Компьютерная графика

Лекция 2: Растеризация, графический конвейер, шейдеры, интерполяция, аффинные преобразования

2023

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении
- Превращение векторных данных в растровые

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении
- Превращение векторных данных в растровые
- За нас её делает OpenGL!

Растеризация

- Растеризация – превращение геометрического примитива (точки, линии, треугольника, прямоугольника, круга, и т.д.) в набор соответствующих ему пикселей на экране/изображении
- Превращение векторных данных в растровые
- За нас её делает OpenGL!
- Некоторые современные графические движки GPU (Unreal 5 Nanite) делают растеризацию сами с помощью compute шейдеров

Растеризация: точка

- Как растеризовать точку (x, y)?

Растеризация: точка

- Как растеризовать точку (x, y)?

```
set_pixel(round(x), round(y), color);
```

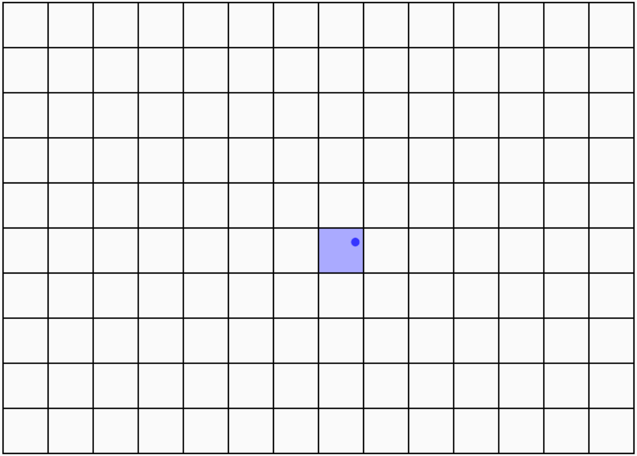
Растеризация: точка

- Как растеризовать точку (x, y)?

```
set_pixel(round(x), round(y), color);
```

- В OpenGL: `GL_POINTS`

Растеризация: точка



Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \dots (x_2, y_2)$?

Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \ldots (x_2, y_2)$?
- Алгоритм Брезенхэма

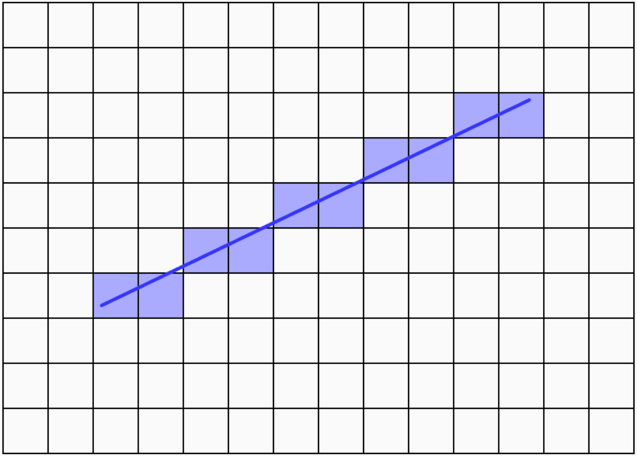
Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \dots (x_2, y_2)$?
- Алгоритм Брезенхэма
- Есть вариация алгоритма для рисования окружностей

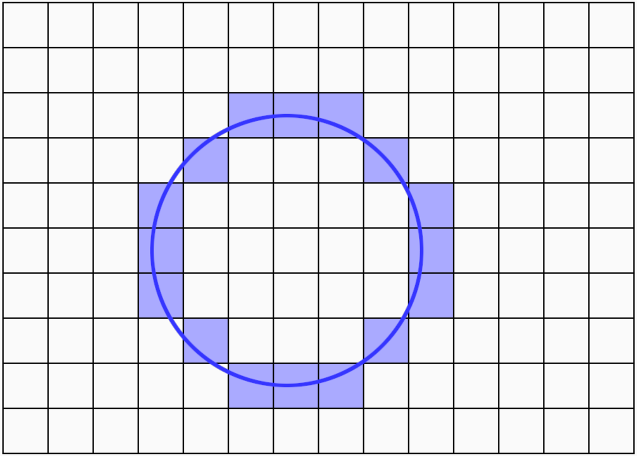
Растеризация: линия

- Как растеризовать линию $(x_1, y_1) \ldots (x_2, y_2)$?
- Алгоритм Брезенхэма
- Есть вариация алгоритма для рисования окружностей
- В OpenGL: `GL_LINES`

Растеризация: линия



Растеризация: окружность



Растеризация: прямоугольник

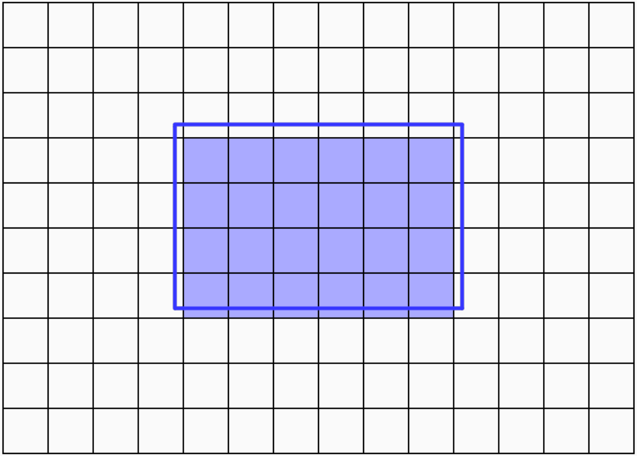
- Как растеризовать прямоугольник $[x_1 \dots x_2] \times [y_1 \dots y_2]$?

Растеризация: прямоугольник

- Как растеризовать прямоугольник $[x_1 \dots x_2] \times [y_1 \dots y_2]$?

```
for (int x = round(x_1); x <= round(x_2); ++x) {
    for (int y = round(y_1); y <= round(y_2); ++y) {
        set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

Растеризация: прямоугольник



Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в треугольник

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в треугольник

```
int xmin = min(round(x_1), round(x_2), round(x_3));
int xmax = max(round(x_1), round(x_2), round(x_3));

int ymin = min(round(y_1), round(y_2), round(y_3));
int ymax = max(round(y_1), round(y_2), round(y_3));

for (int x = xmin; x <= xmax; ++x) {
    for (int y = ymin; y <= ymax; ++y) {
        if (inside_triangle(x, y, ...))
            set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

Растеризация: треугольник

- Как растеризовать треугольник с вершинами $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в треугольник

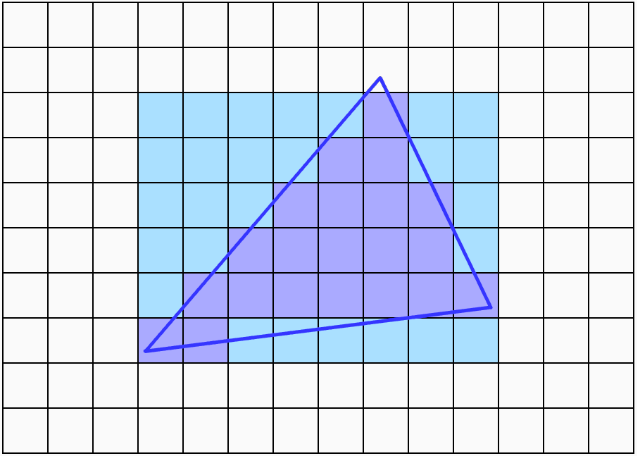
```
int xmin = min(round(x_1), round(x_2), round(x_3));
int xmax = max(round(x_1), round(x_2), round(x_3));

int ymin = min(round(y_1), round(y_2), round(y_3));
int ymax = max(round(y_1), round(y_2), round(y_3));

for (int x = xmin; x <= xmax; ++x) {
    for (int y = ymin; y <= ymax; ++y) {
        if (inside_triangle(x, y, ...))
            set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

- В OpenGL: `GL_TRIANGLES`

Растеризация: треугольник



Растеризация: круг

- Как растеризовать круг с центром (x_0, y_0) и радиусом R?

Растеризация: круг

- Как растеризовать круг с центром (x_0, y_0) и радиусом R?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в круг

Растеризация: круг

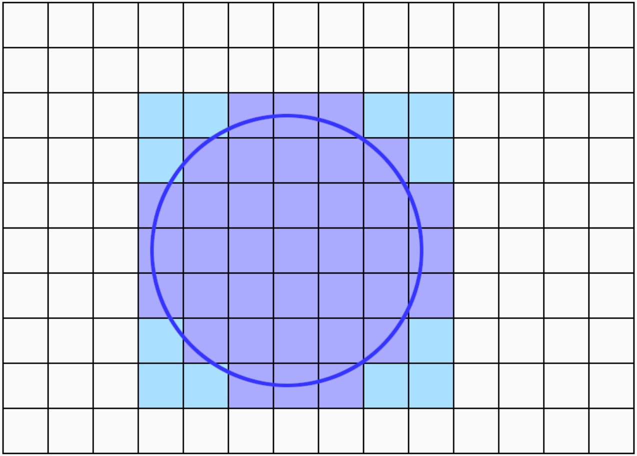
- Как растеризовать круг с центром (x_0, y_0) и радиусом R?
- Растеризуем ограничивающий прямоугольник, проверяя пиксели на вхождение в круг

```
int xmin = round(x_0 - R);
int xmax = round(x_0 + R);

int ymin = round(y_0 - R);
int ymax = round(y_0 + R);

for (int x = xmin; x <= xmax; ++x) {
    for (int y = ymin; y <= ymax; ++y) {
        if (sqr(x - x_0) + sqr(y - y_0) <= sqr(R))
            set_pixel(x, y, color);
    }
}
```

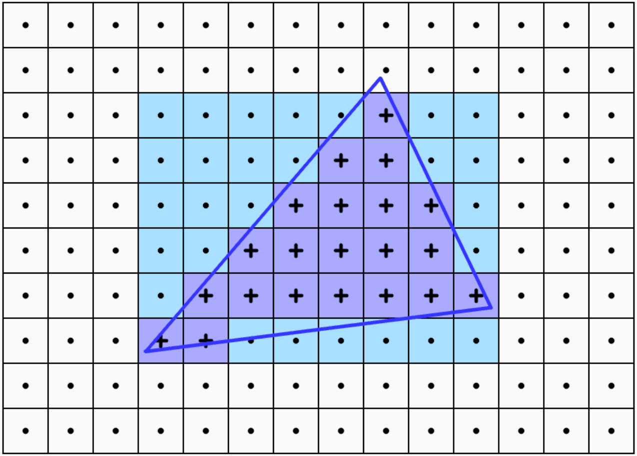
Растеризация: круг



Растеризация в OpenGL

- Пиксель растеризуется, если *центр пикселя* содержится в треугольнике

Растеризация в OpenGL



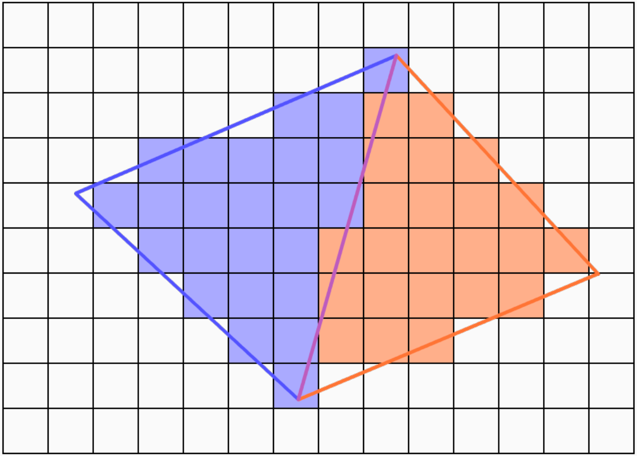
Растеризация в OpenGL

- Пиксель растеризуется, если *центр пикселя* содержится в треугольнике

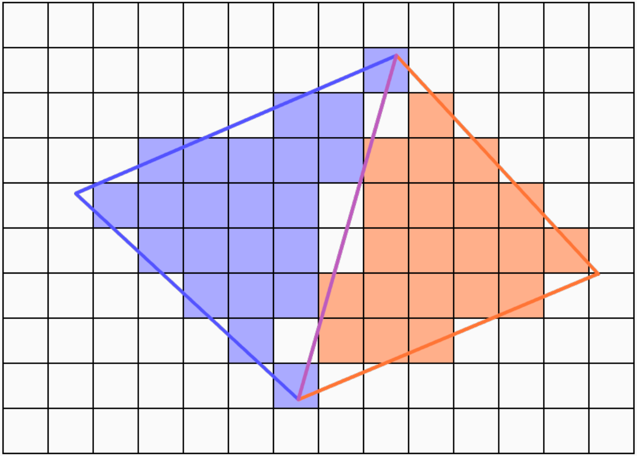
Растеризация в OpenGL

- Пиксель растеризуется, если *центр пикселя* содержится в треугольнике
- Если у двух треугольников есть общее ребро (и они не пересекаются внутренностями), то
  - Каждый пиксель будет принадлежать ровно одному треугольнику, т.е. не будет наложения
  - Ни один пиксель общего ребра не будет пропущен, т.е. не будет “дырок”

Растеризация в OpenGL

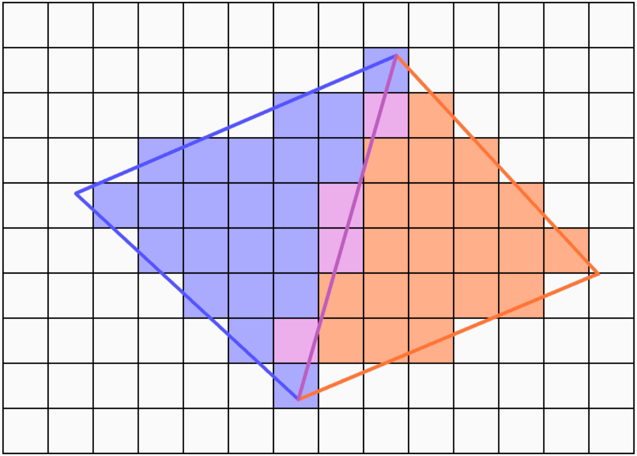


Не будет “дырок”:



Растеризация в OpenGL

Не будет наложения пикселей:



Растеризация в OpenGL

- Пиксель растеризуется, если *центр пикселя* содержится в треугольнике
- Если у двух треугольников есть общее ребро (и они не пересекаются внутренностями), то
  - Каждый пиксель будет принадлежать ровно одному треугольнику, т.е. не будет наложения
  - Ни один пиксель общего ребра не будет пропущен, т.е. не будет “дырок”

Растеризация в OpenGL

- Пиксель растеризуется, если *центр пикселя* содержится в треугольнике
- Если у двух треугольников есть общее ребро (и они не пересекаются внутренностями), то
  - Каждый пиксель будет принадлежать ровно одному треугольнику, т.е. не будет наложения
  - Ни один пиксель общего ребра не будет пропущен, т.е. не будет “дырок”
- Подробнее: `en.wikibooks.org/wiki/GLSL_Programming/Rasterization`

Растеризация в OpenGL

- В современном OpenGL есть только три основных примитива для растеризации:

Растеризация в OpenGL

- В современном OpenGL есть только три основных примитива для растеризации:
    - **Точки**: `GL_POINTS`

Растеризация в OpenGL

- В современном OpenGL есть только три основных примитива для растеризации:
  - **Точки**: `GL_POINTS`
  - **Линии**: `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`

Растеризация в OpenGL

- В современном OpenGL есть только три основных примитива для растеризации:
  - **Точки**: `GL_POINTS`
  - **Линии**: `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`
  - **Треугольники**: `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`

Растеризация в OpenGL

- В современном OpenGL есть только три основных примитива для растеризации:
  - **Точки**: `GL_POINTS`
  - **Линии**: `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`
  - **Треугольники**: `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`
- Есть особые примитивы для геометрических шейдеров: `GL_LINE_STRIP_ADJACENCY`, `GL_LINES_ADJACENCY`, `GL_TRIANGLE_STRIP_ADJACENCY`, `GL_TRIANGLES_ADJACENCY`

Растеризация в OpenGL

- В современном OpenGL есть только три основных примитива для растеризации:
  - **Точки**: `GL_POINTS`
  - **Линии**: `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`
  - **Треугольники**: `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`
- Есть особые примитивы для геометрических шейдеров: `GL_LINE_STRIP_ADJACENCY`, `GL_LINES_ADJACENCY`, `GL_TRIANGLE_STRIP_ADJACENCY`, `GL_TRIANGLES_ADJACENCY`
- Точки и линии обычно используются для дебажного рендеринга или вместе с геометрическими шейдерами, *главный примитив – треугольник*

О треугольниках

- Почему основным примитивом рисования стал *треугольник*?

О треугольниках

- Почему основным примитивом рисования стал *треугольник*?
- Для более сложных геометрических фигур (круг, многоугольник, и т.д.):

О треугольниках

- Почему основным примитивом рисования стал *треугольник*?
- Для более сложных геометрических фигур (круг, многоугольник, и т.д.):
    - Сложнее алгоритм разтеризации

О треугольниках

- Почему основным примитивом рисования стал *треугольник*?
- Для более сложных геометрических фигур (круг, многоугольник, и т.д.):
  - Сложнее алгоритм разтеризации
  - Сложнее задавать и интерполировать атрибуты (накладывать цвет и текстуру, вычислять освещение)

О треугольниках

Плюсы треугольника:

О треугольниках

Плюсы треугольника:

- Образ под действием перспективной проекции – тоже треугольник

О треугольниках

Плюсы треугольника:

- Образ под действием перспективной проекции – тоже треугольник
- Есть единственный разумный способ интерполяции (линейная, с барицентрическими координатами)

О треугольниках

Плюсы треугольника:

- Образ под действием перспективной проекции – тоже треугольник
- Есть единственный разумный способ интерполяции (линейная, с барицентрическими координатами)
- Позволяет рисовать спрайты (прямоугольник – два треугольника)

О треугольниках

Плюсы треугольника:

- Образ под действием перспективной проекции – тоже треугольник
- Есть единственный разумный способ интерполяции (линейная, с барицентрическими координатами)
- Позволяет рисовать спрайты (прямоугольник – два треугольника)
- Позволяет рисовать многоугольники (посредством триангуляции)

О треугольниках

Плюсы треугольника:

- Образ под действием перспективной проекции – тоже треугольник
- Есть единственный разумный способ интерполяции (линейная, с барицентрическими координатами)
- Позволяет рисовать спрайты (прямоугольник – два треугольника)
- Позволяет рисовать многоугольники (посредством триангуляции)
- Позволяет рисовать линии (превращая их в тонкие многоугольники)

О треугольниках

Плюсы треугольника:

- Образ под действием перспективной проекции – тоже треугольник
- Есть единственный разумный способ интерполяции (линейная, с барицентрическими координатами)
- Позволяет рисовать спрайты (прямоугольник – два треугольника)
- Позволяет рисовать многоугольники (посредством триангуляции)
- Позволяет рисовать линии (превращая их в тонкие многоугольники)
- Позволяет рисовать более сложные фигуры (аппроксимируя)

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Последовательность операций на GPU, превращающих входные данные в картинку на экране

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Последовательность операций на GPU, превращающих входные данные в картинку на экране
- Почти не отличается для разных графических API

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
  - Позже мы узнаем, как его задавать

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
    - Позже мы узнаем, как его задавать
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
    - Позже мы узнаем, как его задавать
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
- Сборка примитивов (primitive assembly) из отдельных вершин

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
  - Позже мы узнаем, как его задавать
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
- Сборка примитивов (primitive assembly) из отдельных вершин
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
  - Позже мы узнаем, как его задавать
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
- Сборка примитивов (primitive assembly) из отдельных вершин
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
- Отсечение невидимых граней (back-face culling)

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
    - Позже мы узнаем, как его задавать
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
- Сборка примитивов (primitive assembly) из отдельных вершин
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
- Отсечение невидимых граней (back-face culling)
- Растеризация примитивов

Графический конвейер (graphics pipeline)

Основные части конвейера:

- Входной поток вершин (vertex stream)
    - Позже мы узнаем, как его задавать
- Вершинный шейдер: обрабатывает вершины по одной
- Сборка примитивов (primitive assembly) из отдельных вершин
- Преобразование в оконную систему координат (viewport transform)
- Отсечение невидимых граней (back-face culling)
- Растеризация примитивов
- Пиксельный (фрагментный) шейдер: обрабатывает пиксели по одному

Графический конвейер (graphics pipeline)

- Мы пропустили много важных частей конвейера
- Будем их по чуть-чуть добавлять в течение курса

Вершинный (vertex) шейдер

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
    - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) – свои для каждой вершины

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) – свои для каждой вершины
  - Uniform-переменные – глобальные значения, не меняющиеся в течение одного вызова команды рисования (напр. `glDrawArrays`): `uniform float scale;`

Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) – свои для каждой вершины
  - Uniform-переменные – глобальные значения, не меняющиеся в течение одного вызова команды рисования (напр. `glDrawArrays`): `uniform float scale;`
- Выходные данные:
  - `vec4 gl_Position;`

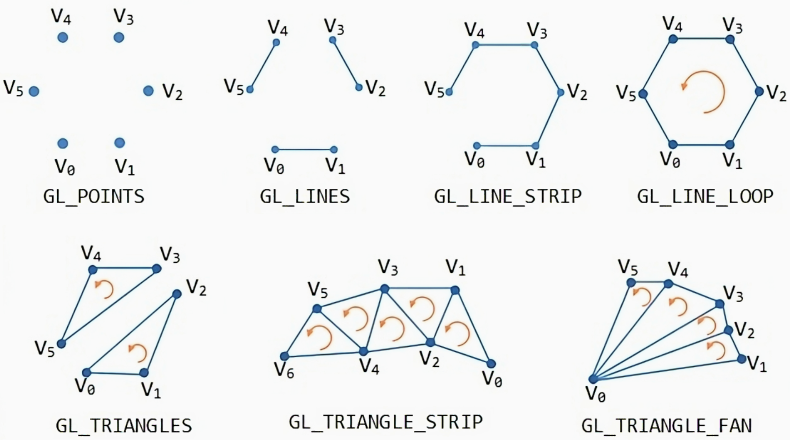
Вершинный (vertex) шейдер

- Входные данные:
  - Аттрибуты вершин (мы позже узнаем, как их задавать) – свои для каждой вершины
  - Uniform-переменные – глобальные значения, не меняющиеся в течение одного вызова команды рисования (напр. `glDrawArrays`): `uniform float scale;`
- Выходные данные:
  - `vec4 gl_Position;`
  - Переменные, интерполированное значение которых попадёт во фрагментный (пиксельный) шейдер: `out vec3 color;`

Сборка примитивов (primitive assembly)

- Превращает набор независимых вершин в *притимивы* растеризации: точки/линии/треугольники
- Правила сборки зависят от выбранного режима: `GL_POINTS`, `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`, `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`

Сборка примитивов (primitive assembly)



Сборка примитивов (primitive assembly)

- Превращает набор независимых вершин в *притимивы* растеризации: точки/линии/треугольники
- Правила сборки зависят от выбранного режима: `GL_POINTS`, `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`, `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`

Сборка примитивов (primitive assembly)

- Превращает набор независимых вершин в *притимивы* растеризации: точки/линии/треугольники
- Правила сборки зависят от выбранного режима: `GL_POINTS`, `GL_LINES`, `GL_LINE_STRIP`, `GL_LINE_LOOP`, `GL_TRIANGLES`, `GL_TRIANGLE_STRIP`, `GL_TRIANGLE_FAN`
- Порядок вершин в `GL_TRIANGLE_STRIP` и `GL_TRIANGLE_FAN` важен для *back-face culling*

Viewport transform

- Преобразование в оконную (пиксельную) систему координат
- $X : [-1, 1] \to [X_{min}, X_{max}]$
- $Y : [-1, 1] \to [Y_{max}, Y_{min}]$ (-1 внизу, 1 вверху)

Viewport transform

- Преобразование в оконную (пиксельную) систему координат
- $X : [-1, 1] \to [X_{min}, X_{max}]$
- $Y : [-1, 1] \to [Y_{max}, Y_{min}]$ (-1 внизу, 1 вверху)
- Настроить: `glViewport(xmin, ymin, width, height)` (в пикселях)

Viewport transform

- Преобразование в оконную (пиксельную) систему координат
- $X : [-1, 1] \to [X_{min}, X_{max}]$
- $Y : [-1, 1] \to [Y_{max}, Y_{min}]$ (-1 внизу, 1 вверху)
- Настроить: `glViewport(xmin, ymin, width, height)` (в пикселях)
- Вне прямоугольника $[X_{min}, X_{max}] \times [Y_{min}, Y_{max}]$ *ничего не нарисуется*: GPU обрежет все примитивы по этим границам

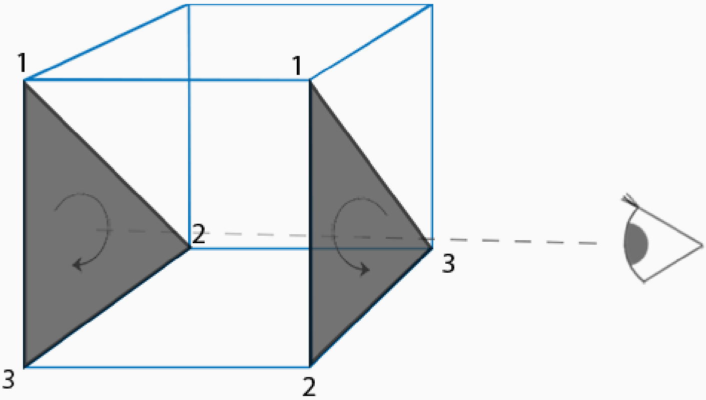
Back-face culling

- *Обычно* в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода *по часовой стрелке*, не рисуются, чтобы не рисовать треугольники, которые будут скрыты другими треугольниками ближе к камере

Back-face culling

- *Обычно* в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода *по часовой стрелке*, **не рисуются**, чтобы не рисовать треугольники, которые будут скрыты другими треугольниками ближе к камере
  - Из-за этого в некоторых играх вы видите объекты насквозь, когда проваливаетесь в них

Back-face culling



Back-face culling

- *Обычно* в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода *по часовой стрелке*, **не рисуются**, чтобы не рисовать треугольники, которые будут скрыты другими треугольниками ближе к камере
  - Из-за этого в некоторых играх вы видите объекты насквозь, когда проваливаетесь в них

Back-face culling

- *Обычно* в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода *по часовой стрелке*, **не рисуются**, чтобы не рисовать треугольники, которые будут скрыты другими треугольниками ближе к камере
    - Из-за этого в некоторых играх вы видите объекты насквозь, когда проваливаетесь в них
- Работает только для сплошных 3D моделей без “дырок”, имеющих внутренность (напр. *manifold mesh*)

Back-face culling

- *Обычно* в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода *по часовой стрелке*, **не рисуются**, чтобы не рисовать треугольники, которые будут скрыты другими треугольниками ближе к камере
  - Из-за этого в некоторых играх вы видите объекты насквозь, когда проваливаетесь в них
- Работает только для сплошных 3D моделей без “дырок”, имеющих внутренность (напр. *manifold mesh*)
- Работает только при договорённости, что все грани описаны *против часовой стрелки*, если смотреть на модель *снаружи*

Back-face culling

- *Обычно* в OpenGL треугольники, вершины которых оказываются на экране в порядке обхода *по часовой стрелке*, **не рисуются**, чтобы не рисовать треугольники, которые будут скрыты другими треугольниками ближе к камере
    - Из-за этого в некоторых играх вы видите объекты насквозь, когда проваливаетесь в них
- Работает только для сплошных 3D моделей без "дырок", имеющих внутренность (напр. *manifold mesh*)
- Работает только при договорённости, что все грани описаны *против часовой стрелки*, если смотреть на модель *снаружи*
- Порядок вершин в `GL_TRIANGLE_STRIP` и `GL_TRIANGLE_FAN` чётко определён, чтобы не сломать back-face culling

Back-face culling

- Выключен по умолчанию

Back-face culling

- Выключен по умолчанию
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`

Back-face culling

- Выключен по умолчанию
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`
- Настроить, какие треугольники будут скрываться: `glCullFace(GL_BACK)`, `glCullFace(GL_FRONT)`, `glCullFace(GL_FRONT_AND_BACK)`

Back-face culling

- Выключен по умолчанию
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`
- Настроить, какие треугольники будут скрываться: `glCullFace(GL_BACK)`, `glCullFace(GL_FRONT)`, `glCullFace(GL_FRONT_AND_BACK)`
- Настроить, какие треугольники считаются `FRONT`, а какие – `BACK`: `glFrontFace(GL_CCW)`, `glFrontFace(GL_CW)`

Back-face culling

- Выключен по умолчанию
- Включить/выключить это поведение: `glEnable(GL_CULL_FACE)` или `glDisable(GL_CULL_FACE)`
- Настроить, какие треугольники будут скрываться: `glCullFace(GL_BACK)`, `glCullFace(GL_FRONT)`, `glCullFace(GL_FRONT_AND_BACK)`
- Настроить, какие треугольники считаются `FRONT`, а какие – `BACK`: `glFrontFace(GL_CCW)`, `glFrontFace(GL_CW)`
- По умолчанию стоит `glFrontFace(GL_CCW)`, лучше всего его *никогда не менять* – большинство форматов и инструментов следуют этой договорённости

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
    - Uniform-переменные

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color;`

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color;`
  - `gl_FragCoord` – координаты центра пикселя, напр. $(42.5, 239.5)$

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color;`
  - `gl_FragCoord` – координаты центра пикселя, напр. $(42.5, 239.5)$
  - И много других: khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader/Defined_Inputs

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color;`
  - `gl_FragCoord` – координаты центра пикселя, напр. $(42.5, 239.5)$
  - И много других: khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader/Defined_Inputs
- Выходные данные:
  - `layout (location = 0) out vec4 out_color;` – выходной цвет в формате RGBA

Фрагментный (пиксельный, fragment) шейдер

- Входные данные:
  - Uniform-переменные
  - Проинтерполированные `out`-переменные вершинного шейдера: `in vec3 color;`
  - `gl_FragCoord` – координаты центра пикселя, напр. $(42.5, 239.5)$
  - И много других: khronos.org/opengl/wiki/Fragment_Shader/Defined_Inputs
- Выходные данные:
  - `layout (location = 0) out vec4 out_color;` – выходной цвет в формате RGBA
  - Может быть несколько, об этом поговорим позже

Языки описания шейдеров

- OpenGL, Vulkan: GLSL (GL Shading Language)

Языки описания шейдеров

- OpenGL, Vulkan: GLSL (GL Shading Language)
- DirectX: HLSL (High-Level Shading Language)

Языки описания шейдеров

- **OpenGL, Vulkan**: **GLSL** (GL Shading Language)
- **DirectX**: **HLSL** (High-Level Shading Language)
- **DirectX** (до 2012): **Cg** (C for Graphics), deprecated

Языки описания шейдеров

- **OpenGL, Vulkan**: GLSL (GL Shading Language)
- **DirectX**: **HLSL** (High-Level Shading Language)
- **DirectX** (до 2012): **Cg** (C for Graphics), deprecated
- **WebGPU**: **WGSL** (WebGpu Shading Language)

Языки описания шейдеров

- **OpenGL, Vulkan**: **GLSL** (GL Shading Language)
- **DirectX**: **HLSL** (High-Level Shading Language)
- **DirectX** (до 2012): **Cg** (C for Graphics), deprecated
- **WebGPU**: **WGSL** (WebGpu Shading Language)
- И другие: `en.wikipedia.org/wiki/Shading_language`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
    - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
    - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Конструкторы векторов:

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Конструкторы векторов:
  - `vec3(x, y, z)`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Конструкторы векторов:
  - `vec3(x, y, z)`
  - `vec3(x) == vec3(x, x, x)`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Конструкторы векторов:
  - `vec3(x, y, z)`
  - `vec3(x) == vec3(x, x, x)`
  - `vec3(vec2(x, y), z) == vec3(x, vec2(y, z))`

Язык описания шейдеров GLSL

- Похож на C
- Типы данных:
  - Скалярные: `bool`, `int`, `uint`, `float`
  - Векторные: `bvec2`, `bvec3`, `bvec4`, `ivec2`, ..., `uvec2`, ..., `vec2`, ...
  - Матричные: `mat2`, `mat3`, `mat4`, `mat2x4`, ...
  - В GLSL 400 или с расширением `GL_ARB_gpu_shader_fp64` есть `double`, `dvec2`, ..., `dmat2`, ...
- Конструкторы векторов:
  - `vec3(x, y, z)`
  - `vec3(x) == vec3(x, x, x)`
  - `vec3(vec2(x, y), z) == vec3(x, vec2(y, z))`
- Подробнее: `khronos.org/opengl/wiki/Data_Type_(GLSL)`

Язык описания шейдеров GLSL

- Программа должна начинаться с
  `#version <версия> [ <профиль> ]`

Язык описания шейдеров GLSL

- Программа должна начинаться с
  `#version <версия> [ <профиль> ]`
- Программа должна содержать функцию `void main()`

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
    - Для векторов и матриц применяются покомпонентно

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, …
    - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
    - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, …
    - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
    - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
    - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, …
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
  - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
  - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
    - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
    - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
    - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Swizzling: `a.xxzy == vec4(a.x, a.x, a.z, a.y)`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
  - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
  - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Swizzling: `a.xxzy == vec4(a.x, a.x, a.z, a.y)`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
  - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
  - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Swizzling: `a.xxzy == vec4(a.x, a.x, a.z, a.y)`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
  - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
  - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Swizzling: `a.xxzy == vec4(a.x, a.x, a.z, a.y)`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
  - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
  - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Swizzling: `a.xxzy == vec4(a.x, a.x, a.z, a.y)`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
- Есть математические функции векторной алгебры: `dot`, `cross`, `length`, `normalize`, ...

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть стандартные операции: `+`, `-`, `*`, `/`, `%`, `<`, `==`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
  - Исключение: умножение двух матриц это умножение в смысле алгебры
  - Исключение: умножение матрицы на вектор это умножение в смысле алгебры
- Доступ к координатам векторов: `a.x = b.y`
- Swizzling: `a.xxzy == vec4(a.x, a.x, a.z, a.y)`
- Доступ к элементам матриц: `m[column][row]`
- Есть полезные математические функции: `pow`, `sin`, `cos`, ...
  - Для векторов и матриц применяются покомпонентно
- Есть математические функции векторной алгебры: `dot`, `cross`, `length`, `normalize`, ...
- Линейная и нелинейная интерполяция: `mix`, `smoothstep`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть массивы: `float array[5];`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть массивы: `float array[5];`
  - Инициализация:
    `float array[5] = float[5](0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0);`

Язык описания шейдеров GLSL

- Есть массивы: `float array[5];`
    - Инициализация:
      `float array[5] = float[5](0.0, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0);`
- Константы (известные на момент компиляции):
  `const float PI = 3.141592;`

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Тернарный if: `condition ? x : y`

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Тернарный if: `condition ? x : y`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
  - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
  - **Не может зависеть** от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Тернарный if: `condition ? x : y`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
    - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
    - **Не может зависеть** от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.
- Функции:

```
vec3 reflect(vec3 v, vec3 n) {
    return v - 2.0 * n * dot(v, n);
}
```

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Тернарный if: `condition ? x : y`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
    - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
    - **Не может зависеть** от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.
- Функции:

```
vec3 reflect(vec3 v, vec3 n) {
    return v - 2.0 * n * dot(v, n);
}
```

    - Могут вызывать другие функции

Язык описания шейдеров GLSL

- Ветвление: `if (condition) { ... } else { ... }`
- Тернарный if: `condition ? x : y`
- Циклы: `for (int i = 0; i < 10; ++i) { ... }`
    - Число итераций цикла должно быть константой, известной на момент компиляции шейдера
    - **Не может зависеть** от uniform-переменных, аттрибутов вершин, и т.д.
- Функции:

```
vec3 reflect(vec3 v, vec3 n) {
    return v - 2.0 * n * dot(v, n);
}
```

- Могут вызывать другие функции
- Рекурсия **запрещена**

Полезные ресурсы о шейдерах

- Туториал: `learnopengl.com/Getting-started/Shaders`
- Туториал: `lighthouse3d.com/tutorials/glsl-tutorial`

Полезные ресурсы о шейдерах

- Туториал: `learnopengl.com/Getting-started/Shaders`
- Туториал: `lighthouse3d.com/tutorials/glsl-tutorial`
- Книжка-учебник с большим количеством примеров сложных шейдеров: `The Book of Shaders`

Полезные ресурсы о шейдерах

- Туториал: `learnopengl.com/Getting-started/Shaders`
- Туториал: `lighthouse3d.com/tutorials/glsl-tutorial`
- Книжка-учебник с большим количеством примеров сложных шейдеров: `The Book of Shaders`
- Онлайн-редактор шейдеров: `shadertoy.com`

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Три причины:

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Три причины:
    - Для некоторых *типов данных*: кватернионы, цвета (rgba)

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Три причины:
    - Для некоторых *типов данных*: кватернионы, цвета (rgba)
    - Для *перспективной проекции* (4ая лекция)

Четырёхмерные векторы?

- GLSL поддерживает операции с матрицами и векторами размерностей вплоть до 4
- `gl_Position` имеет 4 компоненты
- Мы хотим рисовать двухмерные и трёхмерные объекты, зачем четвёртая координата?
- Три причины:
  - Для некоторых *типов данных*: кватернионы, цвета (rgba)
  - Для *перспективной проекции* (4ая лекция)
  - Для *аффинных преобразований*

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства – круто: большая теория, эффективные операции

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства – круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства – круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство
    - Где в пространстве точка, соответствующая нулевому вектору?

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства – круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство
  - Где в пространстве точка, соответствующая нулевому вектору?
  - Что такое сумма двух точек?

Аффинное пространство

- Векторные (линейные) пространства – круто: большая теория, эффективные операции
- Не очень подходит для того, чтобы моделировать пространство
  - Где в пространстве точка, соответствующая нулевому вектору?
  - Что такое сумма двух точек?
- Мысль: точки $\neq$ векторы

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором “забыли” нулевой вектор

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором “забыли” нулевой вектор
- Формальнее, аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ – это:

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором “забыли” нулевой вектор
- Формальнее, аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ – это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором “забыли” нулевой вектор
- Формальнее, аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ – это:
    - Множество точек $\mathbb{A}$
    - Операция “точка + вектор”: $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором “забыли” нулевой вектор
- Формальнее, аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ – это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция “точка + вектор”: $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$
  - Операция “точка - точка”: $\ominus : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором “забыли” нулевой вектор
- Формальнее, аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ – это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция “точка + вектор”: $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$
  - Операция “точка - точка”: $\ominus : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$
  - Аксиомы, связывающие их с операциями векторного пространства, например $(p \oplus v_1) \oplus v_2 = p \oplus (v_1 + v_2)$

Аффинное пространство

- Аффинное пространство: векторное пространство, в котором "забыли" нулевой вектор
- Формальнее, аффинное пространство $\mathbb{A}$ над векторным пространством $\mathbb{V}$ – это:
  - Множество точек $\mathbb{A}$
  - Операция "точка + вектор": $\oplus : \mathbb{A} \times \mathbb{V} \to \mathbb{A}$
  - Операция "точка - точка": $\ominus : \mathbb{A} \times \mathbb{A} \to \mathbb{V}$
  - Аксиомы, связывающие их с операциями векторного пространства, например $(p \oplus v_1) \oplus v_2 = p \oplus (v_1 + v_2)$
- Любую точку $p_0 \in \mathbb{A}$ можно принять за начало координат
- Это даёт биекцию $\mathbb{A} \to \mathbb{V}$ по формуле $p \mapsto p - p_0$

Аффинное пространство

- Множество решений уравнения $Lx = 0$ в векторном пространстве – *векторное подпространство* $\ker L$

Аффинное пространство

- Множество решений уравнения $Lx = 0$ в векторном пространстве – *векторное подпространство* $\ker L$
- Множество решений уравнения $Lx = y$ в векторном пространстве – **не** векторное подпространство

Аффинное пространство

- Множество решений уравнения $Lx = 0$ в векторном пространстве – *векторное подпространство* $\ker L$
- Множество решений уравнения $Lx = y$ в векторном пространстве – **не** векторное подпространство
- Множество решений уравнения $Lx = y$ в векторном пространстве – *аффинное пространство* над $\ker L$

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{A}$

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{A}$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат (точка) не зависит от выбора p_0

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{A}$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат (точка) не зависит от выбора p_0
- В этом случае $q = \sum \lambda_i p_i$ называется аффинной комбинацией точек p_i с коэффициентами λ_i

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{A}$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат (точка) не зависит от выбора p_0
- В этом случае $q = \sum \lambda_i p_i$ называется аффинной комбинацией точек p_i с коэффициентами λ_i
- Коэффициенты λ_i называются барицентрическими координатами точки q

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \dots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \dots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{A}$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат (точка) не зависит от выбора p_0
- В этом случае $q = \sum \lambda_i p_i$ называется аффинной комбинацией точек p_i с коэффициентами λ_i
- Коэффициенты λ_i называются барицентрическими координатами точки q
- Поиск λ_i по известным q и p_i сводится к решению линейной системы уравнений (квадратная только если $N = D + 1$, где D – размерность пространства)

Аффинные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = p_0 + \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{A}$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 1$, то результат (точка) не зависит от выбора p_0
- В этом случае $q = \sum \lambda_i p_i$ называется аффинной комбинацией точек p_i с коэффициентами λ_i
- Коэффициенты λ_i называются барицентрическими координатами точки q
- Поиск λ_i по известным q и p_i сводится к решению линейной системы уравнений (квадратная только если $N = D + 1$, где D – размерность пространства)
- Аффинная комбинация пустого множества точек не определена

Аффинные комбинации: пример

Аффинные комбинации: пример

$\lambda_1 = 1$
$\lambda_2 = 0$

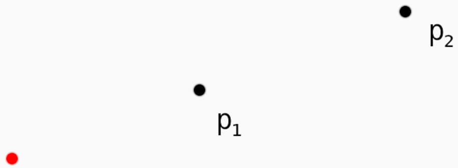
Аффинные комбинации: пример

$\lambda_1 = 0$
$\lambda_2 = 1$

$\lambda_1 = 0.5$
$\lambda_2 = 0.5$

Аффинные комбинации: пример

$\lambda_1 = 2$
$\lambda_2 = -1$



Векторнозначные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$

Векторнозначные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{V}$

Векторнозначные комбинации

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$ и набор коэффициентов $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$
- Выберем начало координат p_0 и определим $\sum \lambda_i p_i = \sum \lambda_i (p_i - p_0) \in \mathbb{V}$
- Теорема: если $\sum \lambda_i = 0$, то результат (вектор) не зависит от выбора p_0

Аффинная оболочка

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$

Аффинная оболочка

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$
- Их *аффинная оболочка* – множество всех возможных аффинных комбинаций, т.е. множество $\sum \lambda_i p_i$ для всех возможных λ_i таких, что $\sum \lambda_i = 1$

Аффинная оболочка

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$
- Их *аффинная оболочка* – множество всех возможных аффинных комбинаций, т.е. множество $\sum \lambda_i p_i$ для всех возможных λ_i таких, что $\sum \lambda_i = 1$
- Аффинная оболочка точки – сама *точка*

Аффинная оболочка

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$
- Их *аффинная оболочка* – множество всех возможных аффинных комбинаций, т.е. множество $\sum \lambda_i p_i$ для всех возможных λ_i таких, что $\sum \lambda_i = 1$
- Аффинная оболочка точки – сама *точка*
- Аффинная оболочка двух точек – содержащая их *прямая*

Аффинная оболочка

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$
- Их *аффинная оболочка* – множество всех возможных аффинных комбинаций, т.е. множество $\sum \lambda_i p_i$ для всех возможных λ_i таких, что $\sum \lambda_i = 1$
- Аффинная оболочка точки – сама *точка*
- Аффинная оболочка двух точек – содержащая их *прямая*
- Аффинная оболочка трёх точек – содержащая их *плоскость*

Аффинная оболочка

- Пусть есть набор точек $p_1, \ldots, p_N$
- Их *аффинная оболочка* – множество всех возможных аффинных комбинаций, т.е. множество $\sum \lambda_i p_i$ для всех возможных λ_i таких, что $\sum \lambda_i = 1$
- Аффинная оболочка точки – сама *точка*
- Аффинная оболочка двух точек – содержащая их *прямая*
- Аффинная оболочка трёх точек – содержащая их *плоскость*
- И т.д.

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i
- Линейная интерполяция величины f в точке q – значение $\sum \lambda_i f_i$

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i
- Линейная интерполяция величины f в точке q – значение $\sum \lambda_i f_i$
- Для этого нужно вычислять λ_i по известным p_i и q, что сводится к системе линейных уравнений

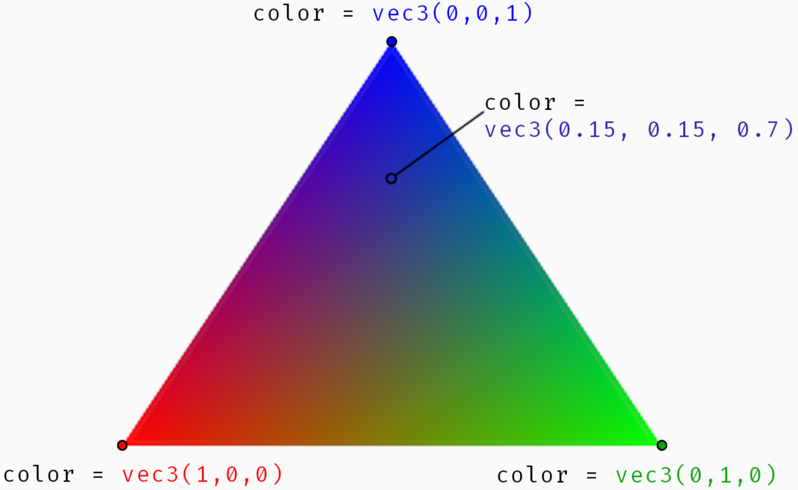
Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i
- Линейная интерполяция величины f в точке q – значение $\sum \lambda_i f_i$
- Для этого нужно вычислять λ_i по известным p_i и q, что сводится к системе линейных уравнений
- **Ровно это** происходит при интерполяции значений, переданных из вершинного шейдера во фрагментный

Линейная интерполяция

- Линейная интерполяция = интерполяция, использующая барицентрические координаты как коэффициенты
- Пусть есть точки p_i и точка $q = \sum \lambda_i p_i$
- Пусть в точках p_i задано значение некоторой величины f_i
- Линейная интерполяция величины f в точке q – значение $\sum \lambda_i f_i$
- Для этого нужно вычислять λ_i по известным p_i и q, что сводится к системе линейных уравнений
- **Ровно это** происходит при интерполяции значений, переданных из вершинного шейдера во фрагментный (с точностью до перспективной проекции, о чём мы поговорим позже)

Линейная интерполяция цветов



Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
    - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
  - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = *выпуклая оболочка*

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
  - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = *выпуклая оболочка*
- Выпуклая оболочка точки – сама *точка*

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
    - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = *выпуклая оболочка*
- Выпуклая оболочка точки – сама *точка*
- Выпуклая оболочка двух точек – *отрезок* между этими точками

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
  - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = *выпуклая оболочка*
- Выпуклая оболочка точки – сама *точка*
- Выпуклая оболочка двух точек – *отрезок* между этими точками
- Выпуклая оболочка трёх точек – *треугольник* с этими точками в качестве вершин

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
  - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = *выпуклая оболочка*
- Выпуклая оболочка точки – сама *точка*
- Выпуклая оболочка двух точек – *отрезок* между этими точками
- Выпуклая оболочка трёх точек – *треугольник* с этими точками в качестве вершин
- Выпуклая оболочка четырёх точек – *тетраэдр* с этими точками в качестве вершин

Выпуклые оболочки

- Выпуклая комбинация: аффинная комбинация, в которой все коэффициенты неотрицательны $\lambda_i \geq 0$
  - Вместе с $\sum \lambda_i = 1$ это означает, что $\lambda_i \in [0, 1]$
- Множество всех выпуклых комбинаций набора точек = *выпуклая оболочка*
- Выпуклая оболочка точки – сама *точка*
- Выпуклая оболочка двух точек – *отрезок* между этими точками
- Выпуклая оболочка трёх точек – *треугольник* с этими точками в качестве вершин
- Выпуклая оболочка четырёх точек – *тетраэдр* с этими точками в качестве вершин
- И т.д.

Выпуклые оболочки

- При растеризации центры пикселей попадают внутрь треугольника

Выпуклые оболочки

- При растеризации центры пикселей попадают внутрь треугольника
- $\Rightarrow$ Пиксели лежат в *выпуклой оболочке* исходных вершин

Выпуклые оболочки

- При растеризации центры пикселей попадают внутрь треугольника
- $\Rightarrow$ Пиксели лежат в *выпуклой оболочке* исходных вершин
- $\Rightarrow$ Коэффициенты интерполяции всегда в диапазоне $\lambda_i \in [0, 1]$

Выпуклые оболочки

- При растеризации центры пикселей попадают внутрь треугольника
- $\Rightarrow$ Пиксели лежат в *выпуклой оболочке* исходных вершин
- $\Rightarrow$ Коэффициенты интерполяции всегда в диапазоне $\lambda_i \in [0, 1]$
- $\Rightarrow$ Проинтерполированные значения лежат в выпуклой оболочке значений в вершинах
  - Если `out`-значения величины в вершинах были 1.5, 0.3 и 5.7, то `in`-значения в пикселях будут в диапазоне $[0.3, 5.7]$ *(с точностью до floating-point ошибок)*

Выпуклые оболочки

- При растеризации центры пикселей попадают внутрь треугольника
- $\Rightarrow$ Пиксели лежат в *выпуклой оболочке* исходных вершин
- $\Rightarrow$ Коэффициенты интерполяции всегда в диапазоне $\lambda_i \in [0, 1]$
- $\Rightarrow$ Проинтерполированные значения лежат в выпуклой оболочке значений в вершинах
    - Если `out`-значения величины в вершинах были 1.5, 0.3 и 5.7, то `in`-значения в пикселях будут в диапазоне $[0.3, 5.7]$ *(с точностью до floating-point ошибок)*
- N.B. Это может нарушаться при *мультисэмплинге*, о котором мы поговорим позднее

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования – сохраняют *линейные комбинации* векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования – сохраняют *линейные комбинации* векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$
- Аффинные преобразования – сохраняют *аффинные комбинации* точек: $S\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i S p_i$

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования – сохраняют *линейные комбинации* векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$
- Аффинные преобразования – сохраняют *аффинные комбинации* точек: $S\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i S p_i$
- Если выбрано начало координат p_0, преобразование $S : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ можно понимать как преобразование соответствующего векторного пространства $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ по формуле $S(v) = S(p_0 + v) - p_0$

Аффинные преобразования

- Линейные преобразования – сохраняют *линейные комбинации* векторов: $S\left(\sum \lambda_i v_i\right) = \sum \lambda_i S v_i$
- Аффинные преобразования – сохраняют *аффинные комбинации* точек: $S\left(\sum \lambda_i p_i\right) = \sum \lambda_i S p_i$
- Если выбрано начало координат p_0, преобразование $S : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ можно понимать как преобразование соответствующего векторного пространства $S : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ по формуле $S(v) = S(p_0 + v) - p_0$
- Можно показать, что в таком виде любое аффинное преобразование это линейное преобразование + сдвиг на фиксированный вектор:
  $S(v) = Av + b$ где
    - A – линейное преобразование пространства $\mathbb{V}$
    - b – вектор из пространства $\mathbb{V}$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как *пару* (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как *пару* (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как *пару* (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$
- Композиция преобразований: $(A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2) \cdot v = (A_1, b_1) \cdot (A_2 v + b_2) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = (A_1 A_2)v + (A_1 b_2 + b_1) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1) \cdot v$

Аффинные преобразования

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как *пару* (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$
- Композиция преобразований: $(A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2) \cdot v = (A_1, b_1) \cdot (A_2 v + b_2) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = (A_1 A_2)v + (A_1 b_2 + b_1) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1) \cdot v$
- Тождественное преобразование: $(\mathbb{I}, 0)$

- В коде аффинное преобразование пространства размерности N можно представлять как *пару* (A, b) из матрицы $N \times N$ и вектора размерности N
- Пара (A, b) действует на точку/вектор v по формуле $(A, b) \cdot v = Av + b$
- Композиция преобразований: $(A_1, b_1) \cdot (A_2, b_2) \cdot v = (A_1, b_1) \cdot (A_2 v + b_2) = A_1(A_2 v + b_2) + b_1 = (A_1 A_2)v + (A_1 b_2 + b_1) = (A_1 A_2, A_1 b_2 + b_1) \cdot v$
- Тождественное преобразование: $(\mathbb{I}, 0)$
- Обратное преобразование: $(A, b)^{-1} = (A^{-1}, -A^{-1} b)$

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов
- Векторная часть преобразования: положение 3D-объекта

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов
- Векторная часть преобразования: положение 3D-объекта
- Матричная часть преобразования: вращение и размер объекта

Аффинные преобразования

- Повсеместно используются для задания положения, ориентации и размера объектов
- Векторная часть преобразования: положение 3D-объекта
- Матричная часть преобразования: вращение и размер объекта
- При чём тут четвёртая координата?

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить *вектор* размерности N в векторное пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить *вектор* размерности N в векторное пространство размерности $N + 1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить *точку* размерности N в векторное пространство размерности $N + 1$, добавив 1 в качестве последней координаты

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить *вектор* размерности N в векторное пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить *точку* размерности N в векторное пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках

Однородные координаты

- Трюк: можно вложить *вектор* размерности N в векторное пространство размерности $N+1$, добавив 0 в качестве последней координаты
- Трюк: можно вложить *точку* размерности N в векторное пространство размерности $N+1$, добавив 1 в качестве последней координаты
- Согласуется с операциями на векторах и точках
- Согласуется с аффинными комбинациями

Однородные координаты

- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$:

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Однородные координаты

- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$:
$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Можно применять как к точкам, так и к векторам (векторы игнорируют сдвиг на b)

Однородные координаты

- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$:
$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Можно применять как к точкам, так и к векторам (векторы игнорируют сдвиг на b)
- Композиция преобразований = умножение матриц

Однородные координаты

- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$:
$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Можно применять как к точкам, так и к векторам (векторы игнорируют сдвиг на b)
- Композиция преобразований = умножение матриц
- $\Rightarrow$ Позволяет удобно комбинировать преобразования (напр. масштабирование + сдвиг + поворот + другой сдвиг)

Однородные координаты

- Позволяет представить аффинное преобразование N-мерного пространства как матрицу $(N+1) \times (N+1)$:
$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Можно применять как к точкам, так и к векторам (векторы игнорируют сдвиг на b)
- Композиция преобразований = умножение матриц
- $\Rightarrow$ Позволяет удобно комбинировать преобразования (напр. масштабирование + сдвиг + поворот + другой сдвиг)
- $\Rightarrow$ Позволяет собрать положение и ориентацию камеры и её проекцию в одну матрицу (обсудим на 4ой лекции)

Точка в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Вектор в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аффинное преобразование в однородных координатах

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & b_1 \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & b_2 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица сдвига на фиксированный вектор

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x + t_x \\ p_y + t_y \\ p_z + t_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица изотропного масштабирования

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sp_x \\ sp_y \\ sp_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sv_x \\ sv_y \\ sv_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Матрица поворота на угол θ в плоскости XY

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x\cos\theta - p_y\sin\theta \\ p_x\sin\theta + p_y\cos\theta \\ p_z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x\cos\theta - v_y\sin\theta \\ v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \\ v_z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Аффинные преобразования: ссылки

- learnopengl.com/Getting-started/Transformations
- open.gl/transformations
- en.wikipedia.org/wiki/Affine_space
- en.wikipedia.org/wiki/Affine_transformation