1 Теореми про лишки.

1.1 Поняття лишку в скіченній точці.

Нехай функція $f(z)$ регулярна в проколотому околі точки a, $a \neq \infty$, тобто в кільці $K : 0 < |z - a| < \rho$. Точка a є для $f(z)$ або ізольованою особливою точкою однозначного характеру, або точкою регулярності і зображається в кільці K збіжним рядом Лорана.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Означення 1.1. *Лишком функції $f(z)$ в точці a (позначається $\underset{z=a}{res} f(z)$) називається коефіцієнт c_{-1} ряду Лорана для $f(z)$ в околі точки a, тобто*

$$\underset{z=a}{res} f(z) = c_{-1} \tag{1.1}$$

з формули для обчислення коефіцієнтів ряду Лорана (див. п. 12. 2) при $n = -1$ будемо мати

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi,$$

де $\gamma_\rho : |z - a| = \rho$, $0 < \rho < \rho_0$ — коло радіуса ρ з центром в точці a, орієнтована в додатньому напрямі. Таким чином

$$\int_{\gamma_\rho} f(\xi)\, \mathrm{d}\xi = 2\pi \underset{z=a}{res} f(a). \tag{1.2}$$

Тобто, якщо $z = a$ — ізольована особлива така функція $f(z)$, то інтеграл від функції $f(z)$ по межі достатньо малого околу точку a рівний лишку в цій точці, помноженому на $2\pi i$.

Очевидно, $\underset{z=a}{res} f(a) = 0$, якщо $a(a \neq \infty$ — точка регулярності функції $f(z)$.

Приклад 1.1. *Знайти лишок функції $e^{\frac{1}{z}}$ в точці $z = 0$. Оскільки*

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{1!z} + \dots, \quad c_1 = 1, \text{то } \underset{z=0}{res} e^{\frac{1}{z}} = 1.$$

Отже, згідно формули (1.2)

$$\int_{|\xi|=1} e^{\frac{1}{\xi}}\, \mathrm{d}\xi = 2\pi i \underset{z=0}{res} e^{\frac{1}{z}} = 2\pi i.$$

Приклад 1.2. *Знайти лишок функції $f(z) = \frac{\sin z}{z^4}$ в точці $z = 0$.*

Так як

$$f(z) = \frac{1}{z^4}(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots), \quad \text{то } c_{-1} = \frac{1}{3!}, \quad \text{а } \int_{|\xi|=2} \frac{\sin \xi}{\xi^4}\, \mathrm{d}\xi = \frac{2\pi i}{3!} = \frac{\pi i}{3}.$$

Приклад 1.3. *Знайти лишок функції $f(z) = z = z \cdot \cos \frac{1}{z+1}$ в точці $z = -1$.*

Оскільки

$$f(z) = \big[(z+1) - 1\big]\big[1 - \frac{1}{2!(z+1)^2 + \dots}\big] \quad \text{то } c_1 = -\frac{1}{2!} \quad \text{і } \underset{z=-1}{res} f(z) = -\frac{1}{2}$$

1.2 Обчислення лишку в полюсі, який є скінченою точкою комплексної площини.

Розглянемо два випадки: випадок простого полюса і кратного полюса.

1. Якщо точка a — простий полюс функції $f(z)$, то ряд Лорана в околі точки a має вид

$$f(z) = c_{-1}(z-a)^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

Отже $c_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

Для знаходження лишку в простому полюсі має місце формула

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{1.3}$$

Якщо $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ — регулярні в точці a функції, причому $\varphi(a) \neq 0$, $\psi(a) = 0$, $\psi'(z) \neq 0$, то точка a простим полюсом функції $f(z)$, і за формулою (1.3) обчислюємо

$$\underset{z=a}{res} f(z) = \lim_{z\to a} \frac{(z-a)\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to a} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(a)}{z-a}} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)},$$

тобто

$$\underset{z=a}{res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{1.4}$$

2. Якщо точка a — полюс порядку m для функції $f(z)$, то ряд Лорана в околі точки a має вид

$$f(z) = \frac{c-m}{(z-a)^m} + \dots + \frac{c-1}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \dots \tag{1.5}$$

Помноживши обидві частини рівності на (1.5), будемо мати

$$(z-a)^m f(z) = c_{-m} + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + c_0(z-a)^a + \dots \tag{1.6}$$

Диференціючи рівність (1.6) $m-1$ раз і знайшовши границю при $z \to a$, матимемо

$$(m-1)!c_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-2}}\Big[(z-a)^m f(z)\Big].$$

Звідси

$$c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \frac{\mathrm{d}^{(m-1)}}{\mathrm{d}z^{(m-1)}}\Big[(z-a)^m f(z)\Big] \tag{1.7}$$

Зокрема, якщо $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$, де функція $h(z)$ регулярна в точці a, $h(a) \neq 0$, то з (1.7) одержуємо формулу

$$\underset{z=a}{res} \frac{h(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a) \tag{1.8}$$

Приклад 1.4. *Обчислити лишки в полюсах функції* $f(z) = \frac{e^z}{(z+1)(z-3)^3}$*. Оскільки* $z = -1$ *— полюс першого порядку, то за формулою (1.3)*

$$\underset{z=-1}{res} f(z) = \left[\frac{e^z}{(z-3)^3}\right]_{z=-1} = \frac{-e^{-1}}{4^3}$$

а за формулою (1.8)

$$\underset{z=3}{res} f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^z}{z+1}\right)\Bigg|_{z=3} = \frac{10}{4^3}e^3$$

Приклад 1.5. *Для функції* $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$ *точки* $z = k\pi$*,* $k \in \mathbb{Z}$*, є простими полюсами. За формулою (1.4) знаходимо*

$$\underset{z=k\pi}{res} \cot z = \left[\frac{\cos z}{(\sin z)'}\right]_{z=k\pi} = 1$$

1.3 Лишки в нескінченно віддалених точках.

Нехай функція $f(z)$ регулярна в області $r_0 < |z| < \infty$, тобто в околі точки $z = \infty$. Тоді точка $z = \infty$ є для функції $f(z)$ або ізольованою особливою точкою однозначного характеру, або точкою регулярності, а функції $f(z)$ зображається в області $r_0 < |z| < \infty$ збіжності ряду Лорана.

$$f(z) = \sum_{k=\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \tag{1.9}$$

Означення 1.2. *Лишком функції* $f(z)$ *в точці* $z = \infty$ *(позначається* $\underset{z=\infty}{res} f(z)$*) називається число* $-c_{-1}$*, де* c_{-1} *— коефіцієнт при* $\frac{1}{z}$ *ряду Лорана (1.9) для функції* $f(z)$ *в околі нескінченного віддаленої точки, тобто*

$$\underset{z=\infty}{res} f(z) = -c_{-1}. \tag{1.10}$$

Якщо функція $f(z)$ *регулярна в області* $D : r_0|z| < \infty$*, то (див. п. 12. 2) маємо*

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

де $|\xi| = r, r > r_0$*, орієнтована проти годинникової стрілки. Отже, внаслідок (1.11) знаходимо*

$$\int_{\gamma_r} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\pi i \underset{z=\infty}{res} f(z), \tag{1.11}$$

де γ_r *— коло* $|\xi| = r$*, орієнтована за годинниковою стрілкою.*

Зауваження. *Якщо функція* $f(z)$ *регулярна в проколотому околі* U *скінченної, чи нескінченної точки* $c \in \bar{\mathbb{C}}$*, то* $\int_{\gamma_\rho} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$*,* γ_ρ *— границя цього околу, рівний* $\underset{z=a}{res} f(z) \cdot 2\pi i$*. При обході* γ_ρ *окіл* U *в формулах (1.2) і (1.11) залишається зліва.*

Якщо точка $z = \infty$ *є нулем порядку* n *функції* $f(z)$*, то в околі цієї нескіченно віддаленої точки функція* $f(z)$ *зображається рядом Лорана* $f(z) = \frac{c_{-n}}{z^n} + \frac{c_{-(n+1)}}{z^{n+1}} + \dots$*, де* $c_{-n} \neq 0$*.*