演習問題解答

@litharge3141

2020 年 8 月 12 日

概要

Karatzas-Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus の Exercise と Problem の解答．問題は載せません．

1 Chapter1

解答 (1.5 Problem)**.** 右連続性を利用して連続な時間を可算に落とす．

任意の $t \geq 0$ に対して $P(X_t = Y_t) = 1$ が成立する．$[0, \infty)$ の稠密な可算集合 $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ を取る．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある P-零集合 N_m が存在して，$\omega \notin N_m$ ならば $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する．そこで $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$ とおくと，N は P-零集合で，$\omega \notin N$ ならば任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する．すなわち，$P(\forall m \in \mathbb{N}, X_{t_m} = Y_{t_m}) = 1$ となる．X, Y はほとんどいたるところ右連続だから，N_X, N_Y という P-零集合を除いて右連続である．$N \cup N_X \cup N_Y$ を改めて N とおく．N は P-零集合である．$\omega \notin N$ とする．任意の $t \geq 0$ に対して，t に右から収束する $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ の部分列 $(t_{m(k)})_{k=1}^{\infty}$ が稠密性から存在する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_{m(k)}}(\omega) = Y_{t_{m(k)}}(\omega)$ が成立することと，右連続性から $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ となる．t は任意だったから，$P(\forall t \geq 0, X_t = Y_t) = 1$ となる．以上により示された．

右連続でなく左連続でもできそうな感じがするが，$t = 0$ のところの処理（というか左連続の定義）が若干面倒であるように思われる．

解答 (1.7 Exercise)**.** 「極限が存在する」という事象を可算な操作で言い換えること，*RCLL* なら不連続な点は高々可算であることに注目する．

$t_0 \in (0, \infty)$ が任意に与えられたとする．任意の $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega)$ は *RCLL* だから不連続点は高々可算で，$(0, t_0)$ 上の不連続点の全体を $(t_k)_{k=1}^{\infty}$ とおける（ω に依存することに注意）．また，$X(\omega)$ は右連続だから，$X(\omega)$ が $(0, t_0)$ で左連続であることと $(0, t_0)$ で連続であることは同値．したがって

$$\omega \in A \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{s \to t_k - 0} X_s(\omega) = X_{t_k}(\omega)$$

が成り立つ．$\lim_{s \to t_k - 0} X_s(\omega) = X_{t_k}(\omega)$ が成り立つことは，任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $\left|X_{t_k - 1/n}(\omega) - X_{t_k}(\omega)\right| < 1/m$ が成立することと同値．後者は

$$\omega \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \left| X_{t_k - \frac{1}{n}} - X_{t_k} \right| < \frac{1}{m} \right\}$$

と書き直せる．$\{|X_{t_k - 1/n} - X_{t_k}| < 1/m\} \in \mathcal{F}_{t_k}^X$ だから，$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_{t_k - 1/n} - X_{t_k}| < 1/m\} \in \mathcal{F}_{t_k}^X$ である．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{F}_{t_k}^X \subset \mathcal{F}_{t_0}^X$ となる．したがって

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|X_{t_k - 1/n} - X_{t_k}| < 1/m\} \in \mathcal{F}_{t_0}^X$$

となり，示された．

解答 (1.16 Problem)**.** X が直積可測だから，可測集合の X による引き戻しはほとんど直積集合の形で書けることを利用する．

E を X の行先の任意の可測集合とする．$X_T^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ を示せばよい．

$$X_T^{-1}(E) = \{\omega \mid X_{T(\omega)}(\omega) \in E\} = \{\omega \mid (T(\omega), \omega) \in X^{-1}(E)\}$$

となるから，任意の $F \in \mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F}$ に対して $\{\omega \mid (T(\omega),\omega) \in F\} \in \mathcal{F}$ が成り立つことを示せば X が可測であることから $X_T^{-1}(E) \in \mathcal{F}$ が従う．

$$\mathcal{D} \coloneqq \{F \subset [0,\infty) \times \Omega \mid \{\omega \mid (T(\omega),\omega) \in F\} \in \mathcal{F}\}$$

とおく．$\mathcal{D}$ が σ-代数であることはやるだけなので省略する．$F = E^t \times E^\Omega, E^t \in \mathcal{B}([0,\infty)), E^\Omega \in \mathcal{F}$ とすると T は可測だから $\{\omega \mid (T(\omega),\omega) \in F\} = E^\Omega \cap T^{-1}(E^t) \in \mathcal{F}$ となり，$F \in \mathcal{D}$ となる．したがって直積 σ-代数の定義から $\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{F} \subset \mathcal{D}$ となり，示された．