Evans 演習問題解答

@litharge3141

2020 年 7 月 6 日

概要

Evans, Partial Differential Equations の演習問題の解答．問題は載せません．

1　1 章の問題

略

2　2 章の問題

2.1　方針と解答

cu がなければ解けるので cu を非斉次項だと思って定数変化法を用いる．

解答． $v(t,x)=g(x-bt)$ とおく．$v_t=-b\cdot Dv$ が満たされることに注意する．$u(t,x)=\varphi(t)v(t,x)$ とおいて方程式に代入すると

$$\begin{aligned}&\varphi'(t)v(t,x)+\varphi(t)\partial_t v(t,x)+b\cdot Du(t,x)+c\varphi(t)v(t,x)\\&=\varphi'(t)v(t,x)+c\varphi(t)v(t,x)=0\end{aligned}$$

から $\varphi'(t)=-c\varphi(t)$ を得る．よって $\varphi(t)=Ae^{-ct}$ となり，初期条件と合わせて $u(t,x)=e^{-ct}g(x-bt)$ を得る．

2.2　方針と解答

公式を導くつもりで成分計算をする．O は大文字と小文字の見分けがつかないので U とかにしてほしい……

解答． O が直交行列であることから，任意の $1\le i,j\le n$ に対して $\sum_{k=1}^n O_{ik}O'_{kj}=\sum_{k=1}^n O_{ik}O_{jk}=\delta_{ij}$ が成り立つことに注意する．ここで δ_{ij} は $i=j$ のとき 1 でそれ以外は 0 として定める（単位行列の i,j 成分）．u が調和関数であると仮定する．$1\le s\le n$ に対して，

$$\frac{\partial}{\partial x_s}u(Ox)=\sum_{i=1}^n u_{x_i}(Ox)\frac{\partial (Ox)_i}{\partial x_s}$$

となる．$(Ox)_i=\sum_{j=1}^n O_{ij}x_j$ となるから $\frac{\partial (Ox)_i}{\partial x_s}=O_{is}$ となる．したがって

$$\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}u(Ox)=\frac{\partial}{\partial x_s}\sum_{i=1}^n u_{x_i}(Ox)O_{is}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n u_{x_ix_j}(Ox)O_{is}O_{js}$$

となるから，

$$\triangle u(Ox)=\sum_{s=1}^n\frac{\partial^2}{\partial x_s^2}u(Ox)=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n u_{x_ix_j}(Ox)\sum_{s=1}^n O_{is}O_{js}=\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n u_{x_ix_j}(Ox)\delta_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}(Ox) = 0 \quad (\because u \text{ は調和関数})$$

により結論を得た．

2.3 方針と解答

示すべき式の右辺は r に依存するが左辺はよらないので，右辺の r についての微分が 0 であることを示した後，$r \to 0$ の極限を取る．

解答． 示すべき式の右辺を $\phi(r)$ とおく．境界条件と $-\triangle u = f$ から

$$\phi(r) = \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u(x)dS(x) + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \int_{B(0,r)} \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{1}{|x|^{n-2}} \right) \triangle u dx$$

となる．

$$\int_{B(0,r)} \frac{\triangle u}{|x|^{n-2}} dx = \int_0^r \int_{\partial B(0,s)} \frac{\triangle u}{|x|^{n-2}} dS(x)ds = \int_0^r \frac{1}{s^{n-2}} \int_{\partial B(0,s)} \triangle u(x)dS(x)ds$$

だから

$$\frac{d}{dr} \int_{B(0,r)} \frac{\triangle u}{|x|^{n-2}} dx = \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} \triangle u(x)dS(x)$$

となることに注意すれば，

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{B(0,r)} \triangle u(x)dx + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} \triangle u(x)dS(x) \\
&\quad + \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{-(n-2)}{r^{n-1}} \int_{B(0,r)} \triangle u(x)dx - \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{\partial B(0,r)} \triangle u(x)dS(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

となる．したがって $\phi(r)$ は定数である．平均値の公式の導出と同様に

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(0,r)} u(x)dS(x) = u(0)$$

となる．

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{B(0,r)} \triangle u dx = \lim_{r\to 0} -\frac{\alpha(n)r^2}{\alpha(n)r^n} \int_{B(0,r)} \triangle f(x)dx = 0$$

となることも同様にして分かる．

$$\int_{B(0,r)} \frac{\triangle u}{|x|^{n-2}} dx = \int_0^r \frac{1}{s^{n-2}} \int_{\partial B(0,s)} \triangle u(x)dS(x)ds = \int_0^r \frac{-n\alpha(n)s}{n\alpha(n)s^{n-1}} \int_{\partial B(0,s)} f(x)dS(x)ds$$

であり，r が十分小さければ $\frac{1}{n\alpha(n)s^{n-1}} \int_{\partial B(0,s)} f(x)dS(x)$ は $f(0)$ に近づく．したがって

$$\lim_{r\to 0} \int_{B(0,r)} \frac{\triangle u}{|x|^{n-2}} dx = \lim_{r\to 0} \int_0^r -n\alpha(n)sf(0)ds = 0$$

となる．以上により $\lim_{r\to 0} \phi(r) = u(0)$ となるから，$\phi(r) = u(0)$ である．よって示された．