

Теория категорий

Никита Лисица

2020

Немного истории

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
 - \Rightarrow Аксиомы Эйленберга-Стиррода

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
 - \Rightarrow Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
 - \Rightarrow Аксиомы Эйленберга-Стиррода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
 - \Rightarrow Аксиомы Эйленберга-Стиррода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории
- 1960е: Ловер — Категорная логика, аксиоматизация категории множеств, топосы

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
 - \Rightarrow Аксиомы Эйленберга-Стиррода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории
- 1960е: Ловер — Категорная логика, аксиоматизация категории множеств, топосы
- 1960е: Хааг, Кастлер — Алгебраическая квантовая теория поля

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
 - \Rightarrow Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории
- 1960е: Ловер — Категорная логика, аксиоматизация категории множеств, топосы
- 1960е: Хааг, Кастлер — Алгебраическая квантовая теория поля
- 1970е и далее: *очень много всего*

Об обобщениях

- Целое число

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}
- Непрерывная функция

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}
- Непрерывная функция \Rightarrow пространство непрерывных функций $C(X)$

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}
- Непрерывная функция \Rightarrow пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}
- Непрерывная функция \Rightarrow пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры \Rightarrow универсальная алгебра (изучение структуры с произвольными операциями и аксиомами)

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}
- Непрерывная функция \Rightarrow пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры \Rightarrow универсальная алгебра (изучение структуры с произвольными операциями и аксиомами)
- Множество* всех колец/полей/пространств/etc \Rightarrow

Об обобщениях

- Целое число \Rightarrow кольцо целых чисел \mathbb{Z}
- Вещественное число \Rightarrow поле вещественных чисел \mathbb{R}
- Непрерывная функция \Rightarrow пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры \Rightarrow универсальная алгебра (изучение структуры с произвольными операциями и аксиомами)
- Множество* всех колец/полей/пространств/etc \Rightarrow категория

Определение

Категория C — это

Категория \mathcal{C} — это

- Набор* объектов $Ob(\mathcal{C})$

Категория \mathcal{C} — это

- Набор* объектов $Ob(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ набор* морфизмов/стрелок $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$

Категория \mathcal{C} — это

- Набор* объектов $Ob(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ набор* морфизмов/стрелок $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- Композиция морфизмов:
 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \Rightarrow g \circ f : Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$

Категория \mathcal{C} — это

- Набор* объектов $Ob(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ набор* морфизмов/стрелок $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- Композиция морфизмов:
 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \Rightarrow g \circ f : Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$
- Композиция ассоциативна: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Определение

Категория \mathcal{C} — это

- Набор* объектов $Ob(\mathcal{C})$
- $\forall X, Y \in Ob(\mathcal{C})$ набор* морфизмов/стрелок $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$
- Композиция морфизмов:
 $f \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y), g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \Rightarrow g \circ f : Hom_{\mathcal{C}}(X, Z)$
- Композиция ассоциативна: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
- Тожественное отображение: $\exists id_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X)$
- $id_X \circ f = f \quad g \circ id_X = g$

Определение

- Нужно отношение равенства на морфизмах
- *Не нужно* отношение равенства на объектах

Определение

- Нужно отношение равенства на морфизмах
- *Не нужно* отношение равенства на объектах
- Вместо равенства для объектов используется изоморфизм

Коммутативные диаграммы

Композиция:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \quad (1)$$

Коммутативные диаграммы

Композиция:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array} \quad (1)$$

Диаграмма *коммутативна*, если композиция вдоль любого пути из одной вершины в другую даёт один и тот же морфизм.

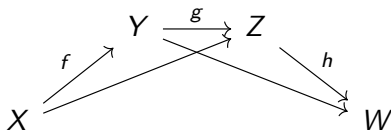
Коммутативные диаграммы

Ассоциативность:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & \xrightarrow{g} & Z \\ & \nearrow f & & & \searrow h \\ X & & & & W \end{array} \quad (2)$$

Коммутативные диаграммы

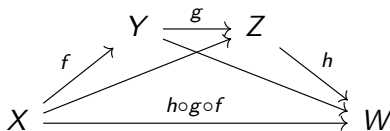
Ассоциативность:



(2)

Коммутативные диаграммы

Ассоциативность:



(2)

Коммутативные диаграммы

Тождественное отображение:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ id_X \downarrow & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (3)$$

Коммутативные диаграммы

Тождественное отображение:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ id_X \downarrow & \searrow f & \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad (3)$$

Морфизмы могут быть обратными друг другу:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \quad (4)$$

Изоморфизм

Морфизмы могут быть обратными друг другу:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ & \searrow id_X & & \nearrow & \end{array} \quad (4)$$

$$f = g^{-1} \quad (5)$$

$$g = f^{-1} \quad (6)$$

Обратимый морфизм — изоморфизм

$$id_X^{-1} = id_X$$

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория **Vect_K** векторных пространств над полем K

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория **Vect** $_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория **Vect** $_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория **Vect** $_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**
- Категория метрических пространств **Met**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория **Vect** $_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**
- Категория метрических пространств **Met**
- Категория графов **Gph**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория **Vect_K** векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**
- Категория метрических пространств **Met**
- Категория графов **Gph**
- *Любые математические объекты одной природы*

Примеры категорий

- Моноид \Leftrightarrow категория с одним объектом
- Группа \Leftrightarrow категория с одним объектом, где все морфизмы обратимы
- Предпорядок \Leftrightarrow категория, где между любыми объектами не более одного морфизма
- Категория путей графа

Примеры категорий

Пустая категория:

Примеры категорий

Категория с одним объектом (и тождественным морфизмом):

$$\bullet \quad (7)$$

Примеры категорий

Категория с двумя объектами:



(8)

Примеры категорий

Категория с двумя объектами и морфизмом между ними:



(9)

Примеры категорий

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \quad (10)$$

Примеры категорий

- Категория высказываний логической системы
 - Морфизмы — доказательства выводимости

Примеры категорий

- Категория высказываний логической системы
 - Морфизмы — доказательства выводимости
- Категория типов системы типизации
 - Морфизмы — термы функций

Примеры категорий

- Категория высказываний логической системы
 - Морфизмы — доказательства выводимости
- Категория типов системы типизации
 - Морфизмы — термы функций
- Категория типов языка Haskell — **Hask**
 - Морфизмы — функции

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде
- Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология — невозможны в современном виде без теории категорий

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде
- Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология — невозможны в современном виде без теории категорий
- Распространение реального применения на другие области — активно развивающаяся сфера

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде
- Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология — невозможны в современном виде без теории категорий
- Распространение реального применения на другие области — активно развивающаяся сфера
- Указывает на правильные абстракции \Rightarrow помогает проектировать интерфейсы

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \quad (11)$$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \quad (11)$$

- **Set:** $\perp = \emptyset$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \quad (11)$$

- **Set:** $\perp = \emptyset$
- **Grp:** $\perp = 1$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \quad (11)$$

- **Set**: $\perp = \emptyset$
- **Grp**: $\perp = 1$
- **Vect_K**: $\perp = \{0\}$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \quad (11)$$

- **Set**: $\perp = \emptyset$
- **Grp**: $\perp = 1$
- **Vect_K**: $\perp = \{0\}$
- **Hask**: $\perp = \text{Data.Void}$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \quad (12)$$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \quad (12)$$

■ **Set:** $\top = \{\bullet\}$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \quad (12)$$

- **Set:** $\top = \{\bullet\}$
- **Grp:** $\top = 1$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \quad (12)$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$
- **Grp**: $\top = 1$
- **Vect**_K: $\top = \{0\}$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \quad (12)$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$
- **Grp**: $\top = 1$
- **Vect_K**: $\top = \{0\}$
- **Hask**: $\top = ()$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} T \quad (12)$$

- **Set**: $T = \{\bullet\}$
- **Grp**: $T = 1$
- **Vect_K**: $T = \{0\}$
- **Hask**: $T = ()$
- Получается «переворачиванием стрелок» из определения начального объекта

Произведение объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\quad} & X \times Y & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \swarrow \scriptstyle \Delta & \uparrow \scriptstyle \exists! & \searrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(13)

Произведение объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X \times Y & \longrightarrow & Y \\ & \nwarrow \scriptstyle \forall & \uparrow \scriptstyle \exists! & \nearrow \scriptstyle \forall & \\ & & \forall A & & \end{array} \quad (13)$$

■ **Set:** $X \times Y$

Произведение объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{\quad} & X \times Y & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & \swarrow \scriptstyle \forall & \uparrow \scriptstyle \exists! & \searrow \scriptstyle \forall & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(13)

- **Set:** $X \times Y$
- **Grp:** $X \times Y$

Произведение объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X \times Y & \longrightarrow & Y \\ & \swarrow \forall & \uparrow \exists! & \searrow \forall & \\ & & \forall A & & \end{array} \quad (13)$$

- **Set:** $X \times Y$
- **Grp:** $X \times Y$
- **Vect_K:** $X \oplus Y$

Произведение объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longleftarrow & X \times Y & \longrightarrow & Y \\ & \nwarrow \forall & \uparrow \exists! & \nearrow \forall & \\ & & \forall A & & \end{array} \quad (13)$$

- **Set:** $X \times Y$
- **Grp:** $X \times Y$
- **Vect_K:** $X \oplus Y$
- **Hask:** (X, Y)

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \scriptstyle \Delta & \downarrow \scriptstyle \exists! & \swarrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(14)

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \scriptstyle \Delta & \downarrow \scriptstyle \exists! & \swarrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array} \quad (14)$$

■ **Set:** $X \coprod Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \scriptstyle \Delta & \downarrow \scriptstyle \exists! & \swarrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(14)

- **Set:** $X \coprod Y$
- **Grp:** $X * Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \scriptstyle \Delta & \downarrow \scriptstyle \exists! & \swarrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(14)

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$
- **Vect_K**: $X \oplus Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \scriptstyle \Delta & \downarrow \scriptstyle \exists! & \swarrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(14)

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$
- **Vect_K**: $X \oplus Y$
- **Hask**: $\text{Either } X \ Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{array}{ccccc} X & \longrightarrow & X + Y & \longleftarrow & Y \\ & \searrow \scriptstyle \Delta & \downarrow \scriptstyle \exists! & \swarrow \scriptstyle \Delta & \\ & & \forall A & & \end{array}$$

(14)

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$
- **Vect_K**: $X \oplus Y$
- **Hask**: $\text{Either } X \ Y$
- Получается «переворачиванием стрелок» из определения произведения

Функтор

Функтор $F : C \rightarrow D$ — это

Функтор

Функтор $F : C \rightarrow D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \rightarrow Ob(D)$

Функтор

Функтор $F : C \rightarrow D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \rightarrow Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
 $F : Hom_C(X, Y) \rightarrow Hom_D(F(X), F(Y))$

Функтор $F : C \rightarrow D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \rightarrow Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
 $F : Hom_C(X, Y) \rightarrow Hom_D(F(X), F(Y))$

Переводит композицию в композицию: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Функтор

Функтор $F : C \rightarrow D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \rightarrow Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
 $F : Hom_C(X, Y) \rightarrow Hom_D(F(X), F(Y))$

Переводит композицию в композицию: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \searrow F(g \circ f) & \downarrow F(g) \\ & & F(Z) \end{array} \quad (15)$$

Функтор

Функтор $F : C \rightarrow D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \rightarrow Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
 $F : Hom_C(X, Y) \rightarrow Hom_D(F(X), F(Y))$

Переводит композицию в композицию: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow g \circ f & \downarrow g \\ & & Z \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \searrow F(g \circ f) & \downarrow F(g) \\ & & F(Z) \end{array} \quad (15)$$

Переводит тождественное в тождественное: $F(id_X) = id_{F(X)}$

Функтор: свойства

Переводит коммутативные диаграммы в коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ W & & Z \\ j \downarrow & \swarrow h & \\ T & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ F(i) \downarrow & & \downarrow F(g) \\ F(W) & & F(Z) \\ F(j) \downarrow & \swarrow F(h) & \\ F(T) & & \end{array} \qquad (16)$$

Функтор: свойства

Переводит коммутативные диаграммы в коммутативные диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ i \downarrow & & \downarrow g \\ W & & Z \\ j \downarrow & \swarrow h & \\ T & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ F(i) \downarrow & & \downarrow F(g) \\ F(W) & & F(Z) \\ F(j) \downarrow & \swarrow F(h) & \\ F(T) & & \end{array} \quad (16)$$

$$h \circ g \circ f = j \circ i \implies F(h) \circ F(g) \circ F(f) = F(j) \circ F(i) \quad (17)$$

Функтор: свойства

Переводит изоморфизм в изоморфизм:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow id_X & \downarrow g \\ & & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \searrow id_{F(X)} & \downarrow F(g) \\ & & F(X) \end{array} \quad (18)$$

Функтор: свойства

Переводит изоморфизм в изоморфизм:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ & \searrow id_X & \downarrow g \\ & & X \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ & \searrow id_{F(X)} & \downarrow F(g) \\ & & F(X) \end{array} \quad (18)$$

$$F(g) = F(f^{-1}) = F(f)^{-1} = F(g) \quad (19)$$

Функтор: примеры

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например **Grp** \rightarrow **Set**

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например **Grp** \rightarrow **Set**
- Если категории — частичные порядки, то функтор — монотонная функция

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например **Grp** \rightarrow **Set**
- Если категории — частичные порядки, то функтор — монотонная функция
- Если категории — моноиды/группы, то функтор — гомоморфизм моноидов/групп

Функтор: примеры

- Тожественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например $\mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$
- Если категории — частичные порядки, то функтор — монотонная функция
- Если категории — моноиды/группы, то функтор — гомоморфизм моноидов/групп
- Функторы в Хаскеле: $\mathbf{Hask} \rightarrow \mathbf{Hask}$
 - Отображение на морфизмах — `fmap`

Изоморфизм категорий

Изоморфизм категорий — обратимый функтор:

$$F : C \rightarrow D \quad (20)$$

$$G : D \rightarrow C \quad (21)$$

$$\forall X \in Ob(C) \quad G(F(X)) = X \quad (22)$$

$$\forall f : X \rightarrow Y \quad G(F(f)) = f \quad (23)$$

Изоморфизм категорий

Изоморфизм категорий — обратимый функтор:

$$F : C \rightarrow D \quad (20)$$

$$G : D \rightarrow C \quad (21)$$

$$\forall X \in Ob(C) \quad G(F(X)) = X \quad (22)$$

$$\forall f : X \rightarrow Y \quad G(F(f)) = f \quad (23)$$

Используется равенство объектов — плохое определение!

Изоморфизм категорий

Изоморфизм категорий — обратимый функтор:

$$F : C \rightarrow D \quad (20)$$

$$G : D \rightarrow C \quad (21)$$

$$\forall X \in Ob(C) \quad G(F(X)) = X \quad (22)$$

$$\forall f : X \rightarrow Y \quad G(F(f)) = f \quad (23)$$

Используется равенство объектов — плохое определение!

Лучше рассматривать *эквивалентность* категорий.

Для этого нужны *естественные преобразования*.

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

$$F, G : C \rightarrow D \quad (24)$$

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

$$F, G : C \rightarrow D \quad (24)$$

$$\eta : F \Rightarrow G \quad (25)$$

$$\eta_X : F(X) \rightarrow G(X) \quad (X \in Ob(C)) \quad (26)$$

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

$$F, G : C \rightarrow D \quad (24)$$

$$\eta : F \Rightarrow G \quad (25)$$

$$\eta_X : F(X) \rightarrow G(X) \quad (X \in \text{Ob}(C)) \quad (26)$$

$$\begin{array}{ccc} X & F(X) \xrightarrow{\eta_X} & G(X) \\ \downarrow f & F(f) \downarrow & \downarrow G(f) \\ Y & F(Y) \xrightarrow{\eta_Y} & G(Y) \end{array} \quad (27)$$

$$\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X \quad (28)$$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \rightarrow R$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \rightarrow R$

$$\begin{array}{ccc} M(n, R) & \xrightarrow{f} & M(n, S) \\ \det \downarrow & & \downarrow \det \\ R & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (29)$$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \rightarrow R$

$$\begin{array}{ccc} M(n, R) & \xrightarrow{f} & M(n, S) \\ \det \downarrow & & \downarrow \det \\ R & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (29)$$

В частности:

- $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$
- $\det(A \bmod p) = \det(A) \bmod p$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \rightarrow R$

$$\begin{array}{ccc} M(n, R) & \xrightarrow{f} & M(n, S) \\ \det \downarrow & & \downarrow \det \\ R & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (29)$$

В частности:

- $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$
- $\det(A \bmod p) = \det(A) \bmod p$

Мораль: естественные преобразования — то, что определяется общей формулой, вне зависимости от параметров

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \rightarrow R$

$$\begin{array}{ccc} M(n, R) & \xrightarrow{f} & M(n, S) \\ \det \downarrow & & \downarrow \det \\ R & \xrightarrow{f} & S \end{array} \quad (29)$$

В частности:

- $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$
- $\det(A \bmod p) = \det(A) \bmod p$

Мораль: естественные преобразования — то, что определяется общей формулой, вне зависимости от параметров

Естественные преобразования в Хаскеле — параметрически полиморфные функции $f: F\ a \rightarrow G\ a$

Естественный изоморфизм

η — естественный изоморфизм, если все η_X — изоморфизмы.

Эквивалентность категорий

C и D эквивалентны, если существуют функторы $F : C \rightarrow D$ и $G : D \rightarrow C$ такие, что

- $G \circ F$ естественно изоморфно Id_C
- $F \circ G$ естественно изоморфно Id_D

Эквивалентность категорий

C и D эквивалентны, если существуют функторы $F : C \rightarrow D$ и $G : D \rightarrow C$ такие, что

- $G \circ F$ естественно изоморфно Id_C
- $F \circ G$ естественно изоморфно Id_D
- Может быть разное количество изоморфных объектов, но суть остаётся
- *Скелет* категории — выбираем по одному объекту из набора изоморфных
- Любая категория эквивалентна скелету

Двойственная (opposite) категория

- $Ob(C^{op}) = Ob(C)$
- $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

Двойственная (opposite) категория

- $Ob(C^{op}) = Ob(C)$
- $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

$$C : \quad X \xrightarrow{f} Y \quad (30)$$

$$C^{op} : \quad X \xleftarrow{f} Y$$

Двойственная (opposite) категория

- $Ob(C^{op}) = Ob(C)$
- $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

$$C : \quad X \xrightarrow{f} Y \quad (30)$$

$$C^{op} : \quad X \xleftarrow{f} Y$$

- Суть — та же, стрелки — перевёрнуты
- Превращает все понятия в двойственные

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец \leftrightarrow категория аффинных схем

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец \leftrightarrow категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^* -алгебр \leftrightarrow категория компактных хаусдорфовых пространств

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец \leftrightarrow категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^* -алгебр \leftrightarrow категория компактных хаусдорфовых пространств
 - \Rightarrow Некоммутативная геометрия

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец \leftrightarrow категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^* -алгебр \leftrightarrow категория компактных хаусдорфовых пространств
 - \Rightarrow Некоммутативная геометрия
- (Теорема Стоуна) Категория булевых алгебр \leftrightarrow категория пространств Стоуна

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец \leftrightarrow категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^* -алгебр \leftrightarrow категория компактных хаусдорфовых пространств
 - \Rightarrow Некоммутативная геометрия
- (Теорема Стоуна) Категория булевых алгебр \leftrightarrow категория пространств Стоуна
- (Двойственность Понтрягина) Категория локально компактных абелевых групп двойственна самой себе

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец \leftrightarrow категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^* -алгебр \leftrightarrow категория компактных хаусдорфовых пространств
 - \Rightarrow Некоммутативная геометрия
- (Теорема Стоуна) Категория булевых алгебр \leftrightarrow категория пространств Стоуна
- (Двойственность Понтрягина) Категория локально компактных абелевых групп двойственна самой себе
 - Обобщение рядов Фурье, дискретных и непрерывных преобразований Фурье

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- $f :: a \rightarrow a$
 - $f\ x = x$

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- $f :: a \rightarrow a$
 - $f\ x = x$
- $f :: a \rightarrow (a, a)$
 - $f\ x = (x, x)$

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- $f :: a \rightarrow a$
 - $f\ x = x$
- $f :: a \rightarrow (a, a)$
 - $f\ x = (x, x)$
- $f :: (a, b) \rightarrow (b, a)$
 - $f\ (x, y) = (y, x)$

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- $f :: a \rightarrow a$
 - $f\ x = x$
- $f :: a \rightarrow (a, a)$
 - $f\ x = (x, x)$
- $f :: (a, b) \rightarrow (b, a)$
 - $f\ (x, y) = (y, x)$
- $f :: a \rightarrow [a]$
 - $f = \text{replicate } n$

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- $f :: a \rightarrow a$
 - $f\ x = x$
- $f :: a \rightarrow (a,a)$
 - $f\ x = (x,x)$
- $f :: (a,b) \rightarrow (b,a)$
 - $f\ (x,y) = (y,x)$
- $f :: a \rightarrow [a]$
 - $f = \text{replicate } n$
- $f :: [a] \rightarrow \text{Int}$
 - $f = g \cdot \text{length}$

Моноидальные категории

Задано *произведение* объектов: функтор $\otimes : C \times C \rightarrow C$ и нейтральный объект $I \otimes X \cong X \otimes I \cong X$

- **Set**, $\otimes = \times$, $I = \{\bullet\}$
- **Set**, $\otimes = \coprod$, $I = \emptyset$
- **Vect**_K, $\otimes = \otimes$, $I = K$
- Категория функторов из категории в саму себя (эндофункторов) **End**(C), $\otimes = \circ$, $I = Id_C$

Моноид в моноидальной категории

Больше структуры — новые определения!

Моноид M — это

- Умножение: $\mu : M \otimes M \rightarrow M$
- Единица: $\eta : I \rightarrow M$

Аксиомы (ассоциативность, нейтральный элемент) выражаются как диаграммы

Моноиды в **Set**, \times , $\{\bullet\}$ — обычные моноиды из алгебры

Монады

Монады — моноиды в категории эндифункторов.

- $\mu : M(M(X)) \rightarrow M(X)$
 - `join :: Monad m => m (m a) -> m a`
- $\eta : X \rightarrow M(X)$
 - `return :: Monad m => a -> m a`

Тройки Клейсли

- Эквивалентны монадам

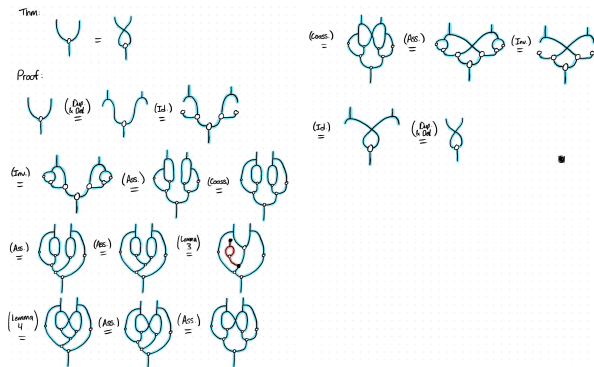
- Вместо μ операция

$$f : X \rightarrow M(Y) \implies f^* : M(X) \rightarrow M(Y)$$

- `flip (>>=) :: Monad m => (a -> m b) -> (m a -> m b)`

Струнные диаграммы

- Пенроуз, Фейнман, ...
- Объекты — струны/нити, морфизмы — блоки



Соответствие Карри-Говарда

Интуиционистская логика	Просто типизированное лямбда-исчисление
Линейная логика	Линейные типы
Интуиционистская логика первого порядка	Зависимые типы

Соответствие Карри-Говарда-Ламбека

Интуиционистская логика	Просто типизированное лямбда-исчисление	Декартово-замкнутые категории
Линейная логика	Линейные типы	Моноидальные категории
Интуиционистская логика первого порядка	Зависимые типы	Локально декартово-замкнутые категории

nLab: computational trinitarianism

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
 - Синтаксически равные термы

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
 - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
 - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
 - Денотационно равные функции

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
 - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
 - Денотационно равные функции — никто не описал денотационную семантику Хаскеля

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
 - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
 - Денотационно равные функции — никто не описал денотационную семантику Хаскеля
- Можно ли жить без равенства морфизмов?

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
 - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
 - Денотационно равные функции — никто не описал денотационную семантику Хаскеля
- Можно ли жить *без* равенства морфизмов? Да, если заменить равенство на *изоморфизм*.

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами
- Аксиомы для морфизмов (ассоциативность, тождественный морфизм) выполняются *с точностью до 2-изоморфизма*

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами
- Аксиомы для морфизмов (ассоциативность, тождественный морфизм) выполняются *с точностью до 2-изоморфизма*
- Похоже на триангуляцию: объекты — точки, морфизмы — рёбра, 2-морфизмы — грани
 - Связь с алгебраической топологией

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами
- Аксиомы для морфизмов (ассоциативность, тождественный морфизм) выполняются *с точностью до 2-изоморфизма*
- Похоже на триангуляцию: объекты — точки, морфизмы — рёбра, 2-морфизмы — грани
 - Связь с алгебраической топологией
- Нужно уметь сравнивать 2-морфизмы!

- Объекты
- 1-морфизмы между объектами, аксиомы с точностью до 2-изоморфизма
- 2-морфизмы между 1-морфизмами, аксиомы с точностью до 3-изоморфизма
- 3-морфизмы между 2-морфизмами, ...
- ...

- Объекты
- 1-морфизмы между объектами, аксиомы с точностью до 2-изоморфизма
- 2-морфизмы между 1-морфизмами, аксиомы с точностью до 3-изоморфизма
- 3-морфизмы между 2-морфизмами, ...
- ...
- С каждым шагом аксиомы (coherence diagrams) всё сложнее — область активных исследований
- Модель для гомотопической теории типов

- nLab: ncatlab.org
- Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*
- Bartosz Milewski, *Category Theory for Programmers*
- John C. Baez, Mike Stay, *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*
- Peter Selinger, *A survey of graphical languages for monoidal categories*