TTT4280 Sensorer og instrumentering
Øving 1 - Måleusikkerhet

Oppgaver

1. I kalde vinterstider er det godt å holde varmen i huset. Samtidig er det viktig å passe på at man ikke bruker unødvendig mye strøm på oppvarmingen, og da er det er lurt å holde styr på hvor varmt det egentlig er rundtom i rommet. For å gjøre det, har vi laget et målesystem som måler temperaturen i et gitt rom på samme sted, en gang hvert tiende minutt. Oppvarmingssystemet er laget slik at temperaturen i rommet burde holdes på 20 grader. Temperaturmålingene for de første 20 målingene er:

$$T_{\text{målt},1} = \begin{matrix} 20.6, & 20.4, & 20.4, & 20.6, & 20.4, & 20.8, & 20.5, & 20.5, & 20.5, & 20.4, \\ 20.5, & 20.5, & 20.5, & 20.5, & 20.4, & 20.4, & 20.4, & 20.5, & 20.3, & 20.6 \end{matrix}$$

   (a) Gi et estimat for standardavviket for disse målingene.

   (b) Gi et 95% konfidensintervall for middeltemperaturen i rommet.

   (c) Kan du si innen hvilket intervall som neste målepunkt med 95% sannsynlighet vil ligge?

   Hint: For en normalfordeling ligger 95% innenfor ± 1.96 teoretiske standardavvik fra forventingsverdien. Vi kjenner ikke forventingsverdien eller det teoretiske standardavviket, men kun estimat av disse fra våre 20 målinger. Da blir *prediksjonsintervallet* for neste målepunkt.

$$T \in m_T \pm t_p s_T \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

2. Dette måleinstrumentet endte opp med å være for komplisert (dyrt) til at man sparer noen penger på strøm til oppvarming ved å bruke det. Vi har derfor utviklet et mye enklere (billigere) målesystem for å måle temperaturen. Oppvarmingssystemet er det samme, så temperaturen i rommet burde være den samme. Vi måler igjen hvert tiende minutt:

$$T_{\text{målt},2} = \begin{matrix} 20.4, & 20.4, & 20.4, & 20.2, & 20.4, & 20.3, & 20.4, & 20.5, & 20.4, & 20.4, \\ 20.4, & 20.4, & 20.1, & 20.3, & 20.3, & 20.2, & 20.3, & 20.2, & 20.3, & 20.3 \end{matrix}$$

   (a) Igjen, gi et 95% konfidensintervall for middeltemperaturen i rommet.

   (b) Sammenlign middelverdien og konfidensintervallet du får for denne temperaturmåleren med de tilsvarende verdiene du fikk for temperaturmålingene i oppgave 1. Drøft hvorvidt det er *rimelig* å si at målingene til de to instrumentene er enige i rommets temperatur. Det er ikke nødvendig å gjøre en grundigere matematisk analyse[1] enn den du allerede har utført.

[1] Å si noe om den statistiske signifikansen til en forskjell mellom de to måleseriene, altså til hvilken grad av sikkerhet man kan si at måleseriene stammer fra normalfordelinger med ukjent og muligens ulik varians, er komplisert. Se kompendiets kapittel 1.4.6 for å se hva man kan gjøre dersom man antar at de to måleseriene har lik varians, som er en god antakelse om man måler de to måleseriene med samme apparat. Kan det likevel gjøres? Utenfor pensum finner man, ved bruk av mer avansert analyse enn den som forventes fra dette kurset,

(c) Hvis du kun hadde hatt de 10 første målingene, ville du ha dratt den samme sluttsatsen?

3. For å lage måleinstrumentet, har vi brukt motstander med resistansen $R = 1$ kΩ, med presisjonen 1%. Vi kan altså anta at resistansverdien har en *uniform* fordeling ±1%.

   (a) Hva er maksimal verdi, minimal verdi, og standardavvik for motstandsverdiene, i Ω?

   (b) Hva er det *relative* standardavviket, i %?

   Hint: Relativt standardavvik $= \sigma_R/\mu_R \approx s_R/m_R$.

   (c) Vi bestemmer oss for å teste å istedenfor bruke to motstander med resistans $R = 500\ \Omega$ med samme presisjon, 1%, i seriekobling. Hva blir sannsynlighetsfordelingen til resistansverdien for denne seriekoblingen? Du kan tegne, forklare det med ord, eller formulere det matematisk.

   (d) Hva blir det relative standardavviket, i %, for denne seriekoblingen av to motstander? Blir presisjonen bedre eller verre? Du kan beregne standardavviket numerisk, f. eks. ved å bruke funksjonen `numpy.std` i Python.

   Hint: Du kan beregne standardavviket for én motstand ved å simulere i Python ved hjelp av følgende kode (så kan du også sammenligne med den teoretiske verdien for en uniform fordeling!):

Listing 1: Lag et stort antall verdier med uniform fordeling, med ønsket middelverdi, og spredning.

```
import numpy as np
delta_r = 10
r_values = 1_000 + 2*delta_r * (np.random.rand(100_000) - 0.5)
relative_std = np.std(r_values, ddof=1)/np.mean(r_values)
```

OBS! For å få empirisk standardavvik med NumPy-funksjonen, må man eksplisitt sette `ddof=1`, se dokumentasjonen.

at testobservatoren $t = \left(\bar{T}_{\text{målt},1} - \bar{T}_{\text{målt},2}\right) / \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$, der fordelingene til $\bar{T}_{\text{målt},1}$ og $\bar{T}_{\text{målt},2}$ har ulik varians, er *omtrent* t-fordelt. Denne kan man bruke til å utføre en såkalt Welch's t-test. Siden fordelingen bare er omtrent t-fordelt, må man også estimere t-testens frihetsgrader (se lenken).