Моделирование случайных величин

Цель работы

Изучение алгоритмов генерации случайных величин в среде Matlab. Вычисление значений характеристик случайной величины.

1. Понятие случайной величины и случайного вектора

Рассмотрим скалярную величину $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, значение которой заранее не известно. Имеется множество событий $\{A\}$, каждое из которых соответствует тому, что значение x величины $\mathbf{x}$ попадает в определённый интервал. *Вероятностью события* A называется функция $\Pr(A)$, такая что $\Pr(A) \geq 0$, $\Pr(\{A\}) = 1$, величина $\mathbf{x}$ называется *случайной*, а функция $p(x)$, определённая как

$$p(x) = \lim_{dx \to 0} \frac{\Pr(x \leq \mathbf{x} < x + dx)}{dx}, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

называется *плотностью распределения вероятностей* случайной величины.

Вектор $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n)^T \in \mathbb{R}^n$, каждая компонента которого является случайной величиной, называется *случайным вектором,* а значение такого вектора обозначается как $x = (x_1, ..., x_n)^T$.

2. Характеристики случайных величин

На практике часто используются такие характеристики случайных векторов (величин), как *вектор математического ожидания* m и *матрица ковариации* C:

$$m = M[\mathbf{x}] = \int xp(x)dx,$$
$$C = \int (x-m)(x-m)^T p(x)dx, \quad n > 1.$$

В случае одномерной случайной величины вместо матрицы ковариации используется такая характеристика СВ как *дисперсия* D, а так же *среднеквадратичное отклонение* (СКО) σ:

$$D = \int (x-m)^2 p(x) dx, \quad n=1,$$
$$\sigma = \sqrt{D}.$$

При неизвестном виде плотности распределения $p(x)$, указанные выше характеристики могут быть получены на основе выборки значений случайного вектора $\{x^{(1)},...,x^{(N)}\}$ следующим образом:

$$\tilde{m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{M} x^{(i)}, \quad \tilde{C} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x^{(i)}-\tilde{m})(x^{(i)}-\tilde{m})^T,$$
$$\tilde{D} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x^{(i)}-\tilde{m})^2, \quad \tilde{\sigma} = \sqrt{\tilde{D}}.$$

где $\tilde{m}$ – выборочное математическое ожидание; $\tilde{C}$ – выборочная матрица ковариации; $\tilde{D}$ – выборочная дисперсия; $\tilde{\sigma}$ – выборочное СКО.

3. Моделирование простейших случайных величин на основе стандартных датчиков случайных чисел.

Моделирование случайных величин с произвольным законом распределения основано на реализации алгоритма равномерной случайной величины (РСВ) $\boldsymbol{\alpha}$. Плотность распределения, математическое ожидание и дисперсия этой величины определяется соотношениями

$$p(\alpha) = \begin{cases} 1, & 0 \le \alpha \le 1, \\ 0, & \alpha < 0,\ \alpha > 1, \end{cases} \quad m_\alpha = \frac{1}{2}, \quad D_\alpha = \frac{1}{12}.$$

Алгоритм генерации РСВ в среде Matlab реализован в функции rand, использование которой осуществляется в следующем примере:

Пример 1

```
% Примеры обращения к датчику стандартной РСВ и построение гистограммы
clear all;
n=7;
m=3;
alfa=rand             % генерация значения случайной величины (СВ)
row_alfa=rand(1,n)    % генерация вектора-строки из n значений СВ
col_alfa=rand(m,1)    % генерация вектора-столбца из m значений СВ
mat_alfa=rand(m,n)    % генерация матрицы из m*n значений СВ
% Построение гистограммы РСВ для выборки из N реализаций
N=10000;              % объем выборки
x=rand(N,1);  % генерация значений СВ для гистограммы
t=min(x):0.05:max(x); % задание границ интервалов гистограммы
```

```
g=hist(x,t);  % вычисление значений гистограммы
gn=trapz(t, g);  % вычисление интеграла гистограммы (для нормировки)
% Отображение гистограммы
figure;  % формирование окна для вывода графики
bar(t, g./gn);  % отображение гистограммы
title('Гистограмма равномерной случайной величины');  % подпись
```

В табл. 1 приводятся типовые алгоритмы моделирования случайных величин с часто встречающимися законами распределения. В основе данных алгоритмов лежит использование значения $\alpha = R:0,1$, получаемого при обращении к датчику РСВ, распределённой в диапазоне [0, 1].

Таблица 1. Алгоритмы моделирования случайных величин

№	Наименование	Обозначение, параметры сдвига, масштаба, формы	Плотность распределения $p(x)$, математическое ожидание *m* и дисперсия *D*	Алгоритм генерации
1	Равномерное распределение	$R:a,b$	$p(x)=\begin{cases}1/b, & a\le x\le a+b,\\ 0, & x<a,\quad x>a+b,\end{cases}$ $m=a+b/2,\quad D=b^2/12$	$R:a,b\sim a+b\alpha$,
2	Биномиальное распределение	$B:n,\ p$	$p(x)=C_n^x p^x(1-p)^{n-x}$, где $x\in\{0,1,2,\ldots\}$, $C_n^x=\dfrac{n!}{x!(n-x)!}$, $m=np,\quad D=np(1-p)$	$B:n,\ p\sim\sum_{i-1}^{n}(B_i:1,\ p)$, где $B:1,p\sim\begin{cases}1, & \alpha\le p,\\ 0, & \alpha>p\end{cases}$
3	Распределение Пуассона	$P:\lambda$	$p(x)=\lambda^x\exp(-\lambda)/x!$, где $x\in\{0,1,2,\ldots\}$, $m=\lambda,\quad D=\lambda$	$P:\lambda\sim x$, где $x\in\{0,1,2,\ldots\}$, причём $F(x)\le\alpha<F(x+1)$, где $F(x)=\sum_{i=0}^{x}\lambda^i\exp(-\lambda)/i!$
4	Гауссовское (нормальное) распределение	$N:\mu,\sigma$	$p(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$,	$N:\mu,\sigma\sim\sigma\left(\sum_{i=1}^{12}\alpha_i-6\right)+\mu$

			$m=\mu, \quad D=\sigma^2$	
5	Показательное распределение	$E:b$	$p(x)=\frac{1}{b}\exp\left(-\frac{x}{b}\right),$ где $x\ge 0,$ $m=b, \quad D=b^2$	$E:b\sim -b\cdot\ln\alpha$
6	Распределение Рэлея	$Rl:\sigma$	$p(x)=\frac{x}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$ где $x\ge 0,$ $m=\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad D=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2$	$Rl:\sigma\sim\sigma\sqrt{-2\ln\alpha}$
7	Логнормальное распределение	$L:\mu,\sigma$	$p(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{\left(\ln(x/\mu)\right)^2}{2\sigma^2}\right],$ где $x\ge 0,$ $m=\mu\exp\left(\frac{1}{2}\sigma^2\right),$ $D=\mu^2\exp\left(\sigma^2\right)\left[\exp\left(\sigma^2\right)-1\right]$	$L:\mu,\sigma\sim\mu\exp(N:0,\sigma),$ где $N:\mu,\sigma$ – гауссовская СВ

Задание для самостоятельной работы

1. Реализуйте генерацию случайных величин с заданным законом распределения на основе датчика РСВ (табл. 1).
   a. Постройте график зависимости значения выборочного математического ожидания от числа реализаций СВ. Так же отобразите на графике значение математического ожидания, вычисленное на основе соотношений из табл. 1.
   b. Постройте график зависимости значения выборочной дисперсии от числа реализаций СВ. Так же отобразите на графике значение дисперсии, вычисленное на основе соотношений из табл. 1.
   c. Постройте гистограмму значений СВ. Так же отобразите на рисунке график плотности распределения, определённой на основе соотношений из табл. 1.
2. Напишите отчёт о проделанной работе, содержащий следующие пункты:
   1) Код для Matlab.
   2) График зависимостей для вашего варианта.