Blatt 2 - Gruppe 3

Mike Lenz, Jonas Tesfamariam

3. Mai 2023

Aufgabe 1

a)

Wir wissen, dass $|A| = 5 = n, |B| = 6 = m$. Mithilfe der Formel von 1.7.1 aus dem Skript erhalten wir:

$$\prod_{i=0}^{n-1}(m-i) = \prod_{i=0}^{4}(6-i) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720.$$

Somit gibt es 720 injektive Abbildungen der Form $A \to B$.

b)

$$720 - [\text{Anzahl aller Funktionen, welche die Kondition nicht erfüllen}]$$

Aufgabe 2

a)

Wir definieren die Menge der Kinder K mit $|K| = 13 = n$ und die Menge der Teams T mit $|T| = 3 = m$. Mithilfe der Formel von 1.8.1 aus dem Skript erhalten wir:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^n = \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\binom{3}{k}(3-k)^{13} =$$
$$1 \cdot \binom{3}{0}(3-0)^{13} - 1 \cdot \binom{3}{1}(3-1)^{13} + 1 \cdot \binom{3}{2}(3-2)^{13} - 1 \cdot \binom{3}{3}(3-3)^{13} =$$
$$3^{13} - 3 \cdot 2^{13} + 3 \cdot 1^{13} = 1569750$$

Es gibt also 1569750 Möglichkeiten die Kinder in Gruppen einzuteilen.

b)

Wir definieren die Menge der Würfe W mit $|W| = n \geq 6$ und die Menge der möglichen Werte E mit $|E| = 6$. Wir wollen nun berechnen wieviele Versuche mit $n \geq 6 = m$ Würfen es gibt, bei denen jede Zahl mindestens einmal geworfen wurde. Dies wird nochmals mithilfe der Formel von 1.8.1 aus dem Skript gemacht:

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{m}{k}(m-k)^n = \sum_{k=0}^{6}(-1)^k \binom{6}{k}(6-k)^n =$$
$$6^n - 6 \cdot 5^n + 15 \cdot 4^n - 20 \cdot 3^n + 15 \cdot 2^n - 6 = A$$

Wir kürzen das Ergebnis mit A ab sodass wir die ganze Formel nicht nochmal hinschreiben müssen. Nun müssen wir lediglich die Anzahl aller möglichen Versuche mit $n \geq 6$ Würfen bestimmen. Da wir für jeden Wurf 6 mögliche Zahlen haben und wir n mal werfen ist diese Anzahl 6^n. Somit ist die Wahrscheinlichkeit bei $n \geq 6$ Würfen jede Zahl mindestens einmal zu würfeln:

$$\frac{A}{6^n}$$

Aufgabe 3

a)

b)

$$\begin{aligned}
S(3,2) &= S(2,1) + 2 \cdot S(2,2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\
S(4,2) &= S(3,1) + 2 \cdot S(3,2) = 1 + 2 \cdot 3 = 7 \\
S(4,3) &= S(3,2) + 3 \cdot S(3,3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \\
S(5,3) &= S(4,2) + 3 \cdot S(4,3) = 7 + 3 \cdot 6 = 25
\end{aligned}$$

Also $S(5,3) = 25$

Aufgabe 4

a)

b)

Wir haben eine Menge der Mitarbeiter M und wollen diese in 3 Bautrupps (Partitionen) einteilen. Somit ist die Anzahl der Möglichkeiten diese Bautrupps zu bilden $S(7,3)$ (wir verwenden die Ergebnisse aus Aufgabe 3b)

$$
\begin{aligned}
&S(3,2) = S(2,1) + 2 \cdot S(2,2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3 \\
&S(4,2) = 7 \\
&S(5,2) = S(4,1) + 2 \cdot S(4,2) = 1 + 2 \cdot 7 = 15 \\
&S(6,3) = S(5,2) + 3 \cdot S(5,3) = 15 + 3 \cdot 25 = 90 \\
&S(6,2) = S(5,1) + 2 \cdot S(5,2) = 1 + 2 \cdot 15 = 31 \\
&S(7,3) = S(6,2) + 3 \cdot S(6,3) = 31 + 3 \cdot 90 = 301
\end{aligned}
$$

Also $S(7,3) = 301$

Aufgabe 5