0.1. Доповнення і зауваження до інтегральної теореми Коші.

Розглянемо функцію $f(z) = \frac{1}{z}$, яка є диференційовною в кільці $0 < |z| < 2$. Обчислимо інтеграл $\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$. Будемо мати: $z = e^{it}$, $\mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t$.

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\,\mathrm{d}t = 2\pi i \neq 0.$$

Цей факт свідчить, що вимога однозв'язності області в інтегральній теоремі Коші є суттєвою.

При певних обчисленнях, накладених на криві, інтегральну теорему Коші можна застосовувати і до неоднозв'язних областей D.

Інтегральна теорема Коші для системи контурів. Нехай $f(z)$ — однозначна і аналітична функція в довільній (не обов'язково) однозв'язній області D і $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ система замкнутих спрямлювальних жорданових кривих, які лежать в області D і задовольняють таким умовам:

1) криві $\gamma_k, k = 1, 2, \ldots, n$, лежать всередині Γ;

2) для $\forall k_0 (k_0 = 1, 2, \ldots, n)$ криві γ_k при $k \neq k_0$ лежать зовні γ_{k_0};

3) многозв'язна область B обмежена кривими $\Gamma, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ належить області D.

При цих умовах справедлива рівність

$$\int_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,\mathrm{d}z, \tag{1}$$

де всі інтеграли беруться в одному і тому ж напрямі, зокрема, так, що внутрішність кривих залишаються зліва від спостерігача, який обходить криві в напрямі інтегрування.

Доведення. *З'єднуючи криву Γ з кривими $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ розрізами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ (див. рис. 1) так, щоб одержана область $\widetilde{D}$ була однозв'язною. Границя $\widetilde{\Gamma}$ області D складається з кривих $\Gamma, \gamma_1^-, \gamma_2^-, \ldots, \gamma_n^-$, де Γ — проходиться в додатньому напрямі, а криві $\gamma_1^-, \gamma_2^-, \ldots, \gamma_n^-$ — у від'ємному, а також з розрізів $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, які проходять двічі в протилежних напрямках. За інтегральною теоремою Коші з пункта 8.2* $\int_{\widetilde{\Gamma}} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$

Отже рівність (8.2) *доведена.*

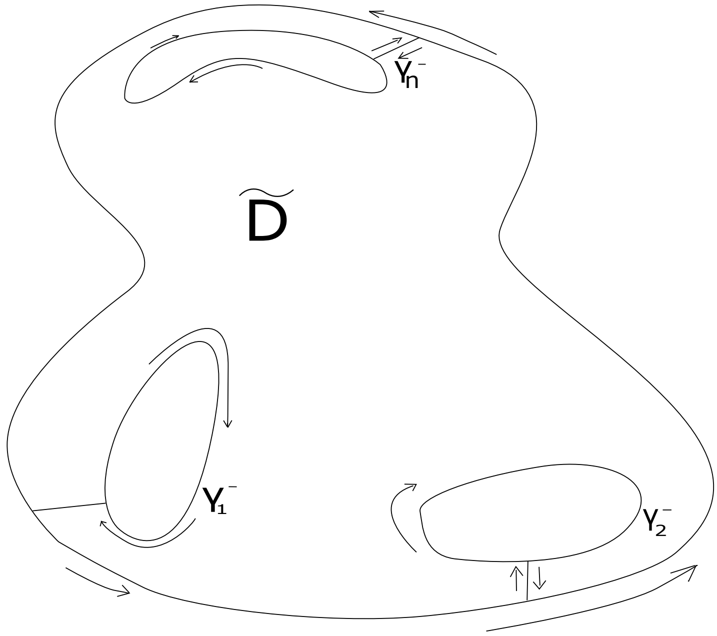
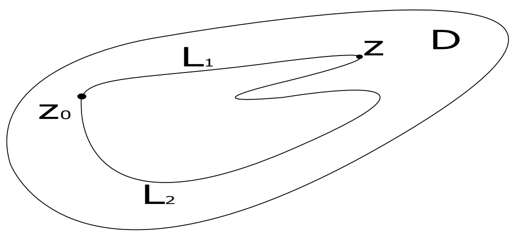


Рис. 1: Рисунок до доведення 0.1

0.2. Інтеграл і первісна.

Нехай D — однозв'язна область, $f(z)$ — аналітична в D, $z_0 \in D$ — фіксована точка, L_1 і L_2 — спрямлювані криві, які лежать в D і з'єднують z_0 з довільною точкою $z \in D$. Якщо $-\,L_2$ крива, яка проходиться від точки z до точки z, то криві L_1 і $-\,L_2$ складають замкнуту спрямлювану криву, і за інтегральною теоремою Коші:

$$\int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{-L_2} f(z)\,\mathrm{d}z = 0, \quad \text{або} \quad \int_{L_1} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{L_2} f(z)\,z$$



Тобто, значення інтеграла від аналітичної функції $f(z)$ не залежить від кривої, по якій проводиться інтегрування, а залежить тільки від початкової і кінцевої точок цієї кривої. Нехай точка z_0 фіксована, тоді інтеграл $\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ є функцією тільки від z, тобто

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(z) \tag{2}$$

Функція $F(z)$ диференційовна в області D і $F'(z) = f(z)$. Доведемо дещо більш загальне твердження.

Теорема 0.1. *Нехай функція $f(z)$ неперервна в скінченній одноз'язній області D, і нехай інтеграл від $f(z)$ по довільній замкнутій кривій, яка лежить в області D, рівний нулю. Тоді функція $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, де $z_0 \in D$, $z \in D$, диференційовна в області D , тобто*

$$\left(\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)' = f(z)$$

Доведення. При умовах теореми інтеграл $\int_\gamma f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ не залежить від кривої γ, яка лежить в області D і з'єднує точки z_0 і z, а, значить, функція

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

однозначна в області D. Для точки $z + \Delta z \in D$, яка лежить в околі точки $z \in D$, різниця

$$\gamma = \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \Delta z \to 0.$$

Покажемо це. Очевидно

$$\begin{aligned}\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\left\{\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right\}\\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Так як $\int_{z}^{z+\Delta z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Delta z$, то

$$f(z) = \frac{f(z)}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)\,\mathrm{d}\xi \tag{3}$$

Оскільки інтеграл в (0.2) і (3) незалежать від шляху по якому проводяться інтегрування, то візьмемо за шлях інтегрування відрізок, який з'єднує точки z і $z + \Delta z$. Будемо мати

$$\gamma = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} \Big[f(\xi) - f(z)\Big]\,\mathrm{d}\xi,$$

або
$$|\gamma| \le \frac{1}{|\Delta z|} \int_{z}^{z+\Delta z} \Big| f(\xi) - f(z) \Big| \cdot |d\xi| \tag{4}$$

З неперервності функції $f(z)$ в області D, а значить і в точці $z \in D$ для $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ таке, що при $|z - \xi| < \delta$ справджується нерівність
$$|f(z) - f(\xi)| < \epsilon \tag{5}$$

Ясно, що $|z - \xi| \le |\Delta z|$, бо ξ в (4) належить відрізку $[z, z + \Delta z]$, тому (5) буде виконуватися при $|\Delta z| < \delta$, а значить
$$|\gamma| = \frac{1}{\Delta z} \cdot \epsilon \cdot |\Delta z|$$

Таким чином існує
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z),$$

тобто $F'(z) = f(z)$ □

Нехай функція $f(z)$ означена в області D, а функція $F(z)$ визначена рівністю (2), визначена в цій області.

Означення 0.1. *Якщо $F'(z) = f(z)$ для $\forall z \in D$, то функція $F(z)$ називаеться первісною функції $f(z)$ в області D.*

Як бачимо, поняття первісної для функцій комплексного змінного вводиться таким де чином, як для функцій дійсного змінного.

З означення первісно і теореми 0.1 маємо, що $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ є первісною функції $f(z)$

Теорема 0.2. *Якщо функція $f(z)$ диференційовна в скінченній однозв'язній областв D, то вона має в D первісну $F(z)$.*

Доведення. Функція $f(z)$ задовольняє умови теореми 0.1. Тому за цією теоремою функція $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ є первісною $f(z)$. Теорема доведена. □

Теорема 0.3. *Сукупність всіх первісних функції $f(z)$ в області D визначається формулою $F_1(z) + C$, де $F_1(z)$ деяка первісна функції $f(z)$, а C — довільна стала*

Доведення. *Якщо* $F_1(z)$ *і* $F_2(z)$ *— первісні функції* $f(z)$ *в області* D*, то функція* $F(z) = F_2(z) - F_1(z) = u + iv$ *є сталою в області* D*, бо за умовою* $F'(z) = F_2'(z) - -F_1'(z) = f(z) - f(z) = 0$ *для* $\forall z \in D$*. А звідси слідує, згідно умови* КРЕДа *(див. 5.4, формули (7), (8)), що* $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 0$ *в області* D*, тобто* $F(z) \equiv const$*, або* $F_2(z) = F_1(z) + C$*, де* C *— комплексна стала.*

Наслідок. При умовах теореми 0.1, або 0.2 довільна первісна $F(z)$ функції $f(z)$ виражається формулою

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C, \quad \text{де } C \text{ — комплексна стала.} \tag{6}$$

Наслідок. При умовах теореми 0.1, або 0.2 має місце формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi = F(z_1) - F(z_0) \tag{7}$$

Доведення. Якщо покласти в формулі (6) $z = z_0$, то одержимо, що $F(z_0) = C$, а якщо — $z = z_1$, то

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + C = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + F(z_0).$$

Звідси слідує рівність (7). □

Наслідок. Якщо функції $f(z)$ і $g(z)$ задовольняють умови теореми 0.2, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi)g'(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \Big[f(\xi)g(\xi)\Big]\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{8}$$

Доведення. *Оскільки* $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$*, то користуючись формулою (7), будемо мати*

$$\int_{z_0}^{z_1} (fg)'\,\mathrm{d}\xi = f(\xi_1) \cdot g(\xi_1) - f(z_0) \cdot g(z_0) = [f(\xi)g(\xi)]\Big|_{z_0}^{z_1},$$

що доводить рівність (8).

В однозв'язній області інтеграли від диференційовних елементарних функцій комплексного змінного обчислюються з допомогою тих же і формул, що й у випадку дійсних функцій.

Приклад 0.1. *Функція* $f(z) = \frac{1}{z}$ *диференційовна в неоднозв'язній області* $D : 0 < |z| < \infty$. *Якщо* $\widetilde{D} \subset D$ *і* $\widetilde{D}$ *— однозв'язна область. Функція*

$$F(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}, \quad z \in \widetilde{D},$$

де інтеграл береться по довільній кривій, що лежить в $\widetilde{D_1}$ *є первісною, згідно теореми 0.2, для функції* $\frac{1}{z}$ *і* $F'(z) = \frac{1}{z}$. *Але функція*

$$\Phi(z) = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}, \quad z \in D$$

є неоднозначною в області D, *бо*

$$\int_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi} = 2\pi i \neq 0.$$

1. Інтегральна формула Коші

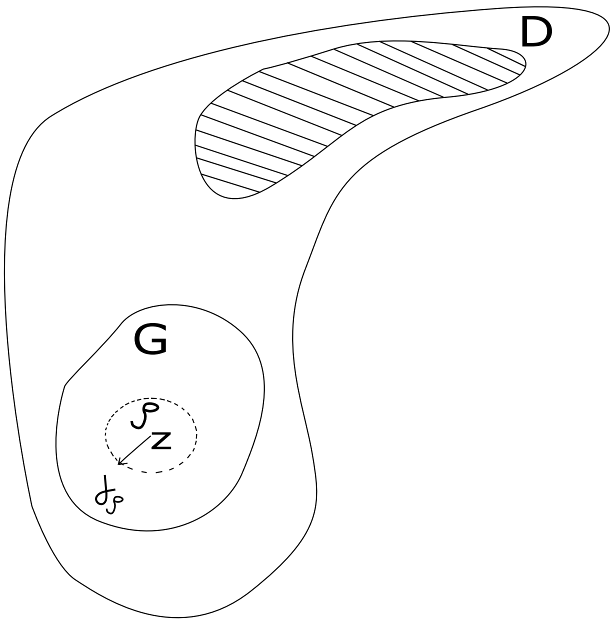
1.1. Інтеграл Коші.

З інтегральної теореми Коші слідує одна з важливіших (і красивіших) формул теорії функцій комплексного змінного — інтегральна формула Коші.

Теорема 1.1 (інтегральна формула Коші). *Нехай $f(z)$ — функція однозначна і аналітична в області D і L — замкнута жорданова спрямлювана крива, яка належить D разом із своєю внутрішністю G. Тоді для будь-якої точки $z \in G$ справедлива інтегральна формула Коші.*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, \mathrm{d}\xi, \quad z \in G. \tag{9}$$

Тут крива L проходиться в додатньому напрямі, тобто проти годинникової стрілки. Інтеграл в правій части формули (9) називають інтегралом Коші.



Доведення. *Опишемо з точки z, як з центра, коло γ_ρ настільки малого радіуса ρ, щоб воно містилось в L. Тоді для контура, утвореного кривими L і γ_ρ, будемо мати:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z} \tag{10}$$

Для доведення формули (9) достатньо встановити рівність

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$$

або рівність

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 2\pi i f(z) =$$

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - f(z)\int_{\gamma_\rho} \frac{d\xi}{\xi - z} = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Внаслідок неперервності функції $f(\xi)$ в точці z нерівність

$$|f(\xi) - f(z)| < \epsilon, \quad \xi \in \gamma_\rho$$

буде виконуватись для $\forall\epsilon > 0$, якщо $\rho < \delta = \delta(\epsilon)$. Тому

$$\left|\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi\right| < \frac{\epsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\epsilon.$$

А значить

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Інтеграл $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$ не залежить від ρ, що видно з рівності (10), а інтеграл $\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi$ також не залежить від ρ. Значить він рівний нулю при всіх $\rho < \delta(\epsilon)$. Таким чином рівність (1.1) справедлива і інтегральна формула Коші (9). Значення функції $f(z)$ всередині області виражається з допомогою формули (1.1) через її значення цієї області.

Нехай функція $f(z)$ диференційовна в області D, а γ_1 і γ_2 — жорданові спрямлювальні криві (γ_1 лежить всередині γ_2), які утворюютть границю області $D_1 \subset D$ (див. рис. 2). Тоді для $\forall z \in D_1$ справедлива формула

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi \tag{11}$$

При обході кривих γ_2 і γ_1 внутрішністю кожної з них залишається зліва.

Зауваження. Якщо в правій частині формули (1.1) z належить зовнішності кривої Γ, тобто $z \in \bar{D}$, то підінтегральна функція диференційовна по ξ скрізь в D і за теоремою Коші інтеграл рівний нулю, тобто

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\,\mathrm{d}\xi = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0, & z \in D \end{cases}$$

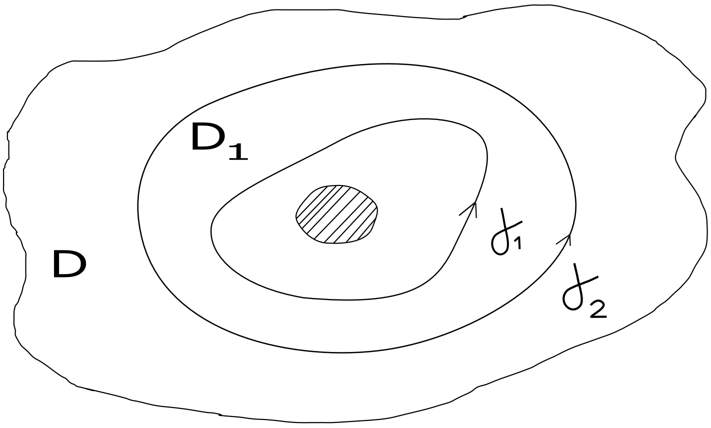


Рис. 2: Рисунок до доведення 1.1

1.2. Теорема про середнє.

Теорема про середнє. Якщо функція $f(z)$ диференційовна в крузі $K : |z - z_0| < R$ і неперервна в замкнутому крузі $\bar{K}$, то значення цієї функції в центрі круга рівне середньому арифметичному її значень на колі, тобто

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{i\varphi}) \, \mathrm{d}\varphi. \tag{12}$$

Доведення. *Якщо в формулі (9) взяти L як коло радіуса R з центром в точці z_0, тобто*

$$L : \xi = z_0 + Re^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \textit{то}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{f(\varphi)}{\xi - z_0} \, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{i\varphi}) i Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}} \, \mathrm{d}\varphi.$$

Що й доводить формула (12).