SDEの数値計算 強収束

@litharge3141

2020年5月21日

概要

SDEの数値計算の中で最も基本的なEuler-MaruyamaおよびMilsteinのスキームについて，その厳密解への強収束と呼ばれる収束について述べる．これは数値計算の各時間ステップについて，その厳密解からの分散が刻み幅 h を用いて上から評価できるというものである．

1

1.1 準備

主定理を述べる前に必要な用語などについて述べる．数値計算においては確率微分方程式の強解を近似して計算する．

Definition 1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$(B(t))_{t\in[0,T]}$ を m 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする．$1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq m$ に対して，Borel可測な函数 $a^i, \sigma^i_r\colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．このとき，確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が $x \in R^n$ を出発点とする確率微分方程式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t, X(t))dB^r(t)$$

あるいは成分ごとに書いた

$$dX^i(t) = a^i(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma^i_r(t, X(t))dB^r(t)$$

の強解であるとは，

(1) $X(t)$ は可測かつ $\mathcal{F}_t$-適合な連続確率過程である．
(2) 任意の $1 \leq i \leq n$ と $1 \leq r \leq m$ に対して，$\sigma^i_r(t, X(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ かつ $a(t, X(t)) \in L^1[0,T]$ が満たされる．
(3) $X(t)$ は確率積分方程式

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r(s, X(s))dB^r(s)$$

を満たす．

という条件を満たすことをいう．

強解の存在と一意性については次の定理がよく知られている．証明は省略する．

Theorem 1.1. 係数 a, σ_r が以下を満たすと仮定する．

(1) Lipshitz 連続，すなわち，

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t,x) - a(t,y)| + \sum_{r=1}^{m} |\sigma_r(t,x) - (t,y)| \leq K\,|x - y|$$

を満たす．

(2) *1* 次増大条件，すなわち

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t,x)| + \sum_{r=1}^{m} |\sigma_r(t,x)| \leq K(1+|x|)$$

を満たす．

このとき，確率微分方程式の強解 $X(t)$ で，各成分が $\mathcal{L}^2$ に属するものが存在する．さらに $\tilde{X}(t)$ も強解ならば，$P(\forall t \geq 0, X(t) = \tilde{X}(t)) = 1$ が成り立つという意味で，解 $X(t)$ は一意である．