Blatt 6 - Gruppe 3

Mike Lenz, Jonas Tesfamariam

31. Mai 2023

Aufgabe 1

a)

$V(c \cdot X) = c^2 \cdot V(X)$**:**

$$\begin{aligned} V(c \cdot X) &= \sum_{\omega \in \Omega} ((c \cdot X)(\omega) - E(c \cdot X))^2 \cdot m(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (c \cdot X(\omega) - c \cdot E(X))^2 \cdot m(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (c \cdot (X(\omega) - E(X)))^2 \cdot m(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} c^2 \cdot (X(\omega) - E(X))^2 \cdot m(\omega) \\ &= c^2 \cdot \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - E(X))^2 \cdot m(\omega) \\ &= c^2 \cdot V(X) \end{aligned}$$

$V(X + c) = V(X)$**:**

$$\begin{aligned} V(X + c) &= \sum_{\omega \in \Omega} ((X + c)(\omega) - E(X + c))^2 \cdot m(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + \cancel{c} - E(X) - \cancel{c})^2 \cdot m(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) - E(X))^2 \cdot m(\omega) \\ &= V(X) \end{aligned}$$

b)

$V(X_1 \cdot X_2) = V(X_1) \cdot E(X_2)^2 + E(X_1)^2 \cdot V(X_2) + V(X_1) \cdot V(X_2)$**:** /

Aufgabe 2

a)

X und Y sind abhängig, da z.B.:

$$P(X = 20) = {}^1\!/_2$$
$$P(Y = 0) = {}^1\!/_2$$
$$P(X = 20, Y = 0) = 1 \neq {}^1\!/_4 = P(X = 20) \cdot P(Y = 0)$$

Der Erwartungswert und die Varianz sind gegeben durch:

$$E(X \cdot Y) = (20 \cdot 0) \cdot \frac{1}{2} + (0 \cdot 10) \cdot \frac{1}{2} = 0$$
$$V(X \cdot Y) = (0 - 0)^2 \cdot \frac{1}{2} + (0 \cdot 0)^2 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

b)

X und Y sind unabhängig, da:

n	50	100
$P(X = n)$	$^1/_2$	$^1/_2$

n	2	10
$P(Y = n)$	$^1/_2$	$^1/_2$

n	100	200	500	1000
$P(X \cdot Y = n)$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$

Wobei klar zu sehen ist, dass $P(X \cdot Y) = P(X) \cdot P(Y)$ gilt.

Der Erwartungswert und die Varianz sind gegeben durch:

$$E(X \cdot Y) = 200 \cdot \frac{1}{4} + 500 \cdot \frac{1}{4} + 100 \cdot \frac{1}{4} + 1000 \cdot \frac{1}{4} = 450$$
$$V(X \cdot Y) = (200 - 450)^2 \cdot \frac{1}{4} + (500 - 450)^2 \cdot \frac{1}{4} + (100 - 450)^2 \cdot \frac{1}{4} + (1000 - 450)^2 \cdot \frac{1}{4} = 122500$$

Aufgabe 3

a)

$X_1 \cdot X_3$:

n	0	1	3
$P(X_1 \cdot X_3 = n)$	$1/2$	$3/8$	$1/8$

$X_2 \cdot X_3$:

n	0	1	2	3
$P(X_2 \cdot X_3 = n)$	$5/8$	$1/8$	$1/8$	$1/8$

b)

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = E(X_1 \cdot X_3) - E(X_1) \cdot E(X_3)\\
&E(X_1) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5\\
&E(X_3) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} + = 1.5\\
&E(X_1 \cdot X_3) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 0.75\\
&\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = 0.75 - 0.5 \cdot 1.5 = 0
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{Cov}(X_1, X_3) = 0$ ist $\mathrm{Corr}(X_1, X_3) = 0$.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = E(X_2 \cdot X_3) - E(X_2) \cdot E(X_3)\\
&E(X_2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0.5\\
&E(X_2 \cdot X_3) = 0 \cdot \frac{5}{8} + 1 \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 0.75\\
&\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 0.75 - 0.5 \cdot 1.5 = 0
\end{aligned}$$

Da $\mathrm{Cov}(X_2, X_3) = 0$ ist $\mathrm{Corr}(X_2, X_3) = 0$.

Aufgabe 4

a)

```python
import random

vergleiche = 0


def quicksort(arr):
    # Basisfall
    if len(arr) <= 1:
        return arr

    # Zufaelliges Element der Liste
    pivot = random.choice(arr)

    # Listen fuer die Elemente, die kleiner, groesser oder
    ↪ gleich dem Pivot sind
    left = []
    right = []
    equal = []

    # Zaehlen der Vergleiche
    global vergleiche
    vergleiche += len(arr) - 1

    for x in arr:
        if x < pivot:
            left.append(x)
        elif x > pivot:
            right.append(x)
        else:
            equal.append(x)

    # Rekursiver Aufruf
    return quicksort(left) + equal + quicksort(right)
```

```
# Fuers testen
n = 1000
a = [random.randint(0, n) for i in range(n)]

quicksort(a)

print(vergleiche)
```

b)

Anzahl der Vergleiche

Wir erstellen einen Array mit n Zufälligen Elementen:
$\mathbf{n = 10} \approx 20$
$\mathbf{n = 50} \approx 200$
$\mathbf{n = 100} \approx 520$
$\mathbf{n = 500} \approx 4000$
$\mathbf{n = 1000} \approx 9700$