SDE の数値計算 強収束

@litharge3141

2020 年 5 月 24 日

概要

SDE の数値計算の中で最も基本的な Euler-Maruyama および Milstein のスキームについて，その厳密解への強収束と呼ばれる収束について述べる．これは数値計算の各時間ステップについて，その厳密解からの分散が刻み幅 h を用いて上から評価できるというものである．

1

1.1 準備

主定理を述べる前に必要な用語などについて述べる．

Definition 1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とする．この確率空間上の m 次元ブラウン運動 $(B(t))_{t\in[0,T]}$ が $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動であるとは，以下の条件を満たすことをいう．

- $B(t)$ は $\mathcal{F}_t$ 適合である．
- 任意の $0 \leq s < t \leq T$ に対して $B(t) - B(s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立．

Definition 1.2. $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とする．

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t) \coloneqq \left\{ f \;\middle|\; f \in L^2([0,T] \otimes \Omega),\ f \text{ は } \mathcal{F}_t\text{-適合} \right\}$$

と定める．

数値計算においては確率微分方程式の強解を近似して計算する．

Definition 1.3. $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$(B(t))_{t\in[0,T]}$ を m 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする．$1 \leq i \leq n, 1 \leq r \leq m$ に対して，Borel 可測な函数 $a^i, \sigma^i_r \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．このとき，確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が $x \in \mathbb{R}^n$ を出発点とする確率微分方程式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t, X(t))dB^r(t) \tag{1}$$

あるいは成分ごとに書いた

$$dX^i(t) = a^i(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma^i_r(t, X(t))dB^r(t)$$

の強解であるとは，以下の条件を満たすことをいう．

- $X(t)$ は可測かつ $\mathcal{F}_t$-適合な連続確率過程である．
- 任意の $1 \leq i \leq n$ と $1 \leq r \leq m$ に対して，$\sigma^i_r(t, X(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ かつ $a(t, X(t)) \in L^1[0,T]$ が満たされる．
- $X(t)$ は確率積分方程式

$$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r(s, X(s))dB^r(s)$$

あるいは成分ごとに書いた

$$X^i(t) = x^i + \int_0^t a^i(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r^i(s, X(s))dB^r(s)$$

を満たす．

強解の存在と一意性については次の定理がよく知られている．証明は省略する．

Theorem 1.1. 係数 a, σ_r が以下を満たすと仮定する．

- *Lipshitz* 連続，すなわち，

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t,x) - a(t,y)| + \sum_{r=1}^m |\sigma_r(t,x) - \sigma_r(t,y)| \leq K\,|x - y|$$

を満たす．

- *1* 次増大条件，すなわち

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t,x)| + \sum_{r=1}^m |\sigma_r(t,x)| \leq K(1 + |x|)$$

を満たす．

このとき，確率微分方程式の強解 $X(t)$ で，各成分が $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ に属するものが存在する．さらに $\tilde{X}(t)$ も強解ならば，$P(\forall t \geq 0, X(t) = \tilde{X}(t)) = 1$ が成り立つという意味で，解 $X(t)$ は一意である．

1.2 数値スキームの導出

以降，Definition1.3 の確率微分方程式が与えられ，その係数は Theorem1.1 の仮定を満たし，かつ十分になめらかであるとする．初期値 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して一意存在する強解を $X(t)$ とする．$0 < h (< T)$ に対して $t \in [0, T-h]$ において

$$X(t+h) = X(t) + \int_t^{t+h} a(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB^r(s)$$

が成立するから，適当に積分を近似して数値スキームを導く．確率積分の項をどう近似するかで大きく 2 種類に分かれる．

1.2.1 Euler-Maruyama Scheme

Drift 項の近似は例えば陽的に

$$\int_t^{t+h} a(s, X(s))ds \approx a(t, X(t))h$$

とする．確率積分の項を

$$\sum_{r=1}^m \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB^r(s) \approx \sum_{r=1}^m \sigma_r(t, X(t))(B^r(t+h) - B^r(t))$$

として近似する．これをもとにして，$Nh = T$ となるような $h > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して，$t_k := kh$ における数値解 X_k についての漸化式

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)(B^r(t_{k+1}) - B^r(t_k)) \\ X_0 = x \end{cases}$$

を得る．これを陽的 Euler-Maruyama スキームという．$B^r(t_{k+1}) - B^r(t_k)$ は平均 0 で分散 h の正規分布だから，ξ_r を標準正規分布に従う確率変数として $B^r(t_{k+1}) - B^r(t_k) = \sqrt{h}\xi_r$ が成り立つ．これを使って書き直すと

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

となる．以上と同様にして drift 陰的 Euler-Maruyama が

$$X_{k+1} = X_k + a(t_{k+1}, X_{k+1})h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

のように与えられる．また，$\lambda \in (0,1)$ に対し混合 Euler-Maruyama

$$X_{k+1} = X_k + \lambda a(t_k, X_k)h + (1-\lambda)a(t_{k+1}, X_{k+1})h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

ないし

$$X_{k+1} = X_k + a(\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k+1}, \lambda X_k + (1-\lambda)X_{k+1})h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

も与えられる．これらのスキームを比較するには安定性を調べなければならないが，それは別の機会にする．

1.2.2 Milstein Scheme

drift 項の近似は Euler-Maruyama と同様である．確率積分の近似が異なる．

$$\sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB^r(s)$$

において，被積分函数に伊藤の公式を適用して，

$$\begin{aligned}\sigma_r(s, X(s)) = \sigma_r(t, X(t)) &+ \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t}(u, X(u)) + \frac{1}{2}\triangle\sigma_r(u, X(u)) \right) du \\ &+ \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u))\sigma_l^j(u, X(u))dB^l(u)\end{aligned}$$

を得る．通常の積分の項は近似計算するときに h^2 の項が出てくるので，0 とみなす．すなわち，

$$\sigma_r(s, X(s)) \approx \sigma_r(t, X(t)) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u))\sigma_l^j(u, X(u))dB^l(u)$$

とする．これを代入して，

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB^r(s) \\ &= \sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \left(\sigma_r(t, X(t)) + \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u))\sigma_l^j(u, X(u))dB^l(u) \right) dB^r(s) \\ &\approx \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t, X(t))(B(t+h) - B(t)) + \sum_{r,l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t, X(t))\sigma_l^j(t, X(t)) \int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s)\end{aligned}$$

を得る．これから，一般の陽的 Milstein Scheme を

$$\begin{aligned}X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h &+ \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)(B(t+h) - B(t)) \\ &+ \sum_{r,l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t_k, X_k)\sigma_l^j(t_k, X_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^s dB^l(u)dB^r(s)\end{aligned} \tag{2}$$

として導くことができる．$\int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s)$ は一般に解析的に計算する方法が知られていない．さらにブラウン運動（正確には像測度を考えた Wiener 過程）の汎函数として通常の広義一様収束位相では連続ではないため，近似計算も難しい．ここでは解析的に計算ができるような場合を二つ紹介する．

$m = 1$ の場合．$\sigma_1(t,x)$ を単に $\sigma(t,x)$ とし，$B_1(t)$ を単に $B(t)$ と書くことにする．問題の項 $\int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s)$ は

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h}\int_t^s dB(u)dB(s) &= \int_t^{t+h} B(s)-B(t)dB(s)\\ &= \int_t^{t+h} B(s)dB(s) - B(t)(B(t+h)-B(t))\\ &= \frac{1}{2}\left(B(t+h)^2 - B(t)^2 - h\right) - B(t)(B(t+h)-B(t))\\ &= \frac{1}{2}\left((B(t+h)-B(t))^2 - h\right)\end{aligned}$$

として計算ができるので，Milstein Scheme(2) は

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sigma(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma}{\partial x_j}(t_k, X_k)\sigma^j(t_k, X_k)(\xi^2 - 1)h$$

となる．ここで，ξ は標準正規分布に従う確率変数とした．この表式のほうがどちらかというと有名だと思われる．

係数が対称な場合．任意の $1 \le l, r \le n$ に対して

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}\sigma_l^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_l}{\partial x_j}\sigma_r^j$$

という対称性があると仮定する．見やすさのために $\Lambda_{r,l}\sigma(t,x) \coloneqq \sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma_r}{\partial x_j}(t,x)\sigma_l^j(t,x)$ とおけば，$\Lambda_{r,l}\sigma = \Lambda_{l,r}\sigma$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}&\sum_{r,l=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t, X(t))\sigma_l^j(t, X(t)) \int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{r,l=1}^m \Lambda_{r,l}\sigma(t, X(t))\left(\int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s) + \int_t^{t+h}\int_t^s dB^r(u)dB^l(s)\right)\end{aligned}$$

となる．この確率積分の項は，

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s) + \int_t^{t+h}\int_t^s dB^r(u)dB^l(s)\\ &= \int_t^{t+h} B^r(s)dB^l(s) + \int_t^{t+h} B^l(s)dB^r(s)\\ &\quad - B^r(t)(B^l(t+h) - B^l(t)) - B^l(t)(B^r(t+h) - B^r(t))\\ &= B^r(t+h)B^l(t+h) - B^r(t)B^l(t)\\ &\quad - B^r(t)(B^l(t+h) - B^l(t)) - B^l(t)(B^r(t+h) - B^r(t))\\ &= (B^r(t+h) - B^r(t))(B^l(t+h) - B^l(t))\end{aligned}$$

として計算できる．以上により，

$$\begin{aligned}&\sum_{r,l=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t, X(t))\sigma_l^j(t, X(t)) \int_t^{t+h}\int_t^s dB^l(u)dB^r(s)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{r,l=1}^m \Lambda_{r,l}\sigma(t, X(t))(B^r(t+h) - B^r(t))(B^l(t+h) - B^l(t))\end{aligned}$$

を得る．よって，Milstein Scheme(2) は

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r + \frac{1}{2}\sum_{r,l=1}^m \Lambda_{r,l}\sigma(t_k, X_k)\xi_r\xi_l h$$

となる．ただし，$1 \le r \le m$ に対して ξ_r は標準正規分布に従う確率変数とした．drift 陰的なスキームや混合スキームも同様にして得られるが，省略する．

1.3　強収束

数値解の収束の概念を述べる．通常の微分方程式とは異なり，モーメントの収束についての定義になる．

Definition 1.4. 数値スキームが L^p において γ 次強収束するとは，ある $K > 0$ が存在して，十分小さい任意の $h > 0$ と任意の $Nh = T$ となる $N \in \mathbb{N}$ と任意の $0 \le k \le N$ に対して，確率微分方程式の解 $X(t_k)$ と数値解 X_k の評価

$$E[|X(t_k) - X_k|^p]^{\frac{1}{p}} \le Kh^\gamma$$

が成り立つことをいう．

収束定理の主張と証明のため，one-step approximation を導入する．

Definition 1.5 (one-step approximation)**.** $t \in [0, T]$ と $x \in \mathbb{R}^n$ および数値スキームが与えられているとする．このとき，初期条件を $X(t) = x$ とする確率微分方程式 (1) の強解 X の時刻 $t + h$ での値を $X_{t,x}(t + h)$ と書くことにする．また，初期条件を $X(t) = x$ とする確率微分方程式 (1) の時刻 $t + h$ での数値解を $\bar{X}_{t,x}(t + h)$ と書くことにする．$\bar{X}_{t,x}(t + h)$ を $X_{t,x}(t + h)$ の one-step approximation という．

この定義を用いると陽解法における数値解は次のように書き直せる．

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= \bar{X}_{t_k, X_k}(t_{k+1}) \\
&= X_k + A\left(t_k, X_k, B^r(\theta) - B^r(t_k); 1 \le r \le m, t_k \le \theta \le t_{k+1}\right)
\end{aligned}$$

ここで A は数値スキームによって異なる関数で，陽的 Euler-Maruyama であれば

$$\begin{aligned}
&A\left(t_k, X_k, B^r(\theta) - B^r(t_k); 1 \le r \le m, t_k \le \theta \le t_{k+1}\right) \\
&= a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)(B^r(t_{k+1}) - B^r(t_k))
\end{aligned}$$

となる．目標の定理を述べる．

Theorem 1.2. 確率微分方程式 (1) を初期条件 $X(0) = X_0$ の下で考える．ある $q_2 \ge 1/2$, $q_1 \ge q_2 + 1/2$, $p \ge 1$, $\alpha \ge 1$, $K > 0$ が存在して，十分小さい任意の $h > 0$ と任意の $0 \le t \le T - h$, $x \in \mathbb{R}^n$ に対して *one-step approximation* の誤差の評価

$$\begin{aligned}
\left|E[X_{t,x}(t + h) - \bar{X}_{t,x}(t + h)]\right| &\le K(1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}} h^{q_1} \\
E[\left|X_{t,x}(t + h) - \bar{X}_{t,x}(t + h)\right|^{2p}]^{\frac{1}{2p}} &\le K(1 + |x|^{2p})^{\frac{1}{2p}} h^{q_2}
\end{aligned}$$

が成り立つと仮定する．このとき，任意の $Nh = T$ となる $N \in \mathbb{N}$ と任意の $0 \le k \le N$ に対して，k, h によらないある定数 $M > 0$ が存在して，

$$E[|X(t_k) - X_k|^{2p}]^{\frac{1}{2p}} \le M(1 + E[|X_0|^{2p}])^{\frac{1}{2p}} h^{q_2 - \frac{1}{2}}$$

が成り立つ．特に，この数値スキームは $q_2 - 1/2$ 次の強収束である．