Blatt 8 - Gruppe 3

Mike Lenz, Jonas Tesfamariam

14. Juni 2023

Aufgabe 1

Wir verwenden Bayes Umkehrformel $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$.
Die Wahrscheinlichkeiten für die Erkrankungen ist die Anzahl der Teilnehmer, die diese Krankheit haben geteilt durch die Anzahl der Teilnehmer. z.B.:

$$P(A) = \frac{333}{1000} = 33.3\%$$

Die Wahrscheinlichkeiten für die Testergebnisse sind gegeben durch die Summe der Einträge in der jeweiligen Spalte geteilt durch die Anzahl der Teilnehmer. z.B.:

$$P(00) = \frac{221 + 3 + 51 + 50}{1000} = 32.5\%$$

Und zuletzt die bedingten Wahrscheinlichkeiten für die Testergebnisse gegeben die Erkrankung. Hier teilen wir nicht durch die Anzahl aller Teilnehmer, sondern durch die Anzahl der Teilnehmer mit der jeweiligen Erkrankung. z.B.:

$$P(00|A) = \frac{221}{333} \approx 66.3\%$$

Dies können wir nun Anwenden:

$$P(A|00) = \frac{\frac{221}{333} \cdot \frac{333}{1000}}{\frac{325}{1000}} = 0.68$$

Wir gehen Analog für die anderen Wahrscheinlichkeiten vor:

$$P(B|00) = \frac{\frac{3}{11} \cdot \frac{11}{1000}}{\frac{325}{1000}} \approx 0.00923$$

$$P(C|00) = \frac{\frac{51}{222} \cdot \frac{222}{1000}}{\frac{325}{1000}} \approx 0.156$$

$$P(D|00) = \frac{\frac{50}{434} \cdot \frac{434}{1000}}{\frac{325}{1000}} \approx 0.153$$

Für 10:

$$P(A|10) = \frac{\frac{31}{333} \cdot \frac{333}{1000}}{\frac{387}{1000}} \approx 0.08$$

$$P(B|10) = \frac{\frac{5}{11} \cdot \frac{11}{1000}}{\frac{387}{1000}} \approx 0.0129$$

$$P(C|10) = \frac{\frac{20}{222} \cdot \frac{222}{1000}}{\frac{387}{1000}} \approx 0.0517$$

$$P(D|10) = \frac{\frac{331}{434} \cdot \frac{434}{1000}}{\frac{387}{1000}} \approx 0.855$$

Für 01:

$$P(A|01) = \frac{\frac{60}{333} \cdot \frac{333}{1000}}{\frac{183}{1000}} \approx 0.328$$

$$P(B|01) = \frac{\frac{2}{11} \cdot \frac{11}{1000}}{\frac{183}{1000}} \approx 0.011$$

$$P(C|01) = \frac{\frac{111}{222} \cdot \frac{222}{1000}}{\frac{183}{1000}} \approx 0.607$$

$$P(D|01) = \frac{\frac{10}{434} \cdot \frac{434}{1000}}{\frac{183}{1000}} \approx 0.0546$$

Für 11:

$$P(A|11) = \frac{\frac{21}{333} \cdot \frac{333}{1000}}{\frac{105}{1000}} = 0.2$$

$$P(B|11) = \frac{\frac{1}{11} \cdot \frac{11}{1000}}{\frac{105}{1000}} \approx 0.009$$

$$P(C|11) = \frac{\frac{40}{222} \cdot \frac{222}{1000}}{\frac{105}{1000}} \approx 0.381$$

$$P(D|11) = \frac{\frac{43}{434} \cdot \frac{434}{1000}}{\frac{105}{1000}} \approx 0.409$$

Aufgabe 2

Zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Wir betrachten folgende ungleichung:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Da $\sigma^2 < \infty$, jedoch $n \to \infty$ und $\varepsilon > 0$ ist, gilt:

$$\frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2} = 0$$

Somit gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - \mu| \geq \varepsilon) \leq 0$$

Da P nur Positive Werte annehmen kann, gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\frac{1}{n}S_n - \mu| \geq \varepsilon) = 0$$

Aufgabe 3

a)

Wir setzten die Informationen aus der Aufgabenstellung in die Tschebyscheffsche Ungleichung ein:

$$P(|S_n - \mu| \leq 0.5) \geq 0.98 = \frac{\sigma^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Durch umstellen erhalten wir:

$$n = \frac{\sigma^2}{0.98 \cdot 0.5^2}$$

Wobei σ^2 folgendermaßen definiert ist:

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

Wir müssen lediglich eine Zufallsvariable X_i betrachten, da alle Zufallsvariablen gleich sind. Wir berechnen $E(X_i^2)$ und $E(X_i)^2$:

$$E(X_i^2) = \sum_{j=1}^{m} j^2 \cdot \frac{1}{m} = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{1}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m} \cdot (m+1)(2m+1)}{6} = \frac{(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$E(X_i)^2 = \left(\sum_{j=1}^{m} j \cdot \frac{1}{m}\right)^2 = \left(\frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} j\right)^2 = \left(\frac{1}{\cancel{m}} \cdot \frac{\cancel{m} \cdot (m+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{(m+1)}{2}\right)^2 = \frac{(m+1)^2}{4}$$

Also:

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = \frac{(m+1)(2m+1)}{6} - \frac{(m+1)^2}{4} = \frac{2 \cdot (2m^2 + 3m + 1)}{12} - \frac{3m^2 + 6m + 3}{12}$$
$$= \frac{m^2 - 1}{12}$$

Nun können wir für σ^2 einsetzen:

$$n = \frac{\sigma^2}{0.98 \cdot 0.5^2} = \frac{\frac{m^2-1}{12}}{0.98 \cdot 0.5^2} = \frac{m^2 - 1}{12 \cdot 0.98 \cdot 0.5^2} = \frac{m^2 - 1}{2.94}$$

Die Anzahl an benötigten Versuchen lässt sich also aus mit m berechnen.

b)

Wir setzen wieder die Informationen aus der Aufgabenstellung in die Tschebyscheffsche Ungleichung ein:

$$P(|S_n - 0.5| \leq 0.01) \geq 0.96 = \frac{\sigma^2}{n \cdot 0.01^2}$$

Durch umstellen erhalten wir:

$$n = \frac{\sigma^2}{0.96 \cdot 0.01^2}$$

σ^2 ist wie in a) definiert:

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - E(X_i)^2$$

Wir berechnen $E(X_i^2)$ und $E(X_i)^2$:

$$E(X^2) = 0^2 \cdot \frac{1}{2} + 1^2 \cdot \frac{1}{2} = 0.5$$

$$E(X)^2 = 0.5^2 = 0.25$$

Also:

$$\sigma^2 = E(X_i^2) - E(X_i)^2 = 0.5 - 0.25 = 0.25$$

Nun können wir für σ^2 einsetzen:

$$n = \frac{\sigma^2}{0.96 \cdot 0.01^2} = \frac{0.25}{0.96 \cdot 0.01^2} = 2604.17$$

Also sind 2605 Versuche nötig.

Aufgabe 4

```
import random

def experiment(n): # a)
    anz = 0
    for i in range(n):
        anz += random.randint(0, 1)
    return anz/n

n = 2605 # b)
imBereich = 0
for i in range(100):
    if abs(experiment(n) - 0.5) <= 0.01:
        imBereich += 1
print(imBereich/100) # Ungefaehr 0.7
```

Wir erhalten mit dem Code und unserer Lösung aus 3b) nicht die gewünschte Wahrscheinlichkeit.