МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П.Королёва»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

Храмов А.Г.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ И СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

Методические указания к курсовой работе по теории случайных процессов

Самара 2023

Настоящие методические указания предназначены для студентов бакалавриата направления «*Прикладная математика и информатика*», выполняющим курсовую работу по дисциплине «*Теория случайных процессов*»

Оглавление

1 Модели авторегрессии – скользящего среднего

В общем виде моделью авторегрессии – скользящего среднего **АРСС(*M, N*)** (*англ.* autoregressive moving-average model, **ARMA**), где целые неотрицательные числа ***M***, ***N*** задают порядок модели, называется следующее рекуррентное соотношение, описывающее процесс генерации временного ряда (выходной случайной последовательности) $\boldsymbol{\eta_n}$ в виде

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (*)$$

где *входная* случайная последовательность ξ_n является *некоррелированной*, имеющей нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию, то есть

$$\mathbf{M}\xi_n = 0, \quad \mathbf{M}\xi_n^2 = 1, \quad \mathbf{M}\xi_n\xi_k = 0, \textit{ если } k \neq n.$$

Считаем, что входная и выходная случайные последовательности являются стационарными и взаимно стационарными в широком смысле случайными процессами с нулевым математическим ожиданием (без доказательства):

$$\mathbf{M}\eta_n = 0, \quad \mathbf{M}\eta_n\eta_k = R_\eta(k-n), \quad \mathbf{M}\xi_n\eta_k = R_{\xi\eta}(k-n).$$

Заметим, что для любой модели АРСС (*)

$$R_{\xi\eta}(m) = \mathbf{M}\xi_n\eta_{n+m} = 0 \textit{ при } m < 0, \qquad (**)$$

то есть отсчёт входной последовательности ξ_n не коррелирует с предыдущими значениями выходной последовательности: $\eta_{n-1}, \eta_{n-2}, \eta_{n-3}, \ldots$.

Основной целью анализа и синтеза моделей авторегрессии – скользящего среднего является установление аналитической зависимости между корреляционной функцией $R_\eta(m),\ m = 0, 1, 2, \ldots$ генерируемой случайной последовательности η_n и коэффициентами разностного уравнения (*):

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M\} \Leftrightarrow R_\eta(m),\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Используются также обозначения АР(M) = АРСС (M, 0) для «чистой» авторегрессии и СС(N) = АРСС(0,N) для «чистого» скользящего среднего.

Рассмотрим построение моделей АРСС на примере моделей (1) авторегрессии первого порядка АР(1), (2) скользящего среднего первого порядка СС(1) и (3) смешанной модели порядка (1,1): АРСС(1,1).

1.1 Модель авторегрессии первого порядка

Рассмотрим частный случай модели авторегрессии – скользящего среднего (*) при M=1, N=0 – авторегрессия первого порядка АРСС(1,0)=АР(1), которая имеет вид:

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \alpha_0\xi_n. \qquad (1)$$

Задачей является установление взаимосвязи коэффициентов разностного уравнения (1) с корреляционной функцией выходной случайной последовательности:

$$\{\alpha_0, \beta_1\} \Leftrightarrow R_\eta(m),\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Умножим левую и правую части уравнения (1) на η_n и рассчитаем математическое ожидание:

$$\mathbf{M}(\eta_n \times \eta_n) = \mathbf{M}(\beta_1 \eta_{n-1} \times \eta_n + \alpha_0 \xi_n \times \eta_n),$$

$$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0).$$

$$R_{\xi\eta}(0) = \mathbf{M}\xi_n \eta_n = \mathbf{M}\xi_n(\beta_1 \eta_{n-1} + \alpha_0 \xi_n) = \beta_1 \mathbf{M}\xi_n \eta_{n-1} + \alpha_0 \mathbf{M}\xi_n^2 = \alpha_0$$

Окончательно получаем уравнение

$$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \alpha_0^2 \qquad (У1)$$

Аналогично для получения остальных уравнений умножим левую и правую части уравнения (1) на $\eta_{n-1}, \eta_{n-2}, \eta_{n-3}, \ldots$ и рассчитаем математические ожидания:

$$\mathbf{M}(\eta_n \times \eta_{n-1}) = \mathbf{M}(\beta_1 \eta_{n-1} \times \eta_{n-1} + \alpha_0 \xi_n \times \eta_{n-1}),$$

$$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(-1) \quad \{R_{\xi\eta}(-1) = 0\},$$

Получаем второе уравнение:

$$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) \qquad (У2)$$

Для получения третьего уравнения умножим левую и правую части уравнения (1) на η_{n-2}: $\mathbf{M}(\eta_n \times \eta_{n-2}) = \mathbf{M}(\beta_1 \eta_{n-1} \times \eta_{n-2} + \alpha_0 \xi_n \times \eta_{n-2})$

Третье уравнение:

$$R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) \qquad (У3)$$

$$R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) \qquad (У4)$$

$$R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) \qquad (У5)$$

$\ldots$

Из системы линейных уравнений (У1), (У2) получаем:

$$\beta_1 = \frac{R_\eta(1)}{R_\eta(0)}, \; \alpha_0 = \pm\sqrt{\frac{R_\eta^2(0) - R_\eta^2(1)}{R_\eta(0)}}$$

Если, наоборот, известны коэффициенты разностного уравнения α_0, β_1, то корреляционную функцию находим рекурсивно из $R_\eta(m+1) = \beta_1 R_\eta(m)$:

$$R_\eta(m) = \frac{\alpha_0^2}{1-\beta_1^2}\beta_1^m, \; m = 0, 1, 2, \ldots$$

Видим, что модели авторегрессии первого порядка соответствует экспоненциальная корреляционная функция.

1.2 Модель скользящего среднего первого порядка

Модель скользящего среднего первого порядка **АРСС(0,1) = СС(1)** задаётся разностным уравнением

$$\eta_n = \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} \qquad (2)$$

Установим взаимосвязь коэффициентов разностного уравнения (2) с корреляционной функцией выходной случайной последовательности:

$$\{\alpha_0, \alpha_1\} \Leftrightarrow R_\eta(m), \; m = 0,1,2, \ldots$$

$$R_\eta(0) = \mathbf{M}\eta_n^2 = \mathbf{M}\left[(\alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1})(\alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1})\right] = \alpha_0^2 \mathbf{M}\xi_n^2 + \alpha_1^2 \mathbf{M}\xi_{n-1}^2 + 2\mathbf{M}\xi_n \xi_{n-1} = \alpha_0^2 + \alpha_1^2,$$

$$R_\eta(1) = \mathbf{M}\eta_n\eta_{n-1} = \mathbf{M}\left[(\alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1})(\alpha_0\xi_{n-1} + \alpha_1\xi_{n-2})\right] =$$
$$= \alpha_0^2\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-1} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-2} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}^2 + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-2} = \alpha_0\alpha_1,$$
$$R_\eta(2) = \mathbf{M}\eta_n\eta_{n-2} = \mathbf{M}\left[(\alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1})(\alpha_0\xi_{n-2} + \alpha_1\xi_{n-3})\right] =$$
$$= \alpha_0^2\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-2} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-3} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-2} + \alpha_1^2\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-3} = 0,$$
$$R_\eta(3) = \mathbf{M}\eta_n\eta_{n-3} = \mathbf{M}\left[(\alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1})(\alpha_0\xi_{n-3} + \alpha_1\xi_{n-4})\right] =$$
$$= \alpha_0^2\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-3} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-4} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-3} + \alpha_1^2\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-4} = 0,$$
…
$$R_\eta(m) = \mathbf{M}\eta_n\eta_{n-m} = \mathbf{M}\left[(\alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1})(\alpha_0\xi_{n-m} + \alpha_1\xi_{n-m-1})\right] =$$
$$= \alpha_0^2\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-m} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_n\xi_{n-m-1} + \alpha_0\alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-3} + \alpha_1^2\mathbf{M}\xi_{n-1}\xi_{n-m-1} = 0,\ m = 2, 3, 4, \ldots$$
…

Получаем систему нелинейных уравнений:
$$\begin{cases} R_\eta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2, \\ R_\eta(1) = \alpha_0\alpha_1, \\ R_\eta(2) = 0, \\ R_\eta(3) = 0, \\ \ldots \end{cases}$$
Из первых двух уравнений получаем эквивалентную систему двух уравнений относительно неизвестных параметров разностного уравнения и решаем её, считая, что $2\left|R_\eta(1)\right| \le R_\eta(0)$:
$$\begin{cases} (\alpha_0 + \alpha_1)^2 = R_\eta(0) + 2R_\eta(1), \\ (\alpha_0 - \alpha_1)^2 = R_\eta(0) - 2R_\eta(1), \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1 = \pm\sqrt{R_\eta(0) + 2R_\eta(1)}, \\ \alpha_0 - \alpha_1 = \pm\sqrt{R_\eta(0) - 2R_\eta(1)}. \end{cases}$$
$$\alpha_0 = \frac{\pm\sqrt{R_\eta(0) + 2R_\eta(1)} \pm \sqrt{R_\eta(0) - 2R_\eta(1)}}{2}, \quad \alpha_1 = \frac{\pm\sqrt{R_\eta(0) + 2R_\eta(1)} \mp \sqrt{R_\eta(0) - 2R_\eta(1)}}{2}.$$
Отметим две особенности при построении моделей скользящего среднего:

(1) Получающаяся система нелинейных уравнений может не иметь решений в вещественных числах (в нашем примере при $2\left|R_\eta(1)\right| > R_\eta(0)$). Это означает, что модель скользящего среднего заданного порядка (в нашем примере первого порядка) не существует.

(2) Система нелинейных уравнений не имеет однозначного решения. Из множества решений системы нам подходит любое. (Вопрос: сколько решений имеет система для рассмотренной модели скользящего среднего первого порядка?)

1.3 Смешанная модель порядка (1, 1)

Смешанная модель **АРСС(1,1)** задаётся разностным уравнением
$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} \qquad (3)$$
Установим взаимосвязь коэффициентов разностного уравнения (3) с корреляционной функцией выходной случайной последовательности:

$$\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1\} \Leftrightarrow R_\eta(m),\ m = 0,1,2,\dots$$

Умножаем левую и правую части уравнения (3) на $\eta_n, \eta_{n-1}, \eta_{n-2}, \eta_{n-3}, \dots$ и вычисляем математическое ожидание, учитывая чётность корреляционной функции и соотношение (**) для взаимной корреляционной функции:

$$\mathbf{M}\eta_n^2 = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_n + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_n + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_n \quad \to \quad R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1)$$

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_{n-1} = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_{n-1} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-1} + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-1} \quad \to \quad R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0)$$

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_{n-2} = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_{n-2} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-2} + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-2} \quad \to \quad R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1)$$

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_{n-3} = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_{n-3} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-3} + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-3} \quad \to \quad R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2)$$

$\dots$

$$\mathbf{M}\eta_n\eta_{n-k} = \beta_1\mathbf{M}\eta_{n-1}\eta_{n-k} + \alpha_0\mathbf{M}\xi_n\eta_{n-k} + \alpha_1\mathbf{M}\xi_{n-1}\eta_{n-k} \quad \to \quad R_\eta(k) = \beta_1 R_\eta(k-1)$$

$\dots$

$$\mathbf{M}\xi_n\eta_n = \mathbf{M}\left[\xi_n\left(\beta_1\eta_{n-1} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1}\right)\right] = \alpha_0 \quad \to \quad R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0$$

$$\mathbf{M}\xi_n\eta_{n+1} = \mathbf{M}\left[\xi_n\left(\beta_1\eta_n + \alpha_0\xi_{n+1} + \alpha_1\xi_n\right)\right] = \alpha_0 \quad \to \quad R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1$$

$$\mathbf{M}\xi_n\eta_{n+2} = \mathbf{M}\left[\xi_n\left(\beta_1\eta_{n+1} + \alpha_0\xi_{n+2} + \alpha_1\xi_{n+1}\right)\right] = \alpha_0 \quad \to \quad R_{\xi\eta}(2) = \beta_1 R_{\xi\eta}(1)$$

$$\mathbf{M}\xi_n\eta_{n+3} = \mathbf{M}\left[\xi_n\left(\beta_1\eta_{n+2} + \alpha_0\xi_{n+3} + \alpha_1\xi_{n+2}\right)\right] = \alpha_0 \quad \to \quad R_{\xi\eta}(3) = \beta_1 R_{\xi\eta}(2)$$

$\dots$

Получаем систему из пяти уравнений

$$\begin{cases} R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) \\ R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) \\ R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) \\ R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0 \\ R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 \end{cases},$$

из которой можно найти пять неизвестных параметров $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, R_{\xi\eta}(0), R_{\xi\eta}(1)\}$, если известна корреляционная функция генерируемой случайной последовательности $R_\eta(m)$. Три из этих пяти параметров используются в модели АРСС(1,1) (3). Заметим, что параметр β_1 определяется однозначно из третьего уравнения, а относительно коэффициентов $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ справедливы замечания, сделанные ранее для модели скользящего среднего.

1.4 Общая смешанная модель АРСС порядка (*M*, *N*)

В таблице 1.1 и в таблице 1.2 приведены уравнения взаимосвязи параметров моделей АРСС(*M*,*N*), АР(*M*), СС(*N*) произвольных порядков *M*, *N* и корреляционной функции $R_\eta(m)$.

Смешанная модель АРСС порядка (M,N) имеет вид:

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N},$$

где ξ_n – входная некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией ($\mathbf{M}\xi_n = 0,\ \mathbf{M}\xi_n^2 = 1,\ \mathbf{M}\xi_k\xi_n = \delta_{kn}$), η_n – выходная случайная последовательность с корреляционной функцией $R_\eta(m)$.

Таблица 1.1 – Уравнения связей параметров модели АРСС (M,N) с корреляционной функцией $R_\eta(m)$

Блок	*Количество уравнений*	Уравнения связей параметров модели АРСС с корреляционной функцией выходной случайной последовательности $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M\} \Leftrightarrow \{R_\eta(0), R_\eta(1), R_\eta(2), R_\eta(3), \ldots, R_\eta(M+N)\}$
А	***N+1***	$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \ldots + \beta_M R_\eta(M) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N)$ $R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N-1)$ $R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-2) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_4 R_{\xi\eta}(2) + \ldots + \alpha_N R_{\xi\eta}(N-2)$ … $R_\eta(N-1) = \beta_1 R_\eta(N-2) + \beta_2 R_\eta(N-3) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M-1) + \alpha_{N-1} R_{\xi\eta}(0) + \alpha_N R_{\xi\eta}(1)$ $R_\eta(N) = \beta_1 R_\eta(N-1) + \beta_2 R_\eta(N-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M) + \alpha_N R_{\xi\eta}(0)$
Б	***M***	$R_\eta(N+1) = \beta_1 R_\eta(N) + \beta_2 R_\eta(N-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M+1)$ $R_\eta(N+2) = \beta_1 R_\eta(N+1) + \beta_2 R_\eta(N) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-M+2)$ … $R_\eta(N+M-1) = \beta_1 R_\eta(N+M-2) + \beta_2 R_\eta(N+M-3) + \ldots + \beta_M R_\eta(N-1)$ $R_\eta(N+M) = \beta_1 R_\eta(N+M-1) + \beta_2 R_\eta(N+M-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(N)$
В	∞	$R_\eta(N+M+1) = \beta_1 R_\eta(N+M) + \beta_2 R_\eta(N+M-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N+1)$ $R_\eta(N+M+2) = \beta_1 R_\eta(N+M+1) + \beta_2 R_\eta(N+M) + \ldots + \beta_M R_\eta(N+2)$ $R_\eta(N+M+3) = \beta_1 R_\eta(N+M+2) + \beta_2 R_\eta(N+M+1) + \ldots + \beta_M R_\eta(N+3)$ …
Г	***N+1***	$R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0$ $R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1$ $R_{\xi\eta}(2) = \beta_1 R_{\xi\eta}(1) + \beta_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2$ $R_{\xi\eta}(3) = \beta_1 R_{\xi\eta}(2) + \beta_2 R_{\xi\eta}(1) + \beta_3 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3$ … $R_{\xi\eta}(N) = \beta_1 R_{\xi\eta}(N-1) + \beta_2 R_{\xi\eta}(N-2) + \ldots + \beta_M R_{\xi\eta}(N-M) + \alpha_N$

Система из (M+2N+2) нелинейных уравнений (блоки **А**, **Б**, **Г**) позволяет по (M+N+1) отсчётам корреляционной функции выходной последовательности $R_\eta(m),\ m = 0,1,2,\ldots,M+N$, найти ($M$+$N$+1) параметров модели АРСС(M,N) $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_M\}$, используя ($N$+1) вспомогательных отсчётов взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(m),\ m = 0,1,2,\ldots,N$. Уравнения блока **В** используются для рекурсивного расчёта корреляционной функции $R_\eta(m)$ для $m > M+N$.

Таблица 1.2 – Частные случаи: модели АР(М) и СС(N)

Модель АР(*M*): $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n$	**Модель СС(*N*):** $\eta_n = \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N}$
$R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \ldots + \beta_M R_\eta(M) + \alpha_0^2$	$R_\eta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_N^2$ $R_\eta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{N-1}\alpha_N$ $R_\eta(2) = \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \ldots + \alpha_{N-2}\alpha_N$ … $R_\eta(N-1) = \alpha_0\alpha_{N-1} + \alpha_1\alpha_N$ $R_\eta(N) = \alpha_0\alpha_N$
$R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-1)$ $R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \ldots + \beta_M R_\eta(M-2)$ … $R_\eta(M) = \beta_1 R_\eta(M-1) + \beta_2 R_\eta(M-2) + \ldots + \beta_M R_\eta(0)$	
$R_\eta(m) = \beta_1 R_\eta(m-1) + \beta_2 R_\eta(m-1) + \ldots + \beta_M R_\eta(m-M),\quad m > M$	$R_\eta(m) = 0,\quad m > N$

Спектральная плотность мощности выходной последовательности: $\Phi_\eta\left(e^{i\omega}\right) = \left|\dfrac{\alpha_0 + \alpha_1 e^{i\omega} + \alpha_2 e^{i2\omega} + \ldots + \alpha_N e^{iN\omega}}{1 - \beta_1 e^{i\omega} - \beta_2 e^{i2\omega} - \ldots - \beta_M e^{iM\omega}}\right|^2$.

В работе не используется.

2 Исходные данные

Дана реализация стационарного в широком смысле эргодического случайного процесса с дискретным временем (стационарная случайная последовательность, временной ряд) – выборка из $n = 5000$ последовательных значений (отсчётов) процесса:
https://drive.google.com/file/d/1ynpxMpvbFvS65U5sCJ0At65pvZ5c6bxB/view?usp=share_link

3 Задание

3.1 Оценивание моментных функций

Изобразить графически фрагмент исходного случайного процесса (СП). Оценить моментные функции (МФ) исходного случайного процесса, рассчитав выборочные среднее, дисперсию и нормированную корреляционную функцию (НКФ). Оценить интервал корреляции СП. Изобразить графически оценку НКФ исходного СП.

3.2 Построение и исследование моделей авторегрессии

Построить модели авторегрессии АР(*M*) = АРСС(*M*, *0*) порядков *M* = 0, 1, 2, 3 (всего 4 модели). Для каждой модели рассчитать теоретические НКФ выходной последовательности. На основе сравнения выборочной НКФ и теоретических НКФ выбрать лучшую модель СП в классе моделей АР.

3.3 Построение и исследование моделей скользящего среднего

Построить модели скользящего среднего СС(*N*) = АРСС(*0*, *N*) порядков *N* = 0, 1, 2, 3 (всего 4 модели) на основе решения системы нелинейных уравнений. Для каждой модели рассчитать теоретические НКФ выходной последовательности. На основе сравнения выборочной НКФ и теоретических НКФ выбрать лучшую модель СП в классе моделей СС.

3.4 Построение и исследование смешанных моделей авторегрессии – скользящего среднего

Построить смешанные модели авторегрессии – скользящего среднего АРСС(*M*, *N*) до третьего порядка включительно (*M* = 1, 2, 3; *N* = 1, 2, 3) (всего 9 моделей) одним из методов, описанным в приложении *A.3*. Рассчитать теоретические НКФ выходной последовательности для каждой модели АРСС. На основе сравнения исходной выборочной и теоретических НКФ выбрать лучшую модель СП в классе смешанных моделей АРСС. Исследовать на устойчивость смешанные модели.

3.5 Сравнительный анализ построенных моделей

Для каждой из трёх лучших моделей (АР, СС, АРСС) записать системы уравнений для расчёта параметров модели, записать системы уравнений для расчёта теоретической КФ, смоделировать СП, рассчитать выборочные МФ, сравнить их с выборочными МФ исходного СП и с теоретическими МФ. Для каждой из этих трёх моделей сравнить **графически** НКФ: (1) выборочную исходного СП, (2) теоретическую, (3) выборочную смоделированного СП.

3.6 Итоговая таблица сравнения моделей АРСС

Изготовить таблицу сравнения МФ и расчёта качества для трёх лучших моделей. Изобразить графически фрагмент реализации СП, сгенерированного по **наилучшей** модели.

4 Методические указания

4.1 При выполнении работы использовать следующие учебные пособия и методические указания:

- [1] «*Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего*»: *http://www.ws.samtel.ru/downloads/stat-an.rar*,
- [2] «*Статистическое моделирование и метод Монте–Карло*»: *http://www.ws.samtel.ru/downloads/stat-mod.rar*,
- [3] Интернет-ресурс к курсовой работе: *http://studentweb.16mb.com/WebARMA/*

4.2 По пункту 3.1 задания. Исходную выборку в отчёте записать в виде начального и конечного фрагментов, например:

```
-41.720 -38.393 -54.555 -65.302 -50.632 -44.129 -60.533 -57.413 -49.090 -55.694
-47.252 -43.666 -45.582 -52.448 -68.037 -45.799 -38.798 -76.718 -60.488 -39.955
-77.833 -58.941 -19.676 -52.065 -66.994 -35.039 -37.636 -75.518 -55.057 -29.855
 ...
-33.445 -52.447 -63.268 -68.435 -53.318 -42.581 -52.500 -55.933 -49.324 -49.771
```

На рисунке 4.1 приведён пример оформления графика фрагмента (приблизительно 100–200 отсчётов) случайной последовательности.

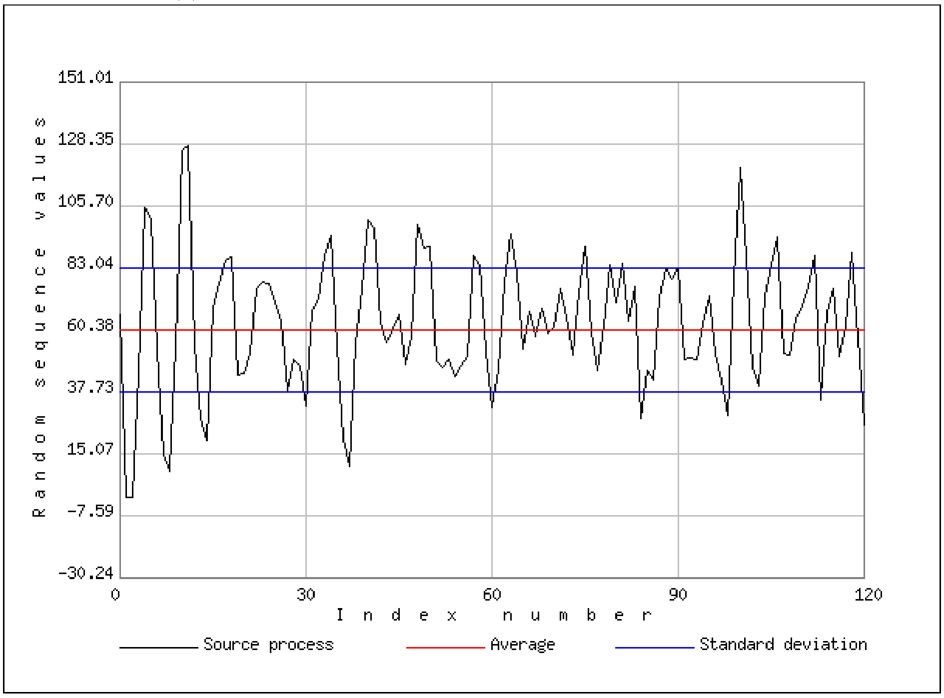

Рисунок 4.1 – Пример оформления графика случайной последовательности

4.3 *По пункту 3.1 задания*. Численные значения отсчётов выборочной нормированной корреляционной функции $r_\eta(m)$ рассчитывать для $m = 1, 2, \ldots, 10$ (для определения интервала корреляции в некоторых вариантах может потребоваться рассчитать большее количество отсчетов выборочной НКФ).

Выборочное среднее (оценка математического ожидания):

$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, где $x_i, i = \overline{1,n}$ – исходная выборка, $n = 5000$.

Выборочная дисперсия (несмещённая оценка дисперсии):

$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

Выборочная нормированная корреляционная функция:

$$r(m) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n-m-1}(x_i - \bar{x})(x_{i+m} - \bar{x}), m = 0,1,2, \ldots 10.$$

В любом случае для достоверной оценки корреляционной функции необходимо выполнение условия: $m \ll n$, где n – объём выборки из последовательных отсчётов процесса. На рисунке 2 показан пример оформления графика выборочной НКФ. Графически показать интервал корреляции.

4.4 *По пункту 3.1 задания*. Определение интервала корреляции:

$$\tau_{\kappa} = \min\left\{\tau : \forall\left(m > \tau\right)\ \left|r_{\eta}(m)\right| < e^{-1}\right\},$$

где $r_{\eta}(m)$ – выборочная НКФ.

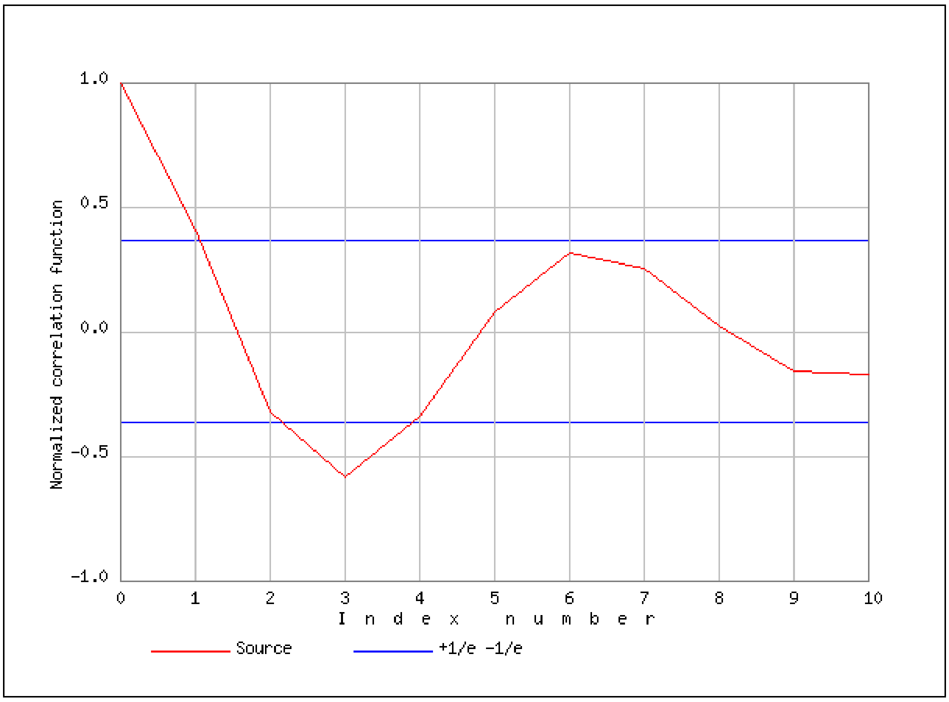

Рисунок 4.2 – Пример оформления графика выборочной НКФ

4.5 *По пункту 3.2 задания*. В таблице 4.1 приведён пример оформления результатов расчёта параметров моделей авторегрессии.

Таблица 4.1 – Модели авторегрессии АР(M)

Порядок модели	*Параметры модели* $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \beta_3\eta_{n-3} + \alpha_0\xi_n$				*Погрешность модели*
M	β_1	β_2	β_3	α_0	ε^2
0				22.6567	**0.95296**
1	0.4089			20.6759	**1.01968**
2	0.6479	-0.5845		16.7770	**0.22538**
3	0.5000	-0.4205	-0.2531	16.2308	**0.05769**

4.6 *По пункту 3.3 задания*. В таблице 4.2 приведён пример оформления результатов расчёта параметров моделей скользящего среднего.

Таблица 4.2 – Модели скользящего среднего СС(N)

Порядок модели	*Параметры модели* $\eta_n = \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \alpha_3\xi_{n-3}$				*Погрешность модели*
N	α_0	α_1	α_2	α_3	ε^2
0	22.6567				**0.95296**
1	20.1089	10.4384			**0.78575**
2	Модель не существует				**–**
3	Модель не существует				**–**

4.7 *По пункту 3.4 задания*. В таблице 4.3 приведён пример оформления результатов расчёта параметров смешанных моделей авторегрессии – скользящего среднего. *«Модель не существует»* означает, что система уравнений для определения параметров модели не имеет решения. *«Модель неустойчива»* означает, что система уравнений для определения параметров модели имеет решение, но не выполняются условия устойчивости, приведённые в приложении *2*. Для неустойчивых моделей привести в этой таблице значения параметров β_i.

Таблица 4.3 – Смешанные модели АРСС(M,N)

Порядок модели		*Параметры модели* $\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \beta_3\eta_{n-3} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \alpha_3\xi_{n-3}$							*Погрешность модели*
M	*N*	β_1	β_2	β_3	α_0	α_1	α_2	α_3	ε^2
1	*1*	Модель не существует							**–**
1	*2*	Модель не существует							**–**
1	*3*	1.0714	-0.7222	0.6862	Модель неустойчива				**–**
2	*1*	0.9330	-0.7010		16.0879	-7.5761			**0.00402**
2	*2*	0.9575	-0.6819		15.9139	-8.2916	-0.9413		**0.00125**
2	*3*	0.9682	-0.7013		15.9600	-8.3775	-0.6147	0.3649	**0.00008**
3	*1*	1.0804	-0.7966	0.0862	15.8935	-10.2796			**0.00204**
3	*2*	0.5794	-0.3291	-0.2651	15.9529	-2.1886	-3.8280		**0.00024**
3	*3*	0.6711	-0.4169	-0.2025	15.9544	-3.6490	-3.0694	0.0861	**0.00019**

4.8 *По пунктам 3.2, 3.3, 3.4 задания*. Выбор лучшей модели проводится на основе анализа нормированных корреляционных функций с использованием критерия среднего квадратичного отклонения по первым десяти отсчётам НКФ:

$$\varepsilon^2 = \sum_{m=1}^{10} \left[r^T(m) - r(m) \right]^2 ,$$

где $r(m)$ – выборочная нормированная корреляционная функция исходного процесса, $r^T(m)$ – теоретическая нормированная корреляционная функция. Результаты сравнения выборочной и теоретической нормированных корреляционных функций представить в виде таблицы (таблица 4.4), в которой отмечены лучшие модели из каждого класса (АР, СС, АРСС).

Таблица 4.4 – Теоретические погрешности моделей АРСС (M,N)

M	***N***			
	0	***1***	***2***	***3***
0	0.95296	**0.78575**	–	–
1	1.01968	–	–	–
2	0.22538	0.00403	0.00126	0.00008
3	**0.05769**	0.00204	0.00025	**0.00019**

Так как система уравнений для расчёта параметров модели $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots\}$ по корреляционной функции $R_\eta(k)$ и система уравнений для расчёта корреляционной функции $R_\eta(k)$ по параметрам модели $\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_1, \beta_2, \ldots\}$ совпадают (см. систему уравнений в таблице 1.1 и в таблице 1.2), то для при вычислении теоретической корреляционной функции $R_\eta^T(k)$ вместо решения системы уравнений предлагается пользоваться рекуррентным соотношением (таблица 1.1, блок ***B***):

$$\begin{cases} R_\eta^T(k) = R_\eta(k), \quad \mathrm{k} = 0, 1, 2, \ \ldots, \ M+N, \\ R_\eta^T(k) = \beta_1 R_\eta^T(k-1) + \beta_2 R_\eta^T(k-2) + \ldots + \beta_M R_\eta^T(k-M), \quad k > M+N, \end{cases}$$

где $R_\eta(k)$ – оценка исходной выборочной корреляционной функции.

4.9 *По пункту 3.5 задания*. С использованием выбранной модели АРСС сгенерировать выборку из 5000 последовательных значений процесса. Учесть, что при нулевых начальных условиях сгенерированная случайная последовательность приобретает свойство стационарности по истечении интервала времени большего, чем интервал корреляции. Поэтому можно, например, сгенерировать 6000 отсчётов последовательности и отбросить первые 1000 отсчётов, считая их «браком». Для графического сравнения реализаций исходного и смоделированного процессов использовать фрагменты из 100 (или около того) последовательных отсчётов.

4.10 *По пункту 3.6 задания*. Для каждой лучшей модели в классе АР, СС, АРСС изобразить на одном графике три нормированные корреляционные функции: (1) выборочную для исходного процесса, (2) теоретическую для лучшей модели, (3) выборочную для смоделированного процесса. На рисунке 4.3 приведён пример оформления графиков корреляционных функций.

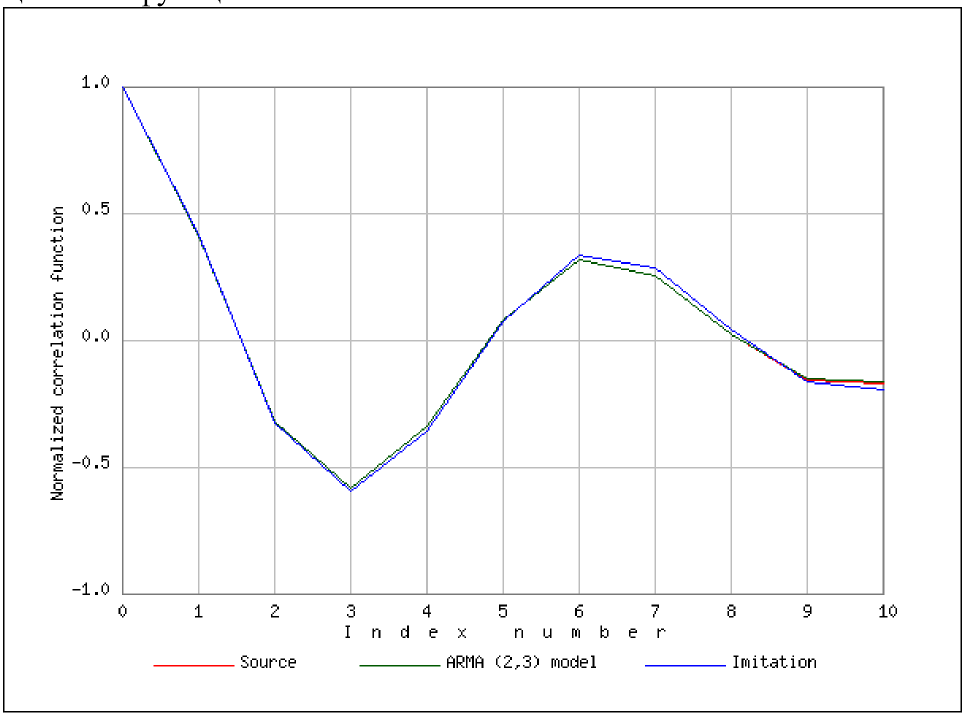

Рисунок 4.3 – Пример оформления графиков корреляционных функций

В таблице 4.5 приведён пример оформления итоговых результатов анализа и моделирования.

Таблица 4.5 – Итоговые результаты статистического анализа СП и моделирования

Параметры процесса	**Исходный процесс**	**АРСС(2,3) Теория**	**АРСС(2,3) Модель**	**АР(3) Теория**	**АР(3) Модель**	**СС(1) Теория**	**СС(1) Модель**
Среднее	**60.3833**	60.3833	60.5614	60.3833	60.6258	60.3833	60.9031
Дисперсия	**513.3259**	513.3259	512.2754	513.3259	507.1071	513.3259	493.1211
СКО	**22.6567**	22.6567	22.6335	22.6567	22.5190	22.6567	22.2063
Нормированная корреляционная функция:							
r[0]	**1.0000**	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
r[1]	**0.4089**	0.4089	0.4161	0.4089	0.4143	0.4089	0.4063
r[2]	**-0.3195**	-0.3195	-0.3268	-0.3195	-0.3285	0.0000	-0.0227
r[3]	**-0.5848**	-0.5848	-0.5995	-0.5848	-0.5983	0.0000	-0.0143
r[4]	**-0.3421**	-0.3421	-0.3565	-0.2615	-0.2747	0.0000	-0.0002
r[5]	**0.0789**	0.0789	0.0727	0.1960	0.1900	0.0000	0.0019

r[6]	**0.3140**	0.3163	0.3340	0.3560	0.3716	0.0000	0.0183
r[7]	**0.2530**	0.2509	0.2818	0.1617	0.1899	0.0000	0.0259
r[8]	**0.0199**	0.0210	0.0414	-0.1184	-0.0981	0.0000	0.0184
r[9]	**-0.1613**	-0.1556	-0.1631	-0.2173	-0.2229	0.0000	0.0079
r[10]	**-0.1715**	-0.1654	-0.1938	-0.0998	-0.1232	0.0000	-0.0035
Погрешность модели		**0.0001**	**0.0028**	**0.0577**	**0.0445**	**0.7858**	**0.7323**

4.11 В заключении привести выводы по погрешностям моделей, по вычислительной эффективности, личные впечатления о двух методах расчёта смешанных моделей, и т.п.

4.12 Примерное оглавление отчёта:

- γ Выборочные моментные функции
- γ Модели авторегрессии
- γ Модели скользящего среднего
- γ Смешанные модели
- γ Имитационное моделирование случайного процесса
- γ Сравнительный анализ лучших моделей
- γ Заключение
- γ Список использованных источников
- γ Приложения

4.13 При написании отчёта следует использовать стандарт оформления учебных текстовых документов Самарского университета СТО СГАУ 02068410-004-2007 *http://ssau.ru/files/science/org/no/osm/STO_SGAU_02068410-004-2007_New2011.pdf*.

5 Требования к оформлению отчета

5.1 Отчеты принимаются в виде твердой копии (листы формата А4). Кроме твёрдой копии необходимо предоставить электронную версию отчёта в одном из распространённых форматов документов (*Microsoft Office*, *OpenOffice.org*, *Adobe Reader*, гипертекстовый Web-документ, и т.п.). Файл отчёта должен иметь стандартное имя на кириллице: *группа-фамилия-вариант*, например: **6308-Иванов-05.pdf**.

5.2 Объём отчета не должен превышать 15 страниц (без задания и приложений).

5.3 Состав отчета:

- Титульный лист (приложение *3*)
- Реферат
- Оглавление
- Исходные данные и задание
- Разделы отчёта по пунктам задания
- Заключение, содержащее выводы по полученным результатам
- Список использованных источников
- Приложения (справочные материалы, тексты программ)

5.4 В тексте отчета необходимо приводить ВСЕ необходимые, и ТОЛЬКО необходимые расчетные формулы с расшифровкой ВСЕХ обозначений (при первом упоминании).

5.5 Отчёт должен быть выполнен с соблюдением стандарта (см. раздел 4.13), в частности, страницы, разделы, приложения должны быть пронумерованы, все рисунки должны быть пронумерованы и подписаны снизу, все таблицы должны быть пронумерованы и подписаны сверху, и т.д. На все приведённые рисунки и таблицы должны быть ссылки в тексте отчёта.

5.6 Нижний колонтитул должен содержать краткое название отчета, номер варианта, фамилию и учебную группу студента, номер страницы (в центре). Например:

6 Типичные ошибки при оформлении отчёта

6.1 Отклонение от стандарта (см. раздел 4.13).

6.2 Грамматические ошибки (орфография, синтаксис, пунктуация, стилистика, и т.п.).

6.3 Одинаковыми символами обозначаются различные математические объекты и, наоборот, один и тот же объект обозначается различными символами в разных местах отчёта, например, одним и тем же символом обозначается объём выборки и порядок модели СС.

6.4 Неудачное выполнение графических иллюстраций (неподписанные оси координат на графиках, неоптимальное использование свободного пространства, злоупотребление цветом, размером и разнообразием маркеров). Цвета должны выбираться с учётом видимости при распечатке на чёрно-белом принтере.

6.5 Отсутствие расшифровки обозначений в формулах.

6.6 Неаккуратное форматирование текста (выравнивание, отступы, границы, и т.п.), отсутствие единообразия в форматировании.

6.7 Запись формул в «текстовом» режиме вместо использования «редактора уравнений». Это приводит к различию в шрифтах в формулах и в тексте отчёта.

6.8 Нелаконичные названия разделов отчёта.

6.9 Неразумная точность представления числовых данных (число значащих цифр в числах). Точность не должна превосходить возможности визуального восприятия.

6.10 Отсутствие в отчёте описания используемых библиотечных функций (см. ниже Регламент выполнения курсовой работы, п.4).

6.11 Использование в отчёте общих формул (из таблицы 1.1), а не конкретных значений для рассматриваемых моделей (например, M=?, N=?).

7 Регламент выполнения курсовой работы

7.1 Выполнение курсовой работы состоит из двух последовательных этапов:

- Изготовление и сдача отчёта.
- Защита курсовой работы.

Защита курсовой работы включает в себя (1) защиту выполненной работы по отчёту, (2) ответы на теоретические и практические контрольные вопросы (раздел 8). График выполнения курсовой работы приведён в таблице 7.1.

Таблица 7.1 – График выполнения курсовой работы

Учебные недели	*Содержание этапа*	*Контрольные точки*	*Отчётные материалы*
1–2	Получение задания.	10%	Титульный лист, задание, исходные данные. Письмо с обратным адресом
3–4	Выполнение пункта 2.1 задания	20%	Отчёт о выполнении пункта 3.1 задания
5–6	Выполнение пунктов 2.2, 2.3 задания	40%	Отчёт о выполнении пунктов 3.1–3.3 задания
7–8	Выполнение пункта 2.4 задания	60%	Отчёт о выполнении пунктов 3.1–3.4 задания
9–10	Выполнение пункта 2.5 задания	75%	Отчёт о выполнении пунктов 3.1–3.5 задания
11–12	Выполнение пункта 2.6 задания	90%	Отчёт о выполнении пунктов 3.1–3.6 задания
13–14	Оформление отчёта	100%	Твёрдая копия и электронная версия полностью оформленного отчёта
15–17	Защита работы, зачёт		Зачётная книжка

Индивидуальные графики выполнения курсовой работы в течение семестра можно посмотреть на Web-странице: (готовится в настоящее время).

7.2 Оценка за курсовую работу выставляется с учётом следующих факторов:

- Качество отчёта (см. разделы 4, 5).
- Самостоятельность работы.
- Соблюдение графика выполнения курсовой работы в течение семестра.
- Ответы на вопросы по изготовленному отчёту.
- Ответы на контрольные вопросы (раздел 8).

7.3 Консультации по курсовой работе можно получать с использованием электронной почты, присылая преподавателю электронную версию отчёта или его частей накапливающемся итогом по адресу: *www.student@gmail.com*. Регламент переписки по электронной почте:

- Высылать ровно ОДИН файл, содержащий отчёт, поименованный стандартным образом (см. требования выше), например, **`6308-Иванов-05.pdf.`**
- Писать *на кириллице* имя и фамилию автора отчёта в заголовке письма в поле «От».
- Указывать номер варианта и номер учебной группы в заголовке письма в поле «Тема», например, **`6308-Иванов-05.pdf.`**
- Писать краткий сопроводительный текст в теле письме. Здесь же задавать вопросы. Цитировать вопросы и замечания преподавателя и отвечать на них по пунктам в теле письма.

7.4 Не накладывается никаких ограничений на программную среду разработки. Рекомендуется использовать свободно распространяемые пакеты (например, пакет прикладных математических программ ***Scilab*** – http://www.scilab.org, язык научного программирования **Octave** – https://www.gnu.org/software/octave, высокоуровневый язык программирования общего назначения ***Python*** – https://www.python.org/, программная среда для статистических вычислений и графики ***R*** – https://www.r-project.org/ и соответствующий интерфейс разработки ***RStudio*** – https://www.rstudio.com/, и т.п.). При использовании специальных библиотечных функций (например, для решения систем линейных и нелинейных уравнений, для статистических вычислений, для графики, и т.п.) необходимо в основном тексте отчёта полностью описать соответствующие функции (назначение, используемый метод, параметры, ограничения, и т.п.).

8 Контрольные вопросы к защите курсовой работы

1. Кратко пересказать содержание курсовой работы, обращая внимание на взаимосвязь пунктов задания.
2. Дайте пояснение для «чайника» понятиям «*математическое ожидание*», «*дисперсия*», «*интервал корреляции*» случайного процесса, используя графическую иллюстрацию.

3. Что такое «*несмещённая оценка*» некоторого параметра?
4. Записать систему уравнений для нахождения параметров модели авторегрессии.
5. Записать систему уравнений для нахождения параметров модели скользящего среднего.
6. Что такое стационарный дискретный «*белый шум*»? Какие у него корреляционная функция? Может ли «*белый шум*» иметь ненулевое математическое ожидание и/или неединичную дисперсию?
7. Что такое «стационарный *в широком смысле* случайный процесс»?
8. Что такое «стационарный *в узком смысле* случайный процесс»?
9. Что такое «*эргодический случайный процесс*»? Как можно установить, что стационарный случайный процесс является эргодическим?
10. Что такое «*интервал корреляции*»? В чём его физический смысл?
11. Определение и свойства корреляционной функции случайного процесса.
12. Определение и свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса.
13. Что в названии процессов **А**вто**Р**егрессии и **С**кользящего **С**реднего обозначают буквы **А**, **Р**, **С**, **С**? Детально прокомментировать, основываясь на разностном уравнении. Как расшифровывается соответствующая английская аббревиатура **ARMA**?
14. Найти корреляционную функцию $R_\eta(m)$ случайной последовательности $\eta_n = \xi_n - \alpha\xi_{n-1}$, если ξ_n – стационарная случайная последовательность с экспоненциальной корреляционной функцией $R_\xi(m) = \alpha^{|m|},\ |\alpha| < 1$.
15. Какой физический смысл параметров A и α для случайной последовательности ξ_n с экспоненциальной корреляционной функции $R_\xi(m) = A\alpha^{|m|}$? Чему равен интервал корреляции?
16. Как сгенерировать на компьютере случайную величину, имеющую равномерное распределение с заданными математическим ожиданием и дисперсией?
17. Как сгенерировать на компьютере случайную величину, имеющую нормальное распределение с заданными математическим ожиданием и дисперсией?
18. Как сильно (на сколько процентов) отличаются смещённая и несмещённая оценки дисперсии в настоящей работе? Какую из них Вы использовали?
19. Доказать, что две следующие модели скользящего среднего эквивалентны, то есть порождают случайные последовательности с одинаковыми корреляционными функциями:
$$\eta_n = \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_{N-1}\xi_{n-N+1} + \alpha_N\xi_{n-N},$$
$$\eta_n = \alpha_N\xi_n + \alpha_{N-1}\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_1\xi_{n-N+1} + \alpha_0\xi_{n-N}.$$
20. Что такое «*сходимость по вероятности*»? Что такое «*сходимость в среднем квадратичном*»?
21. Описать метод 2 оценивания параметров смешанной модели АРСС.
22. На вход разностного уравнения
$$\eta_n = c + \beta_1\eta_{n-1} + \alpha_0\xi_n$$

подаётся стационарная случайная последовательность $\{\xi_n\}$ с нулевым математическим ожиданием. Считая, что выходная случайная последовательность $\{\eta_n\}$ также является стационарной, найти её математическое ожидание, если $|\beta_1| < 1,\ c = const$.

23. Как при помощи функции ***fsolve*** численно решить систему нелинейных уравнений (системы ***MATLAB***, ***Scilab, Octave***)?

Литература

1. ***Тараскин, А.Ф.*** Статистический анализ временных рядов авторегрессии и скользящего среднего: учебное пособие [Текст] // Самара: СГАУ, 1998. – 56с. [Интернет-ссылка]
2. ***Тараскин, А.Ф.*** Статистическое моделирование и метод Монте–Карло: учебное пособие [Текст] // Самара: СГАУ, 1997. – 62с. [Интернет-ссылка]
3. ***Храмов, А.Г.*** Анализ и моделирование процессов АРСС: интернет-ресурс к курсовой работе [Электронный ресурс] // Самара: СГАУ, 2009. [Интернет-ссылка]

Приложение 1 Оценивание параметров смешанной модели АРСС

В разделе 1.4 описывается общая смешанная модель АРСС порядка (M, N), связь параметров этой модели с отсчётами корреляционной функции установлена в таблице 1.1. Система из (M+2N+2) нелинейных уравнений (блоки **А**, **Б**, **Г**) позволяет по (M+N+1) отсчётам корреляционной функции выходной последовательности $R_\eta(m),\ m=0,1,2,\ldots,M+N$, найти ($M$+$N$+1) параметров модели АРСС(M,N) $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_M$, используя ($N$+1) вспомогательных отсчётов взаимной КФ $R_{\xi\eta}(m),\ m=0,1,2,\ldots,N$. Уравнения блока **В** используются для рекурсивного расчёта КФ $R_\eta(m)$ для $m>M+N$.

При практическом использовании уравнений, приведённых в таблице 1.1, для оценивания параметров моделей АРСС следует учесть, что точные значения отсчётов КФ $R_\eta(m),\ m=0,1,2,3,\ldots$ и точные значения параметров модели $\{M,\ N,\ \alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_M\}$ неизвестны. Поэтому непосредственное использование этих уравнений может привести к большим погрешностям получаемых оценок (методы 1 и 2 ниже).

Метод 1

Считая известными первые $(N+M+1)$ отсчётов корреляционной функции случайного процесса η_n

$$R_\eta(0),\ R_\eta(1),\ \ldots,\ R_\eta(N-1),\ R_\eta(N),\ R_\eta(N+1),\ \ \ldots,\ R_\eta(N+M-1),\ R_\eta(N+M),$$

из системы $(N+1)+M+(N+1)=M+2N+2$ уравнений (блоки **А**, **Б** и **Г** в таблице 1.1)

$$\begin{cases}
R_\eta(0)=\beta_1R_\eta(1)+\beta_2R_\eta(2)+\ldots+\beta_MR_\eta(M)+\alpha_0R_{\xi\eta}(0)+\alpha_1R_{\xi\eta}(1)+\alpha_2R_{\xi\eta}(2)+\ldots+\alpha_NR_{\xi\eta}(N),\\
R_\eta(1)=\beta_1R_\eta(0)+\beta_2R_\eta(1)+\ldots+\beta_MR_\eta(M-1)+\alpha_1R_{\xi\eta}(0)+\alpha_2R_{\xi\eta}(1)+\alpha_3R_{\xi\eta}(2)+\ldots+\alpha_NR_{\xi\eta}(N-1),\\
\ldots,\\
R_\eta(N)=\beta_1R_\eta(N-1)+\beta_2R_\eta(N-2)+\ldots+\beta_MR_\eta(N-M)+\alpha_NR_{\xi\eta}(0),\\
---\\
R_\eta(N+1)=\beta_1R_\eta(N)+\beta_2R_\eta(N-1)+\ldots+\beta_MR_\eta(N-M+1),\\
R_\eta(N+2)=\beta_1R_\eta(N+1)+\beta_2R_\eta(N)+\ldots+\beta_MR_\eta(N-M+2),\\
\ldots,\\
R_\eta(N+M)=\beta_1R_\eta(N+M-1)+\beta_2R_\eta(N+M-2)+\ldots+\beta_MR_\eta(N),\\
---\\
R_{\xi\eta}(0)=\alpha_0,\\
R_{\xi\eta}(1)=\beta_1R_{\xi\eta}(0)+\alpha_1,\\
\ldots,\\
R_{\xi\eta}(N)=\beta_1R_{\xi\eta}(N-1)+\beta_2R_{\xi\eta}(N-2)+\ldots+\beta_MR_{\xi\eta}(N-M)+\alpha_N.
\end{cases}$$

численно находим оценки $(N+M+1)$ неизвестных коэффициентов $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_N,\ \beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_M$ и $(N+1)$ отсчётов неизвестной взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(0),\ R_{\xi\eta}(1),\ R_{\xi\eta}(2),\ \ldots,\ R_{\xi\eta}(N)$, которые в дальнейшем не используются.

Метод 2

Уравнение (*) из раздела 1 можно переписать в виде:

$$\zeta_n=\alpha_0\xi_n+\alpha_1\xi_{n-1}+\ldots+\alpha_N\xi_{n-N}, \tag{П1.2}$$

где

$$\zeta_n=\eta_n-\beta_1\eta_{n-1}-\beta_2\eta_{n-2}-\ldots-\beta_M\eta_{n-M}. \tag{П1.3}$$

Уравнение (П1.2) – это модель СС(N) для промежуточной случайной последовательности ζ_n, которая может быть получена из исходной последовательности η_n по уравнению (П1.3).

Шаг 1. Из системы M линейных уравнений (блок **Б** в таблице А.1)

$$\begin{cases}
R_\eta(N+1)=\beta_1R_\eta(N)+\beta_2R_\eta(N-1)+\ldots+\beta_MR_\eta(N-M+1),\\
R_\eta(N+2)=\beta_1R_\eta(N+1)+\beta_2R_\eta(N)+\ldots+\beta_MR_\eta(N-M+2),\\
\ldots,\\
R_\eta(N+M)=\beta_1R_\eta(N+M-1)+\beta_2R_\eta(N+M-2)+\ldots+\beta_MR_\eta(N)
\end{cases}$$

находятся оценки M неизвестных коэффициентов $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_M$.

Шаг 2. Из исходной последовательности η_n строится промежуточная последовательность ζ_n с использованием уравнения (П1.3):

$$\zeta_n = \eta_n - \beta_1\eta_{n-1} - \beta_2\eta_{n-2} - \ldots - \beta_M\eta_{n-M}$$

Шаг 3. Находится выборочная корреляционная функции $R_\zeta(m)$ промежуточной случайной последовательности ζ_n.

Шаг 4. Из системы (*N*+1) нелинейных уравнений (таблица 1.2 – модель СС(*N*))

$$\begin{cases} R_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \ldots + \alpha_N^2, \\ R_\zeta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3\alpha_4 + \ldots + \alpha_{N-1}\alpha_N, \\ \ldots, \\ R_\zeta(N) = \alpha_0\alpha_N \end{cases}$$

численно находятся оценки (*N*+1) неизвестных коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Приложение 2 Условия устойчивости моделей АРСС

Общее условие устойчивости модели АРСС(*M*,*N*) (А.1) заключается в том, что все *M* корней z_k, $k = 1, 2, \ldots, M$ характеристического уравнения $1 - \beta_1 z^{-1} - \beta_2 z^{-2} - \beta_3 z^{-3} - \ldots - \beta_M z^{-M} = 0$ лежат внутри окружности единичного радиуса комплексной *z*-плоскости, то есть $|z_k| < 1,\ k = 1, 2, \ldots, M$. В частности,

- модель АРСС (*0*,*N*) = СС (*N*) устойчива всегда (для любых *N*),
- модель АРСС (*1*,*N*) устойчива тогда и только тогда, когда $|\beta_1| < 1$,
- модель АРСС (*2*,*N*) устойчива тогда и только тогда, когда $|\beta_2| < 1$, $|\beta_1| < 1 - \beta_2$,
- модель АРСС (*3*,*N*) устойчива тогда и только тогда, когда $|\beta_3| < 1$, $|\beta_1 + \beta_3| < 1 - \beta_2$, $|\beta_2 + \beta_1\beta_3| < 1 - \beta_3^2$.

На устойчивость модели не влияют значения коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N$.

Рассчитанные модели АРСС могут оказаться неустойчивыми в силу неадекватности рассматриваемой модели АРСС и/или случайного характера исходной выборки.

Приложение В Примеры расчёта параметров и теоретических КФ

В общем виде модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (*M,N*) задаётся уравнением

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \ldots + \beta_M\eta_{n-M} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \ldots + \alpha_N\xi_{n-N},$$

где ξ_n – входная некоррелированная случайная последовательность с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией ($\mathbf{M}\xi_n = 0,\ \mathbf{M}\xi_n^2 = 1,\ \mathbf{M}\xi_k\xi_n = \delta_{kn}$), η_n – выходная случайная последовательность.

Будем считать (без доказательства), что выходная случайная последовательность η_n является стационарной в широком смысле и имеет математическое ожидание $\mathbf{M}\eta_n = 0$ и корреляционную функцию $R_\eta(m) = \mathbf{M}\eta_n\eta_{n+m}$. Считаем также, что случайные последовательности ξ_n и η_n являются взаимно стационарными в широком смысле. Обозначим через $R_{\xi\eta}(m)$ их взаимную корреляционную функцию: $R_{\xi\eta}(m) = \mathbf{M}\xi_n\eta_{n+m}$. Заметим, что $R_{\xi\eta}(m) = 0$ при $m < 0$, так как в соответствии с уравнением АРСС «прошлое» значение η_{n+m} не зависит от «будущего» значения ξ_n при $m < 0$.

В.1 Модель АРСС(2,1)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (2,1):

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1}. \tag{Б.1}$$

<u>*Оценивание параметров:*</u> $\{R_\eta(0),\ R_\eta(1),\ R_\eta(2),\ R_\eta(3)\} \Rightarrow \{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\}$

Метод 1

M=2, *N*=1. Из системы $(N+1) + M + (N+1) = 6$ уравнений (таблица А.1, блоки **А, Б, Г**)

$$\begin{cases} R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1), \\ R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0), \\ ------------------------------------ \\ R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0), \\ R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1), \\ ------------------------------------ \\ R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0, \\ R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 \end{cases} \tag{Б.2}$$

находим $(N+1) + M + (N+1) = 6$ неизвестных: $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, R_{\xi\eta}(0), R_{\xi\eta}(1)$, Используются $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$.

Метод 2

1. Из системы двух линейных уравнений (таблица А.1 – блок **Б**)

$$\begin{cases} R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0), \\ R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1) \end{cases}$$

находим оценки коэффициентов β_1 и β_2.

2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \beta_1\eta_{n-1} - \beta_2\eta_{n-2}$ получаем выборку промежуточной случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.

3. Находим оценку её корреляционной функции: $R_\zeta(m),\ m = 0,1$.

4. Находим оценки неизвестных параметров α_0, α_1, аналитически или численно решая систему из двух нелинейных уравнений: $R_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2,\quad R_\zeta(1) = \alpha_0\alpha_1$.

<u>*Расчёт теоретической КФ:*</u> $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\} \Rightarrow \{R_\eta^T(0),\ R_\eta^T(1),\ R_\eta^T(2), \ldots\}$

Считая известными параметры $\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2$, решим систему (Б.2) относительно первых $(N+M+1) = 4$ отсчётов КФ: $R_\eta^T(0), R_\eta^T(1), R_\eta^T(2), R_\eta^T(3)$. Остальные значения КФ рассчитываются рекурсивно в соответствии с таблицей

А.1 (блок ***В***): $R^T_\eta(4) = \beta_1 R^T_\eta(3) + \beta_2 R^T_\eta(2), \quad R^T_\eta(5) = \beta_1 R^T_\eta(4) + \beta_2 R^T_\eta(3)$, и т.д.

Примечание. Так как система (Б.2) использовалась ранее для нахождения неизвестных параметров $\{\alpha_0, \alpha_1, \beta_1, \beta_2\}$, которые теперь считаем известными, то первые $(N+M+1) = 4$ значений (таблица А.1, блоки ***А*** и ***Б***) теоретической КФ $R^T_\eta(m)$ будут совпадать со значениями исходной выборочной КФ $R_\eta(m)$:

$$R^T_\eta(0) = R_\eta(0), \quad R^T_\eta(1) = R_\eta(1), \quad R^T_\eta(2) = R_\eta(2), \quad R^T_\eta(3) = R_\eta(3).$$

В.2 Модель АРСС(2,2)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (2,2):

$$\eta_n = \beta_1 \eta_{n-1} + \beta_2 \eta_{n-2} + \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \alpha_2 \xi_{n-2}. \tag{Б.3}$$

<u>*Оценивание параметров:*</u> $\{R_\eta(0), R_\eta(1), R_\eta(2), R_\eta(3), R_\eta(4)\} \Rightarrow \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$

Метод 1

M=2, *N*=2. Из системы $(N+1) + M + (N+1) = 8$ уравнений (таблица А.1, блоки **А**, **Б**, **Г**)

$$\begin{cases} R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2), \\ R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1), \\ R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0), \\ \text{-----------------------------------} \\ R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1), \\ R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2), \\ \text{-----------------------------------} \\ R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0, \\ R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1, \\ R_{\xi\eta}(2) = \beta_1 R_{\xi\eta}(1) + \beta_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 \end{cases} \tag{Б.4}$$

находим $(N+1) + M + (N+1) = 8$ неизвестных: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, R_{\xi\eta}(0), R_{\xi\eta}(1), R_{\xi\eta}(2) \Rightarrow \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$.

Метод 2

1. Из системы двух линейных уравнений (таблица А.1 – блок **Б**)

   $$\begin{cases} R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1), \\ R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) \end{cases}$$

   находим оценки коэффициентов β_1 и β_2.
2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \beta_1 \eta_{n-1} - \beta_2 \eta_{n-2}$ получаем выборку промежуточной случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.
3. Находим оценку её корреляционной функции: $R_\zeta(m),\ m = 0,1,2$.
4. Находим оценки неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$, численно решая систему из трёх нелинейных уравнений: $R_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad R_\zeta(1) = \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2, \quad R_\zeta(2) = \alpha_0 \alpha_2$.

<u>*Расчёт теоретической КФ:*</u> $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\} \Rightarrow \{R^T_\eta(0), R^T_\eta(1), R^T_\eta(2), \ldots\}$

Считая параметры $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ известными, решим систему (Б.4) относительно первых $(N+M+1) = 5$ отсчётов КФ: $R^T_\eta(0), R^T_\eta(1), R^T_\eta(2), R^T_\eta(3), R^T_\eta(4)$. Остальные значения рассчитываются рекурсивно в соответствии с таблицей А.1 (блок ***В***): $R^T_\eta(5) = \beta_1 R^T_\eta(4) + \beta_2 R^T_\eta(3), \quad R^T_\eta(6) = \beta_1 R^T_\eta(5) + \beta_2 R^T_\eta(4)$, и т.д.

Примечание. Так как система (Б.4) использовалась ранее для нахождения неизвестных параметров $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\}$, которые теперь считаем известными, то первые $(N+M+1)=5$ значений (таблица А.1, блоки ***А*** и ***Б***) теоретической КФ $R_\eta^T(m)$ будут совпадать со значениями исходной выборочной КФ $R_\eta(m)$:

$$R_\eta^T(0)=R_\eta(0),\ \ R_\eta^T(1)=R_\eta(1),\ \ R_\eta^T(2)=R_\eta(2),\ \ R_\eta^T(3)=R_\eta(3),\ \ R_\eta^T(4)=R_\eta(4).$$

В.3 Модель АРСС(1,3)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (1,3):

$$\eta_n=\beta_1\eta_{n-1}+\alpha_0\xi_n+\alpha_1\xi_{n-1}+\alpha_2\xi_{n-2}+\alpha_3\xi_{n-3}$$

Оценивание параметров: $\{R_\eta(0),\, R_\eta(1),\, R_\eta(2),\, R_\eta(3),\, R_\eta(4)\}\ \Rightarrow\ \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1\}$

Метод 1

M=1, *N*=3. Из системы $(N+1)+M+(N+1)=9$ уравнений (таблица А.1, блоки **А**, **Б**, **Г**)

$$\begin{cases} R_\eta(0)=\beta_1R_\eta(1)+\alpha_0R_{\xi\eta}(0)+\alpha_1R_{\xi\eta}(1)+\alpha_2R_{\xi\eta}(2)+\alpha_3R_{\xi\eta}(3),\\ R_\eta(1)=\beta_1R_\eta(0)+\alpha_1R_{\xi\eta}(0)+\alpha_2R_{\xi\eta}(1)+\alpha_3R_{\xi\eta}(2),\\ R_\eta(2)=\beta_1R_\eta(1)+\alpha_2R_{\xi\eta}(0)+\alpha_3R_{\xi\eta}(1),\\ R_\eta(3)=\beta_1R_\eta(2)+\alpha_3R_{\xi\eta}(0),\\ \text{-------------------------------------}\\ R_\eta(4)=\beta_1R_\eta(3),\\ \text{-------------------------------------}\\ R_{\xi\eta}(0)=\alpha_0,\\ R_{\xi\eta}(1)=\beta_1R_{\xi\eta}(0)+\alpha_1,\\ R_{\xi\eta}(2)=\beta_1R_{\xi\eta}(1)+\alpha_2,\\ R_{\xi\eta}(3)=\beta_1R_{\xi\eta}(2)+\alpha_3 \end{cases} \qquad (Б.5)$$

находим $(N+1)+M+(N+1)=9$ неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, R_{\xi\eta}(0), R_{\xi\eta}(1), R_{\xi\eta}(2), R_{\xi\eta}(3)$.

Метод 2

1. Из уравнения (таблица А.1 – блок **Б**) $R_\eta(4)=\beta_1R_\eta(3)$ находим оценку коэффициента β_1.
2. С использованием уравнения $\zeta_n=\eta_n-\beta_1\eta_{n-1}$ получаем выборку промежуточной случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.
3. Находим оценку её корреляционной функции: $R_\zeta(m),\ m=0,1,2,3$.
4. Находим оценки неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3$, численно решая систему из четырёх нелинейных уравнений: $R_\zeta(0)=\alpha_0^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2$, $R_\zeta(1)=\alpha_0\alpha_1+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_3$, $R_\zeta(2)=\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_3$, $R_\zeta(3)=\alpha_0\alpha_3$.

Оценивание теоретической КФ: $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1\}\ \Rightarrow\ \{R_\eta^T(0),\, R_\eta^T(1),\, R_\eta^T(2),\, \dots\}$

Считая параметры $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ известными, решим систему (Б.5) относительно первых $(N+M+1)=5$ отсчётов КФ: $R_\eta^T(0), R_\eta^T(1), R_\eta^T(2), R_\eta^T(3), R_\eta^T(4)$. Остальные значения рассчитываются рекурсивно в соответствии с таблицей А.1 (блок ***В***): $R_\eta^T(5)=\beta_1R_\eta^T(4),\ R_\eta^T(6)=\beta_1R_\eta^T(5)$, и т.д.

Примечание. Так как система (Б.5) использовалась ранее для нахождения неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$, которые теперь считаем известными, то первые $(N+M+1)=5$ значений (таблица А.1, блоки ***А*** и ***Б***) теоретической КФ $R_\eta^T(m)$ будут совпадать со значениями исходной выборочной КФ $R_\eta(m)$:

$$R_\eta^T(0)=R_\eta(0),\ \ R_\eta^T(1)=R_\eta(1),\ \ R_\eta^T(2)=R_\eta(2),\ \ R_\eta^T(3)=R_\eta(3),\ \ R_\eta^T(4)=R_\eta(4).$$

В.4 Модель АРСС(3,3)

Рассмотрим смешанную модель авторегрессии – скользящего среднего порядка (3,3):

$$\eta_n = \beta_1\eta_{n-1} + \beta_2\eta_{n-2} + \beta_3\eta_{n-3} + \alpha_0\xi_n + \alpha_1\xi_{n-1} + \alpha_2\xi_{n-2} + \alpha_3\xi_{n-3}$$

Оценивание параметров: $\{R_\eta(0),\ R_\eta(1),\ R_\eta(2),\ R_\eta(3),\ R_\eta(4),\ R_\eta(5),\ R_\eta(6)\} \Rightarrow \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$

Метод 1

M=3, N=3. Из системы $(N+1)+M+(N+1)=11$ уравнений (таблица А.1, блоки **А**, **Б**, **Г**)

$$\begin{cases} R_\eta(0) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(3) + \alpha_0 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(2) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(3), \\ R_\eta(1) = \beta_1 R_\eta(0) + \beta_2 R_\eta(1) + \beta_3 R_\eta(2) + \alpha_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(1) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(2), \\ R_\eta(2) = \beta_1 R_\eta(1) + \beta_2 R_\eta(0) + \beta_3 R_\eta(1) + \alpha_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(1), \\ R_\eta(3) = \beta_1 R_\eta(2) + \beta_2 R_\eta(1) + \beta_3 R_\eta(0) + \alpha_3 R_{\xi\eta}(0) \\ \text{---} \\ R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(1), \\ R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) + \beta_3 R_\eta(2), \\ R_\eta(6) = \beta_1 R_\eta(5) + \beta_2 R_\eta(4) + \beta_3 R_\eta(3), \\ \text{---} \\ R_{\xi\eta}(0) = \alpha_0, \\ R_{\xi\eta}(1) = \beta_1 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_1, \\ R_{\xi\eta}(2) = \beta_1 R_{\xi\eta}(1) + \beta_2 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_2, \\ R_{\xi\eta}(3) = \beta_1 R_{\xi\eta}(2) + \beta_2 R_{\xi\eta}(1) + \beta_3 R_{\xi\eta}(0) + \alpha_3 \end{cases} \tag{Б.6}$$

находим $(N+1)+M+(N+1)=11$ неизвестных $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, R_{\xi\eta}(0), R_{\xi\eta}(1), R_{\xi\eta}(2), R_{\xi\eta}(3)$.

Метод 2

1. Из системы трёх линейных уравнений (таблица А.1 – блок **Б**)
$$\begin{cases} R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(1), \\ R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) + \beta_3 R_\eta(2), \\ R_\eta(6) = \beta_1 R_\eta(5) + \beta_2 R_\eta(4) + \beta_3 R_\eta(3) \end{cases}$$
находим оценки коэффициентов $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

2. С использованием уравнения $\zeta_n = \eta_n - \beta_1\eta_{n-1} - \beta_2\eta_{n-2} - \beta_3\eta_{n-3}$ получаем выборку промежуточной случайной последовательности $\{\zeta_n\}$.

3. Находим оценку её корреляционной функции: $R_\zeta(m),\ m = 0,1,2,3$.

4. Находим оценки неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, численно решая систему из четырёх нелинейных уравнений: $R_\zeta(0) = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, $R_\zeta(1) = \alpha_0\alpha_1 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3$, $R_\zeta(2) = \alpha_0\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3$, $R_\zeta(3) = \alpha_0\alpha_3$.

Оценивание теоретической КФ: $\{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3\} \Rightarrow \{R_\eta^T(0),\ R_\eta^T(1),\ R_\eta^T(2),\ \ldots\}$

Считая параметры $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$ известными, решим систему (Б.6) относительно $(N+M+1)=7$ отсчётов КФ: $R_\eta^T(0),\ R_\eta^T(1),\ R_\eta^T(2),\ R_\eta^T(3),\ R_\eta^T(4),\ R_\eta^T(5),\ R_\eta^T(6)$. Остальные значения рассчитываются рекурсивно в соответствии с таблицей А.1 (блок ***В***): $R_\eta(7) = \beta_1 R_\eta(6) + \beta_2 R_\eta(5) + \beta_3 R_\eta(4),\ R_\eta(8) = \beta_1 R_\eta(7) + \beta_2 R_\eta(6) + \beta_3 R_\eta(5)$, и т.д.

Примечание. Так как система (Б.6) использовалась ранее для нахождения неизвестных параметров $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$, которые теперь считаем известными, то первые $(N+M+1)=7$ значений (таблица А.1, блоки ***А*** и ***Б***) теоретической КФ $R_\eta^T(m)$ будут совпадать со значениями исходной выборочной КФ $R_\eta(m)$:

$$R_\eta^T(0) = R_\eta(0),\ \ R_\eta^T(1) = R_\eta(1),\ \ R_\eta^T(2) = R_\eta(2),\ \ R_\eta^T(3) = R_\eta(3),\ \ R_\eta^T(4) = R_\eta(4),\ \ R_\eta^T(5) = R_\eta(5),\ \ R_\eta^T(6) = R_\eta(6).$$

Приложение Г Метод простых итераций для решения систем алгебраических уравнений при построении моделей АРСС

Итерационный метод решения системы нелинейных алгебраических уравнений рассмотрим на примерах моделей СС(2), СС(3) и АРСС(3,3). Известно [1], что рассматриваемый ниже метод простых итераций для устойчивых моделей АРСС всегда позволяет найти одно из решений системы, если это решение существует.

Модель СС(2)

$$\eta_n = \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \alpha_2 \xi_{n-2}.$$

Система нелинейных алгебраических уравнений для расчёта коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ имеет вид:

$$\begin{cases} R_0 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \\ R_1 = \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 \\ R_2 = \alpha_0 \alpha_2 \end{cases}$$

Значения R_0, R_1, R_2 известны.

Начальное приближение:

$$\alpha_0 = \sqrt{R_0},\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0.$$

Схема итераций:

1 $\alpha_2 \leftarrow \dfrac{R_2}{\alpha_0}$;

2 $\alpha_1 \leftarrow \dfrac{R_1 - \alpha_1 \alpha_2}{\alpha_0}$;

3 если $R_0 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, то решений нет, иначе

$\alpha_0 \leftarrow \sqrt{R_0 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}$;

4 проверка на завершение итераций;

5 переход к п.1.

Модель СС(3)

$$\eta_n = \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \alpha_2 \xi_{n-2} + \alpha_3 \xi_{n-3}.$$

Система нелинейных алгебраических уравнений для расчёта коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ имеет вид:

$$\begin{cases} R_0 = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \\ R_1 = \alpha_0 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2 \alpha_3 \\ R_2 = \alpha_0 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 \\ R_3 = \alpha_0 \alpha_3 \end{cases}$$

Значения R_0, R_1, R_2, R_3 известны.

Начальное приближение:

$$\alpha_0 = \sqrt{R_0},\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0.$$

Схема итераций:

1 $\alpha_3 \leftarrow \dfrac{R_3}{\alpha_0}$;

2 $\alpha_2 \leftarrow \dfrac{R_2 - \alpha_1 \alpha_3}{\alpha_0}$;

3 $\alpha_1 \leftarrow \dfrac{R_1 - \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_3}{\alpha_0}$;

4 если $R_0 < \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$, то решений нет, иначе

$\alpha_0 \leftarrow \sqrt{R_0 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2}$;

5 проверка на завершение итераций;

6 переход к п.1.

Модель АРСС(3,3)

$$\eta_n = \beta_1 \eta_{n-1} + \beta_2 \eta_{n-2} + \beta_3 \eta_{n-3} + \alpha_0 \xi_n + \alpha_1 \xi_{n-1} + \alpha_2 \xi_{n-2} + \alpha_3 \xi_{n-3}.$$

Система нелинейных алгебраических уравнений для расчёта коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ после исключения неиспользуемых переменных $R_{\xi\eta}(0), R_{\xi\eta}(1), R_{\xi\eta}(2), R_{\xi\eta}(3)$ имеет вид:

$$\begin{cases} R_0 - \beta_1 R_1 - \beta_2 R_2 - \beta_3 R_3 = \alpha_0^2 + \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3((\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3)\alpha_0 + (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_3) \\ R_1 - \beta_1 R_0 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R_2 = \alpha_1\alpha_0 + \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) + \alpha_3((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) \\ R_2 - \beta_1 R_1 - \beta_2 R_0 - \beta_3 R_1 = \alpha_2\alpha_0 + \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) \\ R_3 - \beta_1 R_2 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R_0 = \alpha_3\alpha_0 \end{cases}$$

Коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ предварительно находятся из системы линейных уравнений (таблица А.1 – блок **Б**):

$$\begin{cases} R_\eta(4) = \beta_1 R_\eta(3) + \beta_2 R_\eta(2) + \beta_3 R_\eta(1), \\ R_\eta(5) = \beta_1 R_\eta(4) + \beta_2 R_\eta(3) + \beta_3 R_\eta(2), \\ R_\eta(6) = \beta_1 R_\eta(5) + \beta_2 R_\eta(4) + \beta_3 R_\eta(3). \end{cases}$$

Значения R_0, R_1, R_2, R_3 известны.

Начальное приближение:

$$\alpha_0 = \sqrt{R_0},\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0\,.$$

Схема итераций:

1 $\alpha_3 \leftarrow \dfrac{R_3 - \beta_1 R_2 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R_0}{\alpha_0}$;

2 $\alpha_2 \leftarrow \dfrac{R_2 - \beta_1 R_1 - \beta_2 R_0 - \beta_3 R_1 - \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1)}{\alpha_0}$;

3 $\alpha_1 \leftarrow \dfrac{R_1 - \beta_1 R_0 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R_2 - \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_3((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_0}$;

4 $\alpha_s \leftarrow R_0 - \beta_1 R_1 - \beta_2 R_2 - \beta_3 R_3$
$\quad - \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_3((\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3)\alpha_0 + (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_3)$

если $\alpha_s < 0$, то решений нет, иначе $\alpha_0 \leftarrow \sqrt{\alpha_s}$;

5 проверка на завершение итераций;

6 переход к п.1.

Критерий остановки итераций – уменьшение скорости сходимости итераций до заданного значения ε:

$\left\|\vec{\alpha}^{(i+1)} - \vec{\alpha}^{(i)}\right\| < \varepsilon$, где $\vec{\alpha}^{(i)} = \left(\alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \ldots\right)$ – значение вектора коэффициентов после *i*-й итерации.

Можно использовать достаточно большое фиксированное число итераций (достаточно 100 в условиях данной курсовой работы).

В процессе проведения итераций полезно контролировать уменьшение до малой величины значения квадратичной невязки, которая, например, для модели СС(2) имеет вид:

$$\varepsilon^2 = \left(R_0 - \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2\right)^2 + \left(R_1 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2\right)^2 + \left(R_2 - \alpha_0\alpha_2\right)^2\ ,$$

для модели СС(3):

$$\varepsilon^2 = \left(R_0 - \alpha_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2\right)^2 + \left(R_1 - \alpha_0\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha_3\right)^2 + \left(R_2 - \alpha_0\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3\right)^2 + \left(R_3 - \alpha_0\alpha_3\right)^2\ ,$$

для модели АРСС(3,3):

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = {} & \left(R_0 - \beta_1 R_1 - \beta_2 R_2 - \beta_3 R_3 - \alpha_0^2 - \alpha_1(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_2((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_3((\beta_1^3 + 2\beta_1\beta_2 + \beta_3)\alpha_0 + (\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_1 + \beta_1\alpha_2 + \alpha_3)\right)^2 \\ & + \left(R_1 - \beta_1 R_0 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R_2 - \alpha_1\alpha_0 - \alpha_2(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1) - \alpha_3((\beta_1^2 + \beta_2)\alpha_0 - \beta_1\alpha_1 + \alpha_2)\right)^2 \\ & + \left(R_2 - \beta_1 R_1 - \beta_2 R_0 - \beta_3 R_1 - \alpha_2\alpha_0 - \alpha_3(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1)\right)^2 + \left(R_3 - \beta_1 R_2 - \beta_2 R_1 - \beta_3 R_0 - \alpha_3\alpha_0\right)^2. \end{aligned}$$

В результате итерационного процесса будет найдено ***одно*** из возможных решений системы, что является достаточным в данной работе, или квадратичная невязка будет сильно отличаться от нуля, что говорит о том, что решений нет.

Приложение Д Образец оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П.Королёва»

ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАТИКИ

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ КИБЕРНЕТИКИ

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССОВ АВТОРЕГРЕССИИ И СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО

курсовая работа по дисциплине **«Теория случайных процессов»**

Вариант № ___

Выполнил:	Фамилия И.О.
Группа:	630X
№ зачётной книжки:	___________________
Проверил:	Храмов А.Г.
Оценка:	___________________
Дата:	___________________

Самара 2017