

SDE の数値計算 強収束

@litharge3141

2020 年 5 月 22 日

概要

SDE の数値計算の中で最も基本的な Euler-Maruyama および Milstein のスキームについて、その厳密解への強収束と呼ばれる収束について述べる。これは数値計算の各時間ステップについて、その厳密解からの分散が刻み幅 h を用いて上から評価できるというものである。

1

1.1 準備

主定理を述べる前に必要な用語などについて述べる。数値計算においては確率微分方程式の強解を近似して計算する。

Definition 1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし、 $(B(t))_{t \in [0, T]}$ を m 次元 \mathcal{F}_t -ブラウン運動とする。 $1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq m$ に対して、Borel 可測な函数 $a^i, \sigma_r^i: [0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられているとする。このとき、確率過程 $(X(t))_{t \in [0, T]}$ が $x \in \mathbb{R}^n$ を出発点とする確率微分方程式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t, X(t))dB^r(t)$$

あるいは成分ごとに書いた

$$dX^i(t) = a^i(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^m \sigma_r^i(t, X(t))dB^r(t)$$

の強解であるとは、以下の条件を満たすことをいう。

- $X(t)$ は可測かつ \mathcal{F}_t -適当な連続確率過程である。
- 任意の $1 \leq i \leq n$ と $1 \leq r \leq m$ に対して、 $\sigma_r^i(t, X(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ かつ $a(t, X(t)) \in L^1[0, T]$ が満たされる。
- $X(t)$ は確率積分方程式

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r(s, X(s))dB^r(s)$$

あるいは成分ごとに書いた

$$X^i(t) = x^i + \int_0^t a^i(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r^i(s, X(s))dB^r(s)$$

を満たす。

強解の存在と一意性については次の定理がよく知られている。証明は省略する。

Theorem 1.1. 係数 a, σ_r が以下を満たすと仮定する。

- *Lipshitz* 連続, すなわち,

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t, x) - a(t, y)| + \sum_{r=1}^m |\sigma_r(t, x) - \sigma_r(t, y)| \leq K |x - y|$$

を満たす.

- 1 次増大条件, すなわち

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t, x)| + \sum_{r=1}^m |\sigma_r(t, x)| \leq K(1 + |x|)$$

を満たす.

このとき, 確率微分方程式の強解 $X(t)$ で, 各成分が \mathcal{L}^2 に属するものが存在する. さらに $\tilde{X}(t)$ も強解ならば, $P(\forall t \geq 0, X(t) = \tilde{X}(t)) = 1$ が成り立つという意味で, 解 $X(t)$ は一意である.

1.2 数値スキームの導出

以降, Definition 1.1 の確率微分方程式が与えられ, その係数は Theorem 1.1 の仮定を満たし, かつ十分になめらかであるとする. 初期値 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して一意存在する強解を $X(t)$ とする. $0 < h < T$ に対して $t \in [0, T - h]$ において

$$X(t+h) = X(t) + \int_t^{t+h} a(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s)$$

が成立するから, 適当に積分を近似して数値スキームを導く. 確率積分の項をどう近似するかで大きく 2 種類に分かれる.

1.2.1 Euler-Maruyama Scheme

Drift 項の近似は例えば陽的に

$$\int_t^{t+h} a(s, X(s))ds \approx a(t, X(t))h$$

とする. 確率積分の項を

$$\sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s) \approx \sum_{r=1}^m \sigma_r(t, X(t))(B_r(t+h) - B_r(t))$$

として近似する. これをもとにして, $Nh = T$ となるような $h > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して, $t_k := kh$ における数値解 X_k についての漸化式

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)(B_r(t_{k+1}) - B_r(t_k)) \\ X_0 = x \end{cases}$$

を得る. これを陽的 Euler-Maruyama スキームという. $B_r(t_{k+1}) - B_r(t_k)$ は平均 0 で分散 h の正規分布だから, ξ_r を標準正規分布に従う確率変数として $B_r(t_{k+1}) - B_r(t_k) = \sqrt{h}\xi_r$ が成り立つ. これを使って書き直すと

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

となる. 以上と同様にして Drift 陰的 Euler-Maruyama が

$$X_{k+1} = X_k + a(t_{k+1}, X_{k+1})h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

のように与えられる．また， $\lambda \in (0, 1)$ に対し混合 Euler-Maruyama

$$X_{k+1} = X_k + \lambda a(t_k, X_k)h + (1 - \lambda)a(t_{k+1}, X_{k+1})h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

ないし

$$X_{k+1} = X_k + a(\lambda t_k + (1 - \lambda)t_{k+1}, \lambda X_k + (1 - \lambda)X_{k+1})h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

も与えられる．これらのスキームを比較するには安定性を調べなければならないが，それは別の機会にする．

1.2.2 Milstein Scheme

Drift 項の近似は Euler-Maruyama と同様である．確率積分の近似が異なる．

$$\sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s)$$

において，被積分函数に伊藤の公式を適用して，

$$\begin{aligned} \sigma_r(s, X(s)) &= \sigma_r(t, X(t)) + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t}(u, X(u)) + \frac{1}{2} \Delta \sigma_r(u, X(u)) \right) du \\ &\quad + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u)) \sigma_l^j(u, X(u)) dB_l(u) \end{aligned}$$

を得る．通常の積分の項は近似計算するときに h^2 の項が出てくるので，0 とみなす．すなわち，

$$\sigma_r(s, X(s)) \approx \sigma_r(t, X(t)) + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u)) \sigma_l^j(u, X(u)) dB_l(u)$$

とする．これを代入して，

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s) \\ &= \sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \left(\sigma_r(t, X(t)) + \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^n \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u)) \sigma_l^j(u, X(u)) dB_l(u) \right) dB_r(s) \\ &\approx \sum_{r=1}^m \sigma_r(t, X(t))h + \sum_{r,l=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t, X(t)) \sigma_l^j(t, X(t)) \int_t^{t+h} \int_t^s dB_l(u) dB_r(s) \end{aligned}$$

を得る． $\int_t^{t+h} \int_t^s dB_l(u) dB_r(s)$ は一般的には解析的に計算する方法が今までに知られていない．さらにブラウン運動（正確には像測度を考えた Wiener 過程）の汎函数として通常の広義一様収束位相では連続ではないため，近似計算も難しい．ここでは計算ができるような場合を二つ紹介する．