Kolmogorov-Centsov の定理

@litharge3141

2020 年 5 月 21 日

概要

このノートでは，確率過程の L^p ノルム評価からヘルダー連続性を導く Kolmogorov-Centsov の定理を証明する．この定理はブラウン運動の構成や，確率微分方程式の解の評価など，種々の確率過程の連続性の証明に広く用いられる．

1　定理の主張と証明

Theorem 1.1 (Kolmogorov-Centsov の定理)**.** $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とし，$(B, \|\cdot\|)$ を *Banach* 空間とそのノルムの組とする．$X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ を Ω から B への確率過程とする．

$$\exists C, p, q > 0, \quad \forall s, t \in [0, T], \quad E[\|X_t - X_s\|^p] \leq C\,|t-s|^{1+q}$$

が成立すると仮定する．このとき，任意の $0 < r < q/p$ に対して，ある Ω から B への確率過程 $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\in[0,T]}$ が存在して，次を満たす．

(1) 任意の $t \in [0, T]$ に対して $X_t = \tilde{X}_t$ がほとんどいたるところ成立する．

(2) ほとんどいたるところ正の値を取るある確率変数 $h\colon \Omega \to \mathbb{R}$ とある $M > 0$ が存在して

$$P\left(\omega \;\middle|\; \sup_{\substack{0<|t-s|<h(\omega) \\ s,t\in[0,T]}} \frac{\left\|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\right\|}{|t-s|^r} \leq M\right)$$

が成立する．

特に，X は r 次 *Hölder* 連続な修正 $\tilde{X}$ を持つ．

Proof. $D_n \coloneqq \left\{ \frac{kT}{2^n} \;\middle|\; k = 0, 1, \ldots, 2^n \right\}$ とし，$D \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ とおく．D 上で一様連続な確率過程を構成する． $\square$

2　応用例