Blatt 2 - Übungsgruppe (Mo - 13:45) – Abgabegruppe 04

Giovanni Ngodji Djeuha, Mike Lenz, Jonas Tesfamariam, Bastian Schmitt, Luca Winterkamp

3. Mai 2023

Aufgabe 2.1

a)

$T_i(n)$ Laufzeit an Stelle i im Code (für Schleifen)

$$
\begin{aligned}
T_4(i) &= c_2 + \sum_{j=i+1}^{n-1} c_1 \\
T_3(n) &= c_3 + \sum_{j=0}^{n-1} T_4(i) \\
\iff \quad T_3(n) &= c_3 \sum_{j=0}^{n-1} \left(c_2 + \sum_{j=i+1}^{n-1} c_1 \right) \\
\iff \quad T_3(n) &= c_3 \sum_{j=0}^{n-1} (c_2) + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} (c_1)
\end{aligned}
$$

Wir observieren, was bei $\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n-1} (c_1)$ passiert:

$$
\begin{aligned}
&nc_1 + (n-1)c_1 + (n-2)c_1 + \cdots + c_1 = \\
&c_1(n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 1) = \\
&c_1 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 + n)c_1
\end{aligned}
$$

Somit erhalten Wir

$$\begin{aligned} & T_3(n) = c_3 + nc_2 + \frac{1}{2}(n^2+n)c_1 \\ \iff & T_3(n) = c_3 + nc_2 + \frac{1}{2}nc_1 + \frac{1}{2}n^2c_1 \\ & T(n) = T_3(n) \end{aligned}$$

Da der höchste Grad des Polynoms 2 ist, gilt $T(n) \in O(n^2)$.
Für die genaue Laufzeit setzen wir für die Konstanten die Anzahl der Zeilen, die diese repräsentieren, ein: $c_1 = 4; c_2 = 1; c_3 = 2$. Somit erhalten wir:

$$2 + n \cdot 1 + \frac{1}{2}n \cdot 4 + \frac{1}{2}n^2 \cdot 4 = 2 + 3n + 2n^2$$

Der Algorithmus hat eine genaue Laufzeit von $2n^2 + 3n + 2$.

b)

Aufgabe 2.2

Grenzwert Lemma wird hier mit GL abgekürzt

a)

$2^n \in o(3^n)$
da mithilfe GL $lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n} = 0$

b)

$2^{n+1} \in \Theta(2^n)$
da mithilfe GL $lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n} = lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{2^n}\cdot 2}{\cancel{2^n}} = 2$

c)

$\log(n) \in o(\sqrt{n})$

d)

$sin(2^n) + \pi \in \Theta(1)$
da $-1 \leq sin(x) \leq 1$ gilt erhalten wir $-1 + \pi \leq sin(2^n) + \pi \leq 1 + \pi$
somit muss $sin(2^n) + \pi \in \Theta(1)$ sein da es konstant ist.

e)

$2^{\log_2(n\cdot 2^n)} \in \omega(log(n) \cdot 2^n)$
$2^{\log_2(n\cdot 2^n)} = n \cdot 2^n \overset{\text{GL}}{\rightarrow} \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\cancel{2^n}}{log(n)\cdot\cancel{2^n}} = \infty$
da n schneller wächst als log(n)

f)

$n^n \in \omega(e^n)$
da mithilfe GL $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{e^n} = \infty$; n^n wächst klar schneller als e^n da die Basis mitwächst.

g)

$\sqrt[n]{n} \in \omega(\frac{1}{n})$
da mithilfe GL $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot n = \infty$; $\sqrt[n]{n}$ wird nie kleiner als 1

h)

$n \in o\big(2^{(\log_2(n))^2}\big)$
$2^{(\log_2(n))^2} = 2^{\log_2(n) \cdot \log_2(n)} = \big(2^{\log_2(n)}\big)^{\log_2(n)} = n^{\log_2(n)}$
mithilfe GL $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n^{\log_2(n)}} = 0$; $n^{\log_2(n)}$ wächst klar schneller

i)

$(\log(n))^n \in \omega(n^{\log(n)})$

Aufgabe 2.3

Wir definieren $p'(n) = a_{d-1}n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0$
Laut Grenzwert lemma gilt $p'(n) \in o(n^d)$ da:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p'(n)}{n^d} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{d-1}n^{d-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{n^d} = 0$$

Hiermit gilt für $p(n)$, dass

$$p(n) = a_d n^d + p'(n) = a_d n^d + o(n^d)$$