

演習問題解答

@litharge3141

2020 年 7 月 6 日

概要

Karatzas-Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus の Exercise と Problem の解答. 問題は載せません.

1 Chapter1

解答 (1.5 Problem). 右連続性を利用して連続な時間を可算に落とす.

任意の $t \geq 0$ に対して $P(X_t = Y_t) = 1$ が成立する. $[0, \infty)$ の稠密な可算集合 $(t_m)_{m=1}^\infty$ を取る. 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある P -零集合 N_m が存在して, $\omega \notin N_m$ ならば $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する. そこで $N = \bigcup_{m=1}^\infty N_m$ とおくと, N は P -零集合で, $\omega \notin N$ ならば任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する. すなわち, $P(\forall m \in \mathbb{N}, X_{t_m} = Y_{t_m}) = 1$ となる. X, Y はほとんどいたるところ右連続だから, N_X, N_Y という P -零集合を除いて右連続である. $N \cup N_X \cup N_Y$ を改めて N とおく. N は P -零集合である. $\omega \notin N$ とする. 任意の $t \geq 0$ に対して, t に右から収束する $(t_m)_{m=1}^\infty$ の部分列 $(t_{m(k)})_{k=1}^\infty$ が稠密性から存在する. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_{m(k)}}(\omega) = Y_{t_{m(k)}}(\omega)$ が成立することと, 右連続性から $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ となる. t は任意だったから, $P(\forall t \geq 0, X_t = Y_t) = 1$ となる. 以上により示された.

右連続でなく左連続でもできそうな感じがするが, $t = 0$ のところの処理 (というか左連続の定義) が若干面倒であるように思われる.

解答 (1.7 Exercise). 「極限が存在する」という事象を可算な操作で言い換えること, $RCLL$ なら不連続な点は高々可算であることがポイントである.

$t_0 \in (0, \infty)$ が任意に与えられたとする. 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $X(\omega)$ は $RCLL$ だから不連続点は高々可算で, $(0, t_0)$ 上の不連続点の全体を $(t_k)_{k=1}^\infty$ とおける (ω に依存することに注意). また, $X(\omega)$ は右連続だから, $X(\omega)$ が $(0, t_0)$ で左連続であることと $(0, t_0)$ で連続であることは同値. したがって

$$\omega \in A \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \lim_{s \rightarrow t_k - 0} X_s(\omega) = X_{t_k}(\omega)$$

が成り立つ. $\lim_{s \rightarrow t_k - 0} X_s(\omega) = X_{t_k}(\omega)$ が成り立つことは, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $|X_{t_k - 1/n}(\omega) - X_{t_k}(\omega)| < 1/m$ が成立することと同値. 後者は

$$\omega \in \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=N}^\infty \left\{ |X_{t_k - \frac{1}{n}} - X_{t_k}| < \frac{1}{m} \right\}$$

と書き直せる. $\{|X_{t_k - 1/n} - X_{t_k}| < 1/m\} \in \mathcal{F}_{t_k}^X$ だから, $\bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=N}^\infty \{|X_{t_k - 1/n} - X_{t_k}| < 1/m\} \in \mathcal{F}_{t_k}^X$ である. 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\mathcal{F}_{t_k}^X \subset \mathcal{F}_{t_0}^X$ となる. したがって

$$A = \bigcap_{k=1}^\infty \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{N=1}^\infty \bigcap_{n=N}^\infty \{|X_{t_k - 1/n} - X_{t_k}| < 1/m\} \in \mathcal{F}_{t_0}^X$$

となり, 示された.