

Kolmogorov-Centsov の定理

@litharge3141

2020 年 5 月 22 日

概要

このノートでは、確率過程の L^p ノルム評価からヘルダー連続性を導く Kolmogorov-Centsov の定理を証明する。この定理はブラウン運動の構成や、確率微分方程式の解の評価など、種々の確率過程の連続性の証明に広く用いられる。

1 定理の主張と証明

Theorem 1.1 (Kolmogorov-Centsov の定理). (Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし、 $(B, \|\cdot\|)$ を Banach 空間とそのノルムの組とする。 $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ を Ω から B への確率過程とする。

$$\exists C, p, q > 0, \quad \forall s, t \in [0, T], \quad E[\|X_t - X_s\|^p] \leq C |t - s|^{1+q}$$

が成立すると仮定する。このとき、任意の $0 < r < q/p$ に対して、ある Ω から B への確率過程 $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t \in [0, T]}$ が存在して、次を満たす。

- 任意の $t \in [0, T]$ に対して $X_t = \tilde{X}_t$ がほとんどいたるところ成立する。
- ほとんどいたるところ正の値を取るある確率変数 $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ とある $M > 0$ が存在して

$$P \left(\omega \left| \sup_{\substack{0 < |t-s| < h(\omega) \\ s, t \in [0, T]}} \frac{\|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)\|}{|t-s|^r} \leq M \right. \right) = 1$$

が成立する。

特に、 X は r 次 Hölder 連続な修正 \tilde{X} を持つ。

Proof. $D_n := \left\{ \frac{kT}{2^n} \mid k = 0, 1, \dots, 2^n \right\}$ とし、 $D := \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ とおく。

$$P \left(\omega \left| \exists n^*(\omega) \in \mathbb{N}, \forall n \geq n^*(\omega), \max_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega) \right\| < 2^{-rn} \right. \right) = 1$$

を示す。

$$A_n := \left\{ \omega \left| \max_{1 \leq k \leq 2^n} \left\| X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega) \right\| < 2^{-rn} \right. \right\}$$

とおくと、 $P(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n) = 1$ を示せばよい。それは $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n^c) = 0$ と同値である。さらに、Borel-Canteli の補題から $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$ が収束することを証明すれば十分である。これを示す。 $s, t \in [0, T]$

に対して,

$$\begin{aligned} P(\|X_t - X_s\| \geq \varepsilon) &\leq \frac{1}{\varepsilon^p} E[\|X_t - X_s\|^p] \quad (\because \text{Chebyshev の不等式}) \\ &\leq \frac{C |t - s|^{1+q}}{\varepsilon^p} \quad (\because \text{仮定}) \end{aligned}$$

を得る.

□

2 応用例