Распознавание образов, описываемых гауссовскими случайными векторами

Цель работы: Синтезировать алгоритмы распознавания образов, описываемых гауссовскими случайными векторами. Исследовать синтезированные алгоритмы распознавания с точки зрения ожидаемых потерь и ошибок.

1. Постановка задачи распознавания образов

Образы представляются как реализации случайного вектора $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,...,\mathbf{x}_n)^T$ в пространстве из n признаков. Каждый образ может принадлежать одному из M известных классов, в совокупности составляющих конечное множество альтернативных статистических гипотез $\Omega = \{\omega_i,\ \ i = \overline{1,M}\}$. Задаются априорные вероятности – априорные вероятности гипотез $\omega_i : \Pr(\boldsymbol{\omega} = \omega_i) = p(\omega_i),\ i = \overline{1,M}$ о принадлежности объектам каждому классу и статистически описания вектора признаков каждого класса $\mathbf{x}$ в виде условных плотностей распределения вероятностей $p(x/\omega_i),\ \ i = \overline{1,M}$, которые называются *функциями правдоподобия классов*.

Для каждого образа x требуется принять решение, относящие его к тому или иному классу.

2. Понятие решающего правила и разделяющей функции

Классификация каждого образа x осуществляется на основе алгоритма принятия решений – *решающего правила*, которое, в случае многих классов $(M > 2)$, будет иметь вид системы неравенств:

$$l_{ij}\left(x\right) = \frac{p\left(x/\omega_i\right)}{p\left(x/\omega_j\right)} \underset{\omega_j}{\overset{\omega_i}{\gtrless}} l_{ij}, \quad l_{ij} = \frac{p\left(\omega_j\right)}{p\left(\omega_i\right)}, \quad i, j = \overline{1,M}, \quad i \neq j. \qquad (1)$$

Величина $l_{ij}(x)$ называется *отношением правдоподобия*. Алгоритм принятия решения сводится к сравнению отношения правдоподобия каждой пары классов $l_{ij}(x)$ с порогом l_{ij}, который зависит от априорных вероятностей появления классов образов.

Соответствие образа x одному из классов может быть определено на основе *разделяющих функций* $g_i(x),\ i=\overline{1,M}$, по правилу

$$\omega_i: \quad g_i(x) \geq g_j(x), \quad j=\overline{1,M}, \quad i \neq j, \tag{2}$$

т.е. на основе выбора *максимума* среди соответствующих значений разделяющих функций. Разделяющая функция, соответствующая решающему правилу (1), имеет вид

$$g_i(x) = p(\omega_i / x) = p(\omega_i)\, p(x/\omega_i).$$

3. Распознавание образов, описываемых гауссовскими случайными векторами. Расчет вероятностей ошибок распознавания

Пусть для гипотез $\Omega=\{\omega_i,\ i=\overline{1,M}\}$ заданы априорные вероятности $p(\omega_i)$ и функции правдоподобия в форме гауссовских распределений:

$$p(x/\omega_i) = \mathrm{N}(x, m_i, C_i) = \left((2\pi)^n |C_i|\right)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-m_i)^T C_i^{-1}(x-m_i)\right\}, \tag{3}$$

где m_i – известные математические ожидания классов; C_i – известные матрицы ковариации.

В данном случае удобно использовать разделяющие функции вида $g_i'(x)=\ln(p(\omega_i)\,p(x/\omega_i)),\quad i=\overline{1,M}$, форма которых, при подстановке выражения (3), преобразуется к виду

$$g_i'(x) = -\frac{1}{2}\ln|C_i| - \frac{1}{2}(x-m_i)^T C_i^{-1}(x-m_i) + \ln p(\omega_i), \quad i=\overline{1,M}. \tag{4}$$

Для двух классов решающее правило принимает следующую форму:

$$g'(x) = g''(x) - l_0' \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} 0, \quad l_0' = \ln\frac{p(\omega_2)}{p(\omega_1)},$$

где $g''(x) = \ln l(x)$ – *логарифм отношения правдоподобия* (ЛОП), имеющий вид:

$$g''(x) = -\frac{1}{2}\ln|C_1| - \frac{1}{2}(x - m_1)^T C_1^{-1}(x - m_1) + \frac{1}{2}\ln|C_2| + \frac{1}{2}(x - m_2)^T C_2^{-1}(x - m_2).$$

Ошибки классификации можно разделить на *ошибки первого рода* α – при предъявлении образа одного класса, алгоритм классификации не относит образ к соответствующему классу (отвержение верной гипотезы), и *второго рода* β – при предъявлении образа одного класса, алгоритм классификации относит образ к другому классу (принятие неверной гипотезы). Для расчета вероятностей ошибок в случае гауссовского описания образов используются следующие соотношения:

$$\alpha = \int_{-\infty}^{l'_0} \mathrm{N}(g'', m_{g1}, D_{g1})\,dg'', \quad \beta = \int_{l'_0}^{\infty} \mathrm{N}(g'', m_{g2}, D_{g2})\,dg''. \tag{5}$$

4. Распознавание образов, описываемых гауссовскими случайными векторами с одинаковыми матрицами ковариации

Итак, пусть $C_i = C, \ \ i = \overline{1, M}$. При наличии двух классов $(M = 2)$, решающее правило и ЛОП записываются следующим образом:

$$g''(x) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} l'_0, \quad g''(x) = x^T C^{-1}(m_1 - m_2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2). \tag{6}$$

Для определения вероятностей ошибок на основе (5) используются соотношения:

$$m_{g1} = \frac{1}{2}(m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2), \quad m_{g2} = -\frac{1}{2}(m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = -m_{g1},$$

$$D_{g1} = D_{g2} = (m_1 - m_2)^T C^{-1}(m_1 - m_2) = 2m_{g1}. \tag{7}$$

5. Распознавание образов, описываемых гауссовскими случайными векторами с различными матрицами ковариации

Пусть теперь $C_i \neq C_j, \ \ i \neq j$. Для двух классов решающее правило и ЛОП примут форму:

$$g''(x) \underset{\omega_2}{\overset{\omega_1}{\gtrless}} l_0', \tag{8}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{2}x^T\left(C_1^{-1} - C_2^{-1}\right)x + x^T\left(C_1^{-1}m_1 - C_2^{-1}m_2\right) - \frac{1}{2}m_1^T C_1^{-1}m_1 + \frac{1}{2}m_2^T C_2^{-1}m_2.$$

Для определения вероятностей ошибок на основе (5) используются соотношения:

$$\begin{aligned}
m_{g1} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(C_2^{-1}C_1 - I\right) + \frac{1}{2}\left(m_1 - m_2\right)^T C_2^{-1}\left(m_1 - m_2\right) - \frac{1}{2}\ln\frac{|C_1|}{|C_2|},\\
D_{g1} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(C_2^{-1}C_1 - I\right)^2 + \left(m_1 - m_2\right)^T C_2^{-1}C_1C_2^{-1}\left(m_1 - m_2\right),\\
m_{g2} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(I - C_1^{-1}C_2\right) - \frac{1}{2}\left(m_1 - m_2\right)^T C_1^{-1}\left(m_1 - m_2\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{|C_2|}{|C_1|},\\
D_{g2} &= \frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(C_1^{-1}C_2 - I\right)^2 + \left(m_1 - m_2\right)^T C_1^{-1}C_2C_1^{-1}\left(m_1 - m_2\right),
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathrm{tr}(A)$ – след матрицы A; I – единичная матрица.

Далее приведён пример реализации алгоритмов генерации и распознавания образов, описываемых гауссовскими случайными векторами с различными матрицами ковариации. В данной программе реализуется вычисление вероятностей ошибок на основе выражений (5), а так же экспериментально, на основе сравнения количества верно/неверно классифицируемых образов каждого класса с исходным числом генерируемых образов классов.

Для функционирования данной программы, скрипт с приведённым кодом должен располагаться в одной папке с модулем randncor.m.

Пример 1

```
%%% Распознавание образов, описываемых Гауссовскими
% распределениями с различными матрицами ковариации
clear all;
close all;
%% 1. Задание параметров и генерация образов
% 1.1 Параметры генерации
n=2;                   % размерность пространства признаков
M=3;                   % число классов
Nn=[100; 100; 100]; % число образов 1-го, 2-го, 3-го классов...
```

```
N=sum(Nn);              % соответственно, а так же общее число
образов
pw=Nn/N;                % априорные вероятности появления классов
% 1.2. Параметры классов
m=cell(1, M);           % инициализация массивов ячеек для мат.
ожиданий,...
C=cell(1, M);           % ковариационных матриц,...
x=cell(1, M);           % и массивов образов
m{1}=[2; 1];            % задание средних значений классов
m{2}=[-1; 4];
m{3}=[4; -5];
C{1}=[3 -1; -1 3];  % задание матриц ковариации классов
C{2}=[5 1; 1 4];
C{3}=[4 0.5; 0.5 3];
% 1.3. Генерация образов классов
for i=1:M
    x{i}=repmat(m{i}, [1, Nn(i)])+randncor(n, Nn(i), C{i});
end;
Xn=[x{1}, x{2}, x{3}];  % общая выборка образов
% 1.4. Визуализация образов
L1=zeros(1, Nn(1));     % метки классов для функции plotpv
L2=0.5*ones(1, Nn(2));
L3=ones(1, Nn(3));
Ln=[L1, L2, L3];        % общий массив меток
figure; plotpv(Xn, Ln); % визуализация образов
title('Исходное расположение образов');
%% 2. Классификация образов
% 2.1. Вычисление значений разделяющей функции (формула (4))
dC=cell(1, M);  % массив ячеек для определителей ков. матриц
g=zeros(M, N);  % и массива значений разделяющих функций
for i=1:M
    dC{i}=det(C{i});    % вычисление определителей ков. матриц
end;
for k=1:N
    xk=Xn(:, k);        % для каждого образа из общей выборки...
    for i=1:M           % вычисление значений разделяющих функций
        g(i, k)=-0.5*(log(dC{i})+(xk-m{i})'/C{i}*(xk-
m{i}))+log(pw(i));
    end;
end;
% 2.2. Получение индексов классов (cls_idx), соответствующих...
[vals, cls_idx]=max(g); % максимуму разделяющей функции (формула
(2))
Lg=(cls_idx-1)./(M-1);  % значения меток (в диапазоне [0, 1])
figure; plotpv(Xn, Lg); % визуализация классифицированных
образов
title('Результаты классификации');
%% 3. Расчет вероятностей ошибок распознавания
Pt=zeros(M);            % матрица значений ошибок
E=eye(n);               % единичная матрица
% 3.1. Заполнение НЕдиагональных элементов матрицы...
% т.е. вероятностей ошибок распознавания
% (ошибки 1-го и 2-го рода для разных классов могут совпадать)
```

```
%       ( p1     alf12  alf13 )   (  p1    bet21  bet31 )
% Pt =  ( alf21   p2    alf23 ) = ( bet12   p2    bet32 ),
%       ( alf31  alf32    p3  )   ( bet13  bet23    p3  )
% где pi - вероятность верного распознавания образов i-го
класса;
%   alfij - вероятность ошибки 1-го рода для i-го класса при
%           предъявлении образов j-го класса;
%   betij - вероятность ошибки 2-го рода для i-го класса при
%           предъявлении образов j-го класса;
for i=1:M-1               % попарное сравнение классов
    for j=i+1:M
        % 3.2. Вычисление параметров по формуле (9)
        dm=m{i}-m{j};               % вектор разности мат. ожиданий
        l0_=log(pw(j)/pw(i));       % порог принятия решения
        tr_ij=trace(C{i}/C{j}-E);     % следы матриц
        tr_ji=trace(E-C{j}/C{i});
        mg_i=0.5*(tr_ij+dm'/C{j}*dm-log(dC{i}/dC{j}));
        Dg_i=0.5*(tr_ij^2+dm'/C{j}*C{i}/C{j}*dm);
        mg_j=0.5*(tr_ji-dm'/C{i}*dm+log(dC{j}/dC{i}));
        Dg_j=0.5*(tr_ji^2+dm'/C{i}*C{j}/C{i}*dm);
        % 3.3. Вычисление ошибок 1-го и 2-го рода для образов...
        % i-го класса при предъявлении образов j-го класса
        alf_ij=normcdf(l0_, mg_i, sqrt(Dg_i));  % по формуле (5)
        bet_ij=1-normcdf(l0_, mg_j, sqrt(Dg_j));% от l0' до
+infinity
        Pt(i, j)=alf_ij;     % запоминаем их...
        Pt(j, i)=bet_ij;     % в матрице ошибок
    end;
end;
% 3.4. Вычисление вероятностей правильного распознавания как
% (1 - сумма_элементов_строки_матрицы_ошибок)
Pt=Pt+diag(1-sum(Pt, 2));   % размещение диагональных элементов
disp('Теоретическая матрица вероятностей ошибок');
disp(Pt);         % вывод на консоль матрицы ошибок
%% 4. Экспериментальное вычисление матрицы вероятностей ошибок
% 4.1. Определение результатов классификации для образов
x1_labs=cls_idx(1:Nn(1));                 % 1-го класса
x2_labs=cls_idx(Nn(1)+(1:Nn(2)));         % 2-го класса
x3_labs=cls_idx(N-Nn(3)+(1:Nn(3))); % 3-го класса
% 4.2. Метки образов 1-го класса, отнесённые к:
labs_1=x1_labs==1;       % 1-му классу (верно)
labs_12=x1_labs==2;      % 2-му классу
labs_13=x1_labs==3;      % 3-му классу
% 4.3. Метки образов 2-го класса, отнесённые к:
labs_2=x2_labs==2;       % 2-му классу (верно)
labs_21=x2_labs==1;      % 1-му классу
labs_23=x2_labs==3;      % 3-му классу
% 4.4. Метки образов 3-го класса, отнесённые к:
labs_3=x3_labs==3;       % 3-му классу (верно)
labs_31=x3_labs==1;      % 1-му классу
labs_32=x3_labs==2;      % 2-му классу
% 4.5. Формирование экспериментальной матрицы вероятностей
ошибок
```

```
Pp=[sum(labs_1)/Nn(1)   sum(labs_12)/Nn(1)  sum(labs_13)/Nn(1);
    sum(labs_21)/Nn(2)  sum(labs_2)/Nn(2)   sum(labs_23)/Nn(2);
    sum(labs_31)/Nn(3)  sum(labs_32)/Nn(3)  sum(labs_3)/Nn(3) ];
disp('Экспериментальная матрица вероятностей ошибок');
disp(Pp);       % вывод на консоль матрицы ошибок (должна быть
близкой к Pt)
```

Задание для самостоятельной работы

1. Реализуйте алгоритм распознавания классов, описываемых гауссовскими законами распределения с заданными параметрами.
   a. Вычислите вероятности ошибок первого и второго рода на основе выражений (5).
   b. Вычислите вероятности ошибок первого и второго рода экспериментально на основе программы, приведённой в примере 1.
2. Напишите отчёт о проделанной работе, содержащий следующие пункты:
   1) Фамилию исполнителя и номер группы.
   2) Название и цель лабораторной работы.
   3) Номер вашего варианта.
   4) Код для Matlab.
   5) Значение вероятностей ошибок первого и второго рода, вычисленных в соответствии с вашим вариантом.

Варианты:

1. m_1=[2 1], m_2=[-1 -1], C_1=[3 -1; -1 3], C_2=[5 2; 2 6], N_1=150, N_2=200.
2. m_1=[-2 3], m_2=[10 1], C=[5 -1; -1 5], N_1=220, N_2=180.
3. m_1=[3 1 1], m_2=[-1 7 2], C_1=[3 1 1; 1 3 1;1 1 3], C_2=[3 -1 -1;-1 3 -1; -1 -1 3] , N_1=N_2=250.
4. m_1=[0 -1], m_2=[-4 2], C=[3 -2; -2 3], N_1=190, N_2=140.
5. m_1=[-2 -3 -3], m_2=[1 11 0], C=[4 1 -1; 1 4 1;-1 1 4], N_1=N_2=300.
6. m_1=[10 -2], m_2=[-4 3], C=[3 1; 1 3], N_1=230, N_2=170.
7. m_1=[3 1], m_2=[-1 7], C_1=[3 1; 1 3], C_2=[3 1; 1 4], N_1=200, N_2=160.
8. m_1=[2 -3], m_2=[1 10], C=[3 -1; -1 4], N_1=150, N_2=200.
9. m_1=[5 -1], m_2=[-1 4], C=[6 2; 2 6], N_1=280, N_2=210.
10. m_1=[2 2], m_2=[1 -1], C_1=[2 -1; -1 3], C_2=[5 1; 1 5], N_1=140, N_2=170.