Лабораторная работа #2

Задача о погоне. Вариант 11

Баулин Егор Александрович, учебная группа: НКНбд-01-18

Содержание

Список иллюстраций

Цель работы

Научиться решать задачу о погоне, строить графики траектории движения, выводить уравнение, описывающее движение.

Задание

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 6.9 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 3,9 раза больше скорости браконьерской лодки.

1. Запишите уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Постройте траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найдите точку пересечения траектории катера и лодки

Выполнение лабораторной работы

Постановка задачи

1. Место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения: $t_0 = 0, x_{ë0} = 0$. Место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки: $x_{ê0} = 0$
2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_{ë0}(0 = x_{ë0} = 0)$, а полярная ось r проходит через точку нахождения катера береговой охраны (рис. @fig:001)

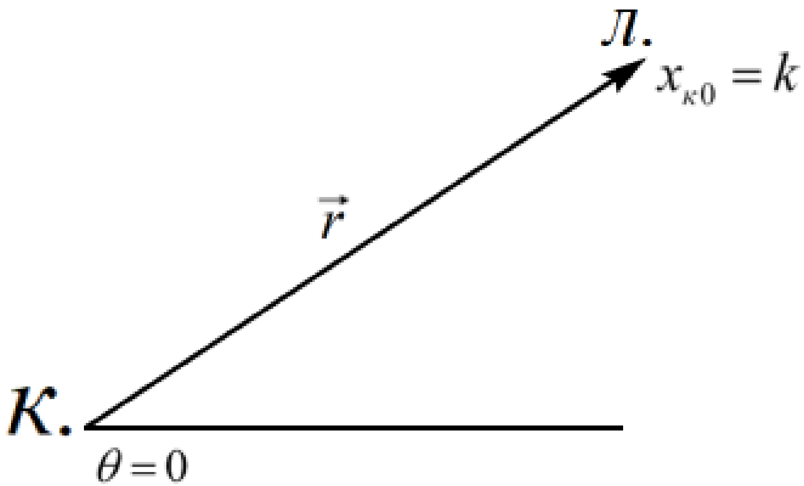


Рис. 0.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время

были на одном расстоянии от полюса, только в этом случае траектория катера пересечется с траекторией лодки. Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние X (расстояние, после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер — $k - x$ (или $k + x$ в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $k - x/2.9v$ (во втором случае $k + x/2.9v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. Тогда неизвестное расстояние x можно найти из следующего уравнения:

   $$\frac{x}{v} = \frac{k-x}{2.9v} \text{ â ïåðâîì ñëó÷àå}$$

   или

   $$\frac{x}{v} = \frac{k+x}{2.9v} \text{ âî âòîðîì.}$$

Отсюда мы найдем два значения $x_1 = \frac{k}{3.9}$ и $x_2 = \frac{k}{1.9}$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса, удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r — радиальная скорость и v_τ — тангенциальная скорость (рис. 2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = \frac{dr}{dt}$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $\frac{dr}{dt} = v$.

Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ на радиус r, $v_\tau = r\frac{\partial\theta}{\partial t}$

Из рисунка (рис. @fig:002) видно: $v_\tau = \sqrt{8.41v^2 - v^2} = \sqrt{7.41}v$ (учитывая, что радиальная скорость равна v). Тогда получаем $r\frac{\partial\theta}{\partial t} = \sqrt{7.41}v$

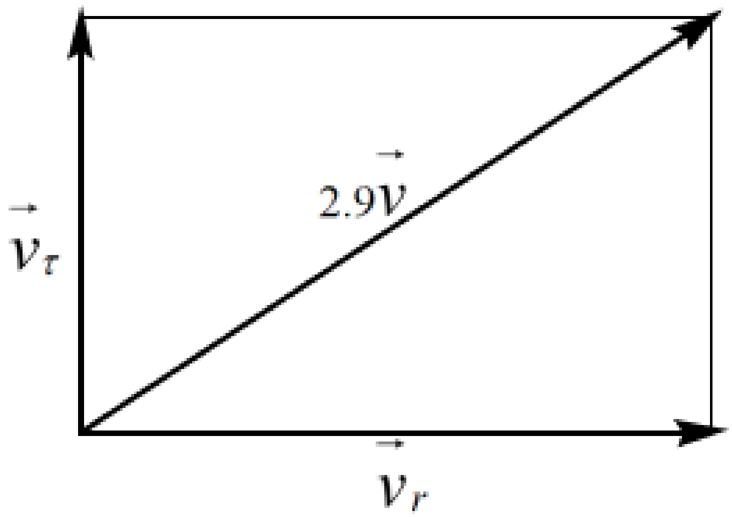


Рис. 0.2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial r}{\partial t} = v \\ r\frac{\partial\theta}{\partial t} = \sqrt{7.41}v \end{cases}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению:

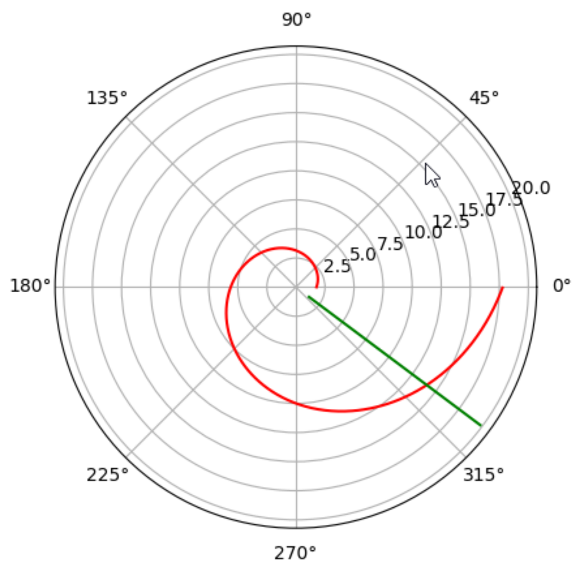
$$\frac{\partial r}{\partial \theta} = \frac{r}{\sqrt{7.41}}.$$

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, мы получим траекторию движения катера в полярных координатах.

Код для решения задачи на языке Python.

```
k = 6.9
v = 2.9
fi = 3 * math.pi / 4



# Движение береговой охраны
def dr(r, theta ):
  res = r / math.sqrt((v ** 2) - 1)
  return res



# Движение браконьерской лодки
def f2(t):
  xt = math.tan(fi) * t
  return xt


# Два случая
for vx in [1.9, 3.9]:
```

```
r0 = k / vx  # Наши два случая

tetha = np.arange(0, 2 * math.pi, 0.01)

r = odeint(dr, r0, tetha)  # Решение дифф. уравнения
t = np.arange(0, 15, 1)

# Переведем всё в полярные координаты
pol = t * t + f2(t) * f2(t)
r2 = np.sqrt(pol)

tetha2 = (np.tan(f2(t) / t)) ** (-1)

polar(tetha, r, "r")
polar(tetha2, r2, "g")
plt.show()
```



Полученные графики.

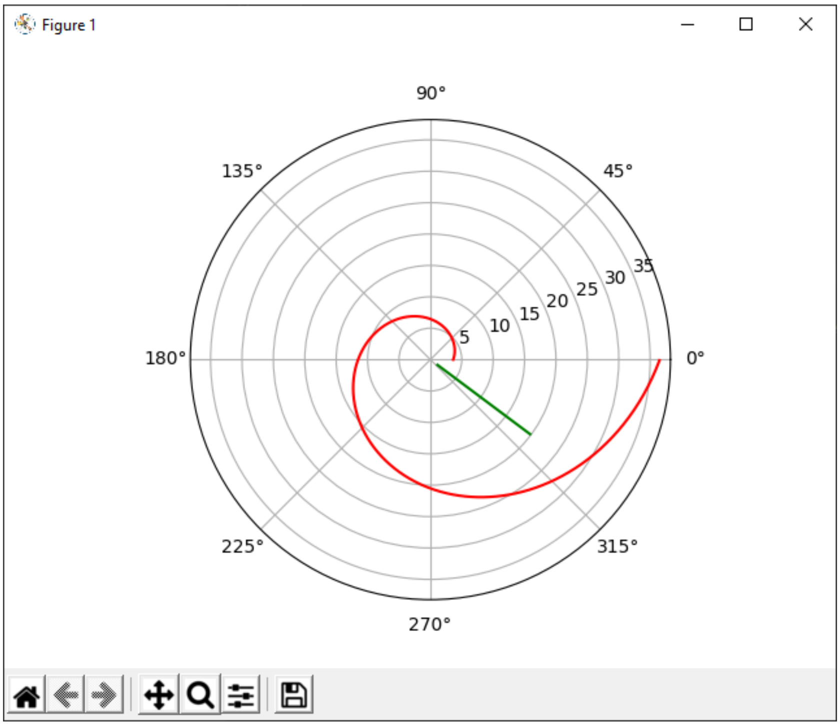


Figure 1
90°
135°
45°
180°
0°
225°
315°
270°
5
10
15
20
25
30
35

Выводы

1. Научился формулировать задачу и переводить ее на математический язык.
2. Решил задачу о погоне при помощи различных инструментов.