

Blatt 4 - Gruppe 3

Mike Lenz, Jonas Tesfamariam

17. Mai 2023

Aufgabe 1

a)

Es gibt drei mögliche Spielstände bei welchen der Schwächere Spieler gewinnt: 3-0, 3-1 und 3-2. Die letztendliche Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus den Wahrscheinlichkeiten dieser Punktestände. Die Wahrscheinlichkeit für 3-0 ist trivial:

$$0.4^3 \approx 0.064$$

Da der schwächere Spieler jeden Satz gewinnt müssen wir nur dessen Gewinnwahrscheinlichkeit pro Satz betrachten. Bei den Folgenden Spielständen müssen wir jedoch beachten, dass die Satzpunkte in verschiedenen Reihenfolgen geschehen können. Wir beschreiben einen gewonnenen Satz für den schwächeren Spieler mit 'W' und für den stärkeren Spieler mit 'S'. Z.B. kann der Spielstand 3-1 durch die Folge 'SWWW' und 'WSWW' erreicht werden. Die Folgen beschreiben verschiedene Pfade in einem Entscheidungsbaum, führen jedoch zu dem gleichen Spielstand.

Wahrscheinlichkeit für 3-1:

Wir geben nun den Buchstaben Werte: 'W' = 1 und 'S' = 0. Hiermit beschreiben wir:

$$3 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

3 beschreibt die Anzahl der Sätze, die der schwächere Spieler gewinnen muss. Da der letzte Satz immer von ihm gewonnen werden muss (also $x_4 = 1$) können wir schreiben:

$$2 = x_1 + x_2 + x_3.$$

Wenn wir nun die Formel aus Satz 1.10.16 anwenden erhalten wir fast die Anzahl der möglichen Kombinationen von Satzgewinnen, die in einem Spielgewinn von dem schwächeren Spieler resultieren:

$$\binom{4}{2} = 6.$$

Jetzt müssen wir lediglich die illegalen Kombinationen abziehen, bei denen $x_i = 2$ ist. Dies ist trivial zu berechnen, da wenn eine Variable 2 ist die anderen Variablen 0 sein müssen. Somit gibt es hier 3 illegale Kombinationen, also:

$$\binom{4}{2} - 3 = 3$$

Es gibt also 3 Wege einen Punktestand von 3-1 zu erhalten, wir müssen also die Wahrscheinlichkeit all dieser Wege beachten. Pro Weg ist die Wahrscheinlichkeit:

$$0.4^3 \cdot 0.6^1 \approx 0.0384$$

Also insgesamt $3 \cdot 0.0384 = 0.1152$.

Wahrscheinlichkeit für 3-2:

Berechnung ist ähnlich zu 3-1. Da hier 5 Sätze gespielt werden hat unsere Zahlenpartition eine Variable mehr. Die Anzahl der illegalen Kombinationen erhöht sich auf 4. Somit ist

$$\binom{5}{3} - 4 = 6$$

die Anzahl der Wege den Punktestand 3-2 zu erhalten. Die Wahrscheinlichkeit pro Weg:

$$0.4^3 \cdot 0.6^2 = 0.02304$$

also insgesamt $6 \cdot 0.02304 = 0.13824$.

Somit ist die Gesamte Wahrscheinlichkeit, dass der schwächere Spieler gewinnt

$$0.064 + 0.1152 + 0.13824 = 0.31744$$

b)

Wir teilen die Siegprämie nach der Wahrscheinlichkeit, das Spiel von dem Punktestand 2-1 aus zu gewinnen, auf. Team 1 ist in führung. Aufgrund des Punktestands gibt es keine verschiedenen Wege auf gleiche Punktestände zu kommen:

Fall 3-1:

Team 1 macht mit dem nächsten Satz aus. Da Team 1 eine Gewinnwahrscheinlichkeit von 0.5 hat ist die Wahrscheinlichkeit für diesen Punktestand ebenfalls 0.5

Fall 3-2:

Team 2 gewinnt einen Satz und darauf gewinnt Team 1 einen Satz. Team 1 gewinnt wieder, jedoch ist die Chance für diesen Punktestand nur noch $0.5 \cdot 0.5 = 0.25$ da die Chance, das Team 2 einen Satz gewinnt, mitverrechnet werden muss.

Fall 2-3:

Team 2 gewinnt zwei Sätze und somit auch das Spiel. Die Wahrscheinlichkeit für diesen Punktestand ist ebenfalls 0.25 analog zu Fall 3-2.

Da Team 1 in Fall 3-1 und 3-2 gewinnt hat Team 1 eine Chance von 0.75 das komplette Spiel zu gewinnen. Team 2 gewinnt nur mit einer Chance von 0.25. Daher sollte Team 1 75% des Preisgelds und Team 2 25% des Preisgelds erhalten.

Aufgabe 2

a)

Es ist zu zeigen, dass:

$$\sum_{j=0}^{\infty} (1-r)^j \cdot r = 1$$

Wir können umstellen:

$$r \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-r)^j$$

Da $0 < r < 1$ ist gilt $1-r < 1$ weswegen wir folgende Formel für Reihen anwenden können:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c}{1-c} \text{ wenn } |c| < 1 \quad (1)$$

Davor muss jedoch $j = 1$ gelten:

$$r \cdot ((1-r)^0 + \sum_{j=1}^{\infty} (1-r)^j) = r \cdot (1 + \sum_{j=1}^{\infty} (1-r)^j)$$

Mit (1) erhalten wir dann:

$$r \cdot (1 + \frac{1-r}{1-(1-r)}) = r + \frac{r \cdot (1-r)}{r} = r + 1 - r = 1$$

Also ist die Summe aller möglichen Wahrheitswerte von m_1 gleich 1. m_1 ist somit eine Wahrscheinlichkeitsfunktion.

b)

Es ist zu zeigen, dass:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = 1$$

Wir definieren $p = p$ und $q = (1-p)$. Mithilfe des Hinweises erhalten wir:

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} = (p + (1-p))^n = 1^n = 1$$

Somit ist die Summe aller möglichen Wahrheitswerte von m_2 gleich 1. m_2 ist somit auch eine Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Aufgabe 3

Für diese Ungleichung sind zwei Fälle zu betrachten:

M_1 bis M_n sind disjunkt:

Da M_1 bis M_n disjunkt sind, gilt für den Wahrheitswert der Vereinigung:

$$P(M_1 \cup \dots \cup M_n) = \sum_{k=1}^n P(M_k)$$

Also:

$$\sum_{k=1}^n P(M_k) \leq \sum_{k=1}^n P(M_k)$$

Was klar wahr ist.

M_1 bis M_n sind nicht disjunkt:

Angenommen $\lambda \in M_i, M_j$ mit $i \neq j$

Der Wahrheitswert der Vereinigung

$$P(M_1 \cup \dots \cup M_i \cup \dots \cup M_j \cup \dots \cup M_n)$$

enthält den Wahrheitswert $m(\lambda)$ lediglich 1 mal (da es eine Menge ist).

Die Rechte Seite der Bonferroni-Ungleichung

$$\sum_{k=1}^n P(M_k)$$

enthält diesen Wert jedoch 2 mal, da $m(\lambda)$ jeweils in der Berechnung von $P(M_i)$ sowie $P(M_j)$ enthalten ist. Somit muss die Rechte Seite der Bonferroni-Ungleichung größer als die Linke Seite sein (Ungleichung hält somit). Falls $m(\lambda) = 0$, so hat das überschneidende Element λ keinen Einfluss auf beide Seiten und es hat ein *Verhalten*, was ähnlich zu dem Fall, dass M_1 bis M_n disjunkt sind, ist.

Aufgabe 4

a)

Zu Berechnen:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Triviale und bereits gegebene Annahmen:

$$P(A) = 1/4, P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1/3, P(C) = 1/2, P(A \cap C) = 0$$

Restliche benötigte Annahmen:

$$P(A \cap B) = P(B) - P(\overline{A} \cap B) = 1/3 - 1/4 = 1/12$$

$$P(B \cap C) = 1 - P(\overline{B \cap C}) \stackrel{\text{de Morgan}}{=} 1 - P(\overline{B} \cup \overline{C}) = 1 - 5/6 = 1/6$$

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$

Weil $P(A \cap C)$ bereits 0 ist muss $P(A \cap B \cap C)$ auch 0 sein, da selbst beim Schnitt mit B keine relevanten Wahrheitswerte mehr auftauchen können.

Die Werte können nun eingesetzt werden:

$$P(A \cup B \cup C) = 1/4 + 1/3 + 1/2 - 1/12 - 0 - 1/6 + 0 = 5/6$$

b)

Um die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ereignisse eintritt, zu modellieren, nehmen wir die Vereinigung aller Ereignisse A_i :

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$$

Nach der Bonferroni-Ungleichung gilt dann:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$$

Da für alle A_i gilt $m(A_i) = 0.05$ ist

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) = \underbrace{0.05 + 0.05 + \dots + 0.05}_{n\text{-mal}} = n \cdot 0.05$$

somit gilt

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq n \cdot 0.05$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass eines der Ereignisse eintritt, höchstens $n \cdot 0.05$.