Blatt 3 - Übungsgruppe (Mo - 13:45) – Abgabegruppe 04

Giovanni Ngodji Djeuha, Mike Lenz, Jonas Tesfamariam,
Bastian Schmitt, Luca Winterkamp

11. Mai 2023

Aufgabe 3.1

Der Algorithmus ist ähnlich zu Bubblesort, nur das hier per Schleifendurchlauf am Anfang sowie am Ende der Liste immer mind. ein weiteres Element sortiert wird. Der Grund dafür ist, dass die inneren for-Schleifen jeweils Bubblesort in entgegengesetzter Richtung anwenden. Also nehmen wir an:
Wir haben eine Liste $A[1 \dots n]$ mit sortierter repräsentation $A'[1 \dots n]$. Nach dem j-ten Durchlauf der while-Schleife gilt

$$A[k] = A'[k] \forall k \in \{1, \dots, j\} \wedge A[l] = A'[l] \forall l \in \{n-j+1, \dots, n\}$$

Beweis der Invariante:

IA:

Aussage ist trivial erfüllt, da für $j = 0$ die Liste komplett unsortiert sein kann.

IS: $j - 1 \rightarrow j$

Da die beiden inneren for-Schleifen komplett seperat voneinander sortieren müssen wir lediglich zwei Fälle betrachten:

Fall 1: unsortiert Wenn $A[n-j+1] \neq A'[n-j+1]$ (analog $A[j] \neq A'[j]$ für die zweite for-Schleife) dann:

Sobald i so ist, dass $A[i] = A'[n-j+1]$, dann vertauschen wir immer Nachbarn bis $i = n-j+1$ (danach wird nicht mehr getauscht laut Invariante da der Rest bereits sortiert ist) womit dann $A[n-j+1] = A'[n-j+1]$ ist (also sortiert). Dies gilt analog für die zweite for-Schleife:

Sobald i so ist, dass $A[i] = A'[j]$ (zu beachten ist, dass wir hier i dekrementieren), dann vertauschen wir immer Nachbarn bis $i = j$ (gleicher Grund wie oben) womit dann $A[j] = A'[j]$ ist.

Fall 2: bereits sortiert Wenn $A[n-j+1] = A'[n-j+1]$, dann vertauschen wir nichts da ab $i = n-j+1$ keine Tauschungen mehr stattfinden (gilt laut Invariante). Das ganze nochmal für die zweite for-Schleife:

Wenn $A[j] = A'[j]$, dann vertauschen wir nichts da ab $i = j$ keine Tauschungen mehr stattfinden (nochmals laut Invariante).

Somit ist bewiesen, dass die Invariante nach jedem Schleifendurchlauf gilt. Da dies der Fall ist muss auch gelten, dass die Liste nach Ausführung des Algorithmus sortiert ist.

Aufgabe 3.2

a)

$n^\alpha \in o(n^{\alpha+\epsilon})$ laut Grenzwertlemma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{n^{\alpha+\epsilon}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\epsilon} = 0$$

Da $\epsilon \geq 1$ ist, muss $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\epsilon} = 0$.

b)

$c < d$ und $c^n \in o(d^n)$ laut Grenzwertlemma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{d^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{c}{d}\right)^n = 0$$

Da $c < d$ ist muss $\frac{c}{d} < 1$ sein, weshalb $\left(\frac{c}{d}\right)^n$ gegen 0 konvergiert.

c)

$P(b) \in \Theta(n^k)$ laut Grenzwertlemma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 n + \ldots + a_k n^k}{n^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1 n}{n^k} + \ldots + \frac{a_k n^k}{n^k} =$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0}{n^k} + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \ldots + \frac{a_k}{1} = 0 + 0 + \ldots + a_k = a_k$$

Da a_k eine konstante Zahl ist, mit $a_k > 0$, ist $P(n) \in \Theta(n^k)$

d)

/

e)

$n^\alpha \in o(c^n)$ no clue

$n^\alpha \in \omega(c^- n)$ laut Grenzwertlemma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{c^{-n}} = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot c^n = \infty$$

Für $\alpha, c > 1$ ist es klar
Falls $\alpha = 1$, so ist $\lim_{n\to\infty} n = \infty$
Falls $c = 1$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot 1$ wobei wir wissen, dass der andere Term auf jeden Fall bereits gegen ∞ geht.

Aufgabe 3.3

$$g_1 \prec g_4 \prec g_2 \prec g_5 \prec g_8 \prec g_7 \prec g_3 \prec g_0 \prec g_9 \prec g_6$$

$g_1 \prec g_4$:

/

$g_4 \prec g_2$:

/

$g_2 \prec g_5$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ln(ln(n))}{ln(n)} \stackrel{l'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n \cdot ln(n)}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \cdot ln(n)} = 0$$

$g_5 \prec g_8$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{ln(n)}}{ln(n)^{\cancel{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(n)} = 0$$

$g_8 \prec g_7$:

/

$g_7 \prec g_3$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}} \cdot ln(n)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(n)^2} = 0$$

$g_3 \prec g_0$:

/

$g_0 \prec g_9$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{ln(n)}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n} \cdot ln(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ln(n)} = 0$$

$g_9 \prec g_6$**:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\left(\frac{3}{2}\right)^n} \stackrel{l'H}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}} = 0$$

Aufgabe 3.4

a)

a = 1, b = 3, s = 1 $\rightarrow 1 < 3^1$ Fall 3: $A(n) \in O(n)$

b)

a = $\frac{5}{2}$, b = 2, s = 1 $\rightarrow \frac{5}{2} < 2$ Fall 1: $B(n) \in O(n^{\log_2 \frac{5}{2}})$

c)

a = 4, b = 2, s = 2 $\rightarrow 4 = 2^2$ Fall 2: $C(n) \in O(n^2 \log n)$

d)

a = 3, b = 3, s = 1 $\rightarrow 3 = 3^1$ Fall 2: $D(n) \in O(n \log n)$

Aufgabe 3.5

/