Теория категорий

Никита Лисица

2020

Немного истории

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
  - $\Rightarrow$ Аксиомы Эйленберга-Стинрода

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
  - $\Rightarrow$ Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
  - $\Rightarrow$ Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
  - $\Rightarrow$ Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории
- 1960е: Ловер — Категорная логика, аксиоматизация категории множеств, топосы

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
  - $\Rightarrow$ Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории
- 1960е: Ловер — Категорная логика, аксиоматизация категории множеств, топосы
- 1960е: Хааг, Кастлер — Алгебраическая квантовая теория поля

Немного истории

- Первая половина XX — развитие алгебраической топологии
- 1940е: Эйленберг, Маклейн — определения категории, функторов, *естественных преобразований*
  - $\Rightarrow$ Аксиомы Эйленберга-Стинрода
- 1950-60е: Серр, Гротендик, et al. — бум алгебраической геометрии
- 1960е: Маклейн — моноидальные категории, 2-категории
- 1960е: Ловер — Категорная логика, аксиоматизация категории множеств, топосы
- 1960е: Хааг, Кастлер — Алгебраическая квантовая теория поля
- 1970е и далее: *очень много всего*

Об обобщениях

Об обобщениях

- Целое число

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$
- Непрерывная функция

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$
- Непрерывная функция $\Rightarrow$ пространство непрерывных функций $C(X)$

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$
- Непрерывная функция $\Rightarrow$ пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$
- Непрерывная функция $\Rightarrow$ пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры $\Rightarrow$ универсальная алгебра (изучение структуры с произвольными операциями и аксиомами)

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$
- Непрерывная функция $\Rightarrow$ пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры $\Rightarrow$ универсальная алгебра (изучение структуры с произвольными операциями и аксиомами)
- Множество* всех колец/полей/пространств/etc $\Rightarrow$

Об обобщениях

- Целое число $\Rightarrow$ кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$
- Вещественное число $\Rightarrow$ поле вещественных чисел $\mathbb{R}$
- Непрерывная функция $\Rightarrow$ пространство непрерывных функций $C(X)$
- Конкретные алгебраические структуры $\Rightarrow$ универсальная алгебра (изучение структуры с произвольными операциями и аксиомами)
- Множество* всех колец/полей/пространств/etc $\Rightarrow$ категория

Определение

Категория C — это

Определение

Категория C — это

- Набор* *объектов* $Ob(C)$

Определение

Категория C — это

- Набор* *объектов* $Ob(C)$
- $\forall X, Y \in Ob(C)$ набор* *морфизмов/стрелок* $Hom_C(X, Y)$

Определение

Категория C — это

- Набор* *объектов* $Ob(C)$
- $\forall X, Y \in Ob(C)$ набор* *морфизмов/стрелок* $Hom_C(X, Y)$
- Композиция морфизмов:
  $f \in Hom_C(X, Y), g \in Hom_C(Y, Z) \Rightarrow g \circ f : Hom_C(X, Z)$

Определение

Категория C — это

- Набор* *объектов* $Ob(C)$
- $\forall X, Y \in Ob(C)$ набор* *морфизмов/стрелок* $Hom_C(X, Y)$
- Композиция морфизмов:
  $f \in Hom_C(X, Y), g \in Hom_C(Y, Z) \Rightarrow g \circ f : Hom_C(X, Z)$

- Композиция ассоциативна: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

Определение

Категория C — это

- Набор* *объектов* $Ob(C)$
- $\forall X, Y \in Ob(C)$ набор* *морфизмов/стрелок* $Hom_C(X, Y)$
- Композиция морфизмов:
  $f \in Hom_C(X, Y), g \in Hom_C(Y, Z) \Rightarrow g \circ f : Hom_C(X, Z)$

- Композиция ассоциативна: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
- Тождественное отображение: $\exists id_X \in Hom_C(X, X)$
- $id_X \circ f = f \quad g \circ id_X = g$

Определение

- Нужно отношение равенства на морфизмах
- *Не нужно* отношение равенства на объектах

Определение

- Нужно отношение равенства на морфизмах
- *Не нужно* отношение равенства на объектах
- Вместо равенства для объектов используется изоморфизм

Коммутативные диаграммы

Композиция:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \tag{1}$$

Коммутативные диаграммы

Композиция:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \tag{1}$$

Диаграмма *коммутативна*, если композиция вдоль любого пути из одной вершины в другую даёт один и тот же морфизм.

Коммутативные диаграммы

Ассоциативность:

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[dr, "h"] & \\ X \arrow[ur, "f"] & & & W \end{tikzcd} \qquad (2)$$

Коммутативные диаграммы

Ассоциативность:

$$
\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "g"] \arrow[drr] & Z \arrow[dr, "h"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[urr] & & & W
\end{tikzcd}
\tag{2}
$$

Коммутативные диаграммы

Ассоциативность:

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[r, "g"] \arrow[drr] & Z \arrow[dr, "h"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[urr] \arrow[rrr, "h\circ g\circ f"'] & & & W
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Коммутативные диаграммы

Тождественное отображение:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "id_X"'] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{3}$$

Коммутативные диаграммы

Тождественное отображение:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "id_X"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{3}$$

Изоморфизм

Морфизмы могут быть обратными друг другу:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y \tag{4}$$

Изоморфизм

Морфизмы могут быть обратными друг другу:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "id_Y"] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd} \tag{4}$$

$$f = g^{-1} \tag{5}$$

$$g = f^{-1} \tag{6}$$

Обратимый морфизм — изоморфизм

$id_X^{-1} = id_X$

Примеры категорий

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория $\mathbf{Vect}_K$ векторных пространств над полем K

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория $\mathbf{Vect}_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория $\mathbf{Vect}_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория $\mathbf{Vect}_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**
- Категория метрических пространств **Met**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория $\mathbf{Vect}_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**
- Категория метрических пространств **Met**
- Категория графов **Gph**

Примеры категорий

- Категория множеств **Set**
- Категория групп **Grp**
- Категория колец **Ring**
- Категория $\mathbf{Vect}_K$ векторных пространств над полем K
- Категория топологических пространств **Top**
- Категория Хаусдорфовых пространств **Haus**
- Категория метрических пространств **Met**
- Категория графов **Gph**
- *Любые математические объекты одной природы*

Примеры категорий

- Моноид $\Leftrightarrow$ категория с одним объектом
- Группа $\Leftrightarrow$ категория с одним объектом, где все морфизмы обратимы
- Предпорядок $\Leftrightarrow$ категория, где между любыми объектами не более одного морфизма
- Категория путей графа

Примеры категорий

Пустая категория:

Примеры категорий

Категория с одним объектом (и тождественным морфизмом):

$$\bullet \tag{7}$$

Примеры категорий

Категория с двумя объектами:

$$\bullet \qquad \bullet \tag{8}$$

Примеры категорий

Категория с двумя объектами и морфизмом между ними:

$$\bullet \longrightarrow \bullet \tag{9}$$

Примеры категорий

$$\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet \tag{10}$$

Примеры категорий

- Категория высказываний логической системы
  - Морфизмы — доказательства выводимости

Примеры категорий

- Категория высказываний логической системы
  - Морфизмы — доказательства выводимости
- Категория типов системы типизации
  - Морфизмы — термы функций

Примеры категорий

- Категория высказываний логической системы
  - Морфизмы — доказательства выводимости
- Категория типов системы типизации
  - Морфизмы — термы функций
- Категория типов языка Haskell — **Hask**
  - Морфизмы — функции

Приложения

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций

Приложения

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде

Приложения

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде
- Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология — невозможны в современном виде без теории категорий

Приложения

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде
- Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология — невозможны в современном виде без теории категорий
- Распространение реального применения на другие области — активно развивающаяся сфера

Приложения

- Для большинства приложений — язык описания явлений и конструкций
- Несколько несложных результатов, полезных везде
- Алгебраическая геометрия, алгебраическая топология — невозможны в современном виде без теории категорий
- Распространение реального применения на другие области — активно развивающаяся сфера
- Указывает на правильные абстракции $\Rightarrow$ помогает проектировать интерфейсы

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \tag{11}$$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \tag{11}$$

- **Set**: $\perp = \varnothing$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \tag{11}$$

- **Set**: $\perp = \varnothing$
- **Grp**: $\perp = 1$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \tag{11}$$

- **Set**: $\perp = \varnothing$
- **Grp**: $\perp = 1$
- **Vect**$_K$: $\perp = \{0\}$

Начальный объект категории

- $\perp \in Ob(C)$ такой, что $\forall X \in Ob(C) \quad \exists! f \in Hom_C(\perp, X)$

$$\perp \xrightarrow{\exists!} \forall X \tag{11}$$

- **Set**: $\perp = \varnothing$
- **Grp**: $\perp = 1$
- $\mathbf{Vect}_K$: $\perp = \{0\}$
- **Hask**: $\perp = \text{Data.Void}$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \tag{12}$$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \tag{12}$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \tag{12}$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$
- **Grp**: $\top = 1$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \tag{12}$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$
- **Grp**: $\top = 1$
- **Vect**$_K$: $\top = \{0\}$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \qquad (12)$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$
- **Grp**: $\top = 1$
- **Vect**$_K$: $\top = \{0\}$
- **Hask**: $\top = ()$

Терминальный объект категории

$$\forall X \xrightarrow{\exists!} \top \tag{12}$$

- **Set**: $\top = \{\bullet\}$
- **Grp**: $\top = 1$
- $\mathbf{Vect}_K$: $\top = \{0\}$
- **Hask**: $\top = ()$
- Получается «переворачиванием стрелок» из определения начального объекта

Произведение объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X & X \times Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \\
 & \forall A \arrow[ul, "\forall"] \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] &
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

Произведение объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X & X \times Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \\
 & \forall A \arrow[ul, "\forall"] \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] &
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

- **Set**: $X \times Y$

Произведение объектов в категории

$$\begin{tikzcd}
X & X \times Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \\
& \forall A \arrow[ul, "\forall"] \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] &
\end{tikzcd} \tag{13}$$

- **Set**: $X \times Y$
- **Grp**: $X \times Y$

Произведение объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X & X \times Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \\
& \forall A \arrow[ul, "\forall"] \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] &
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

- **Set**: $X \times Y$
- **Grp**: $X \times Y$
- **Vect**$_K$: $X \oplus Y$

Произведение объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X & X \times Y \arrow[l] \arrow[r] & Y \\
 & \forall A \arrow[ul, "\forall"] \arrow[u, "\exists!"] \arrow[ur, "\forall"'] &
\end{tikzcd}
\tag{13}
$$

- **Set**: $X \times Y$
- **Grp**: $X \times Y$
- **Vect**$_K$: $X \oplus Y$
- **Hask**: (X, Y)

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & X+Y \arrow[d, "\exists!"] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "\forall"] \\
& \forall A &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & X + Y \arrow[d, "\exists!"] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "\forall"] \\
& \forall A &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

- **Set**: $X \coprod Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & X+Y \arrow[d, "\exists!"] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "\forall"] \\
& \forall A &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & X+Y \arrow[d, "\exists!"] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "\forall"] \\ & \forall A & \end{tikzcd} \qquad (14)$$

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$
- **Vect**$_K$: $X \oplus Y$

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & X + Y \arrow[d, "\exists!"] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "\forall"] \\
 & \forall A &
\end{tikzcd}
\tag{14}
$$

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$
- **Vect**$_K$: $X \oplus Y$
- **Hask**: Either X Y

Копроизведение (сумма) объектов в категории

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[dr, "\forall"'] & X + Y \arrow[d, "\exists!"] & Y \arrow[l] \arrow[dl, "\forall"] \\
& \forall A &
\end{tikzcd} \tag{14}$$

- **Set**: $X \coprod Y$
- **Grp**: $X * Y$
- $\mathbf{Vect}_K$: $X \oplus Y$
- **Hask**: Either X Y
- Получается «переворачиванием стрелок» из определения произведения

Функтор

Функтор $F : C \to D$ — это

Функтор

Функтор $F : C \to D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \to Ob(D)$

Функтор

Функтор $F : C \to D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \to Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
  $F : Hom_C(X, Y) \to Hom_D(F(X), F(Y))$

Функтор

Функтор $F : C \to D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \to Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
  $F : Hom_C(X, Y) \to Hom_D(F(X), F(Y))$

Переводит композицию в композицию: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Функтор

Функтор $F : C \to D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \to Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
  $F : Hom_C(X, Y) \to Hom_D(F(X), F(Y))$

Переводит композицию в композицию: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
& F(Z)
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

Функтор

Функтор $F : C \to D$ — это

- Отображение на объектах: $F : Ob(C) \to Ob(D)$
- Отображение на морфизмах:
  $F : Hom_C(X, Y) \to Hom_D(F(X), F(Y))$

Переводит композицию в композицию: $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
 & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "F(g\circ f)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
 & F(Z)
\end{tikzcd}
\tag{15}
$$

Переводит тождественное в тождественное: $F(id_X) = id_{F(X)}$

Функтор: свойства

Переводит коммутативные диаграммы в коммутативные диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
W \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[dl, "h"] \\
T &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(i)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
F(W) \arrow[d, "F(j)"'] & F(Z) \arrow[dl, "F(h)"] \\
F(T) &
\end{tikzcd}
\tag{16}
$$

Функтор: свойства

Переводит коммутативные диаграммы в коммутативные диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
W \arrow[d, "j"'] & Z \arrow[dl, "h"] \\
T &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "F(i)"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
F(W) \arrow[d, "F(j)"'] & F(Z) \arrow[dl, "F(h)"] \\
F(T) &
\end{tikzcd}
\tag{16}
$$

$$
h \circ g \circ f = j \circ i \quad \Longrightarrow \quad F(h) \circ F(g) \circ F(f) = F(j) \circ F(i) \tag{17}
$$

Функтор: свойства

Переводит изоморфизм в изоморфизм:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "id_{F(X)}"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
& F(X)
\end{tikzcd}
\tag{18}
$$

Функтор: свойства

Переводит изоморфизм в изоморфизм:

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "id_X"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "id_{F(X)}"'] & F(Y) \arrow[d, "F(g)"] \\
& F(X)
\end{tikzcd}
\tag{18}
$$

$$F(g) = F(f^{-1}) = F(f)^{-1} = F(g) \tag{19}$$

Функтор: примеры

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например **Grp** $\to$ **Set**
- Если категории — частичные порядки, то функтор — возрастающая функция

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например $\mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$
- Если категории — частичные порядки, то функтор — возрастающая функция
- Если категории — моноиды/группы, то функтор — гомоморфизм моноидов/групп

Функтор: примеры

- Тождественный функтор Id_C
- Постоянный функтор
- Множество подмножеств $X \mapsto 2^X$
- Свободный моноид/группа/etc, свободные функторы
- Забывающие функторы, например **Grp** $\to$ **Set**
- Если категории — частичные порядки, то функтор — возрастающая функция
- Если категории — моноиды/группы, то функтор — гомоморфизм моноидов/групп
- Функторы в Хаскеле: **Hask** $\to$ **Hask**
  - Отображение на морфизмах — `fmap`

Изоморфизм категорий

Изоморфизм категорий — обратимый функтор:

$$F : C \to D \tag{20}$$

$$G : D \to C \tag{21}$$

$$\forall X \in Ob(C) \quad G(F(X)) = X \tag{22}$$

$$\forall f : X \to Y \quad G(F(f)) = f \tag{23}$$

Изоморфизм категорий

Изоморфизм категорий — обратимый функтор:

$$F : C \to D \tag{20}$$

$$G : D \to C \tag{21}$$

$$\forall X \in Ob(C) \quad G(F(X)) = X \tag{22}$$

$$\forall f : X \to Y \quad G(F(f)) = f \tag{23}$$

Используется равенство объектов — плохое определение!

Изоморфизм категорий

Изоморфизм категорий — обратимый функтор:

$$F : C \to D \tag{20}$$

$$G : D \to C \tag{21}$$

$$\forall X \in Ob(C) \quad G(F(X)) = X \tag{22}$$

$$\forall f : X \to Y \quad G(F(f)) = f \tag{23}$$

Используется равенство объектов — плохое определение!
Лучше рассматривать *эквивалентность* категорий.
Для этого нужны *естественные преобразования*.

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

$$F, G : C \to D \tag{24}$$

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

$$F, G : C \to D \tag{24}$$

$$\eta : F \Rightarrow G \tag{25}$$

$$\eta_X : F(X) \to G(X) \quad (X \in Ob(C)) \tag{26}$$

Естественные преобразования

- Функторы — между категориями
- Естественные преобразования — между функторами

$$F, G : C \to D \tag{24}$$

$$\eta : F \Rightarrow G \tag{25}$$

$$\eta_X : F(X) \to G(X) \quad (X \in Ob(C)) \tag{26}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \quad & \begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(X) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(Y) \arrow[r, "\eta_Y"] & G(Y) \end{tikzcd} \\ \downarrow f & & \\ Y & & \end{array} \tag{27}$$

$$\eta_Y \circ F(f) = G(f) \circ \eta_X \tag{28}$$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \to R$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \to R$

$$\begin{tikzcd} M(n,R) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\det"'] & M(n,S) \arrow[d, "\det"] \\ R \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd} \tag{29}$$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \to R$

$$\begin{tikzcd} M(n,R) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\det"'] & M(n,S) \arrow[d, "\det"] \\ R \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd} \tag{29}$$

В частности:

- $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$
- $\det(A \bmod p) = \det(A) \bmod p$

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \to R$

$$\begin{tikzcd} M(n,R) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\det"'] & M(n,S) \arrow[d, "\det"] \\ R \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd} \tag{29}$$

В частности:

- $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$
- $\det(A \bmod p) = \det(A) \bmod p$

Мораль: естественные преобразования — то, что определяется общей формулой, вне зависимости от параметров

Естественные преобразования: пример

Определитель матрицы: $\det : M(n, R) \to R$

$$\begin{tikzcd}
M(n,R) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\det"'] & M(n,S) \arrow[d, "\det"] \\
R \arrow[r, "f"] & S
\end{tikzcd} \tag{29}$$

В частности:

- $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$
- $\det(A \bmod p) = \det(A) \bmod p$

Мораль: естественные преобразования — то, что определяется общей формулой, вне зависимости от параметров

Естественные преобразования в Хаскеле — параметрически полиморфные функции `f: F a -> G a`

Естественный изоморфизм

η — естественный изоморфизм, если все η_X — изоморфизмы.

Эквивалентность категорий

C и D эквивалентны, если существуют функторы $F : C \to D$ и $G : D \to C$ такие, что

- $G \circ F$ естественно изоморфно Id_C
- $F \circ G$ естественно изоморфно Id_D

Эквивалентность категорий

C и D эквивалентны, если существуют функторы $F : C \to D$ и $G : D \to C$ такие, что

- $G \circ F$ естественно изоморфно Id_C
- $F \circ G$ естественно изоморфно Id_D
- Может быть разное количество изоморфных объектов, но суть остаётся
- *Скелет* категории — выбираем по одному объекту из набора изоморфных
- Любая категория эквивалентна скелету

Двойственная (opposite) категория

- $Ob(C^{op}) = Ob(C)$
- $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

Двойственная (opposite) категория

- $Ob(C^{op}) = Ob(C)$
- $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

$$
\begin{aligned}
C : \qquad & X \xrightarrow{f} Y \\
C^{op} : \qquad & X \xleftarrow{f} Y
\end{aligned} \tag{30}
$$

Двойственная (opposite) категория

- $Ob(C^{op}) = Ob(C)$
- $Hom_{C^{op}}(X, Y) = Hom_C(Y, X)$

$$
\begin{aligned}
C: &\qquad X \xrightarrow{f} Y \\
C^{op}: &\qquad X \xleftarrow{f} Y
\end{aligned}
\tag{30}
$$

- Суть — та же, стрелки — перевёрнуты
- Превращает все понятия в двойственные

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец $\leftrightarrow$ категория аффинных схем

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец $\leftrightarrow$ категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^*-алгебр $\leftrightarrow$ категория компактных хаусдорфовых пространств

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец $\leftrightarrow$ категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^*-алгебр $\leftrightarrow$ категория компактных хаусдорфовых пространств
  - $\Rightarrow$ Некоммутативная геометрия

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец $\leftrightarrow$ категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^*-алгебр $\leftrightarrow$ категория компактных хаусдорфовых пространств
  - $\Rightarrow$ Некоммутативная геометрия
- (Теорема Стоуна) Категория булевых алгебр $\leftrightarrow$ категория пространств Стоуна

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец $\leftrightarrow$ категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^*-алгебр $\leftrightarrow$ категория компактных хаусдорфовых пространств
  - $\Rightarrow$ Некоммутативная геометрия
- (Теорема Стоуна) Категория булевых алгебр $\leftrightarrow$ категория пространств Стоуна
- (Двойственность Понтрягина) Категория локально компактных абелевых групп двойственна самой себе

Двойственная категория: примеры

- Категория коммутативных колец $\leftrightarrow$ категория аффинных схем
- (Представление Гельфанда) Категория коммутативных C^*-алгебр $\leftrightarrow$ категория компактных хаусдорфовых пространств
  - $\Rightarrow$ Некоммутативная геометрия
- (Теорема Стоуна) Категория булевых алгебр $\leftrightarrow$ категория пространств Стоуна
- (Двойственность Понтрягина) Категория локально компактных абелевых групп двойственна самой себе
  - Обобщение рядов Фурье, дискретных и непрерывных преобразований Фурье

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- `f :: a -> a`
    - `f x = x`

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- `f :: a -> a`
  - `f x = x`
- `f :: a -> (a,a)`
  - `f x = (x,x)`

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- `f :: a -> a`
  - `f x = x`
- `f :: a -> (a,a)`
  - `f x = (x,x)`
- `f :: (a,b) -> (b,a)`
  - `f (x,y) = (y,x)`

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- `f :: a -> a`
  - `f x = x`
- `f :: a -> (a,a)`
  - `f x = (x,x)`
- `f :: (a,b) -> (b,a)`
  - `f (x,y) = (y,x)`
- `f :: a -> [a]`
  - `f = replicate n` или `f = repeat`

Free theorems

- Параметрически полиморфные функции — естественные преобразования функторов
- Можно делать вывод о свойствах функции, зная её тип
- `f :: a -> a`
  - `f x = x`
- `f :: a -> (a,a)`
  - `f x = (x,x)`
- `f :: (a,b) -> (b,a)`
  - `f (x,y) = (y,x)`
- `f :: a -> [a]`
  - `f = replicate n` или `f = repeat`
- `f :: [a] -> Int`
  - `f = g . length`

Моноидальные категории

Задано *произведение* объектов: функтор $\otimes : C \times C \to C$ и нейтральный объект $I \otimes X \cong X \otimes I \cong X$

- **Set**, $\otimes = \times, I = \{\bullet\}$
- **Set**, $\otimes = \coprod, I = \varnothing$
- $\mathbf{Vect}_K, \otimes = \otimes, I = K$
- Категория функторов из категории в саму себя (*эндофункторов*) $\mathbf{End}(C), \otimes = \circ, I = Id_C$

Моноид в моноидальной категории

Больше структуры — новые определения!

Моноид M — это

- Умножение: $\mu : M \otimes M \to M$
- Единица: $\eta : I \to M$

Аксиомы (ассоциативность, нейтральный элемент) выражаются как диаграммы

Моноиды в $\mathbf{Set}, \times, \{\bullet\}$ — обычные моноиды из алгебры

Монады

Монады — моноиды в категории эндофункторов.

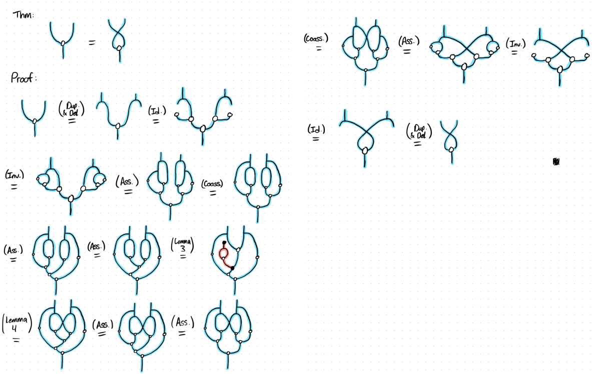
- $\mu : M(M(X)) \to M(X)$
  - `join :: Monad m => m (m a) -> m a`
- $\eta : X \to M(X)$
  - `return :: Monad m => a -> m a`

Тройки Клейсли

- Эквивалентны монадам
- Вместо μ операция
  $f : X \to M(Y) \quad \Longrightarrow \quad f^* : M(X) \to M(Y)$
- `flip (>>=) :: Monad m => (a -> m b) -> (m a -> m b)`

Струнные диаграммы

- Пенроуз, Фейнман, ...
- Объекты — струны/нити, морфизмы — блоки



Jordan Sawdy, `twitter.com/pseudofunctor`

Соответствие Карри-Говарда

Интуиционистская логика	Просто типизированное лямбда-исчисление
Линейная логика	Линейные типы
Интуиционистская логика первого порядка	Зависимые типы

Соответствие Карри-Говарда-Ламбека

Интуиционистская логика	Просто типизированное лямбда-исчисление	Декартово-замкнутые категории
Линейная логика	Линейные типы	Моноидальные категории
Интуиционистская логика первого порядка	Зависимые типы	Локально декартово-замкнутые категории

nLab: computational trinitarianism

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
  - Синтаксически равные термы

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
  - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
  - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
  - Денотационно равные функции

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
  - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
  - Денотационно равные функции — никто не описал денотационную семантику Хаскеля

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
  - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
  - Денотационно равные функции — никто не описал денотационную семантику Хаскеля
- Можно ли жить *без* равенства морфизмов?

Hask is not a category

- Для определения категории нужно уметь сравнивать морфизмы
- Что означает равенство функций в Хаскеле?
  - Синтаксически равные термы — `fst != snd . swap`
  - Денотационно равные функции — никто не описал денотационную семантику Хаскеля
- Можно ли жить *без* равенства морфизмов? Да, если заменить равенство на *изоморфизм*.

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами
- Аксиомы для морфизмов (ассоциативность, тождественный морфизм) выполняются *с точностью до 2-изоморфизма*

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами
- Аксиомы для морфизмов (ассоциативность, тождественный морфизм) выполняются *с точностью до 2-изоморфизма*
- Похоже на триангуляцию: объекты — точки, морфизмы — рёбра, 2-морфизмы — грани
  - Связь с алгебраической топологией

(слабые) 2-категории

- Объекты
- Морфизмы между объектами
- 2-морфизмы между обычными морфизмами
- Аксиомы для морфизмов (ассоциативность, тождественный морфизм) выполняются *с точностью до 2-изоморфизма*
- Похоже на триангуляцию: объекты — точки, морфизмы — рёбра, 2-морфизмы — грани
  - Связь с алгебраической топологией
- Нужно уметь сравнивать 2-морфизмы!

∞-категории

- Объекты
- 1-морфизмы между объектами, аксиомы с точностью до 2-изоморфизма
- 2-морфизмы между 1-морфизмами, аксиомы с точностью до 3-изоморфизма
- 3-морфизмы между 2-морфизмами, ...
- ...

∞-категории

- Объекты
- 1-морфизмы между объектами, аксиомы с точностью до 2-изоморфизма
- 2-морфизмы между 1-морфизмами, аксиомы с точностью до 3-изоморфизма
- 3-морфизмы между 2-морфизмами, ...
- ...
- С каждым шагом аксиомы (coherence diagrams) всё сложнее — область активных исследований
- Модель для гомотопической теории типов

Ссылки

- nLab: `ncatlab.org`
- Saunders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*
- Bartosz Milewski, *Category Theory for Programmers*
- John C. Baez, Mike Stay, *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*
- Peter Selinger, *A survey of graphical languages for monoidal categories*