

## **Распознавание образов, описываемых бинарными признаками**

**Цель работы:** Синтезировать алгоритмы распознавания образов, описываемых бинарными признаками. Исследовать синтезированные алгоритмы распознавания с точки зрения ожидаемых потерь и ошибок.

**Постановка задачи распознавания образов.** Образы объектов в пространстве используемых признаков представляются как реализации случайного вектора  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T$ . Каждое значение этого вектора  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$  представляет образ конкретного объекта. Любой образ может принадлежать одному из  $M$  классов объектов (количество классов и их исходные наименования считаются известными), в совокупности составляющих конечное множество альтернативных статистических гипотез  $\Omega = \{\omega_i, i = \overline{1, M}\}$ . Задаются априорные вероятности появления объектов различных классов, т. е. априорные вероятности гипотез  $\omega_i$ :  $\Pr(\omega = \omega_i) = p(\omega_i), i = \overline{1, M}$ , и функциями правдоподобия классов – условные плотности распределения вероятностей:  $p(x / \omega_i), i = \overline{1, M}$ .

Для каждого образа  $x$  требуется выполнить действие – решение, относящее его к тому или иному классу. Конкретная реализация решающего правила определяется видом многомерных распределений вектора признаков каждого класса. Для упрощения задачи предполагается статистическая независимость признаков, образующих вектор  $\mathbf{x}$ .

**Распознавание образов в случае статистически независимых бинарных признаков.** В этом случае множество значений компонентов вектора признаков  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)^T$  состоит из двух элементов  $\mathbf{x}_k \in \{0, 1\}$ .

Рассмотрим задачу распознавания бинарных изображений в условиях воздействия помех, которые приводят к инвертированию отдельных пикселей изображения, изменяя их значения на противоположные с одинаковой вероятностью  $p_I > 0$ . На рис.1а,б представлены изображения двух букв (по сути являющиеся матрицами из нулей и единиц), а на рис.1в,г – их искаженные версии, полученные в результате воздействия помехи, независимо инвертирующей элементы исходных образов с вероятностью  $p_I = 0.1$ .



Рис.1. Воздействие помехи на бинарные изображения: (а), (б) - исходные изображения; (в), (г) искаженные версии исходных изображений

Алгоритм распознавания на основе сравнения логарифма отношения правдоподобия с порогом  $l'_0 = \ln p(\omega_2) / p(\omega_1)$  в случае двух классов имеет вид

$$p(x / \omega_1) = \prod_{k=1}^n [s_k^{(1)}(1 - p_I) + (1 - s_k^{(1)})p_I]^{x_k} [s_k^{(1)}p_I + (1 - s_k^{(1)})(1 - p_I)]^{1-x_k},$$

$$p(x / \omega_2) = \prod_{k=1}^n [s_k^{(2)}(1 - p_I) + (1 - s_k^{(2)})p_I]^{x_k} [s_k^{(2)}p_I + (1 - s_k^{(2)})(1 - p_I)]^{1-x_k}, \quad (1)$$

$$g''(x) = \sum_{k=1}^n \left( x_k \ln \frac{s_k^{(1)}(1 - p_I) + (1 - s_k^{(1)})p_I}{s_k^{(2)}(1 - p_I) + (1 - s_k^{(2)})p_I} + (1 - x_k) \ln \frac{s_k^{(1)}p_I + (1 - s_k^{(1)})(1 - p_I)}{s_k^{(2)}p_I + (1 - s_k^{(2)})(1 - p_I)} \right) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{matrix} l'_0,$$

где  $s_k^{(i)}$  – элементы исходного, соответствующего гипотезе  $\omega_i$ ,  $i = \overline{1, M}$ , неискаженного бинарного изображения, развернутого в вектор-столбец и принимающие значения единица или ноль в зависимости от того, закрашен ли соответствующий элемент изображения ( $s_k^{(i)} = 1$ ) или нет ( $s_k^{(i)} = 0$ ).

В случае если  $p_I = 0$ , как и в случае  $p_I = 1$ , задача становится вырожденной, так как весовые коэффициенты в выражении для разделяющей функции могут обратиться в бесконечность. Так же в случае если  $p_I = 0.5$ , независимо от значения  $x$ ,  $g''(x) \equiv 0$ . В этой ситуации решение принимается в пользу класса, имеющего наибольшую априорную вероятность.

Исключение из вычисления ЛОП пикселей, значения которых совпадают в обоих бинарных изображениях (одновременно  $s_k^{(1)} = 1$ ,  $s_k^{(2)} = 1$  или  $s_k^{(1)} = 0$ ,  $s_k^{(2)} = 0$ ), позволяет записать

$$g''(x) = L_{x,10} \ln \frac{1 - p_I}{p_I} + L_{x,01} \ln \frac{p_I}{1 - p_I} + P_{x,01} \ln \frac{1 - p_I}{p_I} + P_{x,10} \ln \frac{p_I}{1 - p_I}, \quad (2)$$

где

$L_{x,10}$  - количество полученных единиц в тех элементах, где  $s_k^{(1)} = 1$  и  $s_k^{(2)} = 0$ ;

$L_{x,01}$  - количество полученных единиц в тех элементах, где  $s_k^{(1)} = 0$  и  $s_k^{(2)} = 1$ ;  
 $P_{x,01}$  - количество полученных нулей в тех элементах, где  $s_k^{(1)} = 0$  и  $s_k^{(2)} = 1$ ;  
 $P_{x,10}$  - количество полученных нулей в тех элементах, где  $s_k^{(1)} = 1$  и  $s_k^{(2)} = 0$ .

Пусть  $n_s$  - общее количество несовпадающих элементов двух изображений. Тогда выражение (2) приводится к виду

$$g''(x) = (L_{x,10} + P_{x,01}) \ln \frac{1-p_I}{p_I} + (n_s - L_{x,10} - P_{x,01}) \ln \frac{p_I}{1-p_I} \begin{matrix} \omega_1 \\ > \\ \omega_2 \end{matrix} l'_0, \quad (3)$$

$$n_s = \sum_{k=1}^n |s_k^{(1)} - s_k^{(2)}|,$$

а вероятности ошибок распознавания определяются как

$$\alpha = \begin{cases} \sum_{t \geq L_0}^{n_s} C_{n_s}^t (1-p_I)^t p_I^{n_s-t}, & 0 < p_I < 0.5, \\ 1 - \sum_{t \geq L_0}^{n_s} C_{n_s}^t (1-p_I)^t p_I^{n_s-t}, & 0.5 < p_I < 1, \end{cases}$$

$$\beta = \begin{cases} 1 - \sum_{t \geq L_0}^{n_s} C_{n_s}^t p_I^t (1-p_I)^{n_s-t}, & 0 < p_I < 0.5, \\ \sum_{t \geq L_0}^{n_s} C_{n_s}^t p_I^t (1-p_I)^{n_s-t}, & 0.5 < p_I < 1, \end{cases} \quad (4)$$

$$L_0 = \frac{l'_0}{2 \ln(1-p_I) - 2 \ln p_I} + \frac{n_s}{2},$$

где  $\alpha$  - вероятность ошибки первого рода (отнесения элементов  $\omega_1$  к классу  $\omega_2$ ), а  $\beta$  - вероятность ошибки первого рода (отнесения элементов  $\omega_2$  к классу  $\omega_1$ )

Рассмотрим программную реализацию алгоритма распознавания двух изображений, позволяющую оценить корректность используемой модели и полученных на ее основе соотношений. В программе реализуется моделирование алгоритма (1) и расчёт вероятностей ошибок на основе (4) в зависимости от величины  $p_I$ . Распознаваемые бинарные изображения формируются с помощью стандартной функции среды `prprob()`, обращение к которой позволяет получить набор 26 букв латинского алфавита в виде матриц размера  $7 \times 5$ . Примеры этих изображений ранее представлены на рис.1 (с инверсией для лучшей визуализации).

```

%Синтез и анализ алгоритмов распознавания образов с
использованием дискретных признаков (на примере распознавания
бинарных изображений)
clear all; close all;
%1.Задание исходных данных
[alphabet,targets]=prprob;%загрузка бинарных стандартных
изображений букв
n=35;%количество признаков
M=2; s=zeros(n,2);%количество классов и эталонные описания
s(:,1)=alphabet(:,11);s(:,2)=alphabet(:,19);%буква К и буква S
pw=[0.4,0.6];%априорные вероятности гипотез
np=sum(pw); pw=pw/np;%исключение некорректного задания априорных
вероятностей
N=20; %количество шагов изменения варьируемого параметра - pI
K=10000;%количество реализаций
ns=sum(abs(s(:,1)-s(:,2)));%общее количество несовпадающих
элементов
s_=1-s;%получение инвертированных изображений
pi=zeros(1,N); p12th=pi; p21th=pi;p12ex=pi;p21ex=pi;
Pc=zeros(N,2,2);%экспериментальная матрица вероятностей ошибок
%Цикл по значениям вероятности искажения элементов символов
for t=1:N,
    pi(t)=(1/N)*(t-1); pI=pi(t); %вероятность искажения элемента
    (пикселя)
    %2.Синтез решающего правила и расчет теоретических
    вероятностей ошибок
    if pI==0, pI=0.0001; end;%регуляризация разделяющей функции
    if pI==0.5, pI=0.4999; end;
    pI_=1-pI; G1=zeros(1,n); G2=zeros(1,n);
    for k=1:n,%вычисление коэффициентов разделяющей функции

G1(1,k)=log((s(k,1)*pI_+s_(k,1)*pI)/(s(k,2)*pI_+s_(k,2)*pI));

G2(1,k)=log((s(k,1)*pI+s_(k,1)*pI_)/(s(k,2)*pI+s_(k,2)*pI_));
        end;
        l0_=log(pw(2)/pw(1)); %порог принятия решения
        L0=log(pw(2)/pw(1))/(2*log(pI_)-2*log(pI))+ns/2;
L0r=floor(L0);
        if pI<0.5, %расчет вероятностей ошибок
            p12th(t)=binocdf(L0r,ns,1-pI);p21th(t)=1-
binocdf(L0r,ns,pI);
            else
                p12th(t)=1-binocdf(L0r,ns,1-
pI);p21th(t)=binocdf(L0r,ns,pI);
            end;
        %3.Тестирование алгоритма методом статистических испытаний
        for kk=1:K,%цикл по числу реализаций
            for i=1:M,%цикл по классам
                x=s(:,i);
                r=rand(n,1); ir=find(r<pI);
                x(ir)=1-x(ir);%искажение элементов - инверсия в
случайных точках
                x_=1-x;

```

```

u=G1*x+G2*x_-l0_;%вычисление значения разделяющих
функций
if u>0, iai=1; else iai=2; end;
Pc_(t,i,iai)=Pc_(t,i,iai)+1;%фиксация результата
распознавания
if (kk==1) && (t==2),%отображение примеров искажения
СИМВОЛОВ
IAx=reshape(x_,5,7)';
figure(i); imshow(IAx);
end;
end;
end;
Pc_(t, :, :) = Pc_(t, :, :) / K;
p12ex(t)=Pc_(t,1,2); p21ex(t)=Pc_(t,2,1);
end;

```

В качестве примера работы программы на рис.2а,б представлены зависимости для теоретических вероятностей ошибок (4), и их экспериментальных оценок, полученных в ходе статистического моделирования алгоритма, при различных соотношениях между априорными вероятностями классов.

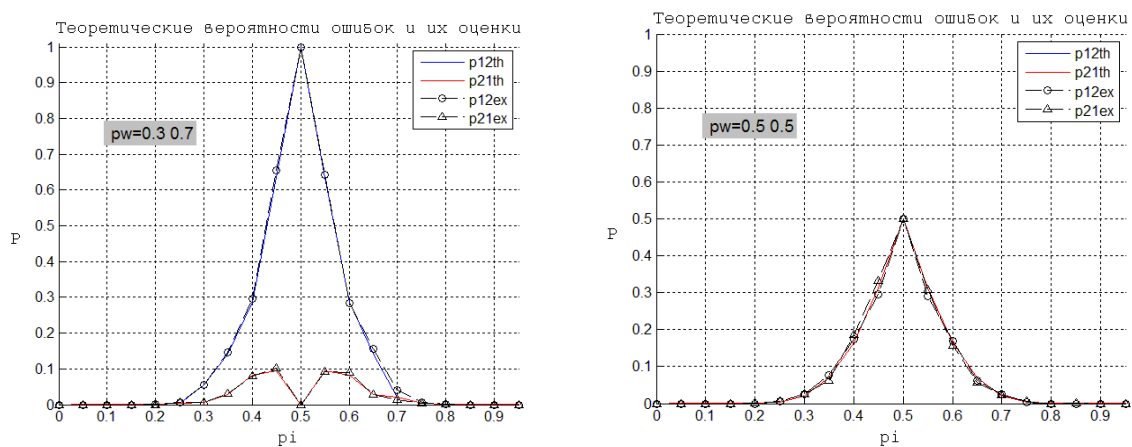


Рис.2. Зависимости для вероятностей ошибок первого и второго рода от вероятности искажения элементов  $p_i$

Анализ полученных зависимостей показывает, прежде всего, хорошее совпадение теоретических и экспериментальных результатов. Видно, что при увеличении величины  $p_i$  до уровня 0.5 происходит монотонный рост вероятностей ошибок. В точке 0.5, когда ЛОП равен нулю, решение принимается в пользу того класса, который имеет большую априорную вероятность. При дальнейшем увеличении  $p_i$  происходит симметричное снижение вероятностей ошибок за счет возникновения «переинверсии». При

этом качество распознавания повышается, что эквивалентно использованию в качестве эталонов инвертированных версий изображений.

### **Задание для самостоятельной работы**

1. Реализуйте алгоритм распознавания бинарных образов символов, соответствующих первым буквам фамилии и имени исполнителя:
  - буквы должны быть записаны на транслите;
  - если буква не имеет латинского аналога, используйте другую (вторую, третью букву фамилии/имени);
  - буквы не должны совпадать.
2. Синтезируйте алгоритм распознавания и определите вероятности его ошибок на основе разделяющей функции заданного вида: если первая буква вашей фамилии является гласной, то используйте выражение (2), в противном случае реализуйте выражение (3).
3. Проведите имитационное моделирование алгоритма, в ходе которого рассчитайте значения вероятности ошибок распознавания для трех различных случаев априорных вероятностей гипотез:
  - $p(\omega_1) > p(\omega_2)$ ;
  - $p(\omega_1) = p(\omega_2)$ ;
  - $p(\omega_1) < p(\omega_2)$ .

Сравните полученные вероятности ошибок их со значениями, вычисленными теоретически.

Напишите отчёт о проделанной работе, содержащий следующие пункты:

1. Фамилию исполнителя и номер группы.
2. Название и цель лабораторной работы.
3. Исходные данные (буквы и априорные вероятности гипотез).
4. Код для задания разделяющей функции.
5. Представьте графики значений элементов теоретической и экспериментальной матриц вероятностей ошибок для рассмотренных случаев априорных вероятностей гипотез.

6. Укажите характер зависимости разделяющей функции  $g'(x) = g''(x) - l'_0$  от компонент вектора признаков.