Теорема 0.1. *Ізольована особлива точка $a \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є полюсом тоді і тільки тоді, коли головна частина ряду Лорана в околі точки a містить лише скінченне число відмінних від нуля членів.*

$$f(z) = \sum_{k=-N}^{\infty} c_k (z-a)^k, \quad N > 0 \tag{0.1}$$

Доведення. ***Необхідність.*** *Нехай a — полюс; оскільки $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, то існує проколотий окіл точки a, де $f(z)$ регулярна і відмінна від нуля. В цьому околі регулярна функція $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, причому існує $\lim_{z\to a} \varphi(z) = 0$. Значить a є усувною точкою (нулем) функції φ і в нашому околі справедливий розклад*

$$\varphi(z) = b_N (z-a)^N + b_{N+1}(z-1)^{N+1} + \dots, \quad (b_N \neq 0)$$

Але тоді в тому ж околі ми маємо

$$f(z) = \frac{1}{\varphi(z)} = \frac{1}{(z-a)^N} \cdot \frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-a) + \dots} \tag{0.2}$$

при цьому другий множник є функцією ругулярною в точці a, а значить має розклад в ряд Тейлора

$$\frac{1}{b_N + b_{N+1}(z-1) + \dots} = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots \quad (c_{-N} = \frac{1}{b_N} \neq 0)$$

Підставивши цей розклад в (0.2), будемо мати

$$f(z) = \frac{c_{-N}}{(z-a)^N} + \frac{c_{-N+1}}{(z-a)^{N-1}} + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

це є розклад в ряд Лорана функції $f(z)$ в проколотому околі точки a, і ми бачимо, що його головна частина містить скінченне число членів.

Достатність. *Нехай $f(z)$ в проколотому околі точки a зображаються розкладом в ряд Лорана (0.1), головна частина якого містить скінченне число членів; нехай ще $c_{-N} \neq 0$. Тоді $f(z)$ регулярна в цьому околі, як функція $\varphi(z) = (z-a)^N f(z)$. Ця функція в даному околі зображається рядом*

$$\varphi(z) = c_{-N} + c_{-N+1}(z-a) + \dots,$$

звідки видно, що a є усувною точкою і існує $\lim_{z\to a} \varphi(z) = c_{-N} \neq 0$. Але тоді функція $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^N}$ прямує до ∞ при $z \to a$, тобто точка a є полюсом

Відмітимо ще один факт прозв'язок полюсів з нулями.

Теорема 0.2. *Точка a є полюсом функції $f(z)$ в тому і тільки тому випадку, коли функція $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$, $\varphi(z) \not\equiv 0$, регулярна в околі точки a і $\varphi(a) = 0$.*

Доведення. *Необхідність умови доведена при доведенні теореми (0.2). Доведемо її достатність. Якщо $\varphi \not\equiv 0$ регулярна в точці a і $\varphi(z)$, то за теоремою єдності (п. 12.3) існує проколотий окіл цієї точки, в якому $\varphi(z) \neq 0$. В цьому околі функція $f(z) = \frac{1}{\varphi(z)}$ регулярна, і, знаючи, a є ізольованою особливою точкою $f(z)$. Але $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, значить a є полюсом.*

Цей зв'язок дозволяє сформулюювати.

Означення 0.1. *Порядком полюса в точці a функції $f(z)$ називається порядок цієї точки як нуля функції $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$.*

З доведення теореми (0.2) видно, що порядок полюса співпадає з номером N старшого члена головної частини розкладу функції $f(z)$ в ряд Лорана в проколотому околі полюса.

Приклад 0.1. *Для функції $f(z) = \frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$ точки $z_k = \frac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots,$, є полюсами першого порядку, оскільки функція $g(z) = \frac{1}{f(z)} = \sin\frac{1}{z}$ регулярна при $z \neq 0$, а точки z_k є її нулями першого порядку,($g'(z_k) \neq 0$). Значить, точки $z = 0$ є неізольованою особливою точкою. Точка $z = \infty$ — першого порядку для $f(z)$, бо $f(z) \sim z$ ($\lim_{z\to\infty}\frac{f(z)}{z} = 1$) при $z \to \infty$.*

Приклад 0.2. *Точка $z = 0$ є полюсом першого порядку для функції $f(z) = \frac{1-\cos z}{(e^z-1)^3}$. Точки $z_k = 2k\pi i (k = \pm 1, \pm 2, \dots)$ полюси третього порядку для $f(z)$ оскільки ці точки є нулями третього порядку для функції $f(z) = (e^z - 1)^3$, а $1 - \cos z \neq 0$.*

0.1 Характеристична властивість істотно особливої точки

Теорема 0.3. *Ізольована особлива точка a функції $f(z)$ є суттєво особливою тоді і тільки тоді, коли головна частина розкладу Лорана $f(z)$ в околі точки a містить нескінченну кількість відмінних від нуля членів.*

Доведення. *Доведення цієї теореми по суті міститься в теоремах 0.2 пунктів 13.3 і 13.4. Бо якщо головна частина містить нескінченне число членів, то a не може бути ні усувною точкою, а ні полюсом; якщо a — суттєво особлива точка, то головна частина не може бути відсутньою, і не може містити скінченне число членів.*

Теорема 0.4. ***(Ю. В. Сохоцкий).*** *Якщо a є суттєво особливою точкою функції f, то для довільного числа $A \in \bar{\mathbb{C}}$ можна знайти послідовність точок $z_k \to a$ таку, що*

$$\lim_{k\to\infty} f(z_k) = A.$$

Цю теорему можна сформулювати ще так: в як завгодно малому околі суттево особливої точки функція $f(z)$ приймає значення як завгодно близькі до довільного наперед заданого числа, скінченного чи нескіченного.

Доведення. *Нехай $A = \infty$. Покажемо, що існує послідовність точок z_k, $\lim_{k\to\infty} z_k = a$, таких, що $\lim_{z\to a} f(z_k) = \infty$. Позначимо для скорочення через $P(z-a)$ правильну частину розкладу Лорана (див п. 13.2, формула (1)-(3)), яка містить додатні степені (z-a) і вільний член, а через $Q(\frac{1}{z-a})$ його головну частину, що містить від'ємні степені $z-a$. Тому формулу 1 п. 13.2 можемо переписати у вигляді:*

$$f(z) = P(z-a) + Q(\frac{1}{z-a}). \tag{0.3}$$

Що стосується правильної частини $P(z-a)$, що при $z \to a$ маємо

$$\lim_{z\to a} P(z-a) = c_0. \tag{0.4}$$

Покладаючи $\frac{1}{z-a} = z'$ в головній частині $Q(\frac{1}{z-a})$, будемо мати

$$Q(\frac{1}{z-a}) = Q(z') = c_{-1}z' + c_{-2}(z')^2 + \cdots + c_{-k}(z')^k + \ldots. \tag{0.5}$$

Оскільки ряд $Q(\frac{1}{z-a})$ збігається скрізь, крім точки $z = a$ (п. 13.2), то ряд (0.5), очевидно, буде збіжним у всі площині комплексного змінного z'. Функція $Q(z')$ не може бути обмеженою у всій площині комплексного змінного z'. (це за теоремою Ліувіля: якщо функція $f(z)$ регулярна у всій площині, є обмеженою по модулю, то вона є тотожньою сталою). Таким чином $\forall n \in \mathbb{N}$, знайдеться точка z'_n, $|z'_n| > n$, така, що будемо мати $|Q(z'_n| > n$. Заставляючи n пробігати значення $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$, одержимо послідовність точки $z'_1, z'_2, \ldots, z'_k, \ldots$, яка прямує до ∞ і таку, що будемо мати

$$\lim_{z'_k\to\infty} Q(z'_k) = \infty$$

Повертаючись до попереднього змінного z бачимо на основі рівності $\frac{1}{z-a} = z'$, що послідовність точок z'_k перетворюється в послідовність точок $z_1, z_2, \ldots, z_k, dots$ збіжну до точки a, таку, що маємо

$$\lim_{z_k\to a} Q(\frac{1}{z_k - a}) = \infty. \tag{0.6}$$

Заставляючи точки $z \to a$, проходим послідовність точок z_k, бачимо з рівності (0.3) на основі (0.4) і (0.6):

$$\lim_{z_k\to a} f(z_k) = \infty.$$

Нехай тепер A є довільне скінченне комплексне число. Може трапитись, що в довільно малому околі точки a існує точка z, така, що маємо $f(z) = A$. У цьому випадку теорема Сохоцького справедлива. Таким чином, можна припустити, що в достатньо малому околі точки a функція $f(z)$ не рівна A. Якщо так, то функція $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)-A}$ буде регулярною в цьому околі точки a, крім точки a, яку вона має в якості суттєво особливої точки (тому, що $z = a$ — суттєво особлива точки для $f(z) - A$). За доведеним $\exists$ послідовність точок $\{z_n\}$ збіжна до точки a, така, що $\lim_{z_n\to a} \varphi(z_n) = \infty$, звідси слідує, що $\lim_{z_n\to a} f(z_n) = A$.

Приклад 0.3. *1. Функція $e^{\frac{1}{z}}$ має при $z = 0$ суттєво особливу точку. Розклад Лорана в околі цієї точки буде*

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}$$

2. Для функції $f(z) = \cos z$ точки $z = \infty$ є суттєво особливою, бо головна частина $f_1(z)$ ряду Лорана $f(z)$ в околі точки $z = \infty$ містить нескінченну кількість членів.

$$f_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$$

Більш глибоким твердженням, ніж теорема Сохоцького, є така.

Теорема 0.5. ***Пікара.*** *В довільному околі суттєво особливої точки функція приймає, і притому нескінченне число разів, довільне значення, крім, можливо, одного.*

Приклад 0.4. *Для функції* $f(z) = e^z$ *точка* $z = \infty$ *є суттєво особливою (див. приклад 0.3). Розглянемо рівняння*

$$e^z = A, \quad (A \neq 0), \tag{0.7}$$

Це рівняння має такі розв'яки

$$z_k = \ln|A| + i(\arg A + 2k\pi), \tag{0.8}$$

де $\arg A$ *— фіксоване значення аргумента числа* $A, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, .$. *З (0.7) і (0.8) слідує, що в довільному околі точки* $z = \infty$ *є нескічненна множина точок* z_k *в яких функція* e^z *приймає значення, рівне* $A(A \neq 0)$, *значення* A *функція* e^z *не приймає.*

Приклад 0.5. *Точка* $z = \infty$ *є суттєво особливою для функції* $f(z) = \sin z$ *і для* $\forall A$ *рівняння* $\sin z = A$ *має безліч розв'язків.*

$$z_k = \frac{1}{i}\ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Приклад 0.6. *Нехай функції* $f(z)$ *і* $g(z)$ *регулярні в точці* a, $g(z) \not\equiv 0$. *Тоді для функції* $h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ *точка* a *є або полюсом, або точкою регулярності.*