Blatt 7 - Gruppe 3

Mike Lenz, Jonas Tesfamariam

7. Juni 2023

Aufgabe 1

$Y = X_1 + X_2$
$\underline{\mathrm{E(Y)}} = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = 1.4 + 0.6 = 2$
$\underline{\mathrm{V(Y)}} = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 0.24 + 0.64 + 2 \cdot (-0.24) = 0.4$
$E(X_1) = 1 \cdot 0.6 + 2 \cdot 0.4 = 1.4$
$E(X_2) = -1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.8 = 0.6$
$V(X_1) = (1 - 1.4)^2 \cdot 0.6 + (2 - 1.4)^2 \cdot 0.4 = 0.24$
$V(X_2) = (-1 - 0.6)^2 \cdot 0.2 + (1 - 0.6)^2 \cdot 0.8 = 0.64$
$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1 \cdot X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = 0.6 - 1.4 \cdot 0.6 = -0.24$
$E(X_1 \cdot X_2) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 0.6 - 2 \cdot 0.2 + 2 \cdot 0.2 = 0.6$
$\underline{\mathrm{Corr}(X_1, X_2)} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)} \cdot \sqrt{V(X_2)}} = \dfrac{-0.24}{\sqrt{0.24} \cdot \sqrt{0.64}} = -0.6123$

Aufgabe 2

a)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Corr}(X, a \cdot X + b) &= \frac{\mathrm{Cov}(X, a \cdot X + b)}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(a \cdot X + b)}} \\
&= \frac{E(X - E(X)) \cdot E(a \cdot X + b - E(a \cdot X + b))}{\sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{a^2 \cdot V(X)}} \\
&= \frac{E(X - E(X)) \cdot E(a \cdot X + \cancel{b} - a \cdot E(X) \cancel{- b})}{\sqrt{a^2} \cdot V(X)} \\
&= \frac{E(X - E(X)) \cdot a \cdot E(X - E(X))}{\sqrt{a^2} \cdot V(X)} \\
&= \frac{a \cdot E((X - E(X))^2)}{\sqrt{a^2} \cdot V(X)} \\
&= \frac{a \cdot \cancel{V(X)}}{\sqrt{a^2} \cdot \cancel{V(X)}} \\
&= \frac{a}{\sqrt{a^2}}
\end{aligned}$$

Da $\sqrt{a^2} = |a|$ ist, gilt:

$$\mathrm{Corr}(X, a \cdot X + b) = \frac{a}{|a|} = \begin{cases} 1 & \text{falls } a > 0 \\ -1 & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

b)

Zu zeigen:

$$\mathrm{Corr}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \geq 0$$

Da $\sigma(X)$ und $\sigma(Y)$ immer größer gleich 0 sind, muss nur noch gezeigt werden, dass $\mathrm{Cov}(X, Y)$ immer größer gleich 0 ist. Also:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \geq 0$$

Da wir wissen, dass $E(X) = E(-X)$ ist können wir folgern, dass $E(X) = 0$ sein muss, da für die Werte eine Symmetrie um den Wert 0 gefordert ist, wofür der

Erwartungswert 0 sein muss. Damit ist nun folgendes zu zeigen:

$$\operatorname{Cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) \geq 0$$

Da $Y(\omega)$ immer 0 ist für jeden Negativen Wert von X kann $X \cdot Y$ keine Negativen Werte beinhalten. Damit ist $E(X \cdot Y) \geq 0$ und somit auch $\operatorname{Cov}(X, Y) \geq 0$. Letztendlich gilt also:

$$\operatorname{Corr}(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sigma(X) \cdot \sigma(Y)} \geq 0$$

Aufgabe 3

a)

Wir verechnen jeweils den Anteil der Studierenden mit der respektiven Abschlussquote und summieren alles letztendlich auf.

$$0.2 \cdot 0.61 + 0.35 \cdot 0.48 + 0.45 \cdot 0.35 = 0.4475$$

Es schaffen also 44,75% der Studierenden den Abschluss.

b)

Wir verwenden Bayes Umkehrformel. Davor definieren wir noch die Ereignisse:
G = Studierender studiert ein Geisteswissenschaftliches Fach.
A = Studierender schafft den Abschluss.

$$P(G|A) = \frac{P(A|G) \cdot P(G)}{P(A)} = \frac{0.61 \cdot 0.2}{0.4475} \approx 0.273$$

$\mathbf{P(G|A)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Studierender der den Abschluss schafft, ein Geisteswissenschaftliches Fach studiert hat.
$\mathbf{P(A|G)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Studierender, der ein Geisteswissenschaftliches Fach studiert hat, den Abschluss schafft. Dies ist im Text bereits erwähnt mit einer Wahrscheinlichkeit von 61%.
$\mathbf{P(G)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Studierender ein Geisteswissenschaftliches Fach studiert. Ebenfalls im Text erwähnt mit 20%.
$\mathbf{P(A)}$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Studierender den Abschluss schafft. Diese haben wir in a) berechnet mit 44.75%.
Ein Studierender studiert also mit einer Wahrscheinlichkeit von 27.3% ein Geisteswissenschaftliches Fach, wenn er den Abschluss schafft.