演習問題解答

@litharge3141

2020 年 6 月 30 日

概要

Karatzas-Shreve, Brownian Motion and Stochastic Calculus の Exercise と Problem の解答．問題は載せません．

1 Chapter1

解答 (1.5 Problem.)．右連続性を利用して連続な時間を可算に落とす．

任意の $t \geq 0$ に対して $P(X_t = Y_t) = 1$ が成立する．$[0, \infty)$ の稠密な部分集合 $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ を取る．任意の $m \in \mathbb{N}$ に対してある P-零集合 N_m が存在して，$\omega \notin N_m$ ならば $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する．そこで $N = \bigcup_{m=1}^{\infty} N_m$ とおくと，N は P-零集合で，$\omega \notin N$ ならば任意の $m \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_m}(\omega) = Y_{t_m}(\omega)$ が成立する．すなわち，$P(\forall m \in \mathbb{N},\, X_{t_m} = Y_{t_m}) = 1$ となる．X, Y はほとんどいたるところ右連続だから，N_X, N_Y という P-零集合を除いて右連続である．$N \cup N_X \cup N_Y$ を改めて N とおく．N は P-零集合である．$\omega \notin N$ とする．任意の $t \geq 0$ に対して，t に右から収束する $(t_m)_{m=1}^{\infty}$ の部分列 $(t_{m(k)})_{k=1}^{\infty}$ が稠密性から存在する．任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $X_{t_{m(k)}}(\omega) = Y_{t_{m(k)}}(\omega)$ が成立することと，右連続性から $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ となる．t は任意だったから，$P(\forall t \geq 0,\, X_t = Y_t) = 1$ となる．以上により示された．

右連続でなく左連続でもできそうな感じがするが，$t = 0$ のところの処理（というか左連続の定義）が若干面倒であるように思われる．