Constantin Lax Majda 方程式

@litharge3141

2020 年 4 月 24 日

概要

3 次元 Euler 方程式の時間大域的な弱解の存在は知られておらず，常に有限時間で無限大に爆発すると予想している人も多い．このノートでは，そのような爆発のメカニズムを調べるためのモデル方程式として知られている Constantin-Lax-Majda 方程式について解説する．

1　導出

3 次元 Euler 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p$$
$$\mathrm{div} u = 0$$

を考える．∇p は厄介なので rot を施して消去する．両辺に rot を施して十分な滑らかさを仮定すると，$\omega \coloneqq \mathrm{rot} u$ として

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u$$
$$\mathrm{div} \omega = 0$$

という ω と u の方程式を得る．

$$\omega = \mathrm{rot} u$$
$$\mathrm{div} u = 0$$

から $\mathrm{rot}\omega = -\triangle u$ を得る．これは Poisson 方程式だから 3 次元の基本解と畳み込んで Biot-Savart 積分

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y)\times\omega(y)}{|x-y|^3}\mathrm{d}x$$

を得る．これを上述の ω と u の方程式に代入したものを渦度方程式という．2 次元でも同様の操作をすることはできるが，3 次元との最大の違いは渦の伸長項と呼ばれる $\nabla u \cdot \omega$ の有無で，この項のために 3 次元では大域解の存在が証明できていないと考えられる．これらを上手く 1 次元の方程式で真似をして，モデルを構成する．

2　厳密解の構成

3　拡張やそのほかの性質