Практика 2. Рекурсия и редукция

Эквивалентны ли термы:
$\lambda x.x$
$\lambda y.y$
$\lambda xy.xy$
Ответ: 1) и 2) α-эквивалентны, 1), 2) и 3) η-эквивалентны:
$\lambda x.x =_\alpha \lambda y.y$

$\lambda xy.xy = \lambda x.(\lambda y.xy)$
$\lambda y.My =_\eta M \ \ ify \in FV(M) \rightarrow$
$\lambda x.(\lambda y.xy) =_\eta \lambda x.x =_\alpha \lambda y.y$

Каррирование

Если функция двух аргументов задана в традиционном стиле $f(pair\ x\ y)$ (на паре, т.е. декартовом произведении), то перейти к стандартной записи можно каррированием:
$curry = \lambda fxy.f(pair\ x\ y)$

Реализуйте обратную процедуру, uncurry.
$uncurry = \lambda fp.f(fst\ p)(snd\ p)$

Функция предшествования для чисел Чёрча

Вспомогательные функции $zp \equiv pair\ 0\ 0\ sp \equiv \lambda p.pair\ (snd\ p)(succ\ (snd\ p))$

Вторая работает так
$sp\ (pair\ i\ j) = pair\ j\ (j+1)$
$sp\ 0\ (zp) = pair\ 0\ 0$
$spm\ (zp) = pair\ (m-1)\ m$(здесь $m > 0$).
Тогда функция предшествования:
$pred = \lambda m.fst\ (m\ sp\ zp)$
I. Какая у неё временная сложность?
$O(n)$.
II. Что нужно поменять, чтобы вышел факториал?
$zp \equiv pair\ 1\ 0$
$sp \equiv \lambda p.mult\ (succ\ (snd\ p))(fst\ p)succ\ (snd\ p)$

Числа Чёрча: примитивная рекурсия.

Обобщим предыдущую схему:
$xz \equiv \lambda x.pair\ x\ 0$
$fs \equiv \lambda fp.pair\ (f(fst\ p)(snd\ p))(succ\ (snd\ p))$

$rec \equiv \lambda mfx.fst\ (m(fs\ f)(xz\ x))$
Реализуйте факториал через комбинатор примитивной рекурсии rec.
$fac = \lambda m.recm(\lambda xy.mult\ x\ (succ\ y))$

Списки
Конструкторы списков можно определить так:
$nil \equiv \lambda cn.n$
$cons \equiv \lambda elcn.ce(lcn)$
Например:
$[] = \lambda cn.n$
$[5] = \lambda cn.c5n$
$[5, 3, 2] = \lambda cn.c5(c3(c2n))$
Функция, определяющая пуст ли список:
$empty \equiv \lambda l.l(\lambda ht.fls)tru$
Попробуйте найти более «короткую» версию empty.
$empty \equiv \lambda l.l(\lambda uvtf.f)tru$
Постройте функцию head, возвращающую голову списка
$head \equiv \lambda l.lK\Omega$

Комбинатор неподвижной точки
Проверьте, что комбинатор неподвижной точки Тьюринга
$A = \lambda xy.y(xxy)$, $\Theta = AA$
обладает нужным свойством.
$\Theta F = (\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))F =_\beta$
$(\lambda y.y((\lambda xy.y(xxy))(\lambda xy.y(xxy))y))F =$
$(\lambda y.y(\Theta y))F =_\beta F(\Theta F)$