

Laurea in STS  
RELAZIONE FINALE  
A. A. 2022/2023



UNIVERSITÀ  
DEGLI STUDI  
DI PADOVA

# Generazione di grafi aleatori con vertici di grado limitato

Relatore  
Prof. Carlo Ferrari

Laureanda  
Michela Ropele

# Idea di partenza

- Studio di strutture dati complesse
- Analisi esplorativa delle distribuzioni di probabilità
- Implementazione informatica con l'uso di Python

# Obiettivo e risultato

- Implementazione di grafi **aleatori** indiretti con vertici di **grado vincolato**.
- Software di **simulazione**, verifica e osservazione delle **proprietà** dei grafi.

# Funzionalità del software

1. Generazione dei grafi
2. Analisi grafiche
3. Salvataggio e acquisizione dei dati
4. Operazioni di confronto
5. Interfaccia grafica

# Parametri in input

$n$ : numero di nodi

$p$ : probabilità di connessione degli archi

$d_{max}$ : limitazione del grado dei nodi

$\pi$ : proporzione di nodi centrali (con grado arbitrario)

# Passi di generazione dei grafi aleatori

- I. Acquisizione dei parametri
- II. Generazione pseudo-casuale degli archi
- III. Costruzione della matrice di adiacenza
- IV. Implementazione del grafo
- V. Controllo sul vincolo dei gradi
  - a) Controllo sul vincolo dei nodi centrali
    - Selezione dei nodi centrali
  - b) Riduzione dei gradi
- VI. Restituzione del grafo

# Funzioni di supporto: scelta dei nodi da regolare

```
function choose_nodes_to_adjust(n, degrees,  
    ratio_hub_nodes, max_degree):
```

```
    n_hub = n * ratio_hub_nodes
```

```
    hub_nodes = nodi con grado > max_degree
```

```
    if hub_nodes ≤ n_hub:
```

```
        return []
```

```
    else:
```

```
        seleziona casualmente n_hub nodi da hub_nodes
```

```
        nodes_to_adjust = hub_nodes esclusi quelli salvati
```

```
        return nodes_to_adjust
```

# Funzioni di supporto: riduzione dei gradi

**function degree\_reduction(matrix = adjacent\_matrix,  
graph, max\_degree, nodes\_to\_adjust):**

per ciascun nodo  $i$  in *nodes\_to\_adjust*:

*while* grado( $i$ ) > *max\_degree*:

*old\_edges* = archi attivi di  $i$

*off\_edges* = selezione casuale di (grado( $i$ ) -  
*max\_degree*) nodi da *old\_edges*

rimozione di *off\_edges* da *matrix* e da *graph*

*return graph, matrix*



# Funzione principale: generazione di un grafo casuale con vincoli sugli archi

**function random\_graph\_with\_hub\_nodes(n, p, max\_degree=None, ratio\_hub\_nodes=0):**

controllo della validità dei parametri

generazione della matrice di adiacenza casuale con probabilità  $p$

implementazione del grafo corrispondente

*if max\_degree != None:*

calcolo dei gradi iniziali

*if ratio\_hub\_nodes > 0:*

*pawns = choose\_nodes\_to\_adjust(n, gradi, ratio\_hub\_nodes, max\_degree)*

*else:*

*pawns = nodi con grado > max\_degree*

*if pawns non vuoto:*

*graph, matrix = degree\_reduction(matrix, graph, max\_degree, pawns)*

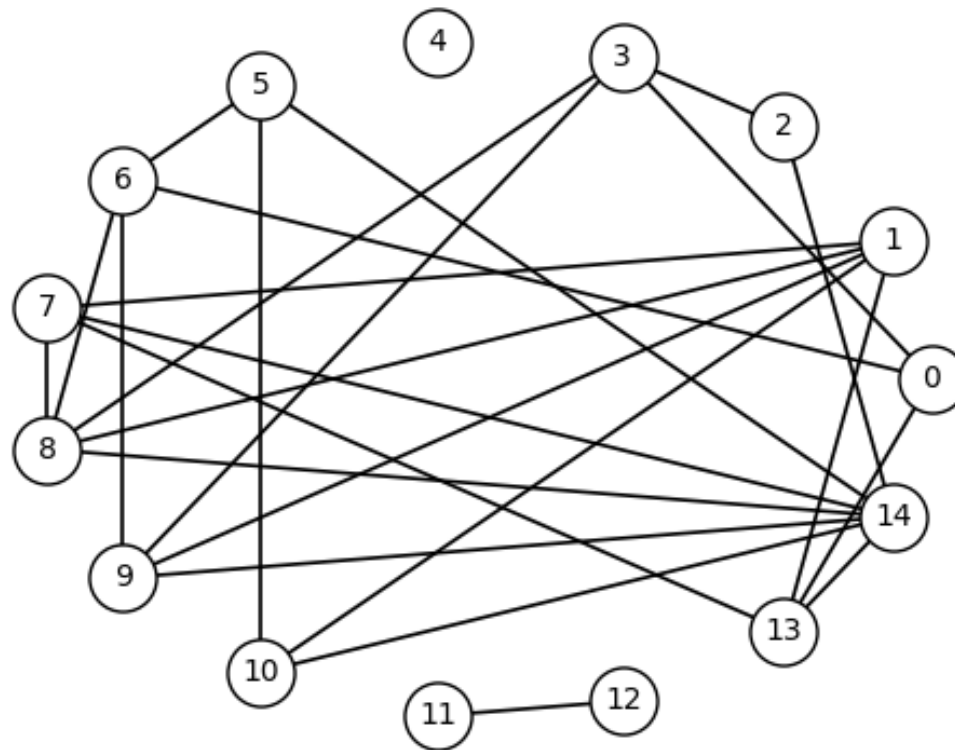
gradi\_finali  $\rightarrow$  somma delle righe di *matrix*

se richiesto, stampa dettagli (densità, gradi, archi spenti, matrice)

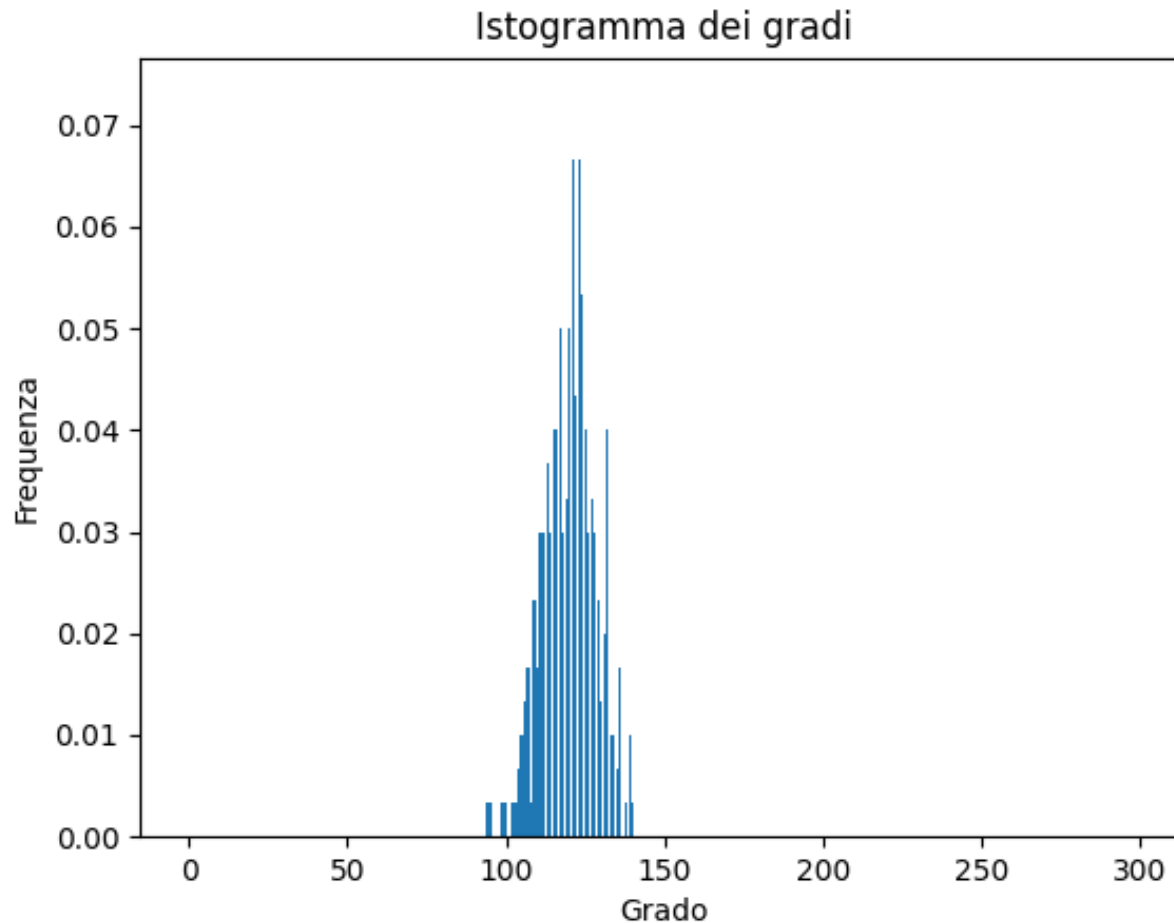
*return graph*

# Esempio di grafo

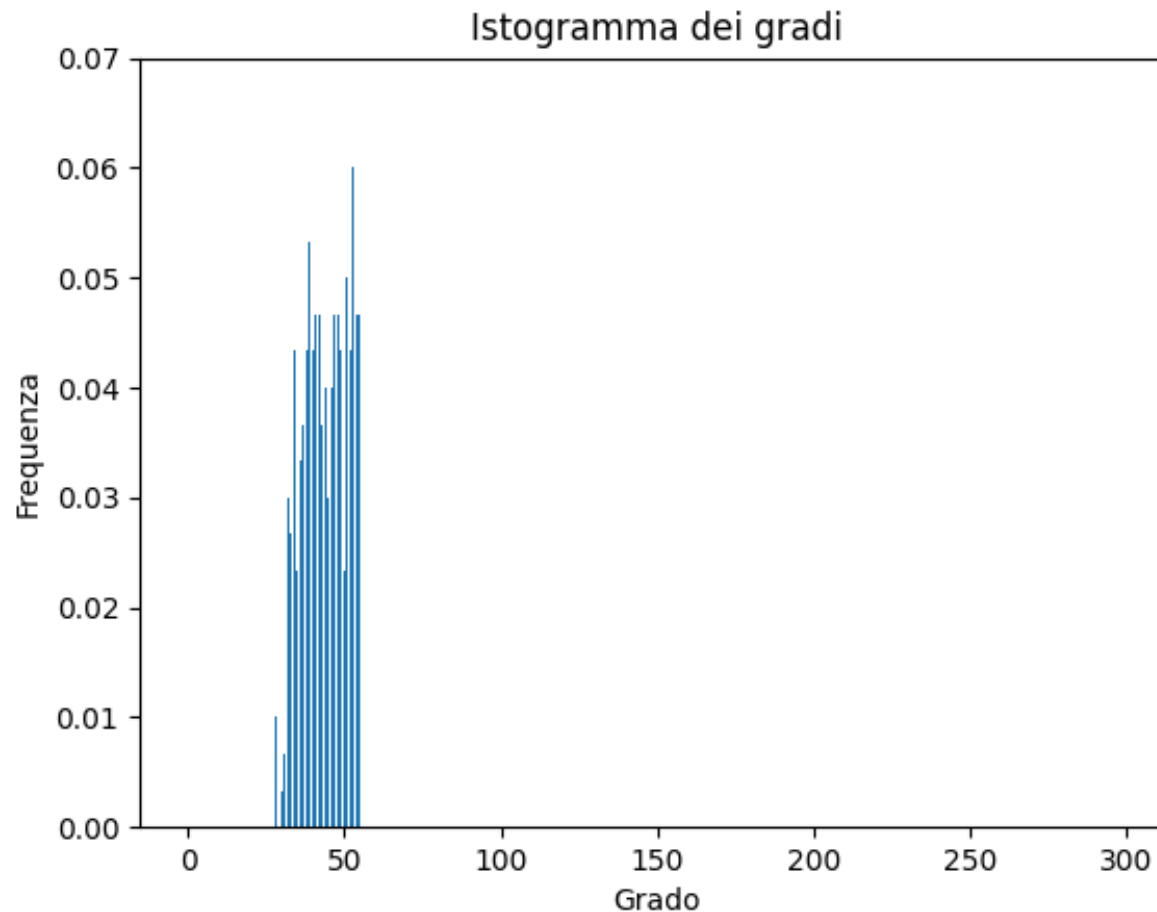
$n = 15$   $p = 0.3$   $d_{max} = 4$   $\pi = 0.2$



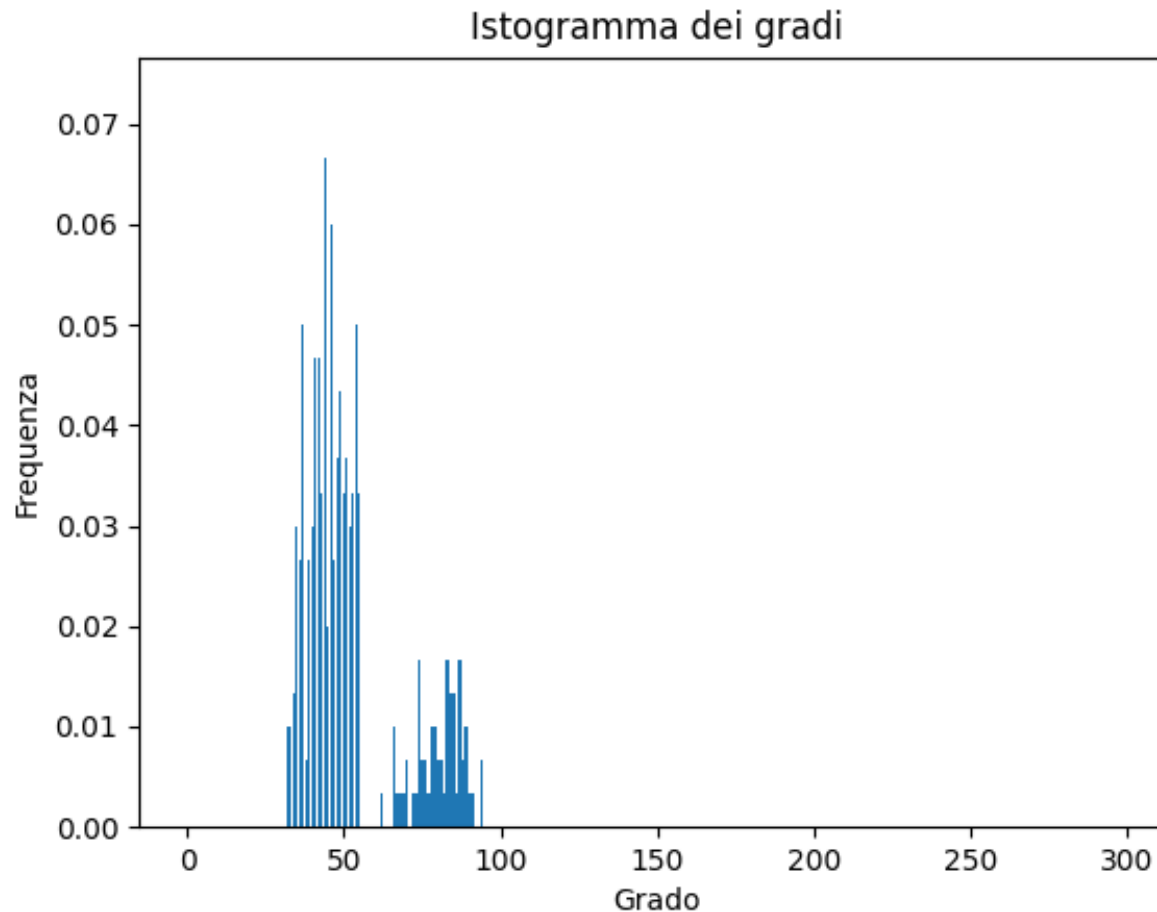
# Distribuzione del grado per $n = 300$ $p = 0.4$



# Distribuzione del grado per $n = 300$ $p = 0.4$ $d_{max} = 55$



# Distribuzione del grado per $n = 300$ $p = 0.4$ $d_{max} = 55$ $\pi = 0.2$



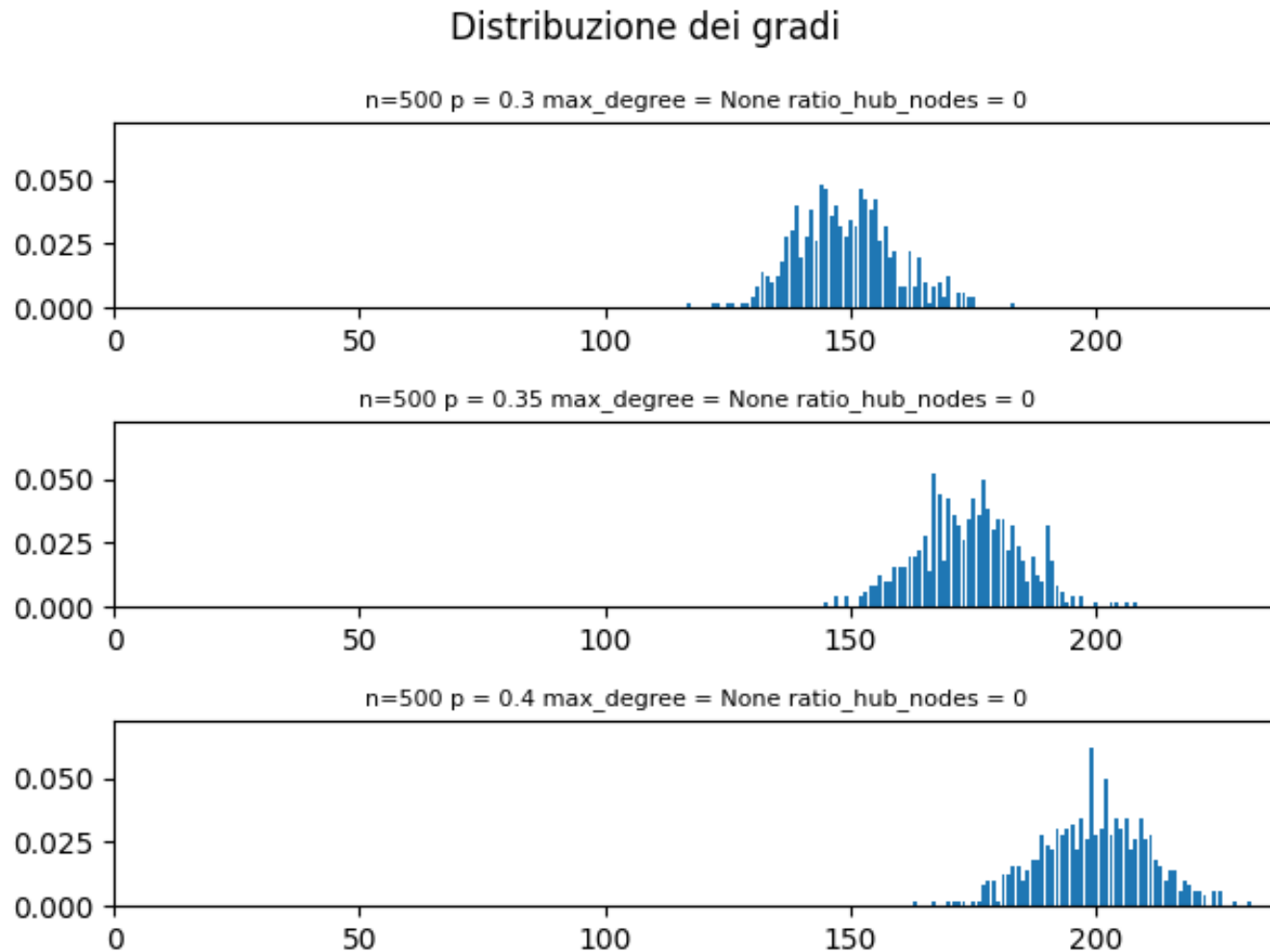
# Distribuzione del grado

L'imposizione dei vincoli di grado genera distribuzioni che differiscono per forma, simmetria, curtosi e dispersione.

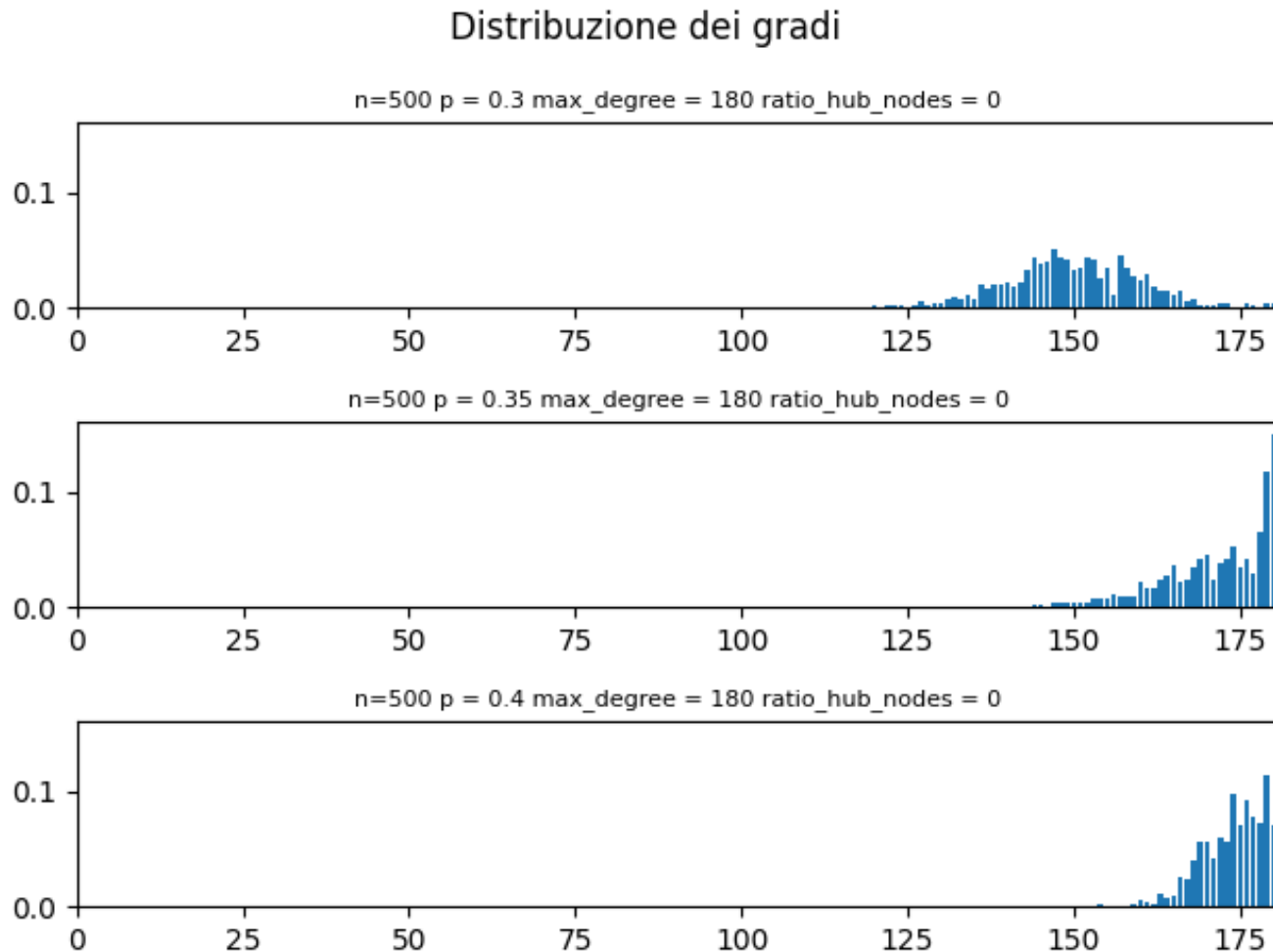
Tale distribuzione, per grafi aleatori, è:

- Simmetrica e centrata attorno al valore del grado medio senza imposizioni di vincoli;
- Asimmetrica e troncata a destra se il grado massimo si avvicina al valore del grado medio;
- Bimodale e mistura delle precedenti se sono presenti dei nodi centrali.

# Distribuzione del grado al variare di $p$

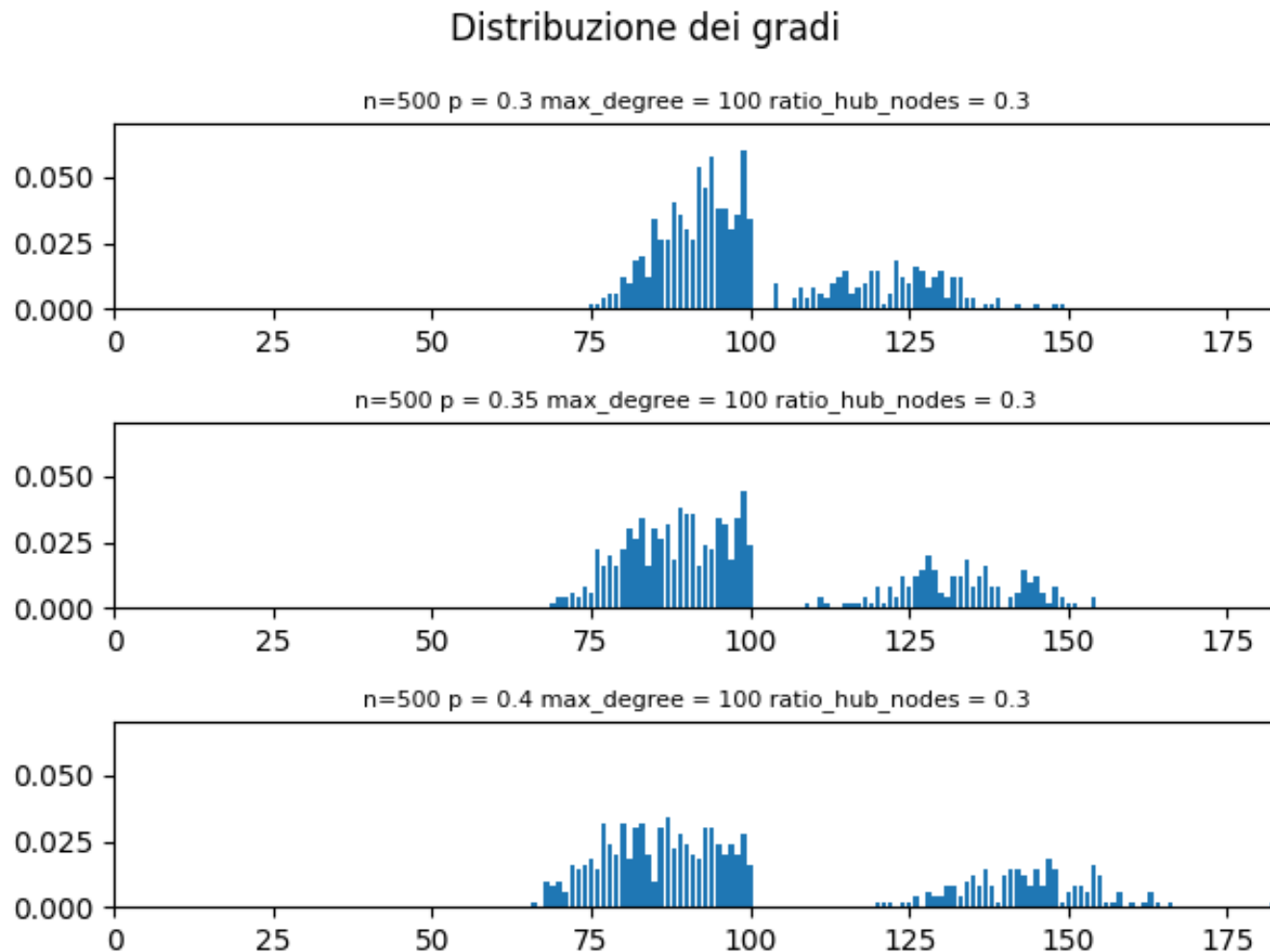


# Distribuzione del grado al variare di $p$ con limitazione





# Distribuzione del grado al variare di $p$ con nodi di grado arbitrario



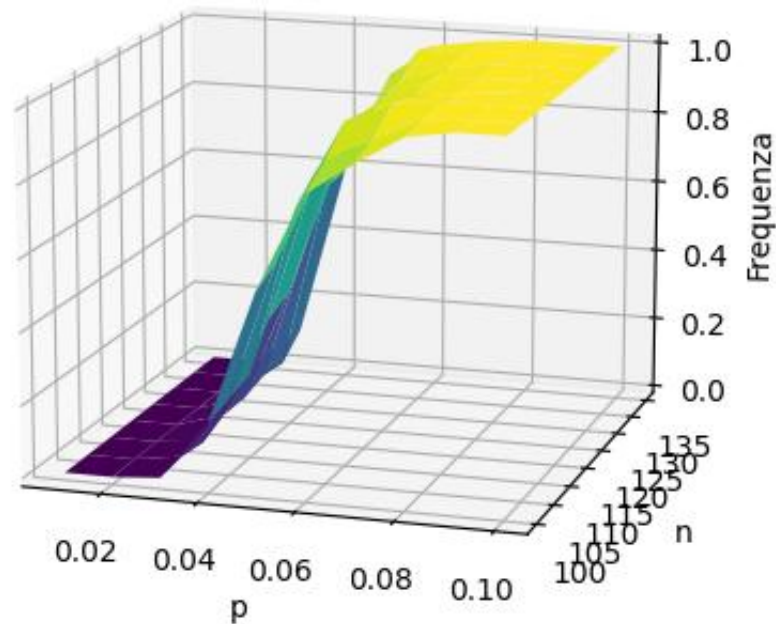
# Proprietà dei grafi

Segue la verifica della presenza o assenza di alcune proprietà in campioni di grafi con un numero di nodi variabile compreso tra 100 e 135 ed una probabilità di connessione compresa tra 0,01 e 0,1:

- **Connettività:** quasi certa per  $p > 0.10$ , indipendente da  $n$ ;
- **Aciclicità:** possibile se  $p < 0.02$ , più rara con  $n$  grande;
- **Bipartizione:** legata all'assenza di cicli, dipende sia da  $p$  che da  $n$ .

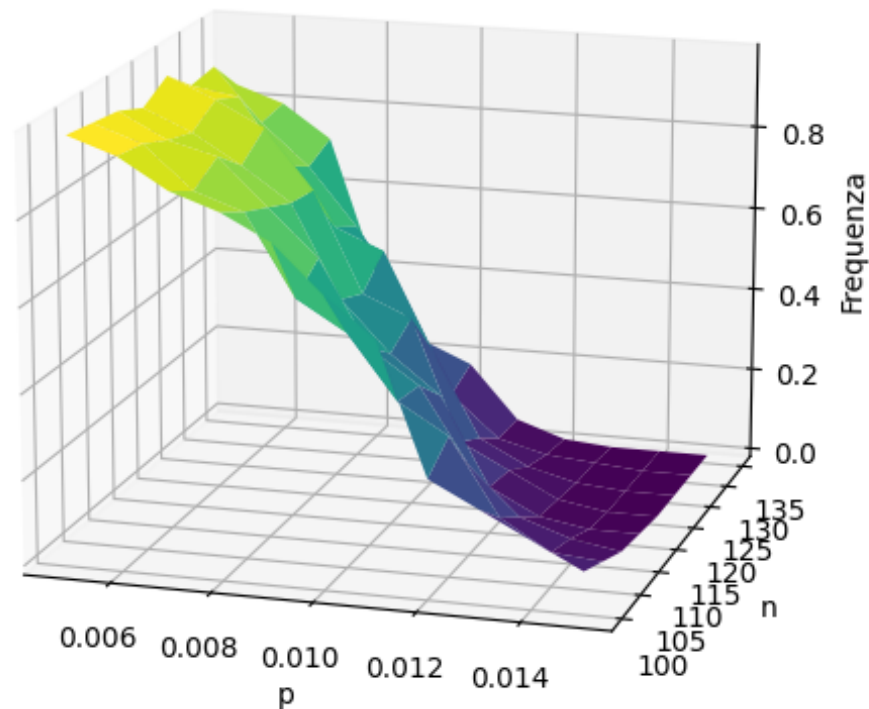
# Connessione

Frequenza di grafi connessi



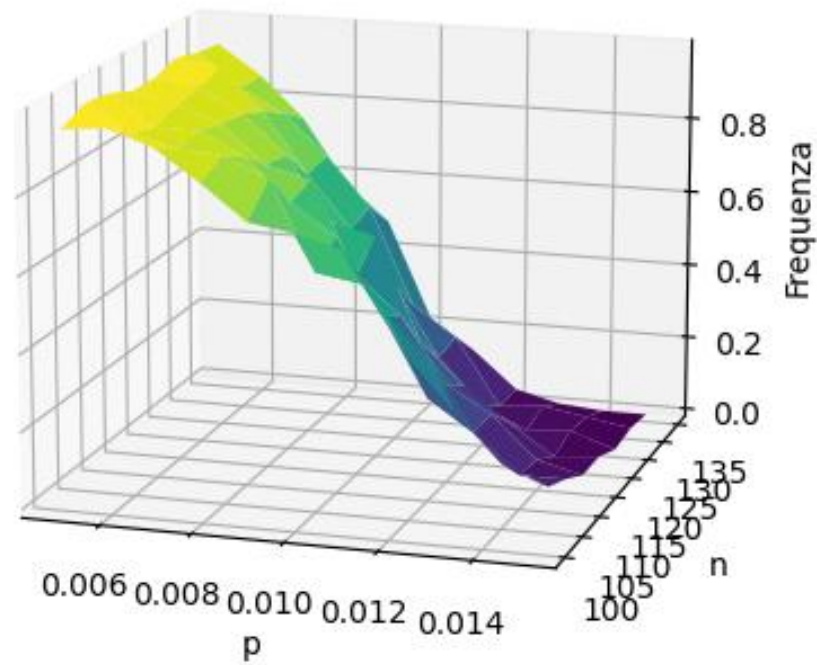
# Aciclicità

Frequenza di grafi aciclici



# Bipartizione

Frequenza di grafi bipartiti



# Possibili sviluppi

- Ipotesi distributive
- Confronto con applicazioni reali
- Applicazione del modello a contesti pratici o problemi specifici
- Ottimizzazione computazionale degli algoritmi