Компьютерная графика

Лекция 2: Графический конвейер, шейдеры, аффинные преобразования

2021

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении
- Превращение векторных данных в растровые

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении
- Превращение векторных данных в растровые
- За нас её делает OpenGL!

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении
- Превращение векторных данных в растровые
- За нас её делает OpenGL!
- Некоторые современные графические движки GPU (Unreal 5 Nanite) делают растеризацию сами с помощью compute шейдеров

Растеризация: точка

- Как растеризовать точку (x, y)?

Растеризация: точка

- Как растеризовать точку (x, y)?

```
set_pixel(round(x), round(y), color);
```

Растеризация: точка

- Как растеризовать точку (x, y)?

  ```
  set_pixel(round(x), round(y), color);
  ```
- В OpenGL: `GL_POINTS`

Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \ldots (x_2, y_2)$?

Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \dots (x_2, y_2)$?
- Алгоритм Брезенхэма

Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \dots (x_2, y_2)$?
- Алгоритм Брезенхэма
- Есть вариация алгоритма для рисования окружностей

Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \ldots (x_2, y_2)$?
- Алгоритм Брезенхэма
- Есть вариация алгоритма для рисования окружностей
- В OpenGL: `GL_LINES`

Растеризация: прямоугольник

- Как растеризовать прямоугольник $[x_1 \ldots x_2] \times [y_1 \ldots y_2]$?

Растеризация: прямоугольник

- Как растеризовать прямоугольник $[x_1 \dots x_2] \times [y_1 \dots y_2]$?

```
for (int x = round(x_1); x <= round(x_2); ++x) {
    for (int y = round(y_1); y <= round(y_2); ++y) {
        set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в треугольник

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в треугольник

```
int xmin = min(round(x_1), round(x_2), round(x_3));
int xmax = max(round(x_1), round(x_2), round(x_3));

int ymin = min(round(y_1), round(y_2), round(y_3));
int ymax = max(round(y_1), round(y_2), round(y_3));

for (int x = xmin; x <= xmax; ++x) {
    for (int y = ymin; y <= ymax; ++y) {
        if (inside_triangle(x, y, ...))
            set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в треугольник

```
int xmin = min(round(x_1), round(x_2), round(x_3));
int xmax = max(round(x_1), round(x_2), round(x_3));

int ymin = min(round(y_1), round(y_2), round(y_3));
int ymax = max(round(y_1), round(y_2), round(y_3));

for (int x = xmin; x <= xmax; ++x) {
    for (int y = ymin; y <= ymax; ++y) {
        if (inside_triangle(x, y, ...))
            set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

- В OpenGL: `GL_TRIANGLES`

Растеризация: круг

- Как растеризовать круг с центром (x_0, y_0) и радиусом R?

Растеризация: круг

- Как растеризовать круг с центром (x_0, y_0) и радиусом R?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в круг

Растеризация: круг

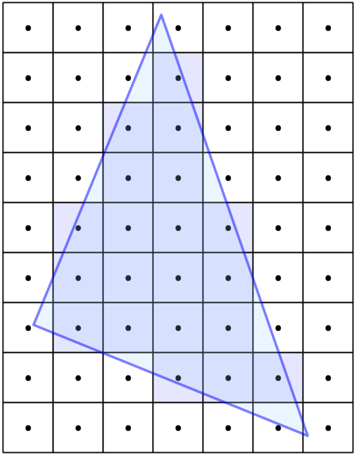
- Как растеризовать круг с центром (x_0, y_0) и радиусом R?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в круг

```
int xmin = round(x_0 - R);
int xmax = round(x_0 + R);

int ymin = round(y_0 - R);
int ymax = round(y_0 + R);

for (int x = xmin; x <= xmax; ++x) {
    for (int y = ymin; y <= ymax; ++y) {
        if (sqr(x - x_0) + sqr(y - y_0) <= sqr(R))
            set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

Растеризация: OpenGL

- Пиксель растеризуется, если центр пикселя содержится в треугольнике

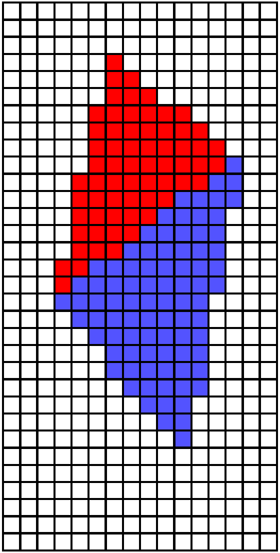
Растеризация: OpenGL



Растеризация: OpenGL

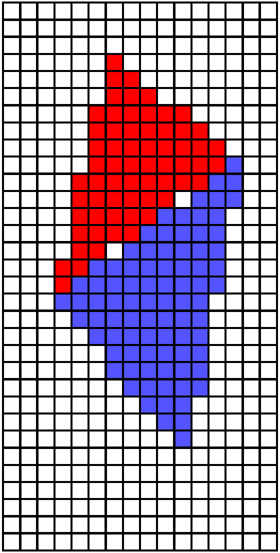
- Пиксель растеризуется, если центр пикселя содержится в треугольнике
- Если у двух треугольников есть общее ребро (и они не пересекаются внутренностями), то
  - Каждый пиксель будет принадлежать ровно одному треугольнику, т.е. не будет наложения
  - Ни один пиксель не будет пропущен, т.е. не будет "дырок"

Растеризация: OpenGL



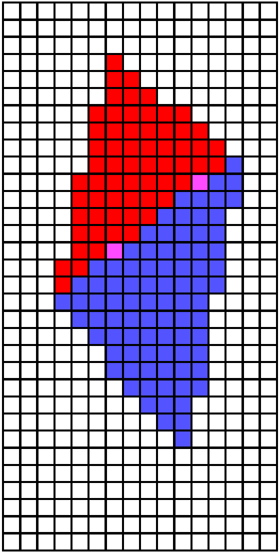
Растеризация: OpenGL

Не будет "дырок":



Растеризация: OpenGL

Не будет наложения пикселей:



Растеризация: OpenGL

- Пиксель растеризуется, если центр пикселя содержится в треугольнике
- Если у двух треугольников есть общее ребро (и они не пересекаются внутренностями), то
  - Каждый пиксель будет принадлежать ровно одному треугольнику, т.е. не будет наложения
  - Ни один пиксель не будет пропущен, т.е. не будет "дырок"
- Подробнее: en.wikibooks.org/wiki/GLSL_Programming/Rasterization

Растеризация: OpenGL

- В современном OpenGL есть только три примитива для растеризации:

Растеризация: OpenGL

- В современном OpenGL есть только три примитива для растеризации:
- Точки: `GL_POINTS`

Растеризация: OpenGL

- В современном OpenGL есть только три примитива для растеризации:
- Точки: `GL_POINTS`
- Линии: `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`, `GL_LINES`

Растеризация: OpenGL

- В современном OpenGL есть только три примитива для растеризации:
- Точки: GL_POINTS
- Линии: GL_LINE_STRIP, GL_LINE_LOOP, GL_LINES
- Треугольники: GL_TRIANGLE_STRIP, GL_TRIANGLE_FAN, GL_TRIANGLES

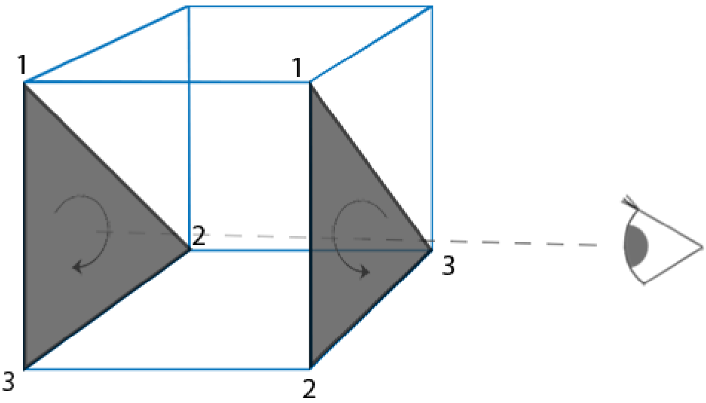
Растеризация: OpenGL

- В современном OpenGL есть только три примитива для растеризации:
- Точки: GL_POINTS
- Линии: GL_LINE_STRIP, GL_LINE_LOOP, GL_LINES
- Треугольники: GL_TRIANGLE_STRIP, GL_TRIANGLE_FAN, GL_TRIANGLES
- Для геометрических шейдеров: GL_LINE_STRIP_ADJACENCY, GL_LINES_ADJACENCY, GL_TRIANGLE_STRIP_ADJACENCY, GL_TRIANGLES_ADJACENCY

Back-face culling

- По умолчанию в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода **по часовой стрелке**, не рисуются

Back-face culling



Back-face culling

- По умолчанию в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода **по часовой стрелке**, не рисуются
  - Чтобы не рисовать треугольники, которые всё равно будут скрыты другими треугольниками спереди

Back-face culling

- По умолчанию в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода **по часовой стрелке**, не рисуются
  - Чтобы не рисовать треугольники, которые всё равно будут скрыты другими треугольниками спереди
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`

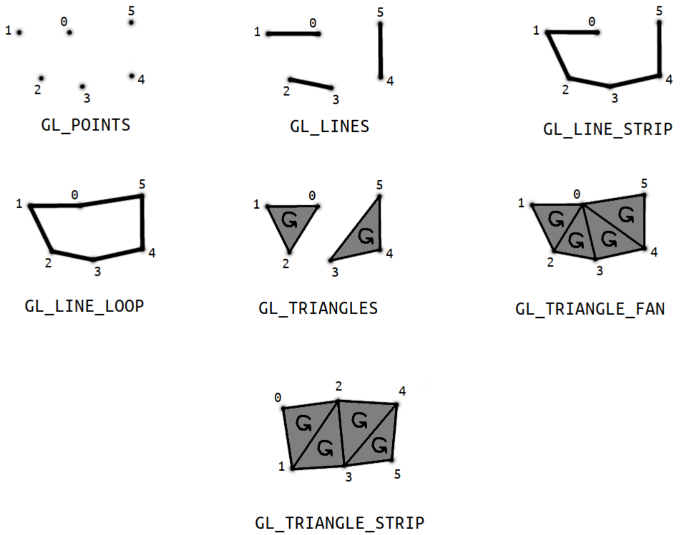
Back-face culling

- По умолчанию в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода **по часовой стрелке**, не рисуются
  - Чтобы не рисовать треугольники, которые всё равно будут скрыты другими треугольниками спереди
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`
- Настроить, какие треугольники будут скрываться: `glCullFace(GL_BACK)`, `glCullFace(GL_FRONT)`, `glCullFace(GL_FRONT_AND_BACK)`

Back-face culling

- По умолчанию в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода **по часовой стрелке**, не рисуются
  - Чтобы не рисовать треугольники, которые всё равно будут скрыты другими треугольниками спереди
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`
- Настроить, какие треугольники будут скрываться: `glCullFace(GL_BACK)`, `glCullFace(GL_FRONT)`, `glCullFace(GL_FRONT_AND_BACK)`
- Настроить, какие треугольники считаются `FRONT`, а какие - `BACK`: `glFrontFace(GL_CCW)`, `glFrontFace(GL_CW)`

Группировка вершин по примитивам (primitive assembly)



Графический конвейер (graphics pipeline)

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
  - Должен записать `vec4 gl_Position`

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
  - Должен записать `vec4 gl_Position`
- Сборка примитивов (primitive assembly)

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
  - Должен записать `vec4 gl_Position`
- Сборка примитивов (primitive assembly)
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
  - $X : [-1, 1] \to [0, width]$
  - $Y : [-1, 1] \to [height, 0]$ (-1 внизу, 1 вверху)
  - `glViewport(0, 0, width, height)`

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
  - Должен записать `vec4 gl_Position`
- Сборка примитивов (primitive assembly)
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
  - $X : [-1, 1] \to [0, width]$
  - $Y : [-1, 1] \to [height, 0]$ (-1 внизу, 1 вверху)
  - `glViewport(0, 0, width, height)`
- Back-face culling

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
  - Должен записать `vec4 gl_Position`
- Сборка примитивов (primitive assembly)
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
  - $X : [-1, 1] \to [0, width]$
  - $Y : [-1, 1] \to [height, 0]$ (-1 внизу, 1 вверху)
  - `glViewport(0, 0, width, height)`
- Back-face culling
- Растеризация примитивов: примитив превращается в набор пикселей
  - Линейная интерполяция значений, переданных из вершинного шейдера во фрагментный

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Входной поток вершин (vertex stream)
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
  - Должен записать `vec4 gl_Position`
- Сборка примитивов (primitive assembly)
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
  - $X : [-1, 1] \to [0, width]$
  - $Y : [-1, 1] \to [height, 0]$ (-1 внизу, 1 вверху)
  - `glViewport(0, 0, width, height)`
- Back-face culling
- Растеризация примитивов: примитив превращается в набор пикселей
  - Линейная интерполяция значений, переданных из вершинного шейдера во фрагментный
- Пиксельный (фрагментный) шейдер: обрабатывает пиксели по одному

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Мы пропустили много важных частей конвейера
- Будем их по чуть-чуть добавлять в течение курса

Вершинный (vertex) шейдер

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) - свои для каждой вершины

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) - свои для каждой вершины
  - Uniform-переменные - глобальные значения, не меняющиеся в течение одного вызова команды рисования (`glDrawArrays`):
    `uniform float scale`

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) - свои для каждой вершины
  - Uniform-переменные - глобальные значения, не меняющиеся в течение одного вызова команды рисования (`glDrawArrays`):
    `uniform float scale`
- Выходные данные:
  - `vec4 gl_Position`

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) - свои для каждой вершины
  - Uniform-переменные - глобальные значения, не меняющиеся в течение одного вызова команды рисования (`glDrawArrays`):
    `uniform float scale`
- Выходные данные:
  - `vec4 gl_Position`
  - Переменные, интерполированное значение которых попадёт во фрагментный (пиксельный) шейдер: `out vec3 color`

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color`

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color`
  - `gl_FragCoord` - координаты пикселя $(-1 \dots 1)$

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color`
  - `gl_FragCoord` - координаты пикселя $(-1\ldots1)$
  - И много других: khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader/Defined_Inputs

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color`
  - `gl_FragCoord` - координаты пикселя $(-1 \dots 1)$
  - И много других: khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader/Defined_Inputs
- Выходные данные:
  - `layout (location = 0) out vec4 out_color;` - выходной цвет в формате RGBA

Флагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color`
  - `gl_FragCoord` - координаты пикселя $(-1 \dots 1)$
  - И много других: khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader/Defined_Inputs
- Выходные данные:
  - `layout (location = 0) out vec4 out_color;` - выходной цвет в формате RGBA
  - Может быть несколько, об этом поговорим позже

Языки описания шейдеров

- OpenGL - GLSL (GL Shading Language)

Языки описания шейдеров

- OpenGL - GLSL (GL Shading Language)
- DirectX - HLSL (High-Level Shading Language)

Языки описания шейдеров

- OpenGL - GLSL (GL Shading Language)
- DirectX - HLSL (High-Level Shading Language)
- DurectX (до 2012) - Cg (C for Graphics), deprecated

Языки описания шейдеров

- OpenGL - GLSL (GL Shading Language)
- DirectX - HLSL (High-Level Shading Language)
- DurectX (до 2012) - Cg (C for Graphics), deprecated
- en.wikipedia.org/wiki/Shading_language

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Программа должна начинаться с
  `#version <версия> [ <профиль> ]`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Программа должна начинаться с `#version <версия> [ <профиль> ]`
- Программа должна содержать функцию `void main()`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: +, -, *, /, <, ==, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `<`, `==`, ...
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `<`, `==`, …
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `<`, `==`, ...
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, `dot`, `cross`, `length`, `normalize`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `<`, `==`, …
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, `dot`, `cross`, `length`, `normalize`, …
- Можно умножать матрицу на вектор: `matrix * vector`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `<`, `==`, …
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, `dot`, `cross`, `length`, `normalize`, …
- Можно умножать матрицу на вектор: `matrix * vector`
- Можно умножать матрицу на матрицу: `matrix1 * matrix2`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть массивы: `float array[5];`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть массивы: `float array[5];`
  - Инициализация:
    `float array[5] = float[5](0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0);`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть массивы: `float array[5];`
  - Инициализация:
    `float array[5] = float[5](0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0);`
- Константы (известные на момент компиляции):
  `const float PI = 3.141592;`

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
  - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
  - Не может зависеть от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
    - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
    - Не может зависеть от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.
- Функции:

```
vec3 reflect(vec3 v, vec3 n) {
    return v - 2.0 * n * dot(v, n);
}
```

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
  - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
  - Не может зависеть от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.
- Функции:

```
vec3 reflect(vec3 v, vec3 n) {
    return v - 2.0 * n * dot(v, n);
}
```

  - Могут вызывать другие функции

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
    - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
    - Не может зависеть от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.
- Функции:

```
vec3 reflect(vec3 v, vec3 n) {
    return v - 2.0 * n * dot(v, n);
}
```

    - Могут вызывать другие функции
    - Рекурсия запрещена

Полезные ресурсы о шейдерах

- Туториал: learnopengl.com/Getting-started/Shaders
- Туториал: lighthouse3d.com/tutorials/glsl-tutorial

Полезные ресурсы о шейдерах

- Туториал: learnopengl.com/Getting-started/Shaders
- Туториал: lighthouse3d.com/tutorials/glsl-tutorial
- Книжка-учебник с большим количеством примеров сложных шейдеров: The Book of Shaders

Полезные ресурсы о шейдерах

- Туториал: learnopengl.com/Getting-started/Shaders
- Туториал: lighthouse3d.com/tutorials/glsl-tutorial
- Книжка-учебник с большим количеством примеров сложных шейдеров: The Book of Shaders
- Онлайн-редактор шейдеров: shadertoy.com

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Две причины:

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Две причины:
  - Для перспективной проекции (следующая лекция)

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Две причины:
  - Для перспективной проекции (следующая лекция)
  - Для аффинных преобразований

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства - круто: большая теория, эффективные операции

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства - круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства - круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство
  - Где в пространстве точка, соответствующая нулевому вектору?

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства - круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство
  - Где в пространстве точка, соответствующая нулевому вектору?
  - Что такое сумма двух точек?

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства - круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство
  - Где в пространстве точка, соответствующая нулевому вектору?
  - Что такое сумма двух точек?
- Мысль: точки $\neq$ векторы

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор
- Формальнее: аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ - это:

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор
- Формальнее: аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ - это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор
- Формальнее: аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ - это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция "точка + вектор": $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор
- Формальнее: аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ - это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция "точка + вектор": $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$
  - Операция "точка - точка": $\ominus : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор
- Формальнее: аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ - это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция "точка + вектор": $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$
  - Операция "точка - точка": $\ominus : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$
  - Аксиомы, связывающие эти аксиомы с операциями векторного пространства
    $(p \oplus v_1) \oplus v_2 = p \oplus (v_1 + v_2)$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли"нулевой вектор
- Формальнее: аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ - это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция "точка + вектор": $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$
  - Операция "точка - точка": $\ominus : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$
  - Аксиомы, связывающие эти аксиомы с операциями векторного пространства $(p \oplus v_1) \oplus v_2 = p \oplus (v_1 + v_2)$
- Любую точку $p_0 \in \mathbb{A}$ можно принять за начало координат
- Это даёт биекцию $\mathbb{A} \to \mathbb{V}$ по формуле $p \mapsto p - p_0$

Аффинное пространство

- Множество решений уравнения $Lx = 0$ в векторном пространстве - векторное подпространство $\ker L$

Аффинное пространство

- Множество решений уравнения $Lx = 0$ в векторном пространстве - векторное подпространство $\ker L$
- Множество решений уравнения $Lx = y$ в векторном пространстве - **не** векторное подпространство

Аффинное пространство

- Множество решений уравнения $Lx = 0$ в векторном пространстве - векторное подпространство $\ker L$
- Множество решений уравнения $Lx = y$ в векторном пространстве - **не** векторное подпространство
- Множество решений уравнения $Lx = y$ в векторном пространстве - аффинное пространство над $\ker L$

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0)$

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0)$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат не зависит от выбора p_0

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0)$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат не зависит от выбора p_0
- В этом случае $q = \sum \lambda_i p_i$ называется аффинной комбинацией точек p_i с коэффициентами λ_i

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0)$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат не зависит от выбора p_0
- В этом случае $q = \sum \lambda_i p_i$ называется аффинной комбинацией точек p_i с коэффициентами λ_i
- Коэффициенты λ_i называются барицентрическими координатами точки q

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i
- Линейная интерполяция величины f в точке q - значение $\sum \lambda_i f_i$

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i
- Линейная интерполяция величины f в точке q - значение $\sum \lambda_i f_i$
- Ровно это происходит при интерполяции значений, переданных из вершинного шейдера во фрагментный

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек $=$ выпуклая оболочка

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = выпуклая оболочка
- Выпуклая оболочка двух точек - отрезок между этими точками

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = выпуклая оболочка
- Выпуклая оболочка двух точек - отрезок между этими точками
- Выпуклая оболочка трёх точек - треугольник с этими точками в качестве вершин

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек $=$ выпуклая оболочка
- Выпуклая оболочка двух точек - отрезок между этими точками
- Выпуклая оболочка трёх точек - треугольник с этими точками в качестве вершин
- Выпуклая оболочка четырёх точек - тетраэдр с этими точками в качестве вершин

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования - сохраняют линейные комбинации векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования - сохраняют линейные комбинации векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$
- Аффинные преобразования - сохраняют аффинные комбинации точек: $S\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i S p_i$

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования - сохраняют линейные комбинации векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$
- Аффинные преобразования - сохраняют аффинные комбинации точек: $S\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i S p_i$
- При выборе начала координат p_0 преобразование $S : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ можно понимать как преобразование соответствующего векторного пространства $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ по формуле $S(v) = S(p_0 + v) - p_0$

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования - сохраняют линейные комбинации векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$
- Аффинные преобразования - сохраняют аффинные комбинации точек: $S\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i S p_i$
- При выборе начала координат p_0 преобразование $S : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ можно понимать как преобразование соответствующего векторного пространства $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ по формуле $S(v) = S(p_0 + v) - p_0$
- Можно показать, что в таком виде любое аффинное преобразование это линейное преобразование + сдвиг на фиксированный вектор:
  $S(v) = Av + b$ где
  - A - линейное преобразование пространства $\mathbb{V}$
  - b - вектор из пространства $\mathbb{V}$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как пару (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как пару (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как пару (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$
- Композиция преобразований: $(A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2) \cdot v = (A_1, b_1) \cdot (A_2 v + b_2) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = (A_1 A_2)v + (A_1 b_2 + b_1) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1) \cdot v$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как пару (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$
- Композиция преобразований: $(A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2) \cdot v = (A_1, b_1) \cdot (A_2 v + b_2) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = (A_1 A_2)v + (A_1 b_2 + b_1) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1) \cdot v$
- Тождественное преобразование: $(\mathbb{I}, 0)$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как пару (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$
- Композиция преобразований: $(A_1, b_1)\cdot(A_2, b_2)\cdot v = (A_1, b_1)\cdot(A_2 v + b_2) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = (A_1 A_2)v + (A_1 b_2 + b_1) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1) \cdot v$
- Тождественное преобразование: $(\mathbb{I}, 0)$
- Обратное преобразование: $(A, b)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1} b)$

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов
- Векторная часть преобразования: положение 3D-объекта

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов
- Векторная часть преобразования: положение 3D-объекта
- Матричная часть преобразования: вращение и размер объекта

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов
- Векторная часть преобразования: положение 3D-объекта
- Матричная часть преобразования: вращение и размер объекта
- При чём тут четвёртая координата?

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N + 1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить точку размерности N в пространство размерности $N + 1$, добавив 1 в качестве последней координаты

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить точку размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить точку размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках
- Согласуется с аффинными комбинациями

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить точку размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках
- Согласуется с аффинными комбинациями
- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$: $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить точку размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках
- Согласуется с аффинными комбинациями
- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$: $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Можно применять как к точкам, так и к векторам (векторы игнорируют сдвиг на b)

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить вектор размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить точку размерности N в пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках
- Согласуется с аффинными комбинациями
- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1)\times(N+1)$: $\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Можно применять как к точкам, так и к векторам (векторы игнорируют сдвиг на b)
- Композиция преобразований = умножение матриц

Точка в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аффинное преобразование в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & b_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & b_2 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица сдвига на фиксированный вектор

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ p_z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица масштабирования на константу

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sp_x \\ sp_y \\ sp_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sv_x \\ sv_y \\ sv_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица поворота на угол в плоскости XY

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \cos\theta - p_y \sin\theta \\ p_x \sin\theta + p_y \cos\theta \\ p_z 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \cos\theta - v_y \sin\theta \\ v_x \sin\theta + v_y \cos\theta \\ v_z 0 \end{pmatrix}$$

Аффинные преобразования: ссылки

- learnopengl.com/Getting-started/Transformations
- open.gl/transformations
- en.wikipedia.org/wiki/Affine_space
- en.wikipedia.org/wiki/Affine_transformation