Evans 演習問題解答

@litharge3141

2020 年 6 月 30 日

概要

Evans, Partial Differential Equations の演習問題の解答．問題は載せません．

1　1 章の問題

略

2　2 章の問題

2.1　方針と解答

cu がなければ解けるので cu を非斉次項だと思って定数変化法を用いる．
解答． $v(t,x) = g(x-bt)$ とおく．$v_t = -b \cdot Dv$ が満たされることに注意する．$u(t,x) = \varphi(t)v(t,x)$ とおいて方程式に代入すると

$$\begin{aligned}&\varphi'(t)v(t,x) + \varphi(t)\partial_t v(t,x) + b \cdot Du(t,x) + c\varphi(t)v(t,x)\\ &= \varphi'(t)v(t,x) + c\varphi(t)v(t,x) = 0\end{aligned}$$

から $\varphi'(t) = -c\varphi(t)$ を得る．よって $\varphi(t) = Ae^{-ct}$ となり，初期条件と合わせて $u(t,x) = e^{-ct}g(x-bt)$ を得る．

2.2　方針と解答

公式を導くつもりで成分計算をする．O は書きづらいので U とかにしてほしかったです．
解答． O が直交行列であることから，任意の $1 \le i,j \le n$ に対して $\sum_{k=1}^n O_{ik}O'_{kj} = \sum_{k=1}^n O_{ik}O_{jk} = \delta_{ij}$ が成り立つことに注意する．ここで δ_{ij} は $i=j$ のとき 1 でそれ以外は 0 として定める（単位行列の i,j 成分）．u が調和関数であると仮定する．$1 \le s \le n$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial x_s}u(Ox) = \sum_{i=1}^n u_{x_i}(Ox)\frac{\partial(Ox)_i}{\partial x_s}$$

となる．$(Ox)_i = \sum_{j=1}^n O_{ij}x_j$ となるから $\frac{\partial(Ox)_i}{\partial x_s} = O_{is}$ となる．したがって

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}u(Ox) = \frac{\partial}{\partial x_s}\sum_{i=1}^n u_{x_i}(Ox)O_{is} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n u_{x_ix_j}(Ox)O_{is}O_{js}$$

となるから，

$$\triangle u(Ox) = \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_s^2}u(Ox) = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n u_{x_ix_j}(Ox)\sum_{s=1}^n O_{is}O_{js} = \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n u_{x_ix_j}(Ox)\delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(Ox) = 0 \quad (\because u \text{ は調和関数})$$

により結論を得た.