta = \cos^{-1} f = \cos^{-1}\frac{c\tau}{d}$$

a) Vi skal utlede et uttrykk for maks relativ feil for $\theta$:

Fra oppg over:

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right|_{max} = \left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|_{max}, \text{ løser for } |\Delta f|_{max}$$

$$\Rightarrow |\Delta f|_{max} = |f|\left(\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|_{max}\right)$$

Vi har at

$$\frac{d\theta}{df} = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}}$$

Som gir:

$$|\Delta\theta|_{max} \approx \left|\frac{d\theta}{df}\right| |\Delta f|_{max} = \frac{|\Delta f|_{max}}{\sqrt{1-f^2}}$$

Som igjen gir:

$$\left|\frac{\Delta\theta}{\theta}\right|_{max} \approx \frac{|f|\left(\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|_{max}\right)}{|\cos^{-1}(f)| \cdot \sqrt{1-f^2}}$$

$$\underline{\underline{\left|\frac{\Delta\theta}{\theta}\right|_{max} = \frac{\left|\frac{c\tau}{d}\right|}{\left|\cos^{-1}\left(\frac{c\tau}{d}\right)\right| \sqrt{1-\left(\frac{c\tau}{d}\right)^2}}\left(\left|\frac{\Delta\tau}{\tau}\right|_{max} + \left|\frac{\Delta d}{d}\right|_{max}\right)}}$$

b) Den maksimale relative feilen er avhengig av alle størrelsene ($c, \tau, d$ og $\theta$)!
Dette kommer av at $\theta = \cos^{-1}(f)$ er veldig sensitiv.

c)

```python
import numpy as np

N = int(1e4)

tau_error = 0.01
d_error = 0.02

c0 = 1 #m/s
d0 = 1 #meters

theta_arr = np.deg2rad([0, 30, 60, 90, 120, 150, 180])

results = []

for theta in theta_arr:
    f0 = np.cos(theta) #Hz
    tau0 = d0 * f0 / c0 #seconds

    scale_tau = (1 + 2 * tau_error * (np.random.rand(N) - 0.5))
    scale_d = (1 + 2 * d_error * (np.random.rand(N) - 0.5))

    vector_tau = tau0 * scale_tau
    vector_d = d0 * scale_d
    vector_f = c0 * vector_tau / vector_d

    is_valid_fvec = np.abs(vector_f) <= 1.0
    vector_f_valid = vector_f[is_valid_fvec]

    vector_theta = np.arccos(vector_f_valid)

    rel_error_theta = (vector_theta - theta) / theta
    max_rel_error_theta = np.max(np.abs(rel_error_theta))

    results.append((theta, max_rel_error_theta, is_valid_fvec.mean()))

for theta, max_rel_err, valid_frac in results:
    print(f"Theta: {np.rad2deg(theta):6.1f} deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: {max_rel_err * 100:.2f} % | Gyldige estimater: {valid_frac * 100:.2f} %")
```

```
Theta:   0.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: inf % | Gyldige estimater: 49.64 %
Theta:  30.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: 10.47 % | Gyldige estimater: 100.00 %
Theta:  60.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: 1.67 % | Gyldige estimater: 100.00 %
Theta:  90.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: 0.00 % | Gyldige estimater: 100.00 %
Theta: 120.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: 0.84 % | Gyldige estimater: 100.00 %
Theta: 150.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: 2.10 % | Gyldige estimater: 100.00 %
Theta: 180.0 deg | Maks relativ feil i vinkelestimatet: 7.70 % | Gyldige estimater: 49.17 %
```

4 Vi er gitt de relative standardavvikene

$$\frac{\sigma_\tau}{\tau} = 0.01$$

$$\frac{\sigma_d}{d} = 0.02$$

Vi skal finne $\left(\frac{\sigma_\theta}{\theta}\right)$:

$$\left(\frac{\sigma_F}{F}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2$$

$$= \sqrt{0.01^2 + 0.02^2} \approx 0.02236$$

Vi har at:

$$\sigma_\theta = \left|\frac{d\theta}{dF}\right| \sigma_F$$ , dette er lineær feilforplantning

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dF} = \frac{1}{\sqrt{1-F^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_F}{\sqrt{1-F^2}}$$

Dette gir:

$$\frac{\sigma_\theta}{\theta} = \frac{\sigma_F}{\theta\sqrt{1-F^2}} = \frac{|F|}{\cos^{-1}(F)\sqrt{1-F^2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_\tau}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2}$$

$$\frac{\sigma_\theta}{\theta} = \frac{\frac{c\tau}{d}}{\cos^{-1}\left(\frac{c\tau}{d}\right)\sqrt{1-\left(\frac{c\tau}{d}\right)^2}} \sqrt{0.01^2 + 0.02^2}$$

Et viktig poeng her at vinkelestimatet blir svært usikkert når lyden kommer nesten rett på mikrofonene