# SPDE の数値計算

@litharge3141

2020 年 6 月 29 日

## 1 Introduction

空間一次元の熱方程式を例にして，SPDE の導入をする．あらすじとしては，Hilbert 空間の完全正規直交系との内積をとって係数についての SDE に帰着できるということであるが，無限次元で考えるので収束の問題が常について回ることに注意する．まずノイズの定義をする．今後，確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のフィルトレーションは右連続かつ $P$-零集合をすべて含むとする．

**Definition 1.1** (柱状 Brown 運動)**.** $H$ を実 Hilbert 空間，$T > 0$ として $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\|\cdot\|_H$ で $H$ のノルムを表すことにする．$W\colon H \times [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ が $H$ 上の柱状 Brown 運動であるとは，

- 任意の 0 でない $\psi \in H$ に対して $W(\psi, \cdot, \cdot)/\|\psi\|_H : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は実 $\mathcal{F}_t$-Brown 運動である．
- 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $\varphi, \psi \in H$ に対して

  $$P\left(\omega \mid \forall t \in [0,T],\, W(\alpha\psi + \beta\varphi, t, \omega) = \alpha W(\psi, t, \omega) + \beta W(\varphi, t, \omega)\right) = 1$$

  が成り立つ．

の二条件が成り立つことをいう．柱状 Brown 運動 $W$ に対して，$W(\psi, t, \cdot)$ を単に $W_t(\psi)$ と書くこともある．

**Theorem 1.1.** *$(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ を可分無限次元実 Hilbert 空間，$(e_k)_{k=1}^\infty$ を $H$ の可算な完全正規直交系とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$(B_t^n)_{k=1}^\infty$ を独立な $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動の族とする．このとき，$W\colon H \times [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ を $W(\psi, t, \omega) \coloneqq \sum_{k=1}^\infty B_t^k(\omega) \langle \psi, e_k\rangle_H$ によって定めると $W$ は well-defined で，柱状 Brown 運動になる．*

*Proof.* $n \in \mathbb{N}$ に対して $W_t^n(\psi) \coloneqq W^n(\psi, t, \omega) \coloneqq \sum_{k=1}^n B_t^k(\omega) \langle \psi, e_k\rangle_H$ とおく．$(W^n(\psi, \cdot, \cdot))_{n=1}^\infty$ が $M_T^2$ のコーシー列であることを示す．

$$\begin{aligned} E\left[\left(W_T^n(\psi) - W_T^m(\psi)\right)^2\right] &= E\left[\left(\sum_{k=m+1}^n B_T^k \langle \psi, e_k\rangle_H\right)^2\right] \\ &= \sum_{k=m+1}^n E\left[\left(B_T^k\right)^2\right] \langle \psi, e_k\rangle_H^2 = T \sum_{k=m+1}^n \langle \psi, e_k\rangle_H^2 \end{aligned}$$

より，$\sum_{k=1}^\infty \langle \psi, e_k\rangle_H^2 = \|\psi\|_H^2$ であることから従う．したがって $W$ は well-defined で，$W_t(\psi) \in M_T^2$ である．次に，$W(\psi)/\|\psi\|_H$ が実 $\mathcal{F}_t$-Brown 運動であることを示す．Levy の定理から $\langle W(\psi)/\|\psi\|_H\rangle_t = t$ を示

せば十分で，特に $(W_t(\psi)/\|\psi\|_H)^2-t$ がマルチンゲールであることを証明すれば十分である．$0\leq s<t\leq T$ が任意に与えられたとする．$\Phi$ を $\mathcal{F}_s$-可測かつ有界な関数とすると，

$$
\begin{aligned}
&E\left[\left(W_t(\psi)^2-W_s(\psi)^2\right)\Phi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}E\left[\left(W_t^n(\psi)^2-W_s^n(\psi)^2\right)\Phi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}E\left[\left(\left(\sum_{k=1}^n B_t^k\langle\psi,e_k\rangle_H\right)^2-\left(\sum_{k=1}^n B_s^k\langle\psi,e_k\rangle_H\right)^2\right)\Phi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}E\left[\left(\left(\sum_{k=1}^n (B_t^k-B_s^k)\langle\psi,e_k\rangle_H\right)^2+\left(2\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n (B_t^k-B_s^k)B_s^l\langle\psi,e_k\rangle_H\langle\psi,e_l\rangle_H\right)\right)\Phi\right]\\
&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n E\left[\left(B_t^k-B_s^k\right)^2\right]E\left[\Phi\right]\langle\psi,e_k\rangle_H^2+2\sum_{k=1}^n\sum_{l=1}^n\langle\psi,e_k\rangle_H\langle\psi,e_l\rangle_H E\left[B_t^k-B_s^k\right]E\left[B_s^l\Phi\right]\\
&=(t-s)E\left[\Phi\right]\|\psi\|_H^2
\end{aligned}
$$

が成り立つ．特に $\Phi$ として $\mathcal{F}_s$-可測な集合の定義関数をとれば，$(W_t(\psi)/\|\psi\|_H)^2-t$ がマルチンゲールであることが従う．よって示された．最後に線形性を証明する．$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ および $\psi,\varphi\in H$ が任意に与えられたとする．$t\in[0,T]$ の稠密な可算集合 $(t_m)_{m=1}^\infty$ が与えられたとする．任意の $n\in\mathbb{N}$ と任意の $\omega\in\Omega$ に対して

$$W_{t_m}^n(\alpha\psi+\beta\varphi)=\alpha W_{t_m}^n(\psi)+\beta W_{t_m}^n(\varphi)$$

が成立する．ここで $W_{t_m}^n(\cdot)$ は $W_{t_m}(\cdot)$ に $L^2(\Omega)$ で収束するので，必要なら部分列を取ることである $P(E_m)=0$ となる $E_m\in\mathcal{F}$ が存在して，$\omega\notin E_m$ ならば

$$W_{t_m}(\alpha\psi+\beta\varphi)=\alpha W_{t_m}(\psi)+\beta W_{t_m}(\varphi)$$

が成立する．$E=\bigcup_{m=1}^\infty E_m$ とすると $P(E)=0$ であり，$\omega\notin E$ ならば任意の $m\in\mathbb{N}$ に対して

$$W_{t_m}(\alpha\psi+\beta\varphi)=\alpha W_{t_m}(\psi)+\beta W_{t_m}(\varphi)$$

が成立する．$W$ は $t$ について連続で，$(t_m)_{m=1}^\infty$ が $[0,T]$ で稠密であることから，$\omega\notin E$ ならば任意の $t\in[0,T]$ に対して

$$W_t(\alpha\psi+\beta\varphi)=\alpha W_t(\psi)+\beta W_t(\varphi)$$

が成立する．したがって，線形性も満たされ，証明が終わった． □

$\sum_{k=1}^\infty B_t^k\langle\cdot,e_k\rangle_H$ は柱状 Brown 運動であることが分かった．もし $\sum_{k=1}^\infty B_t^k(\omega)e_k$ が $H$ のノルムでほとんどいたるところ収束すれば，$\sum_{k=1}^\infty B_t^k\langle\cdot,e_k\rangle_H=\left\langle\cdot,\sum_{k=1}^\infty B_t^k(\omega)e_k\right\rangle_H$ がほとんどいたるところ成立するから $H$ に値を取る確率過程 $\sum_{k=1}^\infty B_t^k(\omega)e_k$ と同一視できる．残念ながら $H$ の元としては収束しないので，このような見方は正当化されない．$H$ の元と同一視できるような場合として，色付きノイズと呼ばれるノイズを考える．まず，Hilbert 空間に値を取るノイズを考える．

**Definition 1.2.** $(H,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ を可分実 Hilbert 空間とし，$T>0$ として $(\Omega,\mathcal{F},P)$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$M\colon[0,T]\times\Omega\to H$ が確率過程であるとは，$\|M_t(\omega)\|_H$ が実数値の確率過程となることをいう．$H$ が可分だから，任意の $\varphi\in H$ に対して $\langle\varphi,M_t(\omega)\rangle_H$ が実数値確率過程であるとしてもよい．

このように可測性を定義しておけば $M$ のモーメントを Bochner 積分や Dunford 積分で定めることができる．特に今後必要な $L^2$-連続マルチンゲールを定義する．

**Definition 1.3.** $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ を可分実 Hilbert 空間とし，$T > 0$ として $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とする．確率過程 $M\colon [0,T]\times\Omega \to H$ が $L^2$-連続マルチンゲールとは，任意の $\varphi \in H$ に対して $\langle \varphi, M\rangle_H \in M_T^2(\mathcal{F}_t)$ となることをいう．このとき，$M \in M_T^2(H)$ と書く．

今回は Dunford 積分で定義したが，Bochner 積分で定義しても同じである．色付きノイズの定義に入る．可分 Hilbert 空間 $H$ 上のトレースクラス作用素の全体を $C_1(H)$ とかき，Hilbert-Schmidt クラス作用素の全体を $C_2(H)$ とかく．$P \in C_2(H)$ を取る．$Q = P^*P$ として $Q$ を定めると $Q \in C_1(H)$ であることに注意する．特に $(e_k)_{k=1}^\infty$ を $H$ の完全正規直交系とすると $\sum_{k=1}^\infty \langle Qe_k, e_k\rangle_H$ は $(e_k)_{k=1}^\infty$ の取り方によらずに一定値に収束するので，これを $TrQ$ と名づけるのであった．都合のいい $(e_k)_{k=1}^\infty$ を取って $P = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{s_k} e_k \otimes e_k$ および $Q = \sum_{k=1}^\infty s_k e_k \otimes e_k$ として Schmidt 展開すると，$TrQ = \sum_{k=1}^\infty s_k < \infty$ となる．柱状 Brown 運動 $W = \sum_{k=1}^\infty B_t^k e_k$ は $H$ に値をとる確率過程としては意味を持たない．しかし形式的に $P$ を作用させて

$$
\begin{aligned}
PW &= \sum_{k=1}^\infty \sqrt{s_k} e_k \otimes e_k W \\
&= \sum_{k=1}^\infty \sqrt{s_k} \left\langle \sum_{l=1}^\infty B_t^l e_l, e_k \right\rangle_H e_k \\
&= \sum_{k=1}^\infty \sqrt{s_k} B_t^k e_k
\end{aligned}
$$

として計算すると，一番最後は $E[\|\sum_{k=1}^\infty \sqrt{s_k} B_t^k e_k\|_H^2] = \sum_{k=1}^\infty s_k E[(B_t^k)^2] = tTrQ$ となってほとんど至るところ $H$ で収束し，$H$ に値をとる確率過程として意味をもつ．これを踏まえて，次のように定義する．

**Definition 1.4.** $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ を可分無限次元実 Hilbert 空間，$(e_k)_{k=1}^\infty$ を $H$ の可算な完全正規直交系とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$(B_t^n)_{k=1}^\infty$ を独立な $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動の族とする．$(s_k)_{k=1}^\infty$ を $\sum_{k=1}^\infty s_k < \infty$ となる非負実数単調減少列とするとき，$Q$-Brown 運動 $W^Q\colon [0,T]\times\Omega \to H$ を

$$
W^Q \coloneqq \sum_{k=1}^\infty \sqrt{s_k} B_t^k e_k
$$

によって定義する．$Q$-Brown 運動 $W^Q$ に対して $Q \coloneqq \sum_{k=1}^\infty s_k e_k \otimes e_k$ と定めると $Q \in C_1(H)$ であり，$Q$ を共分散という．

特に $H = L^2(X, \mu)$ として $\sigma$-有限な測度空間上の $L^2$ 空間となるときは，$Q$ が定める Hilbert-Schmidt 型積分作用素の積分核と同一視して $Q(x,y) = \sum_{k=1}^\infty s_k e_k(x) e_k(y)$ のように書くこともある．先に $Q \in C_1(H)$ を定めてから $W^Q$ を定める方がスマートだが，$Q$ の Schmidt 展開の仕方によらないことを示すのが大変そうなので，ここでは上のように定義した．

**Example 1.1** (熱方程式)**.** $H = L^2[0, 2\pi]$ とする．以下では解の意味にこだわらず，形式的に計算して解の性質を予想する．

$$
\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} + W^Q, \quad (t,x) \in (0,\infty)\times(0,2\pi) \\
&u(0,x) = u_0(x), \quad u(t,0) = u(t,2\pi)
\end{aligned}
$$

を考える．ここで $W^Q$ は *$Q$-Brown* 運動であり，$H$ の完全正規直交系 $e_k = \sqrt{1/\pi}\sin(kx/2)$ と $\sum_{k=1}^\infty q_k < \infty$ となる減少列 $(q_k)_{k=1}^\infty$ を用いて $W^Q = \sum_{k=1}^\infty \sqrt{q_k} B_t^k e_k$ によって与えられる．$(e_k)_{k=1}^\infty$ は $\lambda_k \coloneqq k^2/4$ とする

と次を満たすことに注意する．

$$-\partial_x^2 e_k = \lambda_k e_k, \quad e_k(0) = e_k(2\pi) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) e_k$ の形で解を求める．$W^Q$ と $u$ の展開をもとの式に代入し，$e_i$ との内積をとると

$$\begin{aligned} du_i(t) &= -\lambda_i u_i(t) dt + \sqrt{q_i} dB_t^i \\ u_i(0) &= \langle u_0, e_i \rangle_H \end{aligned}$$

という確率微分方程式を得る．$i = 1, 2, \ldots$ に対してこれらを解けばよい．この確率微分方程式自体は簡単にとけて

$$u_i(t) = u_i(0) e^{-\lambda_i t} + \sqrt{q_i} \int_0^{t-s} e^{-\lambda_i (t-s)} dB_s^i$$

として求まるから，

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ u_k(0) e^{-\lambda_k t} + \sqrt{q_k} \int_0^{t-s} e^{-\lambda_k (t-s)} dB_s^k \right] e_k$$

という形で解が求まる．この形で表される関数の性質を調べる．