SDE の数値計算 強収束

@litharge3141

2020 年 5 月 23 日

概要

SDE の数値計算の中で最も基本的な Euler-Maruyama および Milstein のスキームについて，その厳密解への強収束と呼ばれる収束について述べる．これは数値計算の各時間ステップについて，その厳密解からの分散が刻み幅 h を用いて上から評価できるというものである．

1

1.1 準備

主定理を述べる前に必要な用語などについて述べる．数値計算においては確率微分方程式の強解を近似して計算する．

Definition 1.1. $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]})$ をフィルトレーション付き確率空間とし，$(B(t))_{t\in[0,T]}$ を m 次元 $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動とする．$1 \le i \le n, 1 \le r \le m$ に対して，Borel 可測な函数 $a^i, \sigma_r^i \colon [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が与えられているとする．このとき，確率過程 $(X(t))_{t\in[0,T]}$ が $x \in R^n$ を出発点とする確率微分方程式

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t, X(t))dB^r(t)$$

あるいは成分ごとに書いた

$$dX^i(t) = a^i(t, X(t))dt + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r^i(t, X(t))dB^r(t)$$

の強解であるとは，以下の条件を満たすことをいう．

- $X(t)$ は可測かつ $\mathcal{F}_t$-適合な連続確率過程である．
- 任意の $1 \le i \le n$ と $1 \le r \le m$ に対して，$\sigma_r^i(t, X(t)) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t)$ かつ $a(t, X(t)) \in L^1[0,T]$ が満たされる．
- $X(t)$ は確率積分方程式

  $$X(t) = x + \int_0^t a(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r(s, X(s))dB^r(s)$$

  あるいは成分ごとに書いた

  $$X^i(t) = x^i + \int_0^t a^i(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma_r^i(s, X(s))dB^r(s)$$

  を満たす．

強解の存在と一意性については次の定理がよく知られている．証明は省略する．

Theorem 1.1. 係数 a, σ_r が以下を満たすと仮定する．

- *Lipshitz* 連続，すなわち，

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t,x) - a(t,y)| + \sum_{r=1}^{m} |\sigma_r(t,x) - \sigma_r(t,y)| \leq K\,|x-y|$$

を満たす．

- *1* 次増大条件，すなわち

$$\exists K > 0, \quad \forall t \in [0,T], \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad |a(t,x)| + \sum_{r=1}^{m} |\sigma_r(t,x)| \leq K(1+|x|)$$

を満たす．

このとき，確率微分方程式の強解 $X(t)$ で，各成分が $\mathcal{L}^2$ に属するものが存在する．さらに $\tilde{X}(t)$ も強解ならば，$P(\forall t \geq 0, X(t) = \tilde{X}(t)) = 1$ が成り立つという意味で，解 $X(t)$ は一意である．

1.2 数値スキームの導出

以降，Definition1.1 の確率微分方程式が与えられ，その係数は Theorem1.1 の仮定を満たし，かつ十分になめらかであるとする．初期値 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して一意存在する強解を $X(t)$ とする．$0 < h(< T)$ に対して $t \in [0, T-h]$ において

$$X(t+h) = X(t) + \int_t^{t+h} a(s, X(s))ds + \sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s)$$

が成立するから，適当に積分を近似して数値スキームを導く．確率積分の項をどう近似するかで大きく 2 種類に分かれる．

1.2.1 Euler-Maruyama Scheme

Drift 項の近似は例えば陽的に

$$\int_t^{t+h} a(s, X(s))ds \approx a(t, X(t))h$$

とする．確率積分の項を

$$\sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s) \approx \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t, X(t))(B_r(t+h) - B_r(t))$$

として近似する．これをもとにして，$Nh = T$ となるような $h > 0$ と $N \in \mathbb{N}$ に対して，$t_k := kh$ における数値解 X_k についての漸化式

$$\begin{cases} X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)(B_r(t_{k+1}) - B_r(t_k)) \\ X_0 = x \end{cases}$$

を得る．これを陽的 Euler-Maruyama スキームという．$B_r(t_{k+1}) - B_r(t_k)$ は平均 0 で分散 h の正規分布だから，ξ_r を標準正規分布に従う確率変数として $B_r(t_{k+1}) - B_r(t_k) = \sqrt{h}\xi_r$ が成り立つ．これを使って書き直すと

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

となる．以上と同様にして drift 陰的 Euler-Maruyama が

$$X_{k+1} = X_k + a(t_{k+1}, X_{k+1})h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

のように与えられる．また，$\lambda \in (0,1)$ に対し混合 Euler-Maruyama

$$X_{k+1} = X_k + \lambda a(t_k, X_k)h + (1-\lambda)a(t_{k+1}, X_{k+1})h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

ないし

$$X_{k+1} = X_k + a(\lambda t_k + (1-\lambda)t_{k+1}, \lambda X_k + (1-\lambda)X_{k+1})h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)\sqrt{h}\xi_r$$

も与えられる．これらのスキームを比較するには安定性を調べなければならないが，それは別の機会にする．

1.2.2 Milstein Scheme

drift 項の近似は Euler-Maruyama と同様である．確率積分の近似が異なる．

$$\sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s)$$

において，被積分函数に伊藤の公式を適用して，

$$\begin{aligned}\sigma_r(s, X(s)) = \sigma_r(t, X(t)) + \int_t^s \left(\frac{\partial \sigma_r}{\partial t}(u, X(u)) + \frac{1}{2} \triangle \sigma_r(u, X(u)) \right) du \\ + \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u)) \sigma_l^j(u, X(u)) dB_l(u)\end{aligned}$$

を得る．通常の積分の項は近似計算するときに h^2 の項が出てくるので，0 とみなす．すなわち，

$$\sigma_r(s, X(s)) \approx \sigma_r(t, X(t)) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u)) \sigma_l^j(u, X(u)) dB_l(u)$$

とする．これを代入して，

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \sigma_r(s, X(s))dB_r(s) \\ &= \sum_{r=1}^{m} \int_t^{t+h} \left(\sigma_r(t, X(t)) + \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \int_t^s \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(u, X(u)) \sigma_l^j(u, X(u)) dB_l(u) \right) dB_r(s) \\ &\approx \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t, X(t))(B(t+h) - B(t)) + \sum_{r,l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t, X(t)) \sigma_l^j(t, X(t)) \int_t^{t+h} \int_t^s dB_l(u) dB_r(s)\end{aligned}$$

を得る．これから，一般の陽的 Milstein Scheme を

$$\begin{aligned}X_{k+1} = X_k + a(t_k, X_k)h + \sum_{r=1}^{m} \sigma_r(t_k, X_k)(B(t+h) - B(t)) \\ + \sum_{r,l=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \sigma_r}{\partial x_j}(t_k, X_k) \sigma_l^j(t_k, X_k) \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{t_k}^s dB_l(u) dB_r(s) \qquad (1)\end{aligned}$$

として導くことができる．$\int_t^{t+h} \int_t^s dB_l(u)dB_r(s)$ は一般に解析的に計算する方法が知られていない．さらにブラウン運動（正確には像測度を考えた Wiener 過程）の汎函数として通常の広義一様収束位相では連続ではないため，近似計算も難しい．ここでは解析的に計算ができるような場合を二つ紹介する．

$m = 1$ の場合．$\sigma_1(t,x)$ を単に $\sigma(t,x)$ とし，$B_1(t)$ を単に $B(t)$ と書くことにする．問題の項 $\int_t^{t+h}\int_t^s dB_l(u)dB_r(s)$ は

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h}\int_t^s dB(u)dB(s) &= \int_t^{t+h} B(s)-B(t)dB(s)\\ &= \int_t^{t+h} B(s)dB(s) - B(t)(B(t+h)-B(t))\\ &= \frac{1}{2}\left(B(t+h)^2 - B(t)^2 - h\right) - B(t)(B(t+h)-B(t))\\ &= \frac{1}{2}\left((B(t+h)-B(t))^2 - h\right)\end{aligned}$$

として計算ができるので，Milstein Scheme(1) は

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k,X_k)h + \sigma(t_k,X_k)\sqrt{h}\xi + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma}{\partial x_j}(t_k,X_k)\sigma^j(t_k,X_k)(\xi^2-1)h$$

となる．ここで，ξ は標準正規分布に従う確率変数とした．この表式のほうがどちらかというと有名だと思われる．

係数が対称な場合．任意の $1 \le l,r \le n$ に対して

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma_r}{\partial x_j}\sigma_l^j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma_l}{\partial x_j}\sigma_r^j$$

という対称性があると仮定する．見やすさのために $\Lambda_{r,l}\sigma(t,x) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma_r}{\partial x_j}(t,x)\sigma_l^j(t,x)$ とおけば，$\Lambda_{r,l}\sigma = \Lambda_{l,r}\sigma$ となる．このとき，

$$\begin{aligned}&\sum_{r,l=1}^m\sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma_r}{\partial x_j}(t,X(t))\sigma_l^j(t,X(t))\int_t^{t+h}\int_t^s dB_l(u)dB_r(s)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{r,l=1}^m \Lambda_{r,l}\sigma(t,X(t))\left(\int_t^{t+h}\int_t^s dB_l(u)dB_r(s) + \int_t^{t+h}\int_t^s dB_r(u)dB_l(s)\right)\end{aligned}$$

となる．この確率積分の項は，

$$\begin{aligned}&\int_t^{t+h}\int_t^s dB_l(u)dB_r(s) + \int_t^{t+h}\int_t^s dB_r(u)dB_l(s)\\ &= \int_t^{t+h} B_r(s)dB_l(s) + \int_t^{t+h} B_l(s)dB_r(s) - B_r(t)\left(B_l(t+h)-B_l(t)\right) - B_l(t)\left(B_r(t+h)-B_r(t)\right)\\ &= B_r(t+h)B_l(t+h) - B_r(t)B_l(t) - B_r(t)(B_l(t+h)-B_l(t)) - B_l(t)(B_r(t+h)-B_r(t))\\ &= (B_r(t+h)-B_r(t))(B_l(t+h)-B_l(t))\end{aligned}$$

として計算できる．以上により，

$$\begin{aligned}&\sum_{r,l=1}^m\sum_{j=1}^n \frac{\partial\sigma_r}{\partial x_j}(t,X(t))\sigma_l^j(t,X(t))\int_t^{t+h}\int_t^s dB_l(u)dB_r(s)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{r,l=1}^m \Lambda_{r,l}\sigma(t,X(t))(B_r(t+h)-B_r(t))(B_l(t+h)-B_l(t))\end{aligned}$$

を得る．よって，Milstein Scheme(1) は

$$X_{k+1} = X_k + a(t_k,X_k)h + \sum_{r=1}^m \sigma_r(t_k,X_k)\sqrt{h}\xi_r + \frac{1}{2}\sum_{r,l=1}^m \Lambda_{r,l}\sigma(t_k,X_k)\xi_r\xi_l h$$

となる．ただし，$1 \le r \le m$ に対して ξ_r は標準正規分布に従う確率変数とした．drift 陰的なスキームや混合スキームも同様にして得られるが，省略する．

1.3 強収束

定理の証明のため，One-Step Approximation を導入する．