SPDE の数値計算

@litharge3141

2020 年 6 月 22 日

1 Introduction

空間一次元の熱方程式を例にして，SPDE の導入をする．あらすじとしては，Hilbert 空間の完全正規直交系との内積をとって係数についての SDE に帰着できるということであるが，無限次元で考えるので収束の問題が常について回ることに注意する．まずノイズの定義をする．

Definition 1.1 (柱状 Brown 運動)**.** H を実 Hilbert 空間，$T > 0$ として $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とする．$\|\cdot\|_H$ で H のノルムを表すことにする．$W\colon H \times [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ が H 上の柱状 Brown 運動であるとは，

- 任意の $\psi \in H$ に対して $W(\psi, \cdot, \cdot)/\|\psi\|_H : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ は実 $\mathcal{F}_t$-Brown 運動である．
- 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $\varphi, \psi \in H$ に対して

$$P\left(\omega \mid \forall t \in [0,T],\, W(\alpha\psi + \beta\varphi, t, \omega) = \alpha W(\psi, t, \omega) + \beta W(\varphi, t, \omega)\right) = 1$$

  が成り立つ．

の二条件が成り立つことをいう．柱状 Brown 運動 W に対して，$W(\psi, t, \cdot)$ を単に $W_t(\psi)$ と書くこともある．

Theorem 1.1. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ を可分無限次元実 *Hilbert* 空間，$(e_k)_{k=1}^\infty$ を H の可算な完全正規直交系とする．$(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$(B_t^n)_{k=1}^\infty$ を独立な $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動の族とする．このとき，$W\colon H \times [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ を $W(\psi, t, \omega) \coloneqq \sum_{k=1}^\infty B_t^k(\omega) \langle\psi, e_k\rangle_H$ によって定めると W は *well-defined* で，柱状 *Brown* 運動になる．

Proof. $n \in \mathbb{N}$ に対して $W^n(\psi, t, \omega) \coloneqq \sum_{k=1}^n B_t^k(\omega) \langle\psi, e_k\rangle_H$ とおく．$(W^n(\psi, \cdot, \cdot))_{n=1}^\infty$ が $L^2([0,T] \times \Omega)$ のコーシー列であることを示す． □