

**Mémoire présenté devant l'ENSAE ParisTech
pour l'obtention du diplôme de la filière Actuariat
et l'admission à l'Institut des Actuares**

le 8 Octobre 2015

Par : Duc Hien VU

Titre : Modèle de provisionnement des sinistres graves et son allocation
économique aux différentes succursales d'AXA Corporate Solutions

Confidentialité : ☐ Non ☒ Oui (Durée : ☐ 1 an ☒ 2 ans)

Les signataires s'engagent à respecter la confidentialité indiquée ci-dessus

Membres présents du jury de l'Institut

des Actuares *signature*

Membres présents du jury *de la filière*

Entreprise :

Nom : AXA Corporate Solutions

Signature : _____

Directeur du mémoire en entreprise :

Nom : Ramy IBRAHIM

Signature : _____

**Autorisation de publication et de mise
en ligne sur un site de diffusion de
documents actuariels**

*(Après expiration de l'éventuel délai de
confidentialité)*

Signature du responsable entreprise

Secrétariat

Bibliothèque :

Signature du candidat

Modèle de provisionnement des sinistres graves et son
allocation économique aux différentes succursales d'AXA
Corporate Solutions

Duc Hien VU

11 octobre 2015

Résumé

Ce mémoire propose un modèle de provisionnement pour les sinistres graves. Chez AXA Corporate Solutions, un sinistre rentre dans la provision des graves dès que sa charge dépasse le seuil grave et y reste définitivement jusqu'à l'ultime, même si la charge retombe en dessous du seuil. Les méthodes sous-jacentes de la théorie des valeurs extrêmes ont été utilisées pour sélectionner ce seuil, afin de bien refléter le caractère "fréquence faible-coût élevé" des sinistres graves. Le modèle consiste à provisionner séparément les sinistres non-clos *IBNeR* (*Incurred But Not enough Reported*) et les sinistres tardifs *IBNyR* (*Incurred But Not yet Reported*).

Pour estimer les *IBNeR*, on développe chacun des sinistres non-clos dont la charge a dépassé le seuil grave, en appliquant des *link-ratios* spécifiques. Contrairement à la méthode Chain-ladder classique, un *link-ratio* estimé dans cette version ligne à ligne, différent d'un sinistre à un autre, est en fait une moyenne des facteurs de développement individuels de référence (déjà connus), pondérés en fonction de la proximité de la charge du sinistre à développer et celle des sinistres de référence.

La projection d'*IBNyR* se fait par une approche fréquence-coût, en distinguant deux sous-groupes : les sinistres tardifs dont la charge ultime sera inférieure au seuil grave et ceux dont la charge ultime sera au-delà du seuil grave. Dans chacun des deux cas, le coût de sinistres est calibré sur le vecteur des montants de la charge ultime pour les sinistres connus (après la projection d'*IBNeR*). Les nombres ultimes d'*IBNyR* sont estimés en appliquant la méthode Bornhuetter-Ferguson (avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR*¹) sur le triangle des nombres de graves et le vecteur d'exposition (vecteur de primes).

Après avoir estimé les montants de réserves par année de survenance au niveau global d'AXA Corporate Solutions, une allocation économique entre succursales a été faite. Pour les réserves *IBNeR*, le développement ligne à ligne nous permet de connaître le montant d'*IBNeR* d'un sinistre donné et ainsi l'affecter à la succursale à laquelle il est rattaché. La répartition des *IBNyR* fait intervenir les profils de risque (engagement, parts, rétention, primes) de chacune des succursales.

Mots clés : Provisionnement, Sinistres graves, TVE, *IBNeR*, *IBNyR*, méthode ligne à ligne, proximité de charges, Chain-ladder, Bornhuetter-Ferguson, *ALR*, allocation économique

1. *Additive Loss Reserving*

Abstract

This thesis proposes a model for atypical claims (or Major Losses or ML) reserving. In AXA CS vision, a claim is considered as ML as soon as its Incurred is above the ML threshold ; it will have the status ML till its ultimate, even if its Incurred gets below the ML threshold later. Several methods derived from Extreme Values Theory were used for selecting appropriate ML threshold, in order to reflect the ML characteristic : "low frequency-high severity". The model estimates separately IBNeR (Incurred But Not enough Reported) and IBNyR (Incurred But Not yet Reported).

The IBNeR projection is done with Individual Chain-ladder method. Each opened claim, which Incurred has been at least once above ML threshold, is projected to ultimate by applying specific link-ratios. Unlike classic Chain-ladder method, a link-ratio is estimated in this individual claim approach, different from one claim to another, is in fact a mean of all available (referential) individual development factors, weighted by Incurred proximity between the claim to be developed and each of referential claims.

The IBNyR projection is done with a frequency-severity approach, by distinguishing two subsets : late claims (IBNyR) with Ultimate amount above ML threshold and late claims (IBNyR) with Ultimate amount below ML threshold. In each case, claim severity is calibrated on the vector of Ultimate charge for known claims (after the IBNeR projection). The IBNyR Ultimate numbers are estimated by applying Bornhuetter-Ferguson method (with Chain-ladder pattern and ALR ² a priori) on the triangle of ML numbers and the exposure vector.

After estimating reserves amounts by year of occurrence, at AXA CS global level, we need an economic allocation among branches. For IBNeR part, an individual approach allows us to directly identify to which branch a claim (and then its IBNeR amount) belongs. The split of IBNyR is done thanks to the risk profiles (commitment, parts, retention, premiums) of each branch.

Key words : Reserving, Atypical claims, Major Losses, EVT, IBNeR, IBNyR, individual approach, incurred proximity, Chain-ladder, Bornhuetter-Ferguson, ALR, economic allocation

Note de Synthèse

Problématique et Sujet

AXA Corporate Solutions (AXA CS) est une entité du Groupe AXA qui assure les grands risques internationaux IARD. Face à la présence des sinistres graves à fréquence faible et à coût élevé sur la majorité des branches d'activité, AXA CS a besoin d'un modèle pour les provisionner et d'une allocation économique entre les différentes succursales. Dans la majorité des méthodes de provisionnement, les sinistres graves sont écartés du processus pour assurer la stabilité du triangle de liquidation. Un modèle pour les provisionner nécessite donc une étude spécifique qui fait intervenir la théorie des valeurs extrêmes et des techniques moins utilisées dans la pratique. D'ailleurs, pour assurer la stabilité du triangle de provisionnement des sinistres attritionnels, AXA CS considère un sinistre comme étant grave dès lors que sa charge touche le seuil grave, peu importe son positionnement à l'ultime par rapport à ce dernier. Par conséquent, nous devons envisager dans le modèle différents scénarios d'évolution des sinistres. La provision sera calculée par branche d'activité mais au niveau global d'AXA CS. Une étape supplémentaire sera de répartir les réserves entre les différentes succursales d'AXA CS.

Démarches

Revue littéraire

Nous avons dans un premier temps revu les méthodes de provisionnement classiques qui peuvent être regroupées dans deux classes : les méthodes agrégées et les méthodes ligne à ligne.

Les méthodes agrégées consistent toutes à développer le triangle de provisionnement qui agrège les données par année d'origine (année de survenance ou année de déclaration par exemple), avec ou sans présence d'un vecteur d'exposition comme information a priori. Nous avons analysé et comparé ces méthodes pour bien identifier leurs avantages et défauts. Les deux visions extrêmes sont Chain-ladder qui ne repose que sur le triangle pour estimer la charge ultime et la méthode des sinistres espérés qui prévoit l'ultime directement par un avis expert (produit du montant de primes avec le ratio S/P par exemple). Toutes les autres méthodes tendent à crédibiliser les deux visions extrêmes en donnant différents poids aux estimateurs de l'ultime selon deux approches extrêmes.

Les méthodes ligne à ligne cherchent à développer des sinistres non-clos individuellement pour pouvoir utiliser le maximum d'information disponible. Elles proposent différentes approches, tant

VI

paramétriques que non-paramétriques, en travaillant sur : soit des montants cumulés, soit des montants incrémentaux et faisant intervenir divers domaines tels que Processus poissonnien, Chaîne de Markov, Apprentissage Statistique, Econométrie, Séries Temporelles et Modélisation stochastique. Elles sont cependant non adaptées au contexte d'AXA CS où nous disposons de peu de données et peu de variables explicatives (comparé aux réassureurs), avec des contraintes très particulières.

L'ensemble des méthodes présentées dans cette revue littéraire a constitué une base de réflexion avec beaucoup d'idées intéressantes qui nous ont servi pour la suite de cette étude.

Modèles de référence

Nous sommes ensuite retournés vers les travaux de recherche menés chez AXA CS concernant les sinistres graves. Ils ont été faits avec plus ou moins les mêmes contraintes requises pour notre modèle de provisionnement et par conséquent sont a priori plus adaptés que les méthodes trouvées dans la littérature et la pratique. Nous disposons d'un modèle de provisionnement des graves en utilisant le ratio Payé/Charge (*Paid/Incurred ou P/I*), appelé modèle 1, et d'un modèle pour modéliser les sinistres graves futurs, appelé modèle 2. Notre but n'étant pas la modélisation, nous avons tout d'abord ajusté le modèle 2 pour mieux répondre au problème de provisionnement.

Nous comparons ensuite le modèle 1 et le modèle 2 ajusté. Les deux séparent les réserves pour les sinistres graves connus étant toujours en cours de développement (notés *IBNeR* pour *Incurred But Not enough Reported*) et celles pour les sinistres graves tardifs non encore connus (notés *IBNyR* pour *Incurred But Not yet Reported*). La projection d'*IBNeR* se fait par des méthodes ligne à ligne, étant donné une liste détaillée des sinistres graves à développer. La projection d'*IBNyR*, intervenant après la projection d'*IBNeR*, utilise une approche fréquence-coût. Le nombre d'*IBNyR* (nombre de sinistres graves tardifs) se déduit de la projection du triangle de nombres par des méthodes agrégées. La sévérité est calibrée sur le vecteur de charges ultimes obtenu à travers la projection d'*IBNeR*.

Modèle 1

Dans le modèle 1, nous estimons directement la charge ultime de chacun des sinistres connus en lui appliquant un facteur de développement à l'ultime. L'hypothèse sous-jacente est que ce dernier est proportionnel au ratio *P/I* qui mesure l'état d'avancement dans le règlement d'un sinistre. Nous en déduisons le montant d'*IBNeR*. Pour l'estimation d'*IBNyR*, nous envisageons deux scénarios : la charge ultime d'un sinistre est supérieure ou égale au seuil grave ou le cas contraire. Pour chacun des scénarios, nous projetons un triangle de nombre correspondant en utilisant la méthode *Additive Loss Reserving (ALR)*. Cette méthode, s'appliquant au triangle de nombres incrémentaux, estime pour chacune des années de développement un ratio "Nombre incrémental de graves par unité d'exposition". La sévérité dans le cas Ultime au-delà du seuil grave est estimée par une loi de Pareto, celle dans le cas contraire est estimée par une moyenne empirique des sinistres historiques.

Modèle 2 et Modèle 2 ajusté

Le modèle 2 tient compte de l'effet d'*IBNeR* dans la sévérité et de l'effet d'*IBNyR* dans la fréquence. Pour développer les sinistres connus et non-clos, nous appliquons une méthode dite Chain-ladder ligne à ligne qui est très similaire au Chain-ladder classique. Nous estimons des *link-ratios* communs pour tous les sinistres qui sont en fait des moyennes, pondérées par les montants de charges, des facteurs de passages individuels au-delà d'un seuil d'*IBNeR* (qui est choisi en-dessous du seuil grave pour tenir compte d'effet d'*IBNeR* tout en assurant l'homogénéité des facteurs individuels). Nous procédons ensuite comme dans Chain-ladder mais cette fois-ci sinistre par sinistre pour estimer la charge ultime. Nous obtenons donc un vecteur de charge ultime par sinistre. Nous en déduisons la sévérité des sinistres graves qui nous sert dans la projection d'*IBNyR*. L'estimation des nombres d'*IBNyR* se fait par la méthode Schnieper qui estime, année par année, le nombre de dégradations (nombre de sinistres qui dépassent le seuil grave) et le nombre d'améliorations (nombre de sinistres graves qui retombent en dessous du seuil). Le nombre de dégradations est supposé proportionnel à l'exposition (la prime) et le nombre d'améliorations est supposé proportionnel au nombre de graves cumulé.

Le modèle 2 ajusté est la version adaptée du modèle 2 à la vision des sinistres graves chez AXA CS. Comme nous provisionnons tous les sinistres qui touchent le seuil grave à n'importe quel moment, leur charge ultime ne sera pas forcément au-dessus. La base de sinistres utilisée pour la projection d'*IBNeR* devrait être étendue et le seuil d'*IBNeR* deviendrait obsolète. La méthodologie de Chain-ladder ligne à ligne reste cependant la même. Concernant la projection d'*IBNyR*, la méthode Schnieper n'est plus appropriée puisque nous voulons provisionner chez AXA CS également les améliorations. Au final, nous sommes obligés de revenir vers la méthode *ALR* appliquée à deux différents triangles de nombres suivant deux situations de la charge ultime. Par conséquent, le modèle 2 ajusté ne diffère du modèle 1 que dans l'estimation d'*IBNeR*.

Idées d'amélioration

Nous avons ensuite vérifié les hypothèses des deux modèles et les avons testées sur des données réelles. Les deux modèles souffrent de défauts. Nous avons donc cherché des idées d'amélioration, à la fois sur la projection d'*IBNeR* et la projection d'*IBNyR*.

Projection d'*IBNeR*

(i) Chain-ladder ligne à ligne et choix de pondération

Partons du modèle 2 ajusté. Nous pensons que dans un développement ligne à ligne, il vaut mieux appliquer des *link-ratios* spécifiques à chacun des sinistres, suivant ses caractéristiques. D'ailleurs, le fait de pondérer les facteurs individuels par le montant de charge individuelle pour estimer les *link-ratios* n'est pas approprié aux sinistres graves dont le développement est hétérogène. Nous proposons donc une nouvelle version de Chain-ladder ligne à ligne dans laquelle les facteurs de développement individuels de référence sont pondérés en fonction de la proximité (l'inverse de la distance) entre la charge du sinistre à développer et celle des sinistres de référence. Notre intuition est que les sinistres

VIII

avec montants de charges plus ou moins proches tendent à se développer d'une façon similaire. Pour être prudent, seuls les facteurs de développement individuels après le premier dépassement du seuil grave sont pris comme référence.

Après avoir testé différentes mesures de distance, nous avons retenu la distance L^1 normalisée par la charge du sinistre à développer. Nous introduisons également une tolérance pour ne pas surpondérer les sinistres trop proches du sinistres à développer. Enfin, un paramètre β est calibré sur l'historique des sinistres pour quantifier l'impact de la proximité sur le développement des sinistres. Si ce paramètre est 0, la proximité entre sinistres n'a aucun impact sur leur développement et par conséquent les facteurs de développement individuels de référence seront équipondérés. Plus ce paramètre est grand, plus les sinistres "proches" se développent de manière similaire. Nous n'avons donc pas besoin de vérifier notre intuition ; la méthode se justifie elle-même à travers le calibrage du paramètre β .

(ii) Munich Chain-ladder ligne à ligne

Après avoir modifié la méthode Chain-ladder ligne à ligne du modèle 2 ajusté, nous avons voulu la combiner avec la méthode du ratio P/I du modèle 1. Aucune méthode ligne à ligne dans la littérature ne répond à notre besoin. Par contre, dans la classe des méthodes agrégées, il existe Munich Chain-ladder qui vise à corriger Chain-ladder classique en utilisant à la fois les Payés P et les Charges I . Nous avons développé une version ligne à ligne de Munich Chain-ladder pour notre projection d'*IBNeR*. L'idée est de développer les payés et les charges simultanément et assurer que ces deux quantités ne s'éloignent pas trop au cours des années de développement, afin que le ratio P/I converge vers 1 à l'ultime. Pour une année de développement donnée, nous disposons de différents ratios P/I pour les sinistres. Si un sinistre a un ratio P/I plus élevé que la moyenne sur tous les sinistres, sa charge I se développera plus vite que prédit Chain-ladder pour rattraper l'écart avec son payé P et/ou inversement son payé P se développera moins vite que prédit Chain-ladder pour réduire l'écart avec sa charge I .

Le test sur différentes branches d'activités a montré que la méthode Munich Chain-ladder ligne à ligne n'apportait une valeur ajoutée que sur la branche Responsabilité Civile où nous avons constaté à la fois une corrélation linéaire entre résidus(I/P) - résidus(P) et celle entre résidus(P/I) - résidus(I). Sur les autres branches, nous n'avons observé que la première. Il paraît que généralement, les payés s'ajustent pour rattraper les charges mais pas inversement. Comme nous avons choisi de développer les charges par Chain-ladder ligne à ligne (en considérant qu'elles sont plus pertinentes que les payés dans notre cas), nous ne gagnons rien en développant parallèlement les payés sachant que les charges n'apprennent pas des payés.

Nous avons décidé de conserver notre version ligne à ligne de Chain-ladder sur les charges et ne pas utiliser Munich Chain-ladder, d'une part parce que cette dernière n'était intéressante que sur la branche Responsabilité Civile, d'autre part parce que notre modèle mathématique pour Munich Chain-ladder ligne à ligne n'est pas rigoureusement développé (les facteurs de développement individuels sont équipondérés plutôt que pondérés en fonction de la proximité des sinistres).

Projection d'*IBNyR*

Les deux modèles 1 et 2 ajusté implémentent la méthode *ALR* pour projeter le triangle de nombres de sinistres graves. Nous avons testé d'autres méthodes agrégées, à savoir Chain-ladder, Bornhuetter-Ferguson mixte (avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR*), Cape-Cod, Benktander-Hovinen. Il n'y a pas de "meilleure" méthode dans l'absolu, sachant que nous utilisons à la fois un triangle de nombre qui est instable et un vecteur de primes comme exposition qui n'est pas forcément corrélé à la fréquence des sinistres graves. Nous avons retenu Bornhuetter-Ferguson mixte qui est un bon compromis entre deux visions extrêmes : Chain-ladder et nombres de sinistres espérés. Cette méthode est aussi facile à comprendre et à implémenter.

Modèle retenu

Le modèle final comporte trois modules principaux : la sélection du seuil grave, la projection d'*IBNeR* et la projection d'*IBNyR*.

Sélection du seuil grave

La sélection du seuil grave est faite sous l'hypothèse que des dépassements de seuil suivent une loi Pareto Généralisée et donc nous pouvons utiliser les méthodes : Graphique de Hill, Fonction de dépassement moyen, Estimateur de Cheng&Peng et Bootstrap de Danielsson. Nous cherchons à travers ces méthodes un bon compromis entre un seuil suffisamment élevé pour bien approcher la loi Pareto généralisée et un nombre de points suffisamment grand pour bien estimer les paramètres de cette distribution.

La base de données utilisée pour les deux autres modules (projection d'*IBNeR* et projection d'*IBNyR*) regroupe tous les sinistres dont la charge a dépassé le seuil grave au moins une fois. La provision *IBNeR* correspond à la différence entre la charge ultime et la charge actuelle des sinistres présents dans cette base de données. La provision *IBNyR* correspond aux sinistres graves non encore déclarés ou déclarés mais n'ayant pas encore touché le seuil grave.

Projection d'*IBNeR* : Méthode Chain-ladder ligne à ligne

Notons $\mathcal{K}_n(j)$ le sous-ensemble des sinistres dont la charge à l'année de développement j est connue pour l'année courante n . Pour un sinistre k dont la dernière charge connue correspond à l'année de développement j (i.e. survenu à l'année $n - j + 1$), nous estimons sa charge ultime par :

$$\widehat{C}_{k,n} = C_{k,j} \widehat{F}_{k,j} \widehat{F}_{k,j+1} \dots \widehat{F}_{k,n-1}$$

X

avec :

$$\widehat{F}_{k,j} = \frac{1}{\sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+1)} w_{k,k'}^j} \sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+1)} w_{k,k'}^j F_{k',j}$$

$$\widehat{\widehat{F}}_{k,s} = \frac{1}{\sum_{k' \in \mathcal{K}_n(s+1)} \widehat{w}_{k,k'}^s} \sum_{k' \in \mathcal{K}_n(s+1)} \widehat{w}_{k,k'}^s F_{k',s} \quad \forall s = j+1, \dots, n-1$$

où

- $F_{k',j} = \frac{C_{k',j+1}}{C_{k',j}}$ les facteurs de développement individuels ;
- $w_{k,k'}^j = \left(\max\{\varepsilon, \left| \frac{C_{k,j} - C_{k',j}}{C_{k,j}} \right| \} \right)^{-\beta}$ mesurant la proximité entre k et k' à l'année de développement j (dans le cas où $C_{k,j}$ est connue) ;
- $\widehat{w}_{k,k'}^j = \left(\max\{\varepsilon, \left| \frac{\widehat{C}_{k,j} - C_{k',j}}{\widehat{C}_{k,j}} \right| \} \right)^{-\beta}$ mesurant la proximité entre k et k' à l'année de développement j (dans le cas où $C_{k,j}$ est non-connue et doit être estimée). Comme la mesure de proximité w dépend de la charge du sinistre à développer, elle n'est connue que pour l'année courante. Pour les années suivantes, nous devons estimer sa charge pour calculer sa proximité avec les sinistres de référence ;
- $\varepsilon > 0$ un paramètre, appelé tolérance, introduit pour but de ne pas sur-pondérer les sinistres trop "proches" du sinistre à développer ;
- $\beta \geq 0$ le paramètre mesurant l'impact de la proximité au niveau de la charge entre deux sinistres sur leur développement.

Les facteurs de développement individuels sont calculés comme dans Chain-ladder classique. Les poids $w_{k,k'}^j$ font la particularité de la méthode. Plus la charge d'un sinistre de référence $C_{k',j}$ est proche de celle du sinistre à développer $C_{k,j}$, plus on donne un poids important à $F_{k',j}$. La présence de la tolérance ε dit que les poids sont capés à $\varepsilon^{-\beta}$. Le poids est équi-réparti entre les sinistres dont la charge se trouve dans l'intervalle $[C_{k,j}(1 - \varepsilon) ; C_{k,j}(1 + \varepsilon)]$. D'une telle manière, un sinistre avec un développement atypique et une charge trop proche du sinistre à développer n'influerait pas gravement notre *link-ratio* estimé. L'intervalle défini ci-dessus est appelé voisinage de $C_{k,j}$. Il est d'autant plus grand que la charge $C_{k,j}$ est élevée. En effet, les sinistres de charge très élevée sont rares, nous voulons étendre son voisinage pour avoir suffisamment de points "voisins".

Le paramètre β est calibré par une technique d'apprentissage statistique dite *leave-one-out cross-validation*. Nous faisons parcourir β dans un intervalle suffisamment grand. Pour chaque valeur de β , nous écartons successivement un sinistre de notre base de données, estimons des *link - ratios* pour ce sinistre en utilisant les autres sinistres comme sinistres de référence. Nous comparons le vrai développement de ce sinistre au développement prédit par notre algorithme. Au final, le β optimal est celui qui minimise l'erreur moyenne de prédiction. Ce β optimal nous dit si la proximité entre sinistres a un impact important ou faible, voire nul sur leur développement.

Projection d'*IBNyR* : Méthode Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR*

La projection d'*IBNyR* est faite avec une approche fréquence-coût (nous avons besoin de la projection d'*IBNeR* avant ce module pour estimer la sévérité des sinistres graves sur les montants de charge ultime des sinistres présents dans la base). Nous distinguons deux cas : Charge ultime \geq Seuil grave et Charge ultime $<$ Seuil grave.

Comme dans les méthodes de référence, la sévérité est calibrée par des lois extrêmes dans le premier cas et simplement par une moyenne pondérée dans le deuxième cas. Ce qui diffère des méthodes de référence dans ce module est la projection des triangles de nombres. Dans les deux cas, nous utilisons la même méthode appelée Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR*. Cette méthode nécessite un triangle de nombres incrémentaux des sinistres graves ($X_{i,j}$) (nous en déduisons le triangle de nombres cumulés $C_{i,j} = \sum_{m=1}^j X_{i,m}$)³ et un vecteur d'exposition (E_i). L'hypothèse sous-jacente est que le nombre de sinistres graves est a priori proportionnel à l'exposition.

Pour chacune des années de développement $j = 1, \dots, n$, nous estimons le ratio "Nombre de sinistres graves survenus par unité d'exposition" : $\widehat{\alpha}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i}$. Nous en déduisons un ratio

ultime : $\widehat{\alpha} = \sum_{j=1}^n \widehat{\alpha}_j$. En re-multipliant ce dernier au vecteur d'exposition, nous obtenons un vecteur "a

priori" du nombre ultime de sinistres graves par année de survenance : $\widehat{\mu}_i = E_i \widehat{\alpha}$. (Ce n'est en fait pas un vrai a priori puisque $\widehat{\alpha}$ dépend du triangle ($X_{i,j}$)). Nous appliquons ensuite Bornhuetter-Ferguson pour estimer le nombre ultime de sinistres graves pour chacune des années de survenance et le nombre d'*IBNyR* :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i+1} + (1 - \widehat{\beta}_{n-i+1}) \widehat{\mu}_i$$

où la cadence est estimée par Chain-ladder : $\widehat{\beta}_{n-i+1} = \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j^{CL}}$.

Risque à 1 an

Pour quantifier le risque de provisionnement à un an, nous avons utilisé Monte-Carlo non paramétrique (l'équivalence de Bootstrap non-paramétrique) pour simuler N scénarios pour le développement des sinistres dans un an et ensuite avons ré-appliqué notre modèle pour prévoir l'ultime dans chaque scénario. Nous avons obtenu une distribution de la charge ultime et ainsi une distribution du *CDR* (*Claim Development Result*). Comme notre modèle est scindé en deux modules, nous avons proposé trois différents calculs de *CDR* : *CDR*(*IBNeR*), *CDR*(*IBNyR*) et *CDR*(*IBNR*) pour quantifier la volatilité à 1 an de chacun des modules et la volatilité à 1 an globale.

3. Attention : nous utilisons la notation C mais ça correspond au nombre plutôt qu'au montant de charge

Allocation économique entre succursales

La dernière étape est d'allouer le montant de réserves pour chacune des branches d'activité entre différentes succursales d'AXA CS. Pour les réserves *IBNeR*, la méthode Chain-ladder ligne à ligne nous permet de connaître le montant d'*IBNeR* d'un sinistre donné et l'affecter à la succursale à laquelle il est rattaché. La répartition des *IBNyR* fait intervenir les profils de risque (engagement, parts, rétention, primes) de chacune des succursales.

Mots clés : Provisionnement, Sinistres graves, TVE, *IBNeR*, *IBNyR*, méthode ligne à ligne, proximité de charges, Chain-ladder, Bornhuetter-Ferguson, *ALR*, allocation économique

Summary

Context and Subject

AXA Corporate Solutions (AXA CS) is an entity of the AXA Group which insures International Major Risks in Property and Casualty. Given the presence of large claims with "low frequency and high severity" on most Lines of Business (LoB), AXA CS needs a Major Losses Reserving model and an economic allocation between its different branches. In the majority of reserving methods, large claims are excluded from the process to ensure the stability of the run-off triangle. A model for major losses reserving therefore requires a specific study that involves extreme value theory and techniques lesser used in practice. Moreover, to ensure the stability of attritional claims reserving triangle, AXA CS considers a claim as major loss (ML) as soon as its Incurred is above the ML threshold, regardless of its ultimate position. Therefore, we must consider in our model different scenarios of claims evolution. The reserves amount will be calculated by LoB but at AXA CS global level. The final step will be the reserves allocation between the different branches of AXA CS.

Research approaches

Litterature review

We reviewed the traditional reserving methods that can be grouped into two classes : the aggregated methods and the individual methods.

The aggregated methods consist in developing the run-off triangle of aggregated data by year of origin (year of occurrence or reporting year, for example), with or without the presence of an exposure vector as prior information. We analyzed and compared these methods to properly identify their advantages and shortcomings. The two extreme visions are Chain-ladder that only relies on the triangle to estimate the ultimate and the expected claims method that directly provides the ultimate thanks to an expert opinion (the product of the premium and the loss ratio for example). All other methods tend to credibilize the two extreme visions by giving different weights to the ultimate estimators of two extreme approaches.

The individual methods tend to develop opened claims individually in order to use the maximum available information. They offer different approaches, both parametric and non-parametric, working on either cumulative amounts or incremental amounts and involving various fields such as Poisson processes, Markov Chain, Machine Learning, Econometrics, Time Series and Stochastic Modeling.

They are however not adapted to the context of AXA CS where we have little data and few explanatory variables (compared to reinsurers), with very specific constraints.

All methods presented in this literature review constitute a great reflection basis with interesting ideas that have helped us for the remaining of our study.

Reference models

We then concentrated our analysis to the researches conducted at AXA CS on large claims. The methods were built with more or less the same constraints required in our reserving model and are consequently more suitable than the methods found in the literature and practice. We have a ML reserving model using the Paid/Incurred (or P/I) ratio, called model 1 and another model that simulate major losses for a future year, called Model 2. Since our goal is not modeling, we adjusted Model 2 to better suit our reserving subject.

We then compare the model 1 and model 2 adjusted. The two separate reserves for the known claims that have not settled yet (noted IBNeR for Incurred But Not enough Reported) and those for large claims not yet reported (noted IBNyR for Incurred But Not yet Reported). The IBNeR projection is done by individual methods, given a detailed list of large claims to be developed. The IBNyR projection, occurring after the IBNeR projection, uses a frequency-severity approach. The number of IBNyR (number of large claims not yet reported) is derived from the projection of the triangle of numbers by aggregated methods. The severity is calibrated on the ultimate obtained through the IBNeR projection.

Model 1

In the model 1, we estimate directly the ultimate for each known claim by applying an ultimate development factor. The underlying assumption is that this factor is proportional to the P/I ratio which reflects the progress in the settlement of a claim. We deduce the IBNeR reserve for each claim. For IBNyR projection, we consider 2 cases : claims with ultimate above ML threshold and otherwise. In each case, we project a corresponding triangle of numbers thanks to Additive Loss Reserving (ALR) method. This method, applied to a triangle of incremental numbers, estimate for each year of occurrence a ratio "expected incremental number of large claims per unit of exposure". The severity in the case where the ultimate is above the ML threshold is fitted by a Pareto distribution, whereas the severity in the other case is simply estimated by an empirical mean of historical claims.

Model 2 and Model 2 adjusted

In the model 2, IBNeR effect is taken into the severity modeling whereas the IBNyR effect is incorporated in the frequency modeling. Known and opened claims are developed by a method called Individual Chain-ladder inspired by the classic Chain-ladder. We estimate commun link-ratios for all claims by averaging (weighted by Incurred amounts) individual development factors for passages above the IBNeR threshold (which is chosen below the ML threshold to take into account the IBNeR

effect, while maintaining the homogeneity of retained individual development factors). The procedure is similar to the classic Chain-ladder but this time we project claim per claim individually. Thus, we obtain a vector of ultimate from which the severity of large claims needed in the IBNyR projection is deduced. The IBNyR numbers are estimated by the Schnieper method that estimates for each year of occurrence the number of degradations (the number of claims that exceed the ML threshold) and the number of improvements (the number of claims that fall below the ML threshold). The latter is assumed to be proportional to the previous Incurred whereas the number of degradations is expected to be proportional to the exposure (premium).

The model 2 adjusted is the adapted version of the model 2 to the ML vision of AXA CS. As we provision all claims that have reached or will reach the ML threshold at least once, their ultimate are not necessarily above the threshold. The claims database used in IBNeR projection should be extended and the IBNeR threshold becomes now obsolete. However, the methodology of Individual Chain-ladder is retained. Concerning the IBNyR projection, the Schnieper method is no longer appropriate since we also need to calculate reserves for improvement-claims. Finally, we returned to the ALR method, applied to two different triangles of numbers corresponding to two situations of the ultimate. As a consequence, the model 2 adjusted only differs from the model 1 in the IBNeR projection.

Ideas for improvement

We then checked the assumptions of the two models and tested them on real data. Both models present shortcomings. We therefore sought new ideas for improvement, in both the IBNeR projection and the IBNyR projection.

IBNeR projection

Individual Chain-ladder and choice of weighting

We shall start with the model 2 adjusted. We believe that in an individual projection, we better apply specific link-ratios to each claim, according to its characteristics. Moreover, the weighting of individual factors by the amount of individual Incurred for estimating link-ratios is not appropriate to large claims whose development is heterogeneous. We propose a new version of Individual Chain-ladder in which individual development factors are weighted based on Incurred proximity (inverse of distance) between claim to be developed and reference claims. Our intuition is that claims with close Incurred amounts tend to develop in a similar way. To be careful, only individual development factors after the first exceedance of the ML threshold are taken as reference factors.

After testing different measures of distance, we retained the L^1 distance, standardized by the Incurred of the claim to be developed. We also introduce a tolerance parameter in order not to overweight claims that are too close to the claim to be developed. Finally, a parameter β is calibrated on claims history to quantify the impact of claims proximity on their development. If this parameter is 0, claims proximity has no impact on their development and therefore individual development factors are equally weighted. The bigger the parameter is, the more similar the development of claims with close Incurred are. Consequently, we do not need to confirm our intuition ; the method justifies itself

thanks to the calibration of β parameter.

Individual Munich Chain-ladder

After modifying the Individual Chain-ladder method found in the model 2 adjusted, we want to combine it with the P/I ratio method of the model 1. No method found the literature review deals with this combination. Nevertheless, in the class of aggregated methods, there is Munich Chain-ladder that tends to correct the classic Chain-ladder by using both Incurred losses (I) and Paid losses (P) in claims development. We thus develop an individual version of Munich Chain-ladder for our IBNeR projection. The idea is to project the Paid losses and the Incurred losses simultaneously and to ensure that these two amounts do not stray too much during different development years. The aim is that the P/I ratio will be close to 1 at the ultimate. Given a development year, we have different P/I ratios corresponding to different claims. If a claim has its P/I ratio higher than the mean of all claims, its Incurred will develop faster than predicted Chain-ladder to reduce the gap with its Paid and/or conversely, its Paid will develop slower than predicted Chain-ladder to wait for its Incurred.

Tests on different Lines of Business (LoB) have proved that Individual Munich Chain-ladder only brought value on Liability LoB where we found a linear correlation between both residues(I/P) - residues(P) and residues(P/I)-residues(I). On other LoB, we only observe the first correlation. It seems that generally, Paid losses adjust to catch Incurred losses but not vice versa. As we have chosen to apply Individual Chain-ladder to Incurred (by considering that Incurred losses are more relevant than Paid losses in our context), we gain nothing by projecting in parallel Paid amounts, knowing that Incurred amounts do not learn from Paid amounts.

We decided to keep our Individual Chain-ladder version applied to Incurred and not to use Individual Chain-ladder, firstly because it was only interesting for Liability LoB, secondly because our mathematical model for Individual Munich Chain-ladder was not rigorously developed (individual development factors are equally weighted rather than weighted according to the claims proximity).

IBNyR projection

Both model 1 and model 2 adjusted use the ALR method to project the triangle of numbers. We have tested other aggregated methods, namely Chain-ladder, mixed Bornhuetter-Ferguson (with a Chain-ladder pattern and a priori ALR), Cape-Cod and Benktander-Hovinen. There is no "best" method in the absolute sense, knowing that the triangles of numbers are unstable and the vector of exposure is not necessarily correlated to the frequency of large claims. We finally selected mixed Bornhuetter Ferguson which is a good compromise between the two extreme views : Chain-ladder method and expected claims method. This method is also easy to understand and to implement.

Final model

The selected model is composed of three main modules : the ML threshold selection, the IBNeR projection and the IBNyR projection.

ML threshold selection

The ML threshold is selected under the assumption that the excess over the threshold follows a Generalized Pareto Distribution (GPD) so that we can use Hill plot, Mean Excess Function, Cheng&Peng's estimator and Danielsson's bootstrap. We find through these methods a good compromise between a high enough threshold to properly approach the Generalized Pareto Distribution and a sufficiently large number of points for calibrating GPD parameters.

The database used for the other two modules (IBNeR projection and IBNyR projection) includes all claims whose Incurred has once exceeded the ML threshold. The IBNeR amount is the difference between the ultimate and the actual Incurred of claims in this database. The IBNyR reserves correspond to large claims that have not yet been reported and claims that have not reached the ML threshold yet but are expected to.

IBNeR projection : Individual Chain-ladder

Let $\mathcal{K}_n(j)$ the subset of claims whose Incurred of development year j is known in current year n . For a claim k whose last known Incurred amount corresponds to the development year j (i.e. occurred in year $n - j + 1$), we estimate its Ultimate by :

$$\widehat{C}_{k,n} = C_{k,j} \widehat{F}_{k,j} \widehat{\widehat{F}}_{k,j+1} \dots \widehat{\widehat{F}}_{k,n-1}$$

with :

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{k,j} &= \frac{1}{\sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+1)} w_{k,k'}^j} \sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+1)} w_{k,k'}^j F_{k',j} \\ \widehat{\widehat{F}}_{k,s} &= \frac{1}{\sum_{k' \in \mathcal{K}_n(s+1)} w_{k,k'}^s} \sum_{k' \in \mathcal{K}_n(s+1)} \widehat{w}_{k,k'}^s F_{k',s} \quad \forall s = j+1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

where :

- $F_{k',j} = \frac{C_{k',j+1}}{C_{k',j}}$ are individual development factors ;
- $w_{k,k'}^j = \left(\max\left\{ \varepsilon, \left| \frac{C_{k,j} - C_{k',j}}{C_{k,j}} \right| \right\} \right)^{-\beta}$ measures the proximity between k and k' in the development year j (in case $C_{k,j}$ is known) ;
- $\widehat{w}_{k,k'}^j = \left(\max\left\{ \varepsilon, \left| \frac{\widehat{C}_{k,j} - C_{k',j}}{\widehat{C}_{k,j}} \right| \right\} \right)^{-\beta}$ measures the proximity between k and k' in the development year j (in case $C_{k,j}$ is unknown and needs to be estimated). As claims proximity w depends on the Incurred of the claim to be developed, it is only known for the current year. For the next years, we have to estimate the Incurred to calculate the proximity with the reference claims ;
- $\varepsilon > 0$ a tolerance parameter introduced to not over-weight claims that are too close to the claim to be developed ;
- $\beta \geq 0$ a parameter measuring claims proximity impact on their development.

Individual development factors are calculated as in the classic Chain-ladder. The weights $w_{k,k'}^j$ make the difference in the method. The closer $C_{k,j}$ and $C_{k',j}$ are, the bigger weight given to $F_{k,j}$ is. The presence of tolerance ε means that weights are capped at $\varepsilon^{-\beta}$. Claims whose Incurred is in the interval $[C_{k,j}(1 - \varepsilon) C_{k,j}(1 + \varepsilon)]$ are equally weighted. In such a way, a claim with atypical development and Incurred too close to the claim to be developed will not seriously affect our estimated link-ratio. The interval defined above is called neighborhood of $C_{k,j}$. The bigger $C_{k,j}$ is, the wider its neighborhood is. Indeed, very large claims are rare, we want to extend their neighborhood to have enough "neighbour" points.

The β parameter is calibrated by a statistical learning technique called leave-one-out cross-validation. We vary β on a sufficiently large interval. For each value of β , we discard successively one claim from our dataset, then estimate *link - ratios* for this one by using other claims as references. We compare the true development of this claim to the estimation in our algorithm. Finally, the optimal β is the one that minimizes the average error prediction. This optimal β tells us if the claims proximity impacts strongly or weakly or even does not affect their development.

BNyR projection : Bornhuetter-Ferguson method with Chain-ladder pattern and ALR prior

The IBNyR projection is done using a frequency-severity approach (we need the IBNeR projection before this module in order to estimate the large claims severity based on the ultimate of all claims presented in the dataset). We distinguish two cases : Ultimate \geq ML threshold and Ultimate $<$ ML threshold.

As in reference methods, the severity is calibrated by extreme distributions in the first case and simply by a weighted average in the second case. What differs from the reference methods in this module is the projection of the triangles of numbers. In both cases, we use the same method called Bornhuetter-Ferguson with a Chain-ladder pattern and an ALR prior. This method requires a triangle of incremental numbers of large claims ($X_{i,j}$) (we then deduce the triangle of cumulative numbers

$C_{ij} = \sum_{m=1}^j X_{i,m}$)⁴ and an exposure vector (E_i). The underlying assumption is that the number of large claims is a priori proportional to the exposure.

For each development year $j = 1, \dots, n$, we estimate the "average number of large claims occurred per exposure unit" : $\hat{\alpha}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i}$. We deduce an ultimate ratio : $\hat{\alpha} = \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_j$. By multiplying this ratio to the exposure vector, we obtain an a priori vector of ultimate number of large claims by year of occurrence : $\hat{\mu}_i = E_i \hat{\alpha}$. (It is not a true a priori because $\hat{\alpha}$ depends on the triangle ($X_{i,j}$)). Then, we apply Bornhuetter-Ferguson method to estimate the ultimate number and the IBNyR number of larges claims for each year of occurrence :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i+1} + (1 - \widehat{\beta}_{n-i+1}) \hat{\mu}_i$$

4. Note : we use the notation C but it is the number rather than the Incurred amount

with Chain-ladder pattern : $\widehat{\beta_{n-i+1}} = \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j^{CL}}$.

One-year reserve risk

To quantify the one-year reserve risk, we used non-parametric Monte-Carlo method (an equivalence of Bootstrap non-parametric) to simulate N scenarios of claims development for next year and re-applied our model to predict the ultimate of each scenario. We obtained a CDR (Claim Development Result) distribution. Since our model is divided into two modules, we proposed three different calculations of CDR : $CDR(IBNeR)$, $CDR(IBNyR)$ and $CDR(IBNR)$, in order to measure the specific one-year volatility of each module and the global one-year volatility.

Economic Allocation between AXA CS branches

The final step is to allocate the reserves amount of each LoB between the different AXA CS branches. For IBNeR reserves, the Individual Chain-ladder method allows us to know the IBNeR amount of each claim and therefore assign it to the branch to which the claim belongs. The IBNyR allocation requires knowledge of the risk profiles (commitment, shares, retention, premiums) of each branch.

Key words : Reserving, Atypical claims, Major Losses, EVT, IBNeR, IBNyR, individual approach, incurred proximity, Chain-ladder, Bornhuetter-Ferguson, ALR, economic allocation

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à l'équipe Modèle, Provisionnement et Réassurance d'AXA Corporate Solutions.

Je remercie plus particulièrement mes encadrants, Ramy Ibrahim et Jérémie Devun, de m'avoir guidé dans le travail et m'avoir aidé à trouver des solutions pour avancer. Leur disponibilité, leur soutien, leur encouragement et leur patience m'ont été précieux afin de bien mener mon travail. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Sophie St-John et Benjamin Van Rij qui m'ont beaucoup aidé dans la rédaction de ce mémoire. Je remercie également mon tuteur pédagogique, Romuald Elie pour son suivi de stage.

Enfin, je voudrais remercier le corps enseignant de l'ENSAE ParisTech pour la qualité de la formation Statisticien-Économiste ainsi que les cours dispensés de la voie Actuariat.

Avant-Propos

[1] Les chiffres ainsi que les statistiques, graphes ont été modifiés pour raison de confidentialité.

[2] Les méthodes classiques constituent une base de référence pour le développement de tous modules dans mon modèle. Je les présenterai donc successivement dès le début, sans exemples ou tests sur données réelles. Les applications pratiques seront discutées quand j'expliquerai chacun des modules.

[3] Certains travaux de recherches sur le provisionnement des sinistres graves ont été menés chez AXA Corporate Solutions. J'ai donc effectué une revue des méthodes et modèles existant, d'où la présence du chapitre 4 où je présenterai les deux modèles de référence, bien que je ne les retienne pas au final. Ces derniers constituent une base de réflexion pour mon modèle final.

[4] Suite des deux points [2] et [3], ce mémoire est présenté dans l'ordre suivant : je rappelle les notions mathématiques/actuarielles, aspects théoriques nécessaires ainsi que des modèles/méthodes de référence avant de présenter le modèle retenu. Les lecteurs peuvent suivre l'ordre de présentation du mémoire ou également commencer par le chapitre 6 dans lequel je présente mon modèle de provisionnement des sinistres graves et après revenir à certains chapitres précédents si besoin pour les détails des modules et le raisonnement derrière.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Présentation d'AXA Corporate Solutions	3
1.1 Activités	3
1.2 Succursales	4
Bibliographie	5
2 Préambule sur le provisionnement	7
2.1 Notions générales de provisionnement	7
2.1.1 Cycle de vie d'un sinistre	7
2.1.2 Décomposition de la charge ultime	8
2.1.3 Provisionnement et Solvabilité	11
2.1.4 Crédibilisation dans le provisionnement	12
2.1.5 Méthodes agrégées	13
2.1.6 Méthodes ligne à ligne	27
2.2 Nécessité de séparer la provision des attritionnels et des graves	31
Bibliographie	32
3 Provisionnement des sinistres graves	33
3.1 Seuil grave	33
3.1.1 Théorie des valeurs extrêmes	34
3.1.2 Sélection du seuil grave	36
3.2 Vision grave	40
3.3 Provisionnement des sinistres graves chez AXA CS	41
Bibliographie	42

4	2 modèles des graves de référence	43
4.1	Modèle 1 : [IBNeR] méthode du ratio P/I - [IBNyR] ALR	45
4.1.1	Projection d'IBNeR	46
4.1.2	Projection d'IBNyR	47
4.2	Modèle 2 : [IBNeR] Chain-ladder ligne à ligne - [IBNyR] Schnieper	48
4.2.1	Projection d'IBNeR	49
4.2.2	Projection d'IBNyR	51
4.3	Test et validité des hypothèses des deux modèles	54
4.3.1	Comparaison des résultats entre deux modèles	62
4.4	Modèle 2 ajusté : Version adaptée à la vision grave chez AXA CS	64
4.4.1	Base de sinistres pour la projection d'IBNeR	64
4.4.2	Projection d'IBNyR : lien entre Schnieper et ALR	65
4.4.3	Limites du modèle	66
	Bibliographie	67
5	Idées d'amélioration	69
5.1	Projection d'IBNeR	70
5.1.1	Chain-ladder ligne à ligne et choix de pondération	70
5.1.2	Munich Chain-ladder et son adaptation aux données ligne à ligne	78
5.1.3	Méthode retenue	84
5.2	Projection d'IBNyR	84
5.2.1	Méthode Chain-ladder	85
5.2.2	Méthode ALR	86
5.2.3	Méthode de sinistres espérés (a priori ALR)	87
5.2.4	Méthode Bornhuetter-Ferguson mixte	87
5.2.5	Méthode Cape-Cod	88
5.2.6	Méthode Benktander-Hovinen	89
5.2.7	Synthèse	89
	Bibliographie	92
6	Prise en compte de l'inflation	93
6.1	Inflation et montants de charge de sinistres	93

TABLE DES MATIÈRES

6.2	Inflation et pratique comptable	94
6.3	Inflation et Seuil grave	95
	Bibliographie	96
7	Modèle retenu et Risque de provisionnement	97
7.1	Rappel du modèle	97
7.2	<i>Backtesting</i> et comparaison avec les autres modèles	98
7.2.1	Branche Responsabilité Civile	98
7.2.2	Branche Dommage	101
7.2.3	Comparaison globale	103
7.3	Incertitude à un an	104
7.3.1	<i>CDR (IBNyR)</i>	105
7.3.2	<i>CDR (IBNeR)</i>	106
7.3.3	<i>CDR (IBNR)</i>	107
	Bibliographie	108
8	Allocation économique des provisions	109
8.1	Allocation d' <i>IBNeR</i>	109
8.2	Allocation d' <i>IBNyR</i>	110
	Conclusion	111
	Bibliographie	114
A	Preuve des lemmes	117
A.1	Preuve du lemme 2.1.1	117
A.2	Preuve du lemme 4.2.1	118
B	Inférence statistique	119
B.1	Estimation du maximum de vraisemblance	119
B.2	Estimation par méthode des moments	120
C	Calibration des lois de sévérité	121
C.1	Distribution Weibull	121

TABLE DES MATIÈRES

C.2	Distribution Log-Normal	122
C.3	Distribution Pareto tronquée à droite	123
C.4	Distribution Pareto généralisée	124
D	Mesure de la qualité d’ajustement d’un modèle statistique	127
D.1	Critère d’information d’Akaike (AIC)	127
D.2	Test de Kolmogorov-Smirnov	127
D.3	Critère de Cramér-von Mises	128
D.4	Le diagramme Quantile-Quantile	128
E	Résultats de test sur les autres branches d’activité	131
E.1	Branche Automobile	131
E.2	Branche Aviation	133
F	R et Shiny pour le développement de l’outil	135

Introduction

Pour conclure mon cursus d'ingénieur à l'ENSAE ParisTech en voie Actuariat et dans le cadre de la préparation pour une admission à l'Institut des Actuaire, j'ai choisi d'effectuer mon stage de fin d'études au sein de l'équipe Modèle, Provisionnement et Réassurance chez AXA Corporate Solutions (AXA CS). Une des principales missions de l'équipe est d'évaluer et justifier les provisions *Best Estimate* par ligne d'activité et sur plusieurs succursales d'AXA CS, ainsi que le pilotage du processus de provisionnement avec les succursales situées à Londres et Cologne. L'objectif du stage est de développer des méthodes de provisionnement adaptées au portefeuille d'AXA CS. L'étude portera plus particulièrement sur la mise en place d'un modèle de provisionnement des sinistres graves (coût élevé et fréquence faible) et son allocation économique aux différentes succursales d'AXA CS. Ce mémoire a pour vocation de synthétiser mes travaux de recherche et les résultats obtenus sur ces deux derniers points.

Le problème de provisionnement n'est pas nouveau. Les techniques classiques du type Chain-ladder ont été introduites il y a très longtemps dans les compagnies d'assurance pour estimer leurs montants de réserves. Beaucoup d'autres méthodes ont été développées depuis pour améliorer Chain-ladder. Pourtant, le provisionnement est toujours un sujet d'actualité et attire toujours l'attention dans le monde de l'actuariat, dont AXA CS ne fait pas l'exception. Certains chercheurs spécialisés dans ce domaine ont publié des articles et des ouvrages pour synthétiser les méthodes suivies des développements mathématiques rigoureux, des exemples d'application concrets ainsi que leur analyses sur les avantages et défauts des méthodes. Au sein des entreprises, les actuaires ont mené leurs propres études et applications des méthodes théoriques dans des cas réels. Le principal défi du problème de provisionnement est le choix d'un modèle approprié à des contraintes spécifiques des portefeuilles d'assurance. A ce jour, il n'existe pas de meilleure méthode, méthode pouvant être appliquée à toutes entreprises ou toutes branches d'activité. La difficulté est donc d'identifier le contexte, les données et les besoins afin de sélectionner une bonne méthode.

Chez AXA CS, nous provisionnons séparément les sinistres attritionnels et les sinistres graves. Le caractère "fréquence faible-coût élevé" des sinistres graves poserait des difficultés au niveau du volume de données, de la quantification de la sévérité et à la prédiction des réalisations futures. Nous avons aussi une vision de sinistres graves très particulière qui n'est pas toujours cohérente avec les méthodes connues. Pour toutes ces raisons, AXA CS a besoin de développer un modèle spécifique pour répondre à son propre besoin. Certes, je n'étais pas le premier à mener les études sur les sinistres graves chez AXA CS. Mon modèle s'est basé sur des recherches réalisées depuis longtemps et des outils de modélisation qui sont liés au problème de sinistres graves. Une phase importante de mon stage était donc de les comprendre et d'identifier leurs limites afin de pouvoir en proposer des solutions. J'ai développé un nouveau modèle en essayant de proposer quelques idées d'amélioration.

Ce modèle subira certainement nombreuses critiques et est loin d'être un modèle idéal qui pourrait capter tous les aspects du provisionnement en général et du provisionnement des sinistres graves en particulier. J'espère cependant qu'il fournira une nouvelle voie de réflexion qui pourra contribuer à la bibliothèque de connaissances sur le sujet de provisionnement.

Le plan du mémoire est le suivant : Dans le premier chapitre je présenterai très brièvement l'entité AXA Corporate Solutions pour donner une vision globale sur leurs activités et faire un lien avec mon sujet de mémoire. Le chapitre 2 est dédié au préambule sur le provisionnement. Comme ce stage était pour moi une bonne occasion de m'enrichir mes connaissances sur le provisionnement, j'ai profité de ce chapitre pour faire un résumé des notions générales du provisionnement et une revue des méthodes connues. Il servira comme une introduction sur le sujet ou une référence que les lecteurs pourront consulter durant la lecture de la suite du mémoire. Dans le chapitre 3, j'aborderai les sinistres graves en rappelant les résultats fondamentaux de la théorie des valeurs extrêmes et son application à notre problème. Je spécifierai également la vision des sinistres graves retenue chez AXA CS pour pouvoir clarifier mes choix de méthodes dans la suite. Comme expliqué ci-dessus, certains travaux de recherche sur le provisionnement des sinistres graves ont été menés chez AXA Corporate Solutions. J'ai donc effectué une revue des méthodes et modèles existant, d'où la présence du chapitre 4 où je présenterai les deux modèles de référence, bien que je ne les retienne pas au final. Ces derniers constituent une base de réflexion pour mon modèle final. Mes idées d'amélioration seront présentées dans le chapitre 5. J'expliquerai mes réflexions et quelques résultats de tests pour valider ou rejeter ces idées. Le chapitre 6 sera réservé au problème d'inflation qui me paraît complexe et qui joue un rôle important dans tous les sujets traitant de la finance et de l'actuariat. Dans le chapitre 7, je rappellerai le modèle mathématique retenu avant de parler du risque de provisionnement à 1 an. L'allocation économique des réserves aux différentes succursales d'AXA CS sera discutée dans le dernier chapitre. Pour conclure ce mémoire, je rappelle les défis, les accomplissements, les limites de mon modèle et enfin quelques perspectives.

1

Présentation d'AXA Corporate Solutions

Sommaire

1.1 Activités	3
1.2 Succursales	4
Bibliographie	5

Une brève présentation d'AXA Corporate Solutions s'avère nécessaire pour encadrer le contexte et justifier du besoin de développement d'un modèle actuariel pour le provisionnement des sinistres graves.

1.1 Activités

AXA Corporate Solutions (AXA CS) est une entité du Groupe AXA dédiée aux Grandes Entreprises Internationales pour la prévention, la souscription, la gestion des risques IARD et aux marchés spécialisés tels que Marine, Aviation et Spatial [1]. Les activités d'AXA CS s'articulent autour de 9 branches d'activités : Dommage (*Property*), Responsabilité Civile (*Liability*), Automobile (*Motor*), Construction (*Construction*), Protection Humaine (*Human Protection*), D&O (*Directors and Officers*), Marine (*Marine*), Aviation (*Aviation*) et Spatial (*Spatial*). La Marine, le Dommage et la Responsabilité civile (RC) constituent les trois plus grosses branches, représentant au total plus de deux tiers du chiffre d'affaires total.

Branche Dommage (*Property*) : Nous y trouvons la garantie dommage aux biens et la garantie perte d'exploitation. C'est une branche à déroulement court. En effet, lorsqu'un sinistre survient, son indemnisation s'effectue assez rapidement par rapport à la perception de la prime.

Branche Responsabilité Civile (*Liability*) : Elle couvre la responsabilité des entreprises envers des tiers (RC produit, RC professionnelle et autre). C'est une branche longue.

Branche Automobile (*Motor*) : Elle assure la flotte automobile des entreprises, les dommages corporels ainsi que la responsabilité civile matérielle et corporelle. c'est une branche mi-longue.

Branche Construction (*Construction*) : Cette branche comprend la garantie dommage appelée "tous risques chantier" (TRC) et la garantie décennale liée aux indemnités versées au tiers.

Branche Protection Humaine (*Human Protection*) : Nous y trouvons les garanties de décès/invalidité, coma, soutien psychologique, aménagement du domicile du véhicule et du lieu de travail et *Broken Bones*. C'est une branche longue.

Branche D&O (*Directors and Officers*) : Nous y trouvons la garantie *Employment Protection Legislation* visant à couvrir les sinistres portant atteintes aux employés (harcèlement, non respect du droit de travail) et *Wrongful Act* traitant les erreurs de gestion liées à la responsabilité du dirigeant. Les procédures judiciaires en font une branche longue.

Branche Marine (*Marine*) : Elle assure les corps des bateaux (*Hull*) et la cargaison à bord (*Cargo*). C'est une branche courte.

Branche Aviation (*Aviation*) : Nous y trouvons la responsabilité civile matérielle, l'indemnisation corporelle et la responsabilité civile au sol. C'est une branche mi-longue.

Branche Spatial (*Spatial*) : Cette branche comprend l'assurance qui couvre le lancement des satellites, leur mise sur orbite et leur vie. Nous y trouvons deux garanties potentielles : la garantie dommage (perte de capacité opérationnelle, perte d'exploitation) et la garantie de type responsabilité civile.

1.2 Succursales

AXA CS offre ses services à travers le monde entier avec, à part de Paris, les succursales Hong Kong, à Singapour, au Royaume-Uni (UK), en Allemagne, en Italie, en Australie et en Suisse. Elle est présente dans 150 pays, soit par l'implantation de succursales soit sous forme de partenariat avec des assureurs locaux.

Lien avec le sujet du mémoire

L'équipe Modèle, Provisionnement et Réassurance au sein de laquelle j'ai effectué mon stage de fin d'études est en charge de piloter le provisionnement de tous les sinistres des différentes succursales.

Le provisionnement chez AXA CS est assez spécifique puisque cette société n'assure que des grands risques. Généralement lors de l'application des méthodes classiques de provisionnement, nous éliminons les sinistres atypiques du triangle de provisionnement et les traitons à part par une évaluation qualitative par exemple. Chez AXA CS, avec la présence fréquente des sinistres graves de charge élevée (appelés *Major Losses*), le process est plus complexe. Le nombre de sinistres graves dans le portefeuille est suffisamment important pour développer un modèle actuariel plutôt qu'une approche qualitative pour les provisionner. Pourtant ce nombre reste limité face au volume de données requises pour assurer la stabilité d'une méthode classique de provisionnement. Les sinistres graves ont des caractéristiques et des comportements très spécifiques que la majorité des techniques usitées n'arrivent pas à capter. Pour toutes ces raisons, nous avons décidé de développer un modèle permettant de provisionner ce type de sinistres.

Nous attendons du modèle une méthode de provisionnement commune qui fonctionne sur toutes les branches d'activités, que ce soit une branche à développement court ou long.

La provision sera faite par branche d'activité mais au niveau globale d'AXA CS pour pouvoir utiliser le maximum de données dont nous disposons. Une allocation des réserves par succursales est nécessaire, sachant que chacune a des engagements différents. L'allocation économique des réserves aux différentes succursales sera donc le deuxième défi de mon stage.

Bibliographie

- [1] AXA. Axa corporate solutions presentation. 2015.

"Le provisionnement n'est pas un problème de modélisation complexe et sophistiqué, mais plutôt un exercice de choix de modèle."

Hans Bühlmann

2

Préambule sur le provisionnement

Sommaire

2.1	Notions générales de provisionnement	7
2.1.1	Cycle de vie d'un sinistre	7
2.1.2	Décomposition de la charge ultime	8
2.1.3	Provisionnement et Solvabilité	11
2.1.4	Crédibilisation dans le provisionnement	12
2.1.5	Méthodes agrégées	13
2.1.6	Méthodes ligne à ligne	27
2.2	Nécessité de séparer la provision des attritionnels et des graves	31
	Bibliographie	32

2.1 Notions générales de provisionnement

Cette section a pour vocation de fournir une vision globale sur le provisionnement des sinistres au sein d'une compagnie d'assurance (non-vie dans le cas d'AXA CS) ainsi que les notions et techniques utilisées pour le problème de provisionnement en général.

2.1.1 Cycle de vie d'un sinistre

Les étapes principales du processus de gestion, d'indemnisation et de provisionnement des sinistres en assurance non-vie sont :

- Notification à l'assureur et ouverture du dossier sinistre par le gestionnaire de sinistre,

- Mise en oeuvre de différentes expertises,
- Règlement de l'indemnité,
- Clôture du dossier sinistre,
- Recours éventuels menés par l'assureur contre le tiers responsable et/ou l'assureur de ce dernier.
- Possibilité de réouverture du dossier sinistre

En général l'assureur ne peut pas connaître le montant de charge ultime d'un sinistre lors de l'ouverture du dossier. La raison peut être le retard dans la déclaration de sinistre par rapport à la date de survenance, la difficulté dans l'évaluation du sinistre qui peut durer assez longtemps, l'évolution de la charge totale de sinistre dans le temps (surtout pour les branches longues telles que la Responsabilité Civile), la réouverture du dossier sinistre, etc. Tous ces facteurs expliquent la complexité du cycle de vie d'un sinistre et l'existence de différents flux de règlements de l'indemnité. Nous parlons de cadence de règlements d'un sinistre pour ces différents règlements. Nous appelons durée de vie (ou nombre total d'années de développement) d'un sinistre le temps (le nombre d'années) s'écoulant entre sa date de survenance et sa date de clôture.

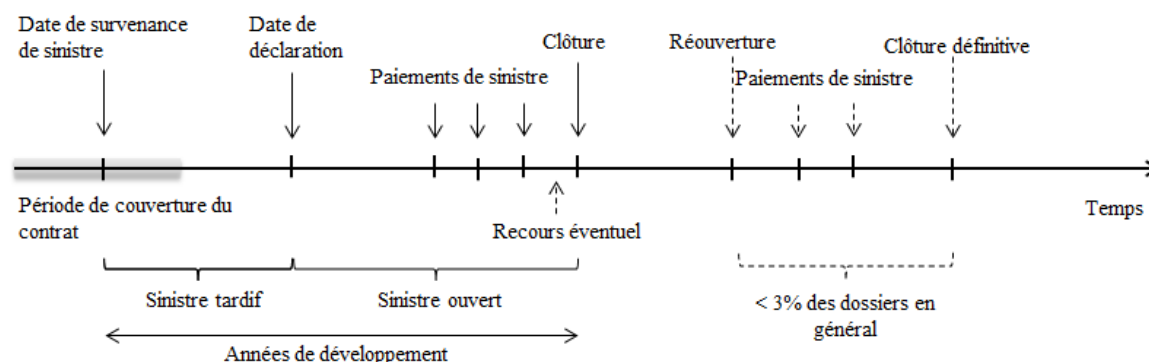


FIGURE 2.1 – Cycle de vie typique d'un sinistre non-vie

Remarque 2.1.1. Les recours sont à évaluer et provisionner à part ; nous ne les traitons pas dans notre modèle de provisionnement des sinistres graves.

Remarque 2.1.2. Les cas de réouverture du dossier sinistre ne représentent que moins de 3 % en général, nous ne les considérons pas ici. Nous imposons ainsi une hypothèse implicite que lors qu'un sinistre est clos, il est clos définitivement.

2.1.2 Décomposition de la charge ultime

L'activité de l'assurance est caractérisée par l'inversion du cycle de production, ce qui impose un traitement comptable particulier : en plus des dettes certaines, une compagnie d'assurance doit également comptabiliser ses dettes probables (à l'égard des assurés et des bénéficiaires). Celles-ci, encore appelées *provisions techniques*, sont principalement composées des *provisions pour sinistres à payer (PSAP)*. La PSAP doit être calculée :

- brute de recours : les recours doivent être évalués séparément (dans prévisions de recours à encaisser,
- brute de réassurance : les provisions pour sinistres cédés sont comptabilisées à part dans l’actif du bilan.

La compagnie doit calculer, exercice par exercice, la PSAP pour quantifier le montant total des dépenses probables pour régler les sinistres survenus mais non payés. La PSAP se décompose comme suit :

$$PSAP = \text{Provision Dossier/ Dossier} + IBNR = \text{Provision Dossier/ Dossier} + IBNeR + IBNyR$$

avec :

- **Provision Dossier/Dossier** : montant que le gestionnaire de sinistres s’attend à payer pour un sinistre déclaré
- **IBNeR (Incurred But Not enough Reported)** : venant compléter les provisions dossier-dossier pour les sinistres ouverts, *IBNeR* correspond aux provisions pour sinistres déclarés mais non suffisamment (ou trop) provisionnés. (*IBNeR* peut être positif ou négatif).
- **IBNyR (Incurred But Not yet Reported)** : montant destiné à couvrir les sinistres tardifs, c’est-à-dire les sinistres survenus mais non-encore connus par l’assureur.
- **IBNR (Incurred But Not Reported)** : c’est la somme des *IBNeR* et *IBNyR*.

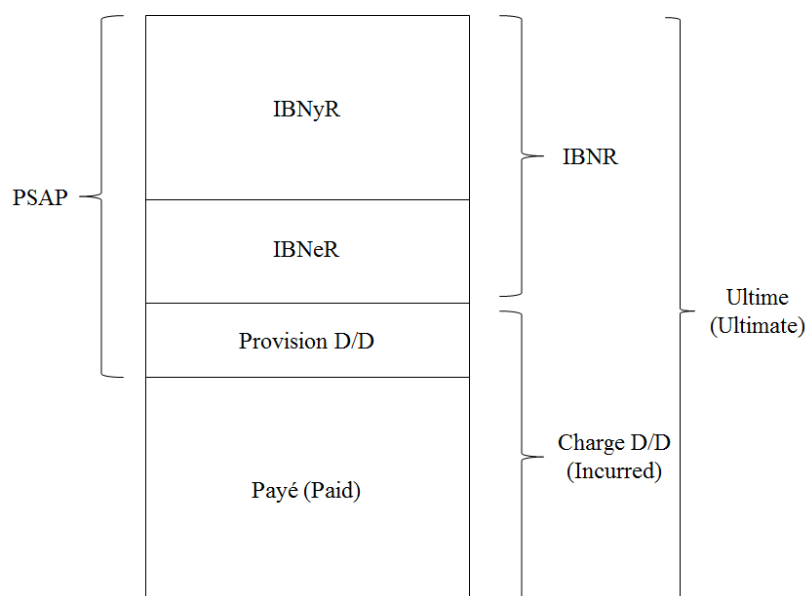


FIGURE 2.2 – Décomposition de la charge ultime à une date de vision

Les provisions Dossier/ Dossier sont évaluées au cas par cas par les gestionnaires de sinistres, alors que les *IBNR* (*IBNeR* + *IBNyR*) sont évaluées au global (souvent par les actuaires) à l’aide de méthodes statistiques de provisionnement.

A une date de vision, le montant payé par l’assureur à un sinistre est appelé **Payé (Paid)**. On appelle **Charge Dossier/Dossier ou simplement Charge (Incurred)** la somme des Payés et des provisions

Dossier/Dossier. La **charge ultime** estimée est la somme des charges et des *IBNR*. Toutes ces quantités peuvent varier au cours des années de développement, d'où l'incertitude de la charge ultime. On ne connaît le vrai montant de la charge ultime d'un sinistre qu'après sa date de clôture définitive.

Pour clarifier la problématique du provisionnement, nous présentons ci-dessous le diagramme de Lexis qui fait le lien entre le cycle de vie d'un sinistre que nous avons étudié dans la sous-section précédente et les composantes de la charge ultime.

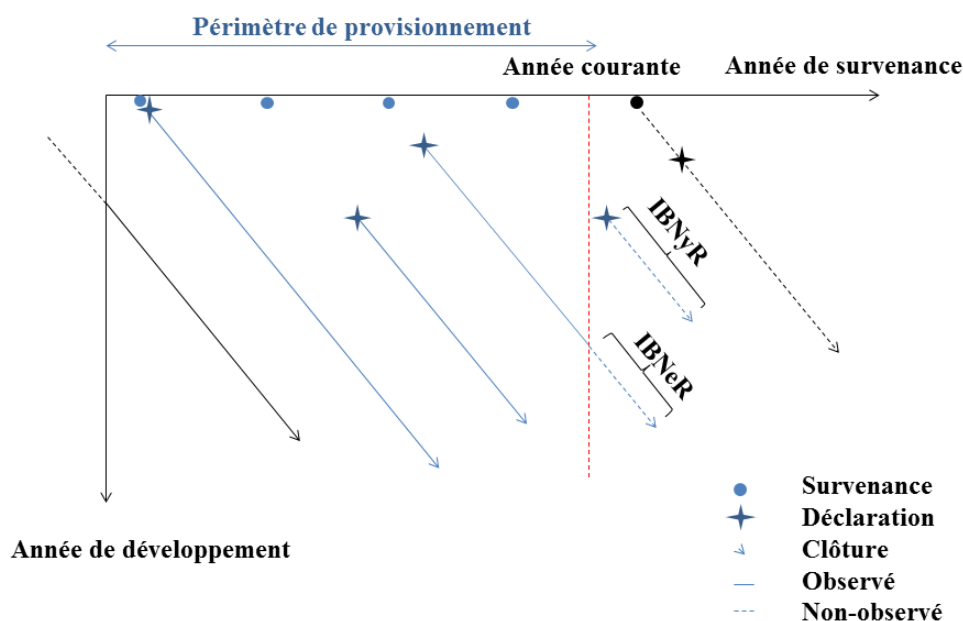


FIGURE 2.3 – Diagramme de Lexis

Sont représentés en abscisse le temps calendaire, et en ordonnée l'âge des sinistres. L'année où on effectue le provisionnement correspond au trait rouge. On doit provisionner tous les sinistres dont la date de survenance est comprise dans le périmètre de provisionnement. Le début du périmètre de provisionnement est théoriquement la première année d'assurance. Si ce n'est pas le cas, on pourrait avoir les sinistres antérieurs qui ne rentrent pas dans le périmètre de provisionnement (par exemple la première flèche noire sur le diagramme de Lexis). Il faut donc prendre un périmètre suffisamment large pour que ces sinistres-là sont tous clos à l'année courante.

2.1.3 Provisionnement et Solvabilité

Dans le cadre de Solvabilité I, les PSAP estimées par les assureurs doivent être *"suffisantes pour le règlement intégral de leurs engagements vis-à-vis des assurés, des entreprises réassurées et bénéficiaires de contrats"*. La PSAP est estimée chaque année par des méthodes statistiques. On peut utiliser le triangle de liquidation pour estimer la charge ultime. Comme chaque année, des nouvelles observations viennent compléter le triangle de liquidation (l'ajout d'une nouvelle diagonale), la charge ultime doit être revalorisée. Si l'estimation de la charge ultime est revue à la hausse (resp. à la baisse), un mali (resp. boni) sera constaté. Dans l'optique de Solvabilité I, le risque de provisionnement pour l'assureur est lié au risque à l'ultime, i.e. la volatilité de la charge de sinistres ultime estimée.

La directive Solvabilité II (2009) apporte une harmonisation des règles de solvabilité dans le monde de l'assurance européenne, afin de mieux protéger les assurés. Cette nouvelle réforme adopte une vision économique du bilan (qui est désormais plus importante que la forme juridique) en introduisant la notion Juste Valeur (*Fair Value*). Elle se compose de trois piliers :

- Premier pilier : les exigences quantitatives, notamment en matière de fonds propres et de calculs des provisions techniques,
- Deuxième pilier : les exigences qualitatives, en matière d'organisation et de gouvernance des organismes,
- Troisième pilier : les exigences en matière d'informations prudentielles et de publication, dans un souci de transparence.

J'expliquerai le premier pilier qui est directement lié au sujet de mon mémoire. Rappelons le bilan simplifié d'une compagnie d'assurance. Nous constatons que le premier pilier traite surtout les deux éléments du passif.

ACTIF	PASSIF
Placements	Fond Propres
	Provisions Techniques

TABLE 2.1 – Bilan simplifié d'une compagnie d'assurance

Provisions techniques

Les provisions techniques doivent être rattachées à des classes de risques homogènes, i.e. des branches d'activité (*LoB : Line of Business*) chez AXA CS. Elles se décomposent d'une provision *Best Estimate* et d'une marge pour risque (*Risk Margin*). L'article 77 de la directive du parlement européen définit ces deux notions comme suit :

- La provision *Best Estimate* est *"la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle attendue des flux de trésorerie futurs), estimés sur la base de la courbe des taux sans risque pertinente"*.
- La marge pour risque est *"le coût que représente la mobilisation d'un montant de fonds propres éligible égal au Solvency Capital Requirement nécessaire pour faire face aux engagements d'assurance et de réassurance sur toute la durée de vie de ceux-ci"*.

Remarque 2.1.3. *Les deux évolutions principales le Solvabilité II par rapport à Solvabilité I dans l'évaluation quantitative des provisions techniques sont :*

- *Le passage d'une évaluation incluant une marge prudence à une évaluation Best Estimate (en calculant séparément une marge pour risque),*
- *La prise en compte de la valeur temps en actualisant des flux futurs.*

Fonds Propres

Les exigences quantitatives au niveau des fonds propres sont imposées par le premier pilier de la directive Solvabilité II via :

- **Le capital minimum requis (MCR) :** le niveau minimum de fonds propres en dessous duquel l'autorité de contrôle se réserve le droit de retirer l'agrément de l'assureur.
- **Le capital de solvabilité requis (SCR) :** le capital nécessaire pour absorber le choc provoqué par un risque majeur (un sinistre exceptionnel, un choc sur les actifs, etc.). Il est défini comme le montant de fonds propres pour limiter à 0,5 % la probabilité de ruine sur un horizon d'un an, soit encore la *Value-at-Risk* à 99,5 % des fonds propres à l'horizon un an.

Volatilité à un an

Introduite par la Directive Solvabilité II, la volatilité à un an reflète une vision à court terme du risque. Elle est associée à la révision de l'estimateur de la charge ultime après un an (et donc au calcul de bonis-malis). A ce jour, c'est le sujet qui intéresse beaucoup les assureurs, voire plus que le risque de provisionnement à l'ultime. Le papier [1] se conclut en notant que pour un assureur aujourd'hui, *"l'objectif de satisfaire à ses engagements vis-à-vis des assurés semble avoir été remplacé par celui de minimiser l'incertitude due aux bonis-malis. Ce qui intéresse davantage les directeurs financiers que les assurés"*.

Le modèle développé dans ce mémoire fournit une provision *Best Estimate* pour les sinistres graves. Je ne présente pas dans ce mémoire un modèle stochastique pour le calcul du SCR. En effet, je ne travaille qu'avec les sinistres graves et on n'a pas la propriété d'additivité de la VaR pour pouvoir agréger directement la VaR (fonds propres liés aux sinistres graves) et la VaR (fonds propres liés aux sinistres attritionnels). Je détaillerai cependant l'incertitude à un an dans mon modèle afin de quantifier l'incertitude liée à la révision de l'estimateur de la charge ultime des sinistres graves après un an, ce qui semble être le cœur du sujet à ce jour.

2.1.4 Crédibilisation dans le provisionnement

Dans ce mémoire, nous allons étudier et discuter la pertinence de nombreuses méthodes de provisionnement dont la majorité font intervenir la crédibilisation. Je vais donc expliquer très brièvement

la crédibilité dans cette sous-section avant de présenter les méthodes de provisionnement. Une étude approfondie sur la théorie de crédibilité peut être trouvée dans [2].

La popularité de la théorie de crédibilité en assurance vient principalement des travaux de Hans Bühlmann. Selon l'auteur, la théorie de crédibilité :

- est l'outil mathématique pour décrire les hétérogénéités collectives,
- répond à la question : comment devrions combiner les expériences individuelles et collectives des sinistres,
- appartient mathématiquement au domaine de la statistique bayésienne,
- est motivée par les questions fréquentées dans la pratique de l'assurance.

La crédibilité est souvent présentée dans le problème de tarification en assurance où nous cherchons une "meilleure" prime qui prend en compte à la fois l'information individuelle et celle collective. Cependant, ce concept peut également être utilisé pour le provisionnement. Ce mémoire se positionne dans le cadre de la crédibilisation linéaire.

D'une façon générale, la crédibilisation linéaire désigne le choix de poids de pondérations données à plusieurs estimateurs afin d'obtenir un "meilleur" estimateur. Ce dernier, issu de la crédibilisation d'au moins deux autres estimateurs, est appelé **méta-estimateur**. Nous pouvons montrer qu'il est toujours possible de pouvoir trouver un méta-estimateur $\widehat{X}_3 = p\widehat{X}_1 + (1 - p)\widehat{X}_2$ ($p \in [0, 1]$) au moins aussi bon que les deux estimateurs individuels \widehat{X}_1 et \widehat{X}_2 . La démonstration est donnée dans [3].

Nous venons d'étudier les pré-requis pour le sujet de provisionnement. Nous allons maintenant rentrer dans le détail de quelques méthodes de provisionnement usitées dans la pratique (certaines restent encore dans le cadre théorique mais seraient transposables à l'application concrète en se simplifiant tout en gardant l'idée principale). Je les présente en deux classes de méthodes : les méthodes agrégées et les méthodes ligne à ligne (ou méthodes individuelles).

2.1.5 Méthodes agrégées

Triangle de provisionnement

Avant de parler des méthodes agrégées pour le provisionnement, il s'avère nécessaire de présenter la triangulation. C'est une technique très utilisée dans la pratique de provisionnement où on agrège les montants de règlement (payés) ou de charges ou les nombres de sinistres par année d'origine (soit année de survenance soit année de déclaration) et ensuite les représente sous forme de triangle de développement (*run-off triangle*). Je présente ci-dessous un exemple de triangle de montants de charge cumulées $(C_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n}$ ou de montants incrémentaux de charge $(X_{i,j})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,n}$.

Notons que :

$$C_{i,j} = \sum_{m=1}^j X_{i,m}, \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n,$$

où $\sigma(C_{i,1}, \dots, C_{i,j}) = \sigma(X_{i,1}, \dots, X_{i,j})$. L'information apportée par chacun des deux triangles est la même. Connaître l'un des deux triangles nous permet de construire l'autre. Je mentionne ici les deux types de triangles puisque certaines méthodes s'appliquent au triangle cumulé tandis que certains

	1	2	j	n
1										
2										
⋮										
⋮										
i										
⋮										
⋮										
n-1										
n										

TABLE 2.2 – Triangle de provisionnement

d'autres s'appliquent au triangle incrémental.

Les lignes $i = 1, \dots, n$ correspondent aux n années d'origine (nous prenons les années de survenance pour la suite du mémoire). L'année de survenance la plus ancienne dans l'historique est 1. L'année courante est n . Les colonnes $j = 1, \dots, n$ correspondent aux n années de développement. $j = 1$ représente la première année de développement et ainsi de suite. Les informations correspondant à l'année calendaire courante se trouvent sur la diagonale. Pour une année de survenance i , nous ne connaissons que les montants incrémentaux et cumulés pour les années de développement $j = 1, \dots, n-i+1$ et nous voulons prévoir ceux pour les années de développement $j = n-i+2, \dots, n$. Le triangle supérieur contient les montants connus, le triangle inférieur à estimer correspond aux montants non-observables à l'année courante n . A chaque année calendaire, une nouvelle diagonale s'ajoute.

Nous allons noter :

- \mathcal{D}_n l'information connue jusqu'à l'année n , c'est-à-dire l'ensemble $\{C_{i,j}; 1 \leq j \leq n, i+j \leq n+1\}$.
- \mathcal{B}_m l'ensemble $\{C_{i,j}; i+j \leq n+1, 1 \leq j \leq m\}$. Nous remarquons que \mathcal{B}_m est un sous-ensemble de \mathcal{D}_n . Pour $m = n$ (l'année courante), les deux ensembles se confondent : $\mathcal{B}_n = \mathcal{D}_n$.

Remarque 2.1.4. Nous supposons ici que tous les sinistres sont clos après n années de développement. Si tous les sinistres survenus en $i = 1$ ne sont pas clos, il faut appliquer un facteur de queue (tail factor) pour développer les montants à l'année de développement n à l'ultime.

Remarque 2.1.5. Parler de "triangle" signifie un même nombre n d'années de développement que de survenance. Dans un cadre générique, nous pouvons avoir n années de survenance et m années de développement. Si $n \neq m$, nous obtenons une forme d'agrégation des données différentes d'un triangle :

- un trapèze ($n > m$) lorsque l'historique de sinistres sont plus profond que le nombre total d'années de développement jusqu'à l'ultime,

- que les dernières diagonales du triangle connu ($n < m$) lorsque l'information antérieure est non-disponible ou non-pertinente pour la provision.

Pour la suite du mémoire, je prends $n = m$. J'admets aussi l'hypothèse que tous les sinistres sont clos après n années de développement pour ne pas avoir besoin de prendre un facteur de queue (tail factor). Il faut prendre donc un historique de sinistres suffisamment long.

De la triangulation au provisionnement

Comme expliqué ci-dessus, les méthodes classiques de provisionnement consistent souvent à développer le triangle de montants incrémentaux et/ou celui des montants cumulés sur données Payées ou Charge (Une analogie peut être faite sur un triangle de nombres cumulés ou incrémentaux). Le but de mon mémoire n'est pas de fournir une liste exhaustive des méthodes agrégées. Les lecteurs sont invités à consulter [4] ou [5] pour une présentation plus complète des méthodes. Je ne présenterai ci-dessous que certaines méthodes dont l'implémentation est très simple. Je passerai cependant du temps sur leur développement mathématique (hypothèses, choix des estimateurs, interprétation des formules) qui ne me paraît pas aussi simple que leur implémentation. J'essaierai de faire des liens, des comparaisons entre eux en parlant de la crédibilité. Le but est de pouvoir comprendre les avantages et les limites des méthodes classiques pour faire des choix appropriés au problème des sinistres graves et au contexte spécifique chez AXA CS.

Chain-ladder et Bornhuetter-Ferguson sont généralement considérées comme deux visions extrêmes du problème de provisionnement. Cependant, l'implémentation de Bornhuetter-Ferguson en pratique utilise souvent la cadence de Chain-ladder, ce qui entraîne beaucoup de similitudes entre deux méthodes jugées "extrêmes" d'un point de vue théorique. Je commencerai donc par deux méthodes vraiment extrêmes de mon point de vue : la méthode Chain-ladder qui n'utilise que le triangle supérieur connu pour estimer les charges ultimes et la méthode de sinistres espérés (les charges ultimes sont estimées directement par un vecteur d'exposition) qui ne l'utilise pas du tout. Je présenterai ensuite Bornhuetter-Ferguson comme une famille de méthodes qui tient compte déjà de la crédibilisation en utilisant à la fois l'information connue via le triangle supérieur et le vecteur d'exposition comme a priori. Je parlerai des deux exemples de cette famille de méthodes : Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et *Additive Loss Reserving (ALR)*. Ensuite, je présenterai certaines autres méthodes qui tendent à crédibiliser les méthodes citées ci-dessus et qui vont nous servir dans la suite du mémoire.

Méthodes de sinistres espérés

Dans cette méthode, nous ne nous intéressons pas à ce qui s'est passé, i.e. le triangle supérieur. Nous utilisons une estimation a priori (avis d'expert ou un pourcentage fixe de prime fois le ratio S/P par exemple) pour l'estimation à l'ultime de chacune des années de survénance.

Méthode Chain-ladder

La méthode Chain-ladder s'applique au triangle de montants cumulés $(C_{i,j})$ et repose complètement sur ce triangle supérieur pour prévoir le triangle inférieur.

Hypothèse 2.1.1. (Hypothèses CL)

- [Indépendance entre les années de survenance] : $(C_{i,j})_{i=1,\dots,n}$ sont indépendantes.
- [Propriété de Markov] : Il existe des facteurs de développement (encore appelés *link-ratios*) f_1, \dots, f_{n-1} tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$ et tout $2 \leq j \leq n$, on a :

$$E[C_{i,j} \mid C_{i,1}, \dots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j} \mid C_{i,j-1}] = f_{j-1} C_{i,j-1}$$

Sous les hypothèses CL ci-dessus et en appliquant récursivement la propriété de tour sur l'espérance conditionnelle, nous obtenons, pour une année de survenance $i \in \{1, \dots, n\}$, le *Best Estimate* de la charge ultime :

$$E[C_{i,n} \mid \mathcal{D}_n] = E[C_{i,n} \mid C_{i,n-i+1}] = C_{i,n-i+1} f_{n-i+1} \dots f_{n-1}$$

Nous en déduisons le *Best Estimate* du réserve :

$$E[R_i \mid \mathcal{D}_n] = E[C_{i,n} \mid \mathcal{D}_n] - C_{i,n-i+1} = C_{i,n-i+1} (f_{n-i+1} \dots f_{n-1} - 1)$$

Les facteurs de développement sont non-connus, nous les estimons par :

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n-j} \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \sum_{i=1}^{n-j} w_{i,j} F_{i,j},$$

avec :

$w_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{k,j}}$ le poids donné à l'information apportée par l'année de survenance $i \in \{1, \dots, n\}$ pour une année de développement j ,

$F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ le facteur de développement individuel de l'année de survenance i pour passer de l'année de développement j à $j+1$.

Ainsi, \widehat{f}_j peut être vu comme une moyenne des facteurs de développement individuels de j à $j+1$, pondérée par le montant cumulé en j . C'est un estimateur non-biaisé de f_j sous les hypothèses CL.

L'estimateur Chain-ladder pour la charge ultime et la réserve correspondante sont respectivement :

$$\widehat{C}_{i,n}^{CL} = C_{i,n-i+1} \widehat{f_{n-i+1}} \dots \widehat{f_{n-1}}, \quad \text{pour } i+j > n+1 \quad (2.1)$$

$$\widehat{R}_i^{CL} = C_{i,n-i+1} (\widehat{f_{n-i+1}} \dots \widehat{f_{n-1}} - 1), \quad \text{pour } i+j > n+1. \quad (2.2)$$

Remarque 2.1.6. Nous remarquons bien l'existence d'une crédibilisation au niveau des années de survenance dans la méthode de base Chain-ladder. Nous pouvons également montrer que \widehat{f}_j n'est pas le seul estimateur sans biais de f_j sous les hypothèses CL.

Pourquoi ne prenons pas par exemple une moyenne non pondérée des $F_{i,j}$ qui est lui aussi sans biais ?

La réponse intuitive est que pour une année de développement j donnée, on va mettre plus de poids au facteur individuel $F_{i,j}$ de l'année de survenance i si $C_{i,j}$ est relativement grand par rapport aux autres années de survenance, puisque pour cette année-là nous pensons qu'il y a plus de sinistres qui sont survenus, donc l'information que rapporte $F_{i,j}$ à l'estimation de f_j est plus crédible que les autres années.

La raison mathématique du choix de $(w_{i,j})$ requiert une hypothèse supplémentaire sur la condition du second ordre du modèle de Mack, qui est connu comme la version *distribution-free* de Chainladder :

Hypothèse 2.1.2. (Hypothèse de Mack) En plus des hypothèses CL, nous supposons que :

$$\text{Var}(C_{i,j} | C_{i,j-1}) = \sigma_{j-1}^2 C_{i,j-1}$$

Sous les hypothèses CL et l'hypothèse de Mack sur la variance conditionnelle, nous pouvons montrer que \hat{f}_j est un estiamteur *BLUE* (*Best Linear Unbiased Estimator*) de f_j . C'est le meilleur dans la classe des estimateurs de f_j par combinaison linéaire des $(F_{i,j})_{i=1,\dots,n-j}$ si le critère d'optimalité est la minimisation des variances conditionnelles. La démonstration nécessite le lemme suivant :

Lemme 2.1.1. Supposons que P_1, \dots, P_H sont des estimateurs non-biaisés et stochastiquement indépendants de μ , de variances $\sigma_1^2, \dots, \sigma_H^2 > 0$. Alors l'estimateur non-biaisé par combinaison linéaire de P_1, \dots, P_H qui donne la variance minimale est donné par :

$$P = \frac{\sum_{h=1}^H \frac{P_h}{\sigma_h^2}}{\sum_{h=1}^H \frac{1}{\sigma_h^2}}, \quad \text{avec} \quad \text{Var}(P) = \left(\sum_{h=1}^H \frac{1}{\sigma_h^2} \right)^{-1}$$

(La démonstration de ce lemme est donnée dans l'annexe A.)

Revenons à notre problème. Considérons les facteurs de développement $F_{i,j} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$. Conditionnellement à \mathcal{B}_j , les facteurs individuels $(F_{i,j})_{1 \leq i \leq n-j}$ sont les estimateurs indépendants et non-biaisés de f_j , de variance conditionnelle :

$$\text{Var}(F_{i,j} | \mathcal{B}_j) = \text{Var}(F_{i,j} | C_{i,j}) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$$

En appliquant le lemme précédent nous obtenons le résultat voulu sur \hat{f}_j avec

$$\text{Var}(\hat{f}_j | \mathcal{B}_j) = \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=1}^{n-j} C_{i,j}}$$

Remarque 2.1.7. Nous pouvons remarquer que, même si nous n'utilisons pas le lemme précédent pour justifier le choix de l'estimateur $\widehat{f}_{i,j}$, l'hypothèse de Mack sur la variance conditionnelle est cohérente avec la réponse intuitive que nous avons donnée. Cette hypothèse se réécrit :

$$\text{Var}\left(\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \middle| C_{i,j}\right) = \frac{\sigma_j^2}{C_{i,j}}$$

Pour une année de survenance i , plus le montant cumulé à l'année de développement j est grand, plus la variance du facteur de développement de j à $j+1$ est petite, plus la réalisation de ce facteur est crédible dans l'estimation de f_j .

Méthode Bornhuetter-Ferguson

La méthode Bornhuetter-Ferguson s'applique au triangle de montants cumulés $(C_{i,j})_{i,j}$ et nécessite un vecteur d'exposition $(\mu_i)_{i=1,\dots,n}$, indépendant du triangle $(C_{i,j})$ pour tenir compte de l'avis d'expert dans notre estimation. Cette méthode est généralement plus robuste que Chain-ladder quand la base de données contient des observations aberrantes.

Hypothèse 2.1.3. (Hypothèses BF)

- [Indépendance entre les années de survenance] $(C_{i,j})_{i=1,\dots,n}$ sont indépendantes
- Il existe un vecteur a priori $(\mu_i)_{i=1,\dots,n} \geq 0$ et une cadence $(\beta_j)_{j=1,\dots,n} \geq 0$ avec $\beta_n = 1$, tels que :

$$\begin{cases} E[C_{i,1}] = \beta_1 \mu_i \\ E[C_{i,j+k} | C_{i,1}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j) \mu_i \end{cases}$$

Nous remarquons, avec les hypothèses ci-dessus, que $E[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i$ et $E[C_{i,j}] = \mu_i$. μ_i est donc l'a priori de la charge ultime de sinistres survenus à l'année i (on parle d'"a priori" puisque c'est une espérance simple plutôt qu'une espérance conditionnelle dans la formule).

Nous avons le *Best Estimate* de la charge ultime :

$$E[C_{i,n} | \mathcal{D}_n] = E[C_{i,n} | C_{i,1}, \dots, C_{i,n-i+1}] = C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1}) \mu_i$$

et le *Best Estimate* de la réserve correspondante :

$$E[R_i | \mathcal{D}_n] = E[C_{i,n} | \mathcal{D}_n] - C_{i,n-i+1} = (1 - \beta_{n-i+1}) \mu_i$$

Donc les estimateurs de Bornhuetter-Ferguson pour le montant ultime et le montant de réserve sont respectivement :

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,n}^{BF} &= C_{i,n-i+1} + (1 - \widehat{\beta}_{n-i+1}) \widehat{\mu}_i \\ \widehat{R}_i^{BF} &= (1 - \widehat{\beta}_{n-i+1}) \widehat{\mu}_i \end{aligned}$$

Remarque 2.1.8. Le choix des estimateurs $\widehat{\beta}_{n-i+1}$ et $\widehat{\mu}_i$ n'est pas spécifié dans la méthode Bornhuetter-Ferguson, ce qui la rend une famille de méthodes plutôt qu'une méthode unique. Il faut aussi noter

que la méthode Bornhuetter-Ferguson, d'un point de vue théorique, nécessite un a priori μ_i et une cadence β_{n-i+1} estimés avant toute observation de sinistres (i.e. repose sur un avis expert). Donc théoriquement, $\widehat{\mu}_i$ et $\widehat{\beta}_{n-i+1}$ devraient être indépendants du triangle supérieur. $\widehat{\mu}_i$ se calcule en multipliant le montant de prime par un estimateur a priori du ratio S/P par exemple. C'est rarement le cas en pratique. Nous verrons que Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et Additive Loss Reserving (ALR), les deux méthodes de la famille Bornhuetter-Ferguson, sortent de son cadre théorique. Dans Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder, β_{n-i+1} est estimé par Chain-ladder, donc dépend du triangle supérieur. Dans ALR, l'estimation de β_{n-i+1} et celle de μ_i dépendent toutes les deux du triangle supérieur.

Remarque 2.1.9. *Le Best Estimate de la charge ultime dans la méthode Bornhuetter-Ferguson se décompose en deux termes : $C_{i,n-i+1}$ qui est le montant cumulé déjà connu (information apportée par le triangle supérieur) et le deuxième terme qui est l'estimation de la réserve et qui repose sur l'estimation de l'exposition (information a priori). L'a priori n'intervient que dans l'estimation des sinistres non-déclarés (ou non-payés). La différence principale de Bornhuetter-Ferguson par rapport à Chain-ladder est que les sinistres survenus ne sont pas prédictifs des sinistres n'étant pas encore survenus.*

Méthode Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder

Dans la pratique, on utilise souvent Bornhuetter-Ferguson avec la cadence β_{n-i+1} estimée par Chain-ladder. Wüthrich et Merz [5] ont montré que pour pouvoir utiliser Bornhuetter-Ferguson avec la cadence de Chain-ladder, il faut remplacer la deuxième hypothèse de BF par une hypothèse moins forte : $E[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i$ mais cette hypothèse ne suffit pas pour justifier l'algorithme de Bornhuetter-Ferguson.

Remarquons, en divisant 2.2 par 2.1, que le montant de réserve estimé par Chain-ladder peut se réécrire sous forme : $\widehat{R}_i^{CL} = \left(1 - \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j}\right) \widehat{C}_{i,n}^{CL}$. Ainsi, $\frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j}$ est l'estimation de la proportion de montant ultime déjà payé (connu). Elle prend le même rôle que $\widehat{\beta}_{n-i+1}$ dans la formule de \widehat{R}_i^{BF} . Si nous choisissons $\widehat{\beta}_{n-i+1} = \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j}$, nous obtenons Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder, qui est directement comparable à la méthode Chain-ladder. Les deux méthodes utilisent le même pourcentage de l'ultime restant à payer (le rapport Réserve/Ultime). Pour estimer la réserve, on multiplie ce rapport avec $\widehat{C}_{i,n}^{CL}$ qui dépend simplement du triangle supérieur dans Chain-ladder, et par l'a priori $\widehat{\mu}_i$ qui ne dépend pas du tout du triangle supérieur.

Maintenant, je montrerai que Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder présente déjà une crédibilisation entre la méthode Chain-ladder et la méthode des sinistres espérés. Rappelons la formule pour l'estimation de l'ultime faite par Bornhuetter-Ferguson avec cadence de Chain-ladder :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i+1} + \left(1 - \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j}\right) \widehat{\mu}_i$$

En remarquant que :

$$C_{i,n-i+1} = \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j} \widehat{C}_{i,n}^{CL},$$

nous voyons que l'estimateur de l'ultime fait par Bornhuetter-Ferguson est une moyenne pondérée selon la crédibilité des estimateurs de la méthode Chain-ladder et de l'exposition :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BF} = \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j} \widehat{C}_{i,n}^{CL} + C_{i,n-i+1} + \left(1 - \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j}\right) \widehat{\mu}_i$$

$\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j$ s'interprète comme le facteur de développement à l'ultime estimé, ainsi $\frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j}$ peut être vu comme l'estimation de la part de l'ultime déjà payée. Nous interprétons donc la formule ci-dessus sous l'angle de vue de crédibilité comme suit : plus l'estimation faite par Chain-ladder du facteur de développement à l'ultime est grande (i.e. la part déjà payée est petite) plus on crédibilise l'ultime estimé a priori par l'exposition, moins on met de poids sur l'ultime estimé par Chain-ladder. Cela est généralement vrai avec les années de survenance plus récentes où on ne connaît que les premiers montants. Inversement, pour les années de survenance plus anciennes, il ne reste que peu d'années à développer jusqu'à l'ultime, on s'éloigne de l'estimateur a priori.

Remarque 2.1.10. Dans la méthode Chain-ladder, le montant de la charge ultime dépend de la dernière position connue (si elle est nulle, la charge ultime sera nulle). La méthode Bornhuetter-Ferguson introduit une exposition comme donnée exogène pour palier à ce problème.

Méthode Additive Loss Reserving (ALR)

Je présente maintenant la méthode ALR qui peut être vue comme un membre de la famille Bornhuetter-Ferguson. J'exposerai la méthode et je la relierai avec la formule de Bornhuetter-Ferguson. Cette méthode nécessite le triangle de montants incrémentaux et un vecteur d'exposition. Nous pouvons également adapter la méthode au triangle de montants cumulés.

Notons $X_{i,j}$ le montant incrémental du sinistre i pour l'année de développement j .

Hypothèse 2.1.4. (Hypothèses ALR)

- [Indépendance entre années de survenance]
- [indépendance des montants incrémentaux entre années de développement] : Il existe un vecteur d'exposition $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$E[X_{i,j} \mid X_{i,1}, \dots, X_{i,j-1}] = \alpha_j E_i$$

Dans cette méthode, l'exposition E_i n'est pas une estimation a priori de l'ultime (μ_i dans Bornhuetter-Ferguson) mais un volume proportionnel à ce dernier. L'hypothèse ALR suggère que pour chaque année de développement j , le montant incrémental représente une part α_j de l'exposition. $\alpha = \sum_{j=1}^n \alpha_j$

prend le rôle du facteur proportionnel (rapport entre l'ultime et l'exposition). Si nous prenons le vecteur de primes comme estimateur du vecteur d'exposition par exemple, α sera le ratio S/P¹ espéré.

$$\mu_i = \alpha E_i$$

Ainsi, $\frac{\alpha_j}{\alpha}$ représente la part de l'ultime réglée pendant l'année de développement j . On peut le relier au paramètre β_j dans la méthode Bornhuetter-Ferguson par :

$$\begin{cases} \frac{\alpha_1}{\alpha} = \beta_1 \\ \frac{\alpha_j}{\alpha} = \beta_j - \beta_{j-1}, \quad \text{pour } j = 2, \dots, n \end{cases}$$

soit de manière équivalente :

$$\frac{\sum_{m=1}^j \alpha_m}{\alpha} = \beta_j, \quad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

Le *Best Estimate* de $X_{i,j}$, de la charge ultime et du montant de réserve sont respectivement :

$$E[X_{i,j} | \mathcal{D}_n] = \alpha_j E_i$$

$$E[C_{i,J} | \mathcal{D}_n] = C_{i,n-i+1} + \sum_{j=n-i+2}^n \alpha_j E_i$$

$$E[R_i | \mathcal{D}_n] = \sum_{j=n-i+2}^n \alpha_j E_i$$

avec α_j estimé par :

$$\hat{\alpha}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} \hat{E}_i}$$

En notant que :

$$\sum_{j=n-i+2}^n \alpha_j = \sum_{j=1}^n \alpha_j - \sum_{j=1}^{n-i+1} \alpha_j = \alpha - \sum_{j=1}^{n-i+1} \alpha_j = (1 - \sum_{j=1}^{n-i+1} \alpha_j / \alpha) \alpha = (1 - \beta_{n-i+1}) \alpha,$$

nous réécrivons le *Best Estimate* de l'ultime et celui de la réserve :

$$E[C_{i,n} | \mathcal{D}_n] = C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1}) \alpha E_i = C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1}) \mu_i$$

$$E[R_i | \mathcal{D}_n] = (1 - \beta_{n-i+1}) \alpha E_i = (1 - \beta_{n-i+1}) \mu_i$$

Remarque 2.1.11. Nous retrouvons les formules de Bornhuetter-Ferguson, ce qui montre que ALR peut être vue comme une méthode appartenant à la famille Bornhuetter-Ferguson. Elle diffère de la méthode Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder par le fait que la cadence β_j dépend de l'exposition E_i et que l'"a priori" μ_i dépend du triangle supérieur via le terme α . Ce n'est plus un vrai a priori puisque α est estimé grâce à l'historique \mathcal{D}_n .

1. Sinistre/Prime

Méthode Cape-Cod

La limite principale de la méthode Chain-ladder est que l'estimation dépend beaucoup de la diagonale (dernière information disponible), qui peut contenir des valeurs aberrantes. La méthode Cape-Cod tend à remplacer la vraie diagonale du triangle par une diagonale plus robuste avant d'appliquer les facteurs de développement de Chain-ladder.

Hypothèse 2.1.5. (Hypothèses de Cape-Cod)

- [Indépendance entre années de survénance] $(C_{i,j})_{i=1,\dots,n}$ sont indépendantes
- Il existe un vecteur d'exposition $(E_1, \dots, E_n) > 0$, un paramètre $\alpha > 0$ et une cadence de développement $(\beta_j)_{1 \leq j \leq n}$ avec $\beta_J = 1$ tels que :

$$E[C_{i,j}] = \alpha E_i \beta_j, \quad \forall i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n.$$

Nous constatons une similitude entre Cape-Cod et ALR, ainsi Cape-Cod peut être vu comme un membre de la famille Bornhuetter-Ferguson. Si E_i représente la prime rattachée à l'année de survénance i , α représente le ratio S/P alors $\mu_i = \alpha E_i$ correspond au montant de sinistre espéré pour l'année i .

Si on utilise la cadence de Chain-ladder, i.e. $\beta_j = \prod_{m=j}^{n-1} f_m^{-1}$, on peut estimer le ratio S/P pour chacune des années de survénance i via l'estimation à l'ultime de Chain-ladder :

$$\widehat{\alpha}_i = \frac{C_{i,n-i+1}}{\beta_{n-i+1} E_i} = \frac{C_{i,n-i+1}}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} f_j^{-1} E_i} = \frac{\widehat{C}_{i,n}^{CL}}{E_i}$$

L'estimation robuste de α dans la méthode Cape-Cod est donnée par :

$$\widehat{\alpha}^{CC} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_{n-i+1} E_i}{\sum_{i=1}^n \beta_{n-i+1} E_i} \widehat{\alpha}_i = \frac{\sum_{i=1}^n C_{i,n-i+1}}{\sum_{i=1}^n \beta_{n-i+1} E_i}$$

Comme les estimateurs $\widehat{\alpha}_i$ sont non-biaisés, $\widehat{\alpha}^{CC}$ l'est aussi. Après avoir estimé le ratio S/P, nous pouvons remplacer la vraie diagonale du triangle par une diagonale plus robuste :

$$\widehat{C}_{i,n-i+1}^{CC} = \widehat{\alpha}^{CC} E_i \beta_{n-i+1}$$

L'estimateur de la charge ultime et celui de la réserve dans la méthode Cape-Cod sont respectivement :

$$\begin{aligned} \widehat{C}_{i,n}^{CC} &= C_{i,n-i+1} - \widehat{C}_{i,n-i+1}^{CC} + \prod_{j=n-i+1}^{n-1} f_j \widehat{C}_{i,n-i+1}^{CC} \\ &= C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1}) \widehat{\alpha}^{CC} E_i \\ &= C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1}) \mu_i \\ \widehat{R}_i^{CC} &= \widehat{C}_{i,n}^{CC} - C_{i,n-i+1} \\ &= (1 - \beta_{n-i+1}) \widehat{\alpha}^{CC} E_i \\ &= (1 - \beta_{n-i+1}) \mu_i \end{aligned}$$

Remarque 2.1.12. *Encore une fois, nous voyons que l'idée de la méthode Cape-Code est très proche de la méthode ALR. L'une s'applique au triangle de montants cumulés, l'autre au triangle de montants incrémentaux, mais les deux cherchent à estimer le ratio S/P et la cadence de développement, disposant d'un vecteur d'exposition (prime). La différence est que la méthode ALR donne plus de poids au vecteur d'exposition puisqu'il intervient à la fois dans l'estimation de la cadence et celle du ratio S/P.*

Méthode Benktander-Hovinen

Cette méthode crédibilise les deux méthodes Chain-ladder et Bornhuetter-Ferguson. La motivation est que l'estimation de la réserve faite par Bornhuetter-Ferguson néglige l'impact des observations passées via le terme $C_{i,n-i+1}$ tandis que Chain-ladder néglige l'estimation a priori via un avis d'expert.

L'estimation de l'ultime par la méthode Benktander-Hovinen est :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BH} = C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1})(\beta_{n-i+1}\widehat{C}_{i,n}^{CL} + (1 - \beta_{n-i+1})\mu_i)$$

Rappelons que dans Bornhuetter-Ferguson, on crédibilise l'estimation de l'ultime en prenant une moyenne pondérée entre $\widehat{C}_{i,n}^{CL}$ et μ_i . Avec Benktander-Hovinen, on crédibilise l'estimation de la réserve en prenant une moyenne pondérée entre $\widehat{C}_{i,n}^{CL}$ et μ_i . Si on estime la cadence par Chain-ladder : $\widehat{\beta}_j = \prod_{k=j}^{n-1} \widehat{f}_k^{-1}$, on obtiendra :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BH} = \beta_{n-i+1}\widehat{C}_{i,n}^{CL} + (1 - \beta_{n-i+1})\widehat{C}_{i,n}^{BF}$$

Remarque 2.1.13. *L'estimateur de l'ultime dans la méthode Benktander-Hovinen est en fait une moyenne pondérée entre l'estimation de l'ultime dans la méthode Chain-ladder et celle de Bornhuetter-Ferguson. Les poids de crédibilisation reposent sur la cadence Chain-ladder. L'équation ci-dessus suggère que Benktander-Hovinen peut être vue comme la méthode Bornhuetter-Ferguson itérative. Dans Benktander-Hovinen, les sinistres espérés sont les sinistres estimés par Bornhuetter-Ferguson. Comparant à Bornhuetter-Ferguson, la méthode Benktander-Hovinen donne plus de poids à l'estimation de Chain-ladder.*

La méthode Benktander-Hovinen est donc plus représentative de l'expérience récente que la méthode Bornhuetter-Ferguson et plus stable que la méthode Chain-ladder. Toutefois, elle est moins adéquate que la méthode Bornhuetter-Ferguson lorsque la méthode Chain-ladder n'est pas appropriée pour les années récentes.

Méthode Schnieper

La méthode Schnieper diffère des méthodes précédentes du fait qu'elle sépare les IBNeR et les IB-NyR. Comme avec les méthodes précédentes, je présenterai ici la méthode s'appliquant aux montants,

mais une analogie peut être faite sur les nombres. Notons toujours $C_{i,j}$ le montant de la charge cumulée des sinistres survenus en année i vue à l'année de développement j . La méthode de Schnieper introduit deux autres termes :

[Effet *IBNyR*] $N_{i,j}$ qui représente, pour une année d'occurrence i , le montant déclaré à l'année de développement j .

[Effet *IBNeR*] $D_{i,j}$ qui représente, pour une année d'occurrence i , le montant dégonflé (resp. augmenté) si $D_{i,j} > 0$ (resp. $D_{i,j} < 0$).

Nous avons les relations suivantes pour $C_{i,j}$, $N_{i,j}$ et $D_{i,j}$:

$$\begin{aligned} C_{i,1} &= N_{i,1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \\ C_{i,j} &= C_{i,j-1} - D_{i,j} + N_{i,j} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad \text{et } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Remarque 2.1.14. La première équation dit que le montant cumulé vu en première année de développement est le montant déclaré cette année. La deuxième équation dit que le montant cumulé vu en année de développement $j \geq 2$ est le montant cumulé vu en année $j - 1$, plus le montant déclaré en j , moins (resp. plus) la partie de dégonflement (resp. gonflement) en année j des sinistres connus jusqu'à l'année $j - 1$. Ces deux équations décrivent la dynamique du processus de montants cumulés de manière logique en séparant les *IBNeR* et les *IBNyR*.

Remarquons que $\mathcal{D}_k = \{N_{i,j}, D_{i,j} \mid i + j \leq k + 1\}$. Les hypothèses de Schnieper sont les suivantes :

Hypothèse 2.1.6. (Hypothèses S)

- [Indépendance entre les années de survenance] : Pour 2 années de survenance différentes i_1 et i_2 , nous avons $(X_{i_1,1}, \dots, X_{i_1,n}) \perp\!\!\!\perp (X_{i_2,1}, \dots, X_{i_2,n})$
- $E[N_{i,j} \mid \mathcal{D}_{i+j-1}] = E_i \lambda_j$
- $E[D_{i,j} \mid \mathcal{D}_{i+j-1}] = X_{i,j-1} \delta_j$

Remarque 2.1.15. Les deux dernières hypothèses de Schnieper s'interprètent facilement comme suit : Conditionnellement aux observations passées, l'espérance du montant d'*IBNyR* est proportionnel à l'exposition, le facteur proportionnel est indépendant de l'année de survenance mais spécifique à chaque année de développement. Toujours conditionnellement aux observations passées, le montant de sinistres dégonflés en j est proportionnel au montant cumulé connu en $j - 1$, le facteur proportionnel ne dépend que de l'année de développement. Selon le modèle proposé par Schnieper, le montant d'*IBNyR* ne dépend pas de l'historique de sinistres, il est proportionnel à l'exposition tandis que le dégonflement des sinistres connus repose sur le dernier montant cumulé connu. Nous remarquons bien que la première hypothèse est une hypothèse du type ALR / Bornhuetter-Ferguson, la deuxième est une hypothèse du type Chain-ladder.

D'après la définition des variables X , N , D et les hypothèses de Schnieper, nous avons :

$$E[X_{i,j} \mid \mathcal{D}_{i+j-1}] = (1 - \delta_j) X_{i,j-1} + \lambda_j E_i$$

Les estimateurs de λ_j et δ_j sont donnés par :

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} N_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i} && \text{pour } j = 1, \dots, n \\ \widehat{\delta}_j &= \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} C_{i,j-1}} && \text{pour } j = 2, \dots, n\end{aligned}$$

Ils sont tous les deux non-biaisés sous les trois hypothèses de Schnieper.

L'estimateur de la charge ultime dans la méthode Schnieper se calcule de manière itérative à travers la formule de récurrence suivante :

$$\widehat{C}_{i,n}^S = (1 - \widehat{\delta}_j) \widehat{X}_{i,j-1} + \widehat{\lambda}_j E_i$$

Des hypothèses supplémentaires sur la variance conditionnelle de N et D ainsi qu'un modèle stochastique (en supposant, conditionnellement aux passés \mathcal{D} , une loi de Poisson pour la variable N et une loi Binomiale pour la variable D) ont été également présentés par Schnieper dans son article de recherche. Je ne les détaille pas ici sachant qu'ils ne nous serviront pas dans la suite.

Méthodes de provisionnement agrégées

Nous venons d'étudier les méthodes très connues pour le provisionnement en utilisant des données agrégées. Ces méthodes, malgré leurs différentes hypothèses et raisonnement, présentent beaucoup de points communs. Pour résumé, il y a deux approches extrêmes : l'une qui n'utilise que des observations historiques via le triangle supérieur pour prévoir ce qui va se réaliser dans le futur (méthode Chain-ladder), l'autre qui repose complètement sur une estimation a priori (méthode de sinistres espérés), indépendamment des observations historiques. Les méthodes dérivées tendent toutes à crédibiliser deux différentes méthodes, ce qui revient à mixer les deux approches extrêmes. La différence principale entre elles se trouve dans le poids qu'on va donner à chacune des deux visions extrêmes. Ce choix de pondération reflète le niveau de crédibilité affecté à chacune des visions.

Chacune des méthodes présente des qualités et des défauts. Le choix des méthodes dépend des caractéristiques spécifiques des données historiques et de la qualité du vecteur d'exposition que nous possédons. Je détaillerai donc les points forts et points faibles de ces méthodes dans la partie Estimation des nombres d'*IBNyR* où je les testerai sur des données réelles.

Il faut également noter que les méthodes ci-dessus sont toutes des méthodes déterministes. Nombreuses méthodes stochastiques ont été développées pour pouvoir tenir compte de la distribution des réserves, la volatilité à l'ultime et le risque de réserve à un an. Au niveau du *Best Estimate*, les méthodes stochastiques renvoient les mêmes prédictions (ou presque) que Chain-ladder ou Bornhuetter-Ferguson. Dans un premier temps, nous nous intéressons au *Best Estimate*, qui ne nécessite pas les méthodes stochastiques. Dans un deuxième temps où nous évaluons la volatilité à l'ultime, nous mesurerons le risque au niveau global du modèle de provisionnement, qui est un processus faisant appel à plusieurs méthodes de provisionnement dans chacun des modules. Pour ce faire, une procédure de Bootstrap ou plus généralement une simulation Monte-Carlo sera plus simple qu'une combinaison de différents modèles stochastiques. Nous ne détaillerons donc pas les méthodes stochastiques dans ce mémoire.

2.1.6 Méthodes ligne à ligne

Pour développer les sinistres connus, nous ne sommes pas obligés à travailler avec les triangles d'agrégation. Plutôt que de regarder les sinistres agrégés par année de survenance, nous pouvons étudier séparément les sinistres un par un, ce qui nous amène à la classe des méthodes de provisionnement ligne à ligne. Ces dernières présentent nombreux avantages par rapport aux méthodes agrégées et seront notre choix pour la projection des *IBNeR*. Je présenterai très brièvement une revue littéraire des méthodes ligne à ligne et la raison pour laquelle elles ne sont pas adaptées au problème de provisionnement des sinistres graves chez AXA CS. Ces méthodes contiennent par contre des idées intéressantes qui peuvent nous servir plus tard.

Processus de Poisson marqués

Les méthodes les plus connues de la classe des méthodes ligne à ligne s'inscrivent dans le cadre des processus de Poisson marqués introduit par Norberg dans [6] et [7]. Dans ces méthodes, la survenance de sinistre est étudiée en temps continu à l'aide du processus de Poisson. Conditionnellement à la survenance d'un sinistre, un vecteur de variables aléatoires sera modélisé pour tenir compte de tout élément du cycle de vie du sinistre. Ces méthodes sont flexibles mais assez complexes et requièrent un grand nombre de paramètres à estimer. En y ajoutant, le caractère continu du processus de survenance des sinistres demande une base de données très détaillée avec beaucoup de variables (date de survenance, date de paiements et montants associés, délais de notification à l'assureur, etc.).

Théorie des matrices de transition

Mahon [8] a appliqué la théorie des matrices de transition à la modélisation du développement années après années des pertes liées à des sinistres individuels exceptionnels. Cette méthode s'applique à une base de données très détaillée et très grande, souvent disponible que chez les réassureurs. Elle fait intervenir la notion de matrice de transition de Markov qui est une matrice carrée contenant des probabilités de passer d'un état à un autre. Dans le cadre de provisionnement, un état correspond à une combinaison du statut ouvert/clos du sinistre et la taille du sinistre (montant de charge *Inccured* ou montant du payé). Il faut discrétiser la taille de sinistres en différents intervalles pour former des classes. Une matrice de transition peut être subdivisée en 4 sous-matrices correspondant respectivement à 4 passages possibles pour le statut d'un sinistre : ouvert \rightarrow ouvert, ouvert \rightarrow clos, clos \rightarrow ouvert, clos \rightarrow clos.

Nous construisons une matrice de transition $M_{j,j+1}$ pour chaque passage de l'année de développement j à $j + 1$. Nous définissons aussi, en nous basant sur l'historique de sinistres, un vecteur initial V_1 qui contient des probabilités pour un sinistre d'appartenir aux différents états à la première année de développement ($j = 1$). Nous en déduisons le vecteur des probabilités pour un sinistre d'appartenir aux différents états à l'année de développement $j \geq 2$:

$$V_j = V_1 M_{1,2} \dots M_{j-1,j}$$

Nous pouvons ainsi obtenir le vecteur pour la dernière année de développement V_n . Si l'historique de sinistres est suffisamment profond pour que les sinistres les plus anciens (de la première année de

survenance) soient tous clos définitivement, la dernière matrice de transition $M_{n-1,n}$ doit être composée de 4 sous matrices pour 4 différents passages dont la sous-matrice pour le passage ouvert \rightarrow ouvert et celle pour le passage clos \rightarrow ouvert sont remplies par des 0. Les probabilités de transitions se répartissent dans les deux autres sous-matrices pour le passage ouvert \rightarrow clos et clos \rightarrow clos. Le vecteur V_n fournit une distribution pour un sinistre à développer.

L'inconvénient de cette approche est la taille et le nombre de matrices à former qui la rendent lourde en termes de computation et qui peuvent entraîner une erreur importante dans l'estimation des probabilités de passage.

k-plus proches voisins

Dittmer [9] a fait intervenir la technique d'apprentissage statistique kNN (k-plus proches voisins) dans l'estimation des provisions des sinistres graves. Cette méthode est généralement utilisée pour la classification et la régression. Dans tous les deux cas, les *inputs* sont les k-plus proches observations de l'individu étudié. L'*output* dépend du fait que l'algorithme kNN est utilisé pour la classification ou la régression. Dans le cadre de provisionnement, nous travaillons plutôt avec un problème de régression. La valeur prédite pour l'individu étudié (sinistre à développer) sera une moyenne des valeurs (charges de sinistres) des k-plus proches voisins. L'algorithme kNN est puissant (lorsque la base de données est suffisamment riche) mais lourd en termes d'implémentation. Il est aussi sensible à la structure locale des données utilisées pour l'apprentissage.

Modélisation stochastique de Murphy & McLennan

Murphy & McLennan [10] ont travaillé sur une approche non-paramétrique pour simuler la distribution de l'ultime, à la fois pour les sinistres déclarés et les *IBNR*. La méthode simule le développement des sinistres individuels en se basant sur l'historique de sinistres graves. Le modèle prédit aussi la cadence de paiement. L'idée est que pour développer un sinistre d'une année de développement j à $j + 1$, on va tirer une loi binomiale pour déterminer s'il sera clos à l'année suivante. S'il ne sera pas clos, on va lister tous les facteurs de développement $(F_{k,j})_k$ observés dans l'historique de sinistres et prétendre que le sinistre à développer peut évoluer avec l'un de ces facteurs de manière équiprobable. Par exemple, s'il y a 10 facteurs de développement historiques qui nous concernent, nous disons que le sinistre à développer a 10 % de chance de se développer avec l'un de ces facteurs. Nous simulons ainsi tous les scénarios de développement possibles pour tous les sinistres à développer et enfin prenons une moyenne des valeurs prédites par ces scénarios pour obtenir le *Best Estimate*. Cette modélisation nous donne aussi la distribution empirique du montant de réserve (et de la charge ultime) via tous les scénarios.

L'inconvénient de cette méthode est le nombre de scénarios à simuler et l'hypothèse d'équiprobabilité de la réalisation des facteurs de développement observés. La distribution de la réserve (ou de la charge ultime) renvoyée par cette méthode peut ainsi varier sur une range très large. Murphy et McLennan ont également précisé dans leur présentation que cette méthode stochastique fonctionne bien pour des données homogènes mais pas pour les branches dont la charge est dominée par un faible nombre de sinistres graves. Malheureusement, c'est notre cas chez AXA CS et aussi le défi de

ce mémoire.

Incremental Claim Development (ICD)

Récemment, la méthode *Incremental Claim Developpement ICD* a été présentée par Bas Lodder [11] comme une alternative ligne à ligne de Chain-ladder. Cette méthode tend à compléter la base des montants incrémentaux de charge, sinistre par sinistre, en introduisant une notion de distance entre 2 sinistres. Cette méthode nécessite une base de données incrémentales de chacun des sinistres (payés ou charges). Sa particularité réside dans la notion de distance entre deux sinistres, basée sur les distances des montants incrémentaux. Sachant l'historique de montants incrémentaux $X_{k,j}$ (sinistre k vu à l'année de développement j), on doit estimer les montants incrémentaux futurs $\widehat{X}_{k,j}$. Notons $AY = i = 2012, 2013$ ou 2014 pour les années de survenance de sinistres, $k = 1, \dots, 4$ les 4 sinistres et $DY = j = 0, 1$ ou 2 les 3 années de développement. Enfin, CY désigne l'année courante. La formule de *ICD* est :

$$\widehat{X}_{k,j} = \alpha_{k,j} \sum_{k' | AY(k') + j \leq CY} (D_{k,k'}^\beta \cdot X_{k',j})$$

avec :

- $D_{k,k'}$ la distance entre les développements historiques des deux sinistres k et k' ,
- $\alpha_{k,j} = 1 / \sum_{k' | AY(k') + j \leq CY} D_{k,k'}^\beta$ le paramètre d'échelle (pour normaliser la pondération),
- $\beta =] - \infty; 0[$ le paramètre de forme.

Pour mieux comprendre la méthode, je reprends l'exemple dans la présentation de Murphy & McLennan et essaie de le visualiser. Soit une base de sinistres simplifiée de 2012 à 2014 avec 4 sinistres dont 2 déjà clos et 2 à développer. L'année courante est $CY = 2014$.

		DY = j		
AY = i	k	0	1	2
2012	1	40	80	0
	2	0	60	40
2013	3	10	40	28
2014	4	20	55	20

TABLE 2.3 – Exemple de Murphy & McLennan

Je détaille ici comment on mesure la distance entre le troisième sinistre et le premier, puis le deuxième et enfin les utilise pour prédire le montant de charge incrémentale $\widehat{X}_{3,2} = 28$. Nous définissons ici la distance entre k et k' comme la somme des différences de montants incrémentaux en valeurs absolues et choisissons arbitrairement $\beta = -1$.

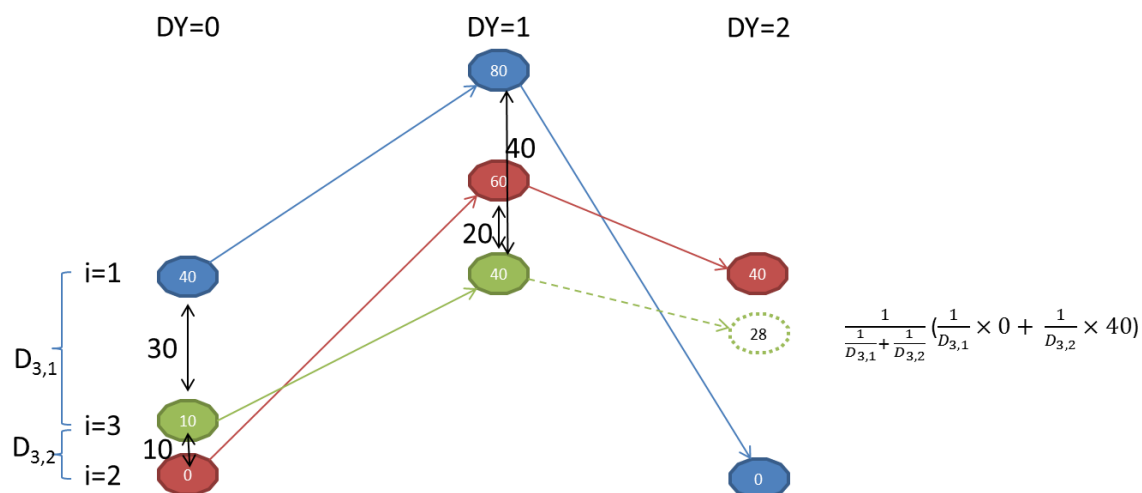


FIGURE 2.4 – méthode ICD (exemple)

$$\begin{cases} D_{3,1} = |X_{3,0} - X_{1,0}| + |X_{3,1} - X_{1,1}| = |10 - 40| + |40 - 80| = 30 + 40 = 70 \\ D_{3,2} = |x_{3,0} - X_{2,0}| + |X_{3,1} - X_{2,1}| = |10 - 0| + |40 - 60| = 10 + 20 = 30 \end{cases}$$

Finalement,

$$\widehat{X_{3,2}} = \frac{1}{1/D_{3,1} + 1/D_{3,2}} \left(\frac{1}{D_{3,1}} X_{1,2} + \frac{1}{D_{3,2}} X_{2,2} \right) = \frac{1}{1/70 + 1/30} \left(\frac{1}{70} \times 0 + \frac{1}{30} \times 40 \right) = 28$$

L'idée de cette méthode est intéressante. Pourtant, le choix de la métrique pour la notion distance et du paramètre β n'est pas spécifié. D'ailleurs, cette méthode travaille avec les montants incréments. Comme une valeur prédite est une moyenne pondérée des observations historiques, nous ne pouvons pas prévoir un montant incrémental qui sort de l'intervalle des montants incréments historiques.

Autres méthodes

Plusieurs autres méthodes peuvent être trouvées dans la littérature. Roselund (2012) a proposé une procédure Bootstrap sur l'historique de sinistres individuels pour estimer les réserves. Nombreux modèles paramétriques qui modélisent la dynamique du processus de règlement des sinistres (date de clôture, date de flux, flux, etc.) ont été proposés comme alternatives du processus de Poisson marqués : [12], [13], [14].

Méthodes de provisionnement ligne à ligne

Les méthodes ligne à ligne présentées ci-dessus sont toutes intéressantes d'un point de vue théorique mais difficilement implémentables dans le cadre pratique chez AXA CS. Elles tendent à modéliser la vie de chacun des sinistres de façon détaillée. Nous pouvons classer ces méthodes en deux classes : les méthodes paramétriques et les méthodes non-paramétriques. Les méthodes paramétriques nécessitent un grand nombre de paramètres à calibrer. ce n'est pas une bonne idée dans notre modèle de provisionnement des sinistres graves qui devrait être compliqué avec beaucoup de modules et de paramètres de bases à estimer. De plus, nous n'avons pas non plus toutes les variables nécessaires requises. Les méthodes non-paramétriques mentionnées ci-dessus s'appliquent à un historique de sinistres suffisamment nombreux. ce n'est rarement le cas pour les sinistres graves. Elles sont donc plutôt adaptées aux réassureurs qui possèdent des grandes bases de données.

Au sein d'AXA CS (et le groupe AXA), nous avons développé deux autres méthodes ligne à ligne (Méthode dite ratio P/I pour développer des sinistres directement à l'ultime et méthode dite Chain-ladder ligne à ligne) dont je parlerai plus tard dans la présentation des modèles de référence pour la provision des sinistres graves. Ces méthodes, malgré leur simplicité dans l'implémentation, souffrent de nombreux défauts dans le cadre particulier de sinistres graves.

Après tester et analyser les deux méthodes ligne à ligne développées chez AXA CS, je proposerai des idées d'amélioration en inspirant des méthodes ligne à ligne (et aussi agrégées) trouvées dans la littérature.

2.2 Nécessité de séparer la provision des attritionnels et des graves

Les méthodes agrégées classiques fonctionnent souvent bien pour le provisionnement des sinistres attritionnels vu que leur montants sont plus ou moins homogènes, d'où une stabilité des facteurs de développement. De plus, les sinistres attritionnels surviennent avec une fréquence élevée, donc l'historique de sinistres sont en général fiable pour faire les estimations. Par contre, les sinistres graves ont des comportements très différents et beaucoup plus difficiles à prévoir. Ce sont des sinistres à faible fréquence mais à sévérité élevée et volatile. Les facteurs de développement varient dans un intervalle beaucoup plus large et nous n'avons rarement un historique suffisamment complet pour appliquer les méthodes classiques.

Appliquer une seule méthode de provisionnement à l'ensemble des sinistres (attritionnels et graves) poserait donc beaucoup de problèmes : les facteurs de développement atypiques des sinistres graves peuvent déformer gravement l'estimation de la tendance de développement des sinistres attritionnels ; la volatilité des sinistres graves ne peut être bien quantifier si nous ne les séparons pas des sinistres attritionnels, etc.

Par conséquent, chez AXA CS, nous séparons la provision des sinistres en deux processus dif-

férents : l'un pour les sinistres attritionnels où nous pouvons utiliser une méthode simple de type Chain-ladder ou Bornhuetter-Ferguson, l'autre pour les sinistres graves afin de traiter leurs caractéristiques très particulières.

Bibliographie

- [1] Arthur Charpentier & al. Mesurer le risque lors du calcul des provisions pour sinistres à payer.
- [2] Hans Bühlmann & Alois Gisler. A course in credibility theory and its applications.
- [3] Hélène Gibello & Benoît Lebrun. Crédibilisation des méthodes de provisionnement non-vie. *Mémoire d'actuariat*.
- [4] P. D. England & R. J. Verrall. Stochastic claims reserving in general insurance.
- [5] Mario V. Wüthrich & Michael Merz. Stochastic claim reserving methods in insurance. *Wiley Finance*, 2008.
- [6] Ragnar Norberg. Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. *Astin Bulletin*, 23(1), 1993.
- [7] Ragnar Norberg. Prediction of outstanding liabilities : Li model variations and extensions. *Astin Bulletin*, 29(1) :5–25, 1999.
- [8] John B. Mahon. Transition matrix theory and individual claim loss development. *Casualty Actuarial Society Forum*, Spring 2005.
- [9] Jens M. Dittmer. Nearest-neighbour methods for reserving with respect to individual losses. August 2006.
- [10] FIA Karl Murphy FIA, Andrew McLennan FIAA. A method for projecting individual large claims. 2006.
- [11] Bas Lodder. Incremental claim development (icd). *Swiss Mobiliar Insurance & Pension*, 2015.
- [12] Beneteau. Modèle de provisionnement sur données détaillées en assurance non-vie. *Mémoire d'actuariat*, 2004.
- [13] Dinh & Chau. Mesure de provisions cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie. *Mémoire d'actuariat*, 2012.
- [14] Le & Viro. Méthode d'évaluation stochastique des provisions techniques d'une entreprise d'assurance dommages par une approche ligne à ligne. *Mémoire d'actuariat*, 2013.

"Strange events permit themselves the luxury of occurring."

Charlie Chan

3

Provisionnement des sinistres graves

Sommaire

3.1	Seuil grave	33
3.1.1	Théorie des valeurs extrêmes	34
3.1.2	Sélection du seuil grave	36
3.2	Vision grave	40
3.3	Provisionnement des sinistres graves chez AXA CS	41
	Bibliographie	42

3.1 Seuil grave

Le seuil grave nous sert à classer un sinistre en attritionnel ou grave et ainsi à le prendre en compte dans le processus de provisionnement correspondant. Le choix du seuil grave est très délicat et nécessite une justification statistique/ mathématique derrière. Les sinistres graves sont par définition les sinistres dont la probabilité de survenance est très faible mais qui coûtent beaucoup plus cher que les sinistres attritionnels s'ils surviennent. De plus, tandis que les sévérités des sinistres attritionnels sont plus ou moins homogènes, celles des sinistres graves peuvent varier dans une range très large. Toutes ces difficultés nous motivent à utiliser la théorie des valeurs extrêmes et les méthodes robustes pour estimer le seuil grave. Je les présenterai d'une façon synthétique dans cette section pour pouvoir avancer dans la suite de la recherche de méthodes de provisionnement des sinistres graves.

3.1.1 Théorie des valeurs extrêmes

Parler des sinistres graves, on parle de la caractéristique "fréquence faible- coût élevé". La théorie des valeurs extrêmes (EVT) semble être la branche statistique la plus appropriée pour la traiter, comme remarqué Chavez-Demoulin et Armin Roehrl :

"Many real life questions require estimation, but since no data or only few has been observed - as by definition extreme events are rare - essential estimations are more often based on feeling than on fact. EVT is a branch of statistics that deals with such rare situations and that gives a scientific alternative to pure guesswork."

J'exposerai ci-dessous les résultats fondamentaux de la théorie des valeurs extrêmes à travers deux théorèmes principaux : le théorème de Fisher-Tipper et celui de Pickands-Balkema-De Haan [1] . Le premier étudie le comportement statistique du maximum par bloc, le deuxième étudie le comportement du dépassement au delà d'un seuil (*Peak Over Threshold*).

Théorème de Fisher-Tippet

Le théorème de Fisher-Tippet décrit le comportement asymptotique de la loi du maximum. Son importance dans la théorie des valeurs extrêmes est comparable à celle du théorème central limite dans l'étude de la loi des sommes de variables aléatoires.

Notons $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ où X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) (les coûts de sinistres par exemple), ayant pour fonction de répartition F (inconnue en général). Supposons qu'il existe deux suites réelles, $(a_n)_{i=1, \dots, n}$ et $(b_n)_{i=1, \dots, n}$ telles que :

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G(z) \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty$$

où G est une fonction d'une distribution non dégénérée, alors G est de même type que l'une des trois distributions suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Fréchet } (\alpha > 0) : \quad & \Phi_\alpha(z) = \begin{cases} 0, & \text{si } z \leq 0 \\ \exp\{(-z)^{-\alpha}\}, & \text{si } z > 0 \end{cases} \\ \text{Gumbel :} \quad & \Lambda(z) = \exp\{-\exp(-z)\}, \quad -\infty < z < +\infty \\ \text{Weibull } (\alpha > 0) : \quad & \Psi_\alpha(z) = \begin{cases} \exp\{-(z)^{-\alpha}\}, & \text{si } z \leq 0 \\ 1, & \text{si } z > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Remarque 3.1.1. On dit que F appartient au domaine d'attraction (MDA) de Fréchet (resp. de Gumbel ou de Weibull) lorsque la loi limite des maxima suit une loi de Fréchet (resp. de Gumbel ou de Weibull).

Von Mises (1954) et Jenkinson (1955) ont proposé la famille de loi d'extrêmes généralisée $GEV(\mu, \sigma, \xi)$ qui unifie les trois distributions précédentes :

$$G_{(\mu, \sigma, \xi)}(z) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right]_+^{-1/\xi} \right\} & \text{si } \xi \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[- \left(\frac{z - \mu}{\sigma} \right) \right] \right\} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

avec :

- μ : le coefficient de position
- $\sigma > 0$: le coefficient de dispersion
- ξ : le coefficient de forme, ou encore indice de queue
 - $\xi > 0$ (queue épaisse) : famille de distribution Fréchet
 - $\xi = 0$ (queue intermédiaire) : famille de distribution Gumbel
 - $\xi < 0$ (queue fine) : famille de distribution Weibull

Théorème de Pickands-Balkema-De Haan

Ce théorème décrit le comportement des valeurs observées au-delà d'un seuil. Notons toujours F la fonction de répartition commune (non-connue) des n variables aléatoires i.i.d. X_1, \dots, X_n . Nous définissons la distribution des dépassements d'un seuil u par :

$$P(X > u + x | X > u) = \frac{1 - F(u + x)}{1 - F(u)}, \quad x > 0$$

On suppose que F vérifie les mêmes hypothèses que celles du théorème de Fisher-Tippett, i.e. pour n assez grand,

$$P(M_n \leq z) \approx G(z) \quad \text{où} \quad G(z) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{z - u}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}$$

pour certains $\sigma > 0$ et ξ . Alors pour u suffisamment grand, la fonction de répartition de $(X - u)$, conditionnellement à $X > u$, peut être approximée par :

$$h(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}} \right)^{-1/\xi} \quad (3.1)$$

définie sur $\{y : y > 0 \text{ et } (1 + \frac{\xi y}{\tilde{\sigma}}) > 0\}$, où $\tilde{\sigma} = \sigma + (u - \mu)$.

L'équation 3.1 caractérise la famille de distribution Pareto Généralisée *GPD*.

Remarque 3.1.2. *Le théorème permet de faire la correspondance entre les lois GEV et GPD. En effet, nous avons l'équivalence entre deux propositions suivantes :*

- *La loi des maximums de X convergent vers une certaine distribution non-dégénérée de la famille GEV ;*
- *La distribution GPD est la loi limite des dépassements au delà d'un seuil, si ce dernier tend vers une valeur suffisamment grande.*

Application de la *EVT* au problème de provisionnement des sinistres graves

Comment les deux théorèmes ci-dessus peuvent contribuer à notre modèle de provisionnement des sinistres graves ? Le théorème de Pickands-Balkema-De Haan, suivi des méthodes que je détaillerai dans la sous-section suivante, nous aidera à choisir le seuil grave le plus approprié, tandis que celui de Fisher-Tippet nous suggère que nous pouvons utiliser les lois appartenant à la famille *GEV* pour modéliser la charge ultime de sinistres graves. Nous allons utiliser quelques lois connues de la famille *GEV* pour approcher la sévérité des sinistres (charge ultime) dans la projection d'*IBNyR*.

3.1.2 Sélection du seuil grave

En admettant que la loi des dépassements du seuil grave appartienne à la famille Pareto Généralisée (*GPD*), on peut utiliser les méthodes graphiques (la fonction de dépassement moyen, le graphique de Hill) et les méthodes numériques (la méthode de Cheng & Peng, la méthode Bootstrap de Danielsson), pour sélectionner le seuil grave. Cette sélection du seuil grave est délicate puisque :

- Un seuil peu élevé permet d'augmenter le nombre d'observations, mais l'approximation par la loi *GPD* est mauvaise.
- Un seuil trop élevé assure la cohérence avec la propriété de stabilité par seuillage de la loi *GPD* mais les estimateurs sont moins précis faute de données.

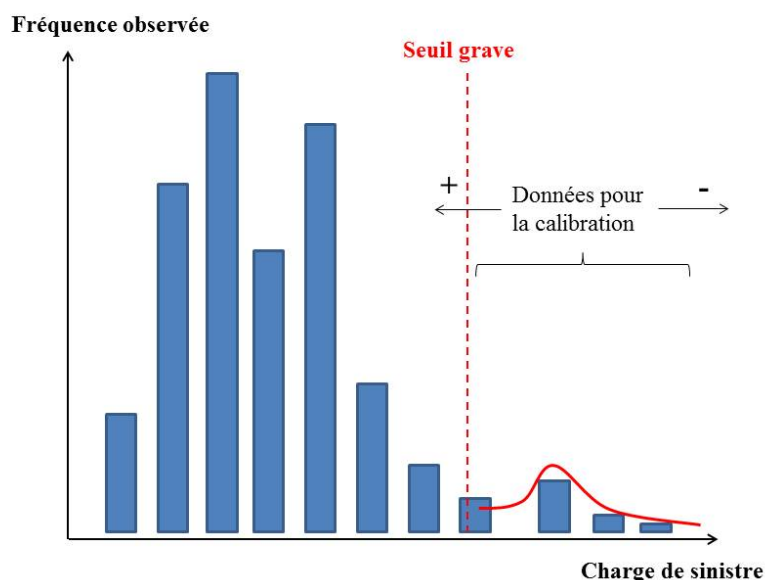


FIGURE 3.1 – Sélection du seuil grave

Pour palier ce problème, nous cherchons à déterminer le seuil le plus faible possible qui assure toutefois un modèle raisonnable avec la distribution *GPD*.

Pour la suite, on définit les statistiques d'ordre associées à l'échantillon $(X_i)_{i=1,\dots,n}$:

$$X_{(1)} \geq \dots \geq X_{(k)} \geq X_{(k+1)} \geq \dots \geq X_{(n)}$$

avec bien évidemment, $X_{(1)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ et $X_{(n)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Le seuil optimal sera $u = X_{(k)}$ pour un certain $k \in \{1, \dots, n\}$ (k sera le nombre de dépassements). La méthodologie est donc de choisir, sous contrainte de pouvoir caractériser des dépassements par une loi *GPD*, le plus petit seuil u possible, ce qui revient à prendre le plus grand k possible. Les méthodes présentées ci-dessous fournissent cette contrainte de choix.

Remarque 3.1.3. *Ces méthodes ont été très bien implémentées dans l'outil Future Losses. J'ai simplement les reprises pour mon modèle de provisionnement des sinistres graves. Je n'ai pas apporté une valeur ajoutée à cette phase de sélection du seuil grave. Cependant, j'aimerais les mentionner dans cette sous-section pour que les lecteurs puissent suivre l'ordre de fonctionnement du modèle. Les méthodes de Cheng & Peng et de Danielsson sont assez complexes, je ne présente que leurs idées et leurs résultats principaux. Les lecteurs intéressés à leurs recherches sont invités à consulter [2] et [3].*

Graphique de Hill

Supposons que $F \in MDA(G_\xi)^1$, où $\xi \geq 0$. L'estimation de Hill (Hill, 1975) pour le paramètre de queue ξ est :

$$\widehat{\xi}_{n,k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log \left(\frac{X_{(i)}}{X_{(k+1)}} \right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \log(X_{(i)}) - \log(X_{(k+1)})$$

La méthode Graphique de Hill (*Hill plot*) consiste à tracer les $\{\widehat{\xi}_{n,k} \mid k = 2, \dots, n\}$ et à sélectionner la plus grande valeur de k (i.e. le plus petit seuil $u = X_{(k)}$) qui assure la stabilité du graphique de Hill.

Fonction de dépassement moyen

Pour une variable aléatoire X , la fonction de dépassement moyen ou encore *Mean Excess Function* (*MEF*) est définie par :

$$e(u) = E[X - u \mid X > u]$$

Quand X suit une loi Pareto Généralisée, sa *MEF* est linéaire. En effet, soit $X \sim GPD(\xi, \sigma)$,

$$e(u) = \frac{\sigma + \xi u}{1 - \xi}$$

avec $\xi < 1$ pour s'assurer l'existence de la moyenne théorique.

1. F appartient au domaine d'attraction de G_ξ

De plus, soit $X \sim GPD(\xi, \sigma, u_0)$ et $Y = X \mid X > u_1$ avec $u_1 > u_0$. Nous avons la propriété suivante :

$$Y \sim GPD(\xi, \sigma + \xi(u_1 - u_0), u_1)$$

Avec un échantillon de charges de sinistres X_1, \dots, X_n , nous pouvons définir la fonction de dépassement moyen empirique par :

$$e_n(u) = \frac{1}{N_u} \sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u)$$

où $\Delta_n(u) = \{i \mid i = 1, \dots, n; X_i > u\}$ et $N_u = \text{card}(\Delta_n(u))$.

Comme pour X_1, \dots, X_n i.i.d. de fonction de répartition $F \in MDA(G_\xi)$, le théorème de Pickands-Balkema-De Haan assure la convergence de la loi des dépassements de seuil vers une loi GPD pour un seuil u suffisamment élevé, nous pouvons tracer le graphe :

$$\{(u, e_n(u)) \mid u = X_{(n)}, \dots, X_{(1)}\},$$

et déterminer la plus petite valeur u telle que $e_n(x)$ est linéaire pour $X \geq u$.

Méthode de Cheng & Peng

Cette méthode est basée sur la propriété asymptotique de l'estimateur de Hill :

$$\text{Si } k(n) \rightarrow \infty \text{ et } \frac{k(n)}{n} \rightarrow 0 \text{ alors } \widehat{\xi}_{k,j} \xrightarrow{\mathcal{P}} \xi$$

Pour avoir la normalité asymptotique de l'estimateur de Hill, on suppose que la fonction de survie des $X_i, i = 1, \dots, n$ satisfait une approximation de second ordre comme suivant :

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = c x^{-1/\xi} (1 + b x^{-\beta} + o(x^{-\beta}))$$

où $c > 0, \xi \geq 0, \beta > 0$ et $b \neq 0$.

Alors,

$$\sqrt{k(n)} (\xi_{k(n),n} - \xi) \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \xi^2)$$

Sachant que l'estimateur de Hill suit asymptotiquement une loi normale pour des seuils élevés, on peut construire les intervalles de confiance asymptotiques de niveau α pour le paramètre de queue ξ :

$$\begin{cases} IC_1(\alpha) &= \left[0, \widehat{\xi}_{k(n),n} + z_\alpha \frac{\xi_{k(n),n}}{\sqrt{k(n)}} \right] \\ IC_2(\alpha) &= \left[\widehat{\xi}_{k(n),n} - x_\alpha \frac{\xi_{k(n),n}}{\sqrt{k(n)}}, \widehat{\xi}_{k(n),n} + x_\alpha \frac{\xi_{k(n),n}}{\sqrt{k(n)}} \right] \end{cases}$$

avec $P(\mathcal{N}(0, 1) \leq z_\alpha) = P(|\mathcal{N}(0, 1)| \leq x_\alpha) = \alpha$. Par construction, la probabilité de couverture de l'intervalle de confiance asymptotique converge théoriquement vers α :

$$P(\xi \in IC_i(\alpha)) \rightarrow \alpha, \text{ pour } i = 1, 2$$

lorsque $k(n) \rightarrow \infty$ et $\frac{k(n)}{n} \rightarrow 0$.

Cheng & Peng ont développé une extension de la méthode de Hill qui permet d'évaluer ce taux de convergence. Le nombre optimal d'observations (de dépassements de seuil) $\widehat{k}^{optimal}$ est donc celui qui minimise ce taux de convergence (i.e. qui entraîne la convergence la plus rapide). Sa formule explicite peut être trouvée dans [2].

Méthode Bootstrap de Danielsson

Dans le même esprit que la méthode de Cheng & Peng, la méthode Bootstrap proposée par Danielsson [3] repose sur l'estimateur de Hill pour choisir le nombre optimal de dépassements $\widehat{k}^{optimal}$ qui caractérise bien le comportement de la queue de distribution via le paramètre ξ . On suppose une autre forme de la fonction de survie de \overline{F} (Hall & Welsh, 1985) :

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x) = c x^{-1/\xi} (1 + b x^{\rho/\xi} + o(b x^{\rho/\xi}))$$

Notons $U(x) = \frac{1}{\overline{F}(x)}$. Utilisant la preuve donnée par Haan et Peng (1998), on suppose l'existence d'une fonction $A(t)$ de signe unique, convergeante vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ et satisfaisant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{U(tx)}{U(t)} - x^\gamma}{A(t)} = x^\gamma \frac{x^\rho - 1}{\rho}, \quad \rho \leq 0$$

Nous avons la représentation asymptotique suivante de la distribution de l'estimateur de Hill :

$$\widehat{\xi}_{n,k} \approx \xi + \left(\frac{\xi}{\sqrt{k}} \mathcal{N}(0, 1) + \frac{1}{1-\rho} A\left(\frac{n}{k}\right) \right)$$

Nous choisissons la valeur k qui minimise l'erreur quadratique asymptotique (*asymptotic minimum square errors*) de l'estimateur de Hill :

$$AMSE(\widehat{\xi}_{n,k}) := \text{asym } E \left[(\widehat{\xi}_{n,k} - \xi)^2 \right] = E \left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{k}} \mathcal{N}(0, 1) + \frac{1}{1-\rho} A\left(\frac{n}{k}\right) \right)^2 \right]$$

La méthode Bootstrap de Danielsson repose sur le fait que les pseudo-échantillons de (X_i) ont le même comportement de queue que celui de l'échantillon initial.

Sélection du seuil grave

Pour résumer cette sous-section, nous disposons d'au moins 4 méthodes, dérivées du théorème de Pickands-Balkema-De Haan, pour sélectionner le seuil grave u . Cette sélection est un compromis entre un nombre nécessaire de dépassements k pour bien calibrer les paramètres de la loi GPD (surtout l'indice de queue ξ) et un seuil $u = X_{(k)}$ suffisamment élevé pour pouvoir utiliser la loi GPD . Sachant la linéarité de la fonction de dépassement moyen $e(\cdot)$ pour une loi GPD , nous pouvons tracer le graphique $(u, e(u))$ et choisir un seuil u suffisamment élevé pour atteindre la stabilité. Notons $\hat{\xi}_{n,k}$ l'estimateur de Hill pour l'indice de queue ξ . Nous pouvons également utiliser le graphique de Hill $(k, \hat{\xi}_{n,k})$ pour choisir le k optimal, et donc prendre $u = X_{(k)}$. Les deux autres méthodes étudient le comportement asymptotique de l'estimateur de Hill $\hat{\xi}_{n,k}$. La méthode de Cheng & Peng propose un intervalle de confiance $IC(\alpha)$ de niveau α pour ξ et calcule le taux de convergence de $P(\xi \in IC(\alpha))$ vers α . Le k optimal est celui qui donne la convergence la plus rapide. La méthode Bootstrap de Danielsson cherche le nombre de dépassements k qui minimise l'erreur quadratique asymptotique de $\hat{\xi}_{n,k}$.

Pour faciliter la compréhension des formules, nous notons pour la suite $T_{Atypical} := u$ pour le seuil grave dans notre modèle.

3.2 Vision grave

Nous pouvons envisager deux visions différentes pour le provisionnement des sinistres graves.

La première vision est « une fois grave, toujours grave », c'est-à-dire qu'un sinistre rentre dans la provision des graves dès qu'il dépasse le seuil grave et y reste même s'il repasse en-dessous de ce seuil dans les années suivantes. L'état grave est un état absorbant.

La deuxième vision est dynamique dans le sens où le statut grave/attritionnel dépend de la date de vision. Un sinistre peut être vu comme grave en 2014 et comme attritionnel en 2015 s'il repasse en-dessous du seuil grave cette année-là.



Première vision : l'état "grave" absorbant Deuxième vision : l'état "grave" transient

L'exemple suivant clarifie la différence des deux visions "grave" en fixant le seuil grave à 3 000 000 € et évaluant un sinistre sur 4 années de développement :

Année de développement	Dev 1	Dev 2	Dev 3	Dev 4
Charge (million d'€)	1	4	2	3
Vision 1	Attri	Grave	Grave	Grave
Vision 2	Attri	Grave	Attri	Grave

TABLE 3.1 – 2 visions de sinistres graves

3.3 Provisionnement des sinistres graves chez AXA CS

Chez AXA CS, on retient la première vision pour le provisionnement des sinistres graves. Un sinistre rentre dans la provision des graves dès que sa charge passe au-dessus du seuil grave. Même s'il retombe en-dessous de ce seuil à une année de développement, son statut sera toujours grave. Cette vision de sinistres graves rend leur processus de provisionnement plus difficile, puisqu'on doit provisionner, en utilisant un seul modèle, à la fois les sinistres dont la charge ultime sera supérieure au seuil grave et ceux dont la charge ultime sera inférieure au seuil grave. Cependant, ce choix nous assure la stabilité du provisionnement des sinistres attritionnels. En effet, les sinistres attritionnels sont provisionnés en appliquant une méthode classique du type Bornhuetter-Ferguson sur les triangles de charges cumulées. Si un sinistre passe d'attritionnel à grave, il sort définitivement du triangle attritionnel et sera traité comme grave à partir de ce moment-là. On évite donc des sorties et retours répétés d'un sinistre dans le triangle attritionnel lorsque sa charge varie autour du seuil grave. Bien évidemment, pour traiter des passages dynamiques entre le provisionnement des sinistres attritionnels et celui des sinistres graves, un processus de provisionnement dynamique avec trois triangles Chain-ladder comme proposé nombreux auteurs paraît intéressant. Toutefois, dans le cadre de mon stage, je n'interviens que dans le provisionnement des sinistres graves. Je reste donc avec le principe chez AXA CS.

Chez AXA CS, nous avons choisi d'enregistrer les sinistres par année de survenance plutôt que par année de déclaration. Ainsi, un sinistre survenu en 2004 et déclaré en 2006 à un montant de 3 million d'euros est enregistré comme suit :

<i>Claim id</i>	<i>Year of occurrence</i>	dev 1	dev 2	dev 3	...	dev 11
1	2004	0	0	3	...	3,5

Cette façon de stockage est cohérente avec les méthodes de provisionnement présentées dans la suite du mémoire.

Le seuil grave est actuellement retenu à $T_{Atypical} = 3$ million d'euros pour toutes les branches d'activité. Ce choix n'est cohérent avec les résultats suggérés par les méthodes (graphique de Hill, fonction de dépassement moyen, Cheng & Peng et bootstrap de Danielsson) mentionnées ci-dessus que sur certaines branches. Sur d'autres branches, les méthodes ne renvoient pas un seuil unique ; l'écart entre les méthodes sont assez grande et 3 million semble être un bon compromis entre elles.

Le modèle de provisionnement que j'ai développé propose un seuil grave estimé par les trois méthodes mentionnées au-dessus. Il laisse néanmoins à l'utilisateur la possibilité de redéfinir ce seuil.

Pour raison de communication entre succursales, ce seuil grave de 3 000 000 € reste constant pour toute année. Cela poserait une difficulté dans le process de provisionnement..

L'inflation est un problème très complexe qui influe toutes les modules dans notre modèle de provisionnement (le développement ligne à ligne des sinistres connus, la calibration de la loi de sévérité, la projection des triangles de nombres graves). La pratique comptable pour l'enregistrement des charges de sinistres et le choix de non inflater le seuil grave de 3 million chez AXA CS rendent enore plus compliquée la prise en compte de l'inflation dans notre process de provisionnement. Pour la suite, je présenterai des différents modèles en supposant qu'il n y ait pas d'inflation. Je consacrerai tout le chapitre 6 à traiter le problème d'inflation.

Bibliographie

- [1] Christian Y. Robert. Théorie des valeurs extrêmes. Mars 2012.
- [2] Shihong Cheng & Liang Peng. Confidence intervals for the tail index. *Bernoulli*, 7(5) :751–760, 2001.
- [3] J. Danielsson. Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation. *Journal of Multivariate Analysis*, 76 :226–248, 2001.

"All models are wrong but some are useful."

George E. P.Box

4

2 modèles des graves de référence

Sommaire

4.1	Modèle 1 : [IBNeR] méthode du ratio P/I - [IBNyR] ALR	45
4.1.1	Projection d'IBNeR	46
4.1.2	Projection d'IBNyR	47
4.2	Modèle 2 : [IBNeR] Chain-ladder ligne à ligne - [IBNyR] Schnieper	48
4.2.1	Projection d'IBNeR	49
4.2.2	Projection d'IBNyR	51
4.3	Test et validité des hypothèses des deux modèles	54
4.3.1	Comparaison des résultats entre deux modèles	62
4.4	Modèle 2 ajusté : Version adaptée à la vision grave chez AXA CS	64
4.4.1	Base de sinistres pour la projection d'IBNeR	64
4.4.2	Projection d'IBNyR : lien entre Schnieper et ALR	65
4.4.3	Limites du modèle	66
	Bibliographie	67

Dans ce chapitre, je présente deux modèles de référence pour le provisionnement des sinistres graves disponibles chez AXA CS, l'un développé au sein de l'équipe Actuariat d'AXA CS, l'autre repose sur l'outil *Future Losses* développé par le *Group Risk Management (GRM)* d'AXA. En étudiant ces deux modèles et ensuite les comparant, j'identifierai leurs potentielles limites afin d'en proposer des solutions et retiendrai leurs idées intéressantes pour mon modèle. J'insiste sur le fait que *Future Losses* n'a pas pour but de provisionnement (il a été fait pour modéliser les sinistres graves et attritionnels pour une année future) mais certaines démarches en sont très proches. J'ai donc essayé d'adapter *Future Losses* au problème de provisionnement des sinistres graves. Pour la suite, je noterai Modèle 1 pour le modèle développé en interne chez AXA CS et Modèle 2 pour le modèle inspiré de *Future Losses*.

Pour commencer, je spécifie que les deux modèles reposent sur deux visions graves différentes dont j'ai parlé dans le chapitre 2. Par conséquent, la provision des sinistres graves n'est pas directement comparable entre les deux modèles.

	Modèle 1	Modèle 2
Vision grave	Une fois grave, toujours grave	Processus dynamique du statut Grave/Atritionnel
Charge D/D	$Incurred_i^1 = C_{i,I-i}^1$ = charge de tous les sinistres survenus à l'année i ayant dépassé le seuil grave à un moment donné	$Incurred_i^2 = C_{i,I-i}^2$ = charge de tous les sinistres survenus à l'année i et dont la dernière charge connue est supérieure au seuil grave
Charge ultime	$Ultime_i^1 = C_{i,J}^1$ = Charge ultime de tous les sinistres survenus à l'année i qui ont dépassé ou qui dépasseront le seuil grave à un moment dans leur vie	$Ultime_i^2 = C_{i,J}^2$ = Charge ultime de tous les sinistres survenus à l'année i et dont la charge ultime sera supérieure au seuil grave

TABLE 4.1 – Notions graves des 2 modèles de référence

Par conséquent, $Incurred_i^1 \geq Incurred_i^2$ (toujours vrai) et $Ultime_i^1 \geq Ultime_i^2$ (généralement vrai). Enfin, $IBNR_i^1$ et $IBNR_i^2$ ne sont pas directement comparables.

Dans tous les 2 modèles, la provision $IBNR$ est séparée en $IBNeR$ et $IBNyR$. Wuthrich et Merz [1] ont précisé que la réserve pour les $IBNeR$ et celle pour les $IBNyR$ sont de différentes natures :

Méthodes ligne à ligne pour les $IBNeR$ - Méthodes agrégées pour les $IBNyR$

- La réserve pour les $IBNeR$ peut être estimée de façon individuelle, c'est-à-dire qu'on développe chacun des sinistres connus et non-clos. En effet, on connaît souvent beaucoup d'information sur les sinistres connus, une estimation ligne à ligne de ces sinistres peut réduire l'erreur de prédiction et permet l'application d'une structure de réassurance non-proportionnelle par exemple.
- La réserve pour les $IBNyR$ ne peut être estimée de façon individuelle puisque nous ne connaissons pas les détails des sinistres non encore déclarés. Nous ne pouvons donc appliquer que les méthodes agrégées pour la projection d' $IBNyR$.

C'est aussi l'idée de base des modèles de provisionnement des sinistres graves que je présenterai dans la suite du mémoire. Tous les modèles tendent à appliquer un développement ligne à ligne sur les sinistres connus et non-clos afin de capter l'effet d' $IBNeR$ et une méthode agrégée pour l'estimation des $IBNyR$.

Remarque 4.0.1. Dans le cadre de provisionnement des sinistres graves chez AXA CS, nous pouvons citer au moins 4 avantages d'un développement ligne à ligne pour la projection d' $IBNeR$:

- Nous pouvons développer les sinistres de manières différentes suivant leurs propres caractéristiques. Nous analyserons dans toute la suite du mémoire cet avantage.

- Nous ne développons que les sinistres non-clos, ce que nous ne pourrions pas faire avec une méthode agrégée ;
- Avec une méthode ligne à ligne, nous estimons la charge ultime de chacun des sinistres, ce qui nous permet de calibrer une loi de sévérité pour les sinistres graves. Comme nous verrons dans les deux sections suivantes, cette loi de sévérité nous servira dans la projection d'IBNyR.
- Nous pouvons estimer le montant d'IBNeR de chacun des sinistres et ainsi l'affecter à la succursale à laquelle il appartient. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 8.

4.1 Modèle 1 : [IBNeR] méthode du ratio P/I - [IBNyR] ALR

Modèle de référence 1

- **IBNeR** : [Méthode ligne à ligne] Facteur de développement à l'ultime estimé par le ratio P/I (si $I \geq$ Seuil grave) ou estimé historiquement (si $I <$ Seuil grave). On estime l'ultime des sinistres qui ont été au moins une fois grave dans le passé.
- **IBNyR** : [Méthode agrégée] Distinction entre 2 cas : $\text{Ultime} \geq \text{Seuil grave}$ et $\text{Ultime} < \text{Seuil grave}$. Méthode **ALR** pour estimer le nombre d'IBNyR dans chacun des deux cas. Les sévérités dans le cas $\text{Ultime} \geq \text{seuil grave}$ suivent une loi Pareto, celles dans le cas $\text{Ultime} < \text{seuil grave}$ sont estimées par les moyennes empiriques des sinistres historiques.

Ci-dessous le schéma descriptif du processus d'estimation d'IBNR grave :

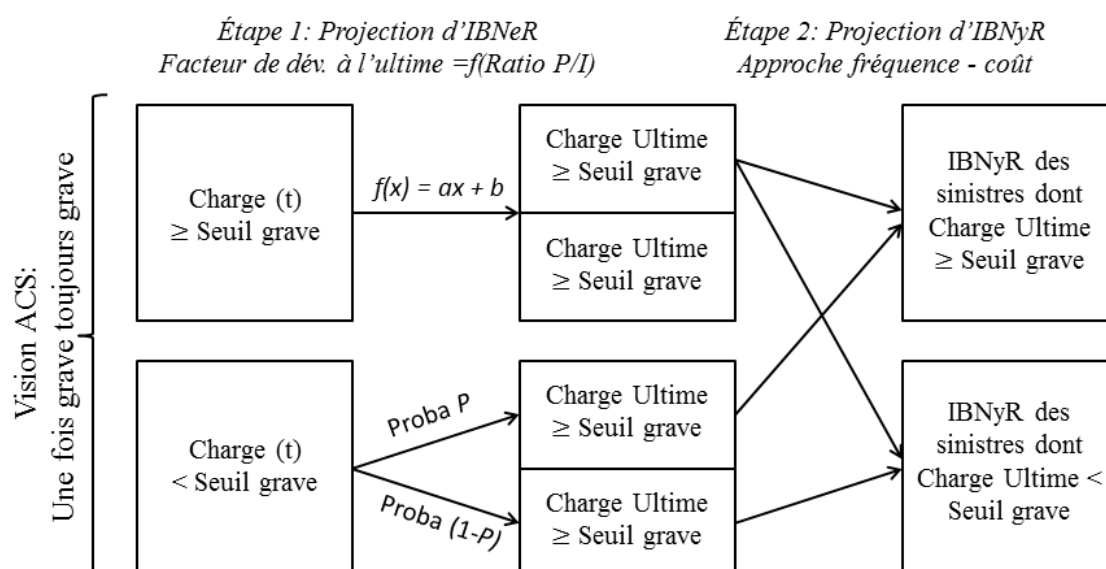


FIGURE 4.1 – Schéma du Modèle 1

4.1.1 Projection d'*IBNeR*

L'objectif est de développer à l'ultime les sinistres graves (dont la charge a dépassé le seuil grave) connus et non-clos. Nous distinguons deux classes de sinistres à projeter :

Les sinistres dont la dernière charge connue est supérieure ou égale au seuil grave

Leur projection de la charge à l'ultime se fait individuellement par application d'un facteur de développement à l'ultime. L'intuition est que 2 sinistres ayant un même ratio P/I se développent de manière semblable, peu importe l'année de développement.

Hypothèse 4.1.1. L'hypothèse principale est l'existence d'une relation linéaire entre :

- l'indicateur de l'état d'avancement d'un sinistre : Le ratio Payé/Charge, ou *Paid/Incurred* (P/I)
- le facteur de développement des charges de sinistres graves directement à l'ultime de manière individuelle.

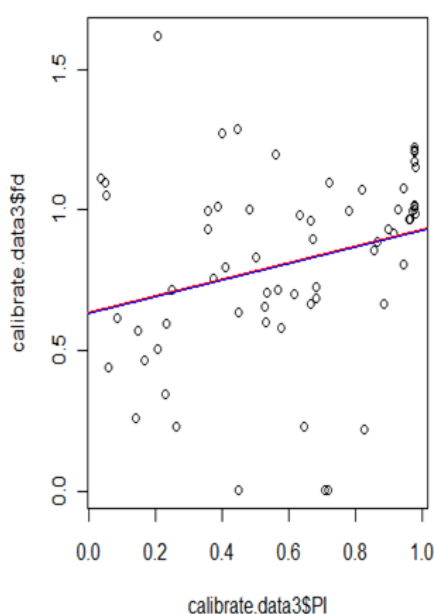


FIGURE 4.2 – Exemple : facteur de développement à l'ultime en fonction du ratio P/I

Données : Pour estimer les paramètres de la droite de régression, nous nous basons sur l'évolution du ratio P/I et les facteurs de développement à l'ultime des sinistres qui ont été au moins une fois grave et clos au moment du calibrage.

Pondération : Comme un sinistre intervient dans le calibrage autant de fois que le nombre d'années où sa charge était au-dessus du seuil grave, nous introduisons une pondération dans la régression linéaire. Par exemple, un sinistre apparaît trois fois dans le calibrage avec l'évolution du ratio comme suit : $P/I_{k,0} = 0,5$; $P/I_{k,1} = 0,7$; $P/I_{k,2} = 0,9$; chacun de ces ratios sera pondéré 1/3. Dans le graphe ci-dessus, la droite rouge correspond au cas non-pondéré, la droite bleue correspond à une régression linéaire avec pondération.

Calibrage : Pour traiter les P/I extrêmes, nous distinguons trois intervalles :

- Séparation des $P/I < 0,02$ et ($P/I > 0,98$ et sinistre ouvert) : Moyenne des facteurs pour chacun des cas.
- Régression linéaire sur les autres facteurs : Facteur de développement moyen en fonction du P/I .

Les sinistres dont la dernière charge connue est strictement inférieure au seuil grave

Nous distinguons deux scénarios d'évolution de ces sinistres. Dans chacun des deux, nous appliquons un facteur moyen de développement à l'ultime.

- Sinistres dont la charge présente est inférieure au seuil grave et dont la charge ultime en repassent au-dessus : on détermine la probabilité de saut P basée sur l'historique de l'évolution des sinistres et une moyenne empirique des facteurs de développement à l'ultime déduite de l'historique.
- Sinistres dont la charge présente est inférieure au seuil grave et dont la charge ultime y restent inférieure : probabilité $(1 - P)$ avec un facteur moyen de développement à l'ultime.

Remarque 4.1.1. La distinction entre deux possibilités d'évolution peut être intéressante dans le cas stochastique. Dans l'approche déterministe, cela revient à prendre une moyenne historique des facteurs de développement à l'ultime des sinistres dont la charge actuelle est inférieure au seuil grave.

4.1.2 Projection d'IBNyR

Cette étape intervient après l'estimation d'IBNER puisque nous avons besoin pour chaque sinistre connu de sa charge ultime. Nous utilisons une approche fréquence-coût pour la projection d'IBNyR (Hypothèse : Indépendance entre la loi de coût et de fréquence).

Nous distinguons encore deux classes de sinistres :

- Les sinistres dont la charge ultime est supérieure ou égale au seuil grave
- Les sinistres dont la charge ultime est inférieure au seuil grave

Nous construisons donc deux triangles de nombres de nouveaux sinistres graves : l'un pour les sinistres graves dont la charge ultime \geq seuil grave, l'autre pour les sinistres graves dont la charge ultime $<$ seuil grave. Ces triangles peuvent être facilement construits à partir de la base de sinistres servant à la projection d'IBNeR. Nous estimons les triangles inférieurs correspondant par la méthode ALR, avec le même vecteur d'exposition dans les deux cas. La méthode ALR a été présentée dans la

section 4.1. La différence ici est qu'on l'applique aux triangles de nombres plutôt qu'aux triangles de montants. Au final, nous en déduisons le nombre d'*IBNyR* (pour chacune des années de survenance) dans chacun des deux cas : charge ultime \geq seuil grave et charge ultime $<$ seuil grave. Il suffit de multiplier le nombre d'*IBNyR* à la sévérité correspondante pour avoir le montant ultime d'*IBNyR*. Cette sévérité est estimée par une loi Pareto dans le cas où la charge ultime est supérieure ou égale au seuil grave et par une moyenne historique dans l'autre cas.

4.2 Modèle 2 : [*IBNeR*] Chain-ladder ligne à ligne - [*IBNyR*] Schnieper

Ce modèle se base sur l'outil *Future Losses* du *GRM*. Ce dernier, dont le but est de modéliser les sinistres d'une année future, n'estime pas le montant d'*IBNR*. Il modélise directement les montants de charges ultimes en calibrant une distribution de fréquence et une distribution de sévérité. L'effet d'*IBNyR* est capturé dans la distribution des fréquences. L'effet d'*IBNeR* est capturé dans la distribution des sévérités. Il est par conséquent difficile de séparer le montant d'*IBNeR* et le montant d'*IBNyR*. Je propose donc le modèle 2 comme une version *Future Losses* adaptée au problème de provisionnement.

Modèle de référence 2

- Les fréquences [effet d'*IBNyR* – Méthode agrégée] : Méthode de Schnieper pour estimer les nombres de sinistres graves. Comme le statut grave/attritionnel peut changer suivant l'année de vision, les nombres estimés ici correspondent aux nombres de graves vus à une année de développement donnée (on estime à chaque passage d'une année de développement à une autre le nombre de sinistres qui passent d'attritionnel à grave et le nombre de sinistres qui passent de grave à attritionnel).
- Les sévérités [effet d'*IBNeR* – méthode ligne à ligne] : Méthode de Chain-ladder ligne à ligne pour estimer des *link-ratios* (calibrés sur les sinistres au-delà du seuil d'*IBNeR*, non agrégés) ensuite appliquer ces *link-ratios* aux sinistres non-clos de façon individuelle. On obtient un vecteur de charges ultimes. On retient les sinistres dont la charge ultime \geq Seuil grave.

Pour estimer la sévérité, on choisit une distribution *GEV* (Log-Normal, Weibull, Pareto tronquée à droite, Pareto Généralisée) \times 2 méthodes d'estimation (Maximum de vraisemblance et Méthode des Moments). Dans une approche déterministe, la sévérité (pour toute année de survenance) sera la moyenne théorique de la distribution retenue. Si cette distribution est choisie par la méthode des moments, sa moyenne sera identique à la moyenne empirique. Si cette distribution est choisie par la méthode de Maximum de vraisemblance, sa moyenne pourra être différente.

4.2.1 Projection d'IBNeR

Pour capter l'effet d'IBNeR, le modèle nécessite un **seuil d'IBNeR** (Attention : Ce n'est pas le seuil grave, ni le seuil d'extraction¹. Il est quelque part entre ces deux derniers). Les sinistres dont la charge est supérieure ou égale au seuil d'extraction sont jugés "potentiellement graves". Le seuil d'IBNeR détermine quels développements de sinistres vont être pris en compte dans le calcul de l'effet IBNeR.

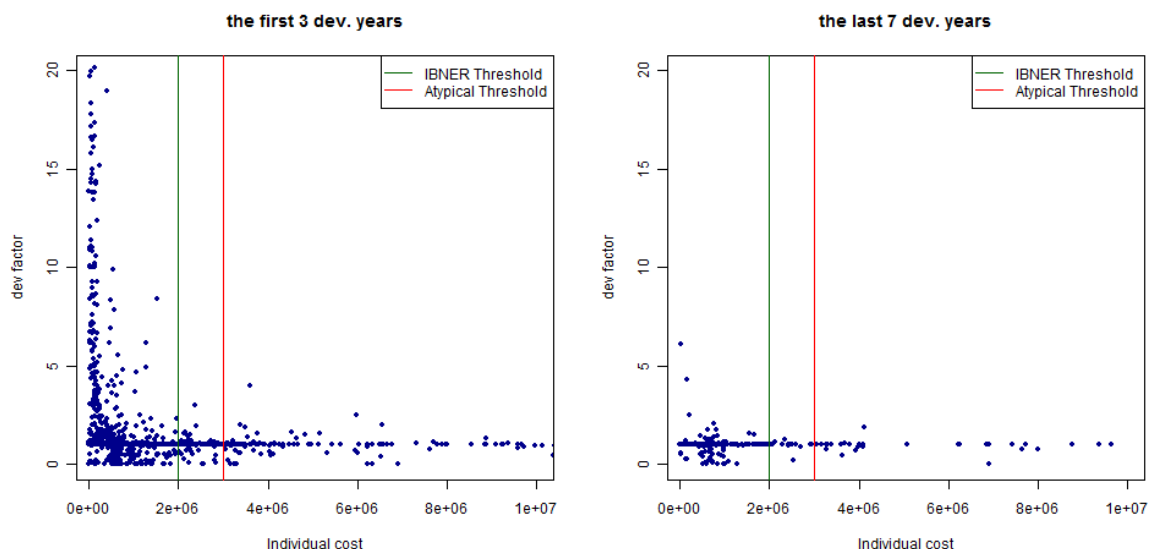
Concrètement, pour estimer les *link-ratios* de l'année de développement j à $j+1$, nous ne prenons en compte que les facteurs de développement individuels $F_{i,j}$ correspondant à la situation où $C_{i,j}$ et $C_{i,j+1}$ sont toutes les deux supérieures au seuil d'IBNeR. Le choix du seuil d'IBNeR est un compromis entre :

- Un nombre suffisamment grand de facteurs retenus afin d'avoir une projection fiable et stable ;
- Un choix d'un périmètre de projection dont le déroulement est homogène à celui des sinistres graves.

Il se fait à partir des graphiques représentant la répartition des facteurs de développement en fonction de la charge individuelle à laquelle le facteur s'applique :

- Un premier graphique qui représente les facteurs des premières années de développement (sujets à davantage de volatilité)
- Un second graphique qui représente les facteurs des dernières années de développements

Par exemple, pour la branche Responsabilité civile (*Liability*) : 2 million d'euros semble être un bon seuil IBNeR puisque les facteurs sont plus ou moins homogènes quand la charge est supérieure ou égale à 2 million :



Maintenant, on estime les *link-ratios* comme avec la méthode classique Chain-ladder, mais au niveau individuel des sinistres et avec le seuil d'IBNeR qui intervient dans la formule. Notons $\mathcal{K}_n(j)$ l'ensemble des sinistres dont la charge à l'année de développement j est connue à l'année courante

1. chez AXA CS, on extrait les sinistres dont la charge a dépassé le seuil d'extraction de 500 million d'euros pour les études de sinistres graves

n et T_{IBNeR} le seuil d'*IBNeR*. Nous avons $\mathcal{K}_n(1) = K_n$: l'ensemble des sinistres étudiés (dont la charge étant au-dessus du seuil d'*IBNeR* à un moment). Si la charge d'un sinistre est connue à l'année de développement $j + 1$, sa charge à l'année de développement j est aussi connue : $\mathcal{K}_n(j + 1) \subset \mathcal{K}_n(j)$, $\forall j = 1, \dots, n - 1$.

Remarque 4.2.1. En notant $AY(.)$ l'application qui, à chaque sinistre k , renvoie l'année de survénance i correspondante, nous avons l'équivalence suivante :

$$\{k \in \mathcal{K}_n(j)\} \Leftrightarrow \{AY(k) + j \leq n + 1\}$$

Les *link-ratios* seront estimés comme suit :

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{k \in \mathcal{K}_n(j+1)} C_{k,j+1}}{\sum_{k \in \mathcal{K}_n(j+1)} C_{k,j}} \mathbb{1}_{\{C_{k,j+1} \geq T_{IBNeR}, C_{k,j} \geq T_{IBNeR}\}}$$

Après avoir estimé les *link-ratios*, nous les appliquons aux sinistres ouverts, un par un.

Remarque 4.2.2. On a fait une hypothèse implicite que le seuil d'*IBNeR* sépare définitivement les sinistres graves et attritionnels. Les facteurs de développement sont calibrés sur les passages au-delà du seuil d'*IBNeR* et ensuite appliqués à l'ensemble des sinistres. Enfin, on retient les sinistres qui dépassent le seuil grave à l'ultime.

Remarque 4.2.3. Nous appelons cette procédure *Chain-ladder ligne à ligne*. Elle se diffère de la méthode *Chain-ladder classique* par le fait qu'on estime, année de développement par année de développement, le montant de charge de chacun des sinistres plutôt que le montant de charge cumulée pour une année de survénance. Cependant, on applique un même vecteur de *link-ratios* à tous les sinistres. Cette méthode fait partie de la classe des méthodes ligne à ligne mais ne traite pas vraiment les sinistres de façon individuelle. Développer chacun des sinistres par cette méthode apporte deux valeurs ajoutées par rapport à la méthode *Chain-ladder agrégée* :

- on sélectionne directement les facteurs de développement individuels rentrant dans le calibrage en comparant la charge correspondante au seuil d'*IBNeR* ;
- on obtient à la fin la charge ultime de chacun des sinistres pour calibrer la loi de sévérité des sinistres graves.

Cependant, si on ne s'intéresse qu'au niveau agrégé par année de survénance, la méthode *Chain-ladder ligne à ligne* renvoie exactement le même résultat que la méthode *Chain-ladder classique*. Nous avons en effet le lemme suivant :

Lemme 4.2.1. La méthode *Chain-ladder ligne à ligne* (version *Future Losses*) et la méthode *Chain-ladder classique* donne des mêmes estimateurs de *link-ratios*, et donc un même estimateur de la charge ultime agrégée par année d'origine.

Après avoir développé tous les sinistres non-clos, nous ne retenons que les sinistres dont la charge ultime est supérieure ou égale au seuil grave. Ce sont les sinistres "graves" dans l'optique de *Future Losses*. On agrège ces sinistres par année de survénance et en déduit l'*IBNeR* par année de survénance.

4.2.2 Projection d'IBNyR

L'estimation des IBNyR se fait par une approche fréquence-coût. Le coût est estimé par la moyenne théorique d'une distribution appropriée pour caractériser la sévérité des sinistres graves. Les nombres (fréquences) seront estimés par la méthode de Schnieper.

Sévérité

A la fin du module de projection d'IBNeR, nous calibrons une loi de sévérité pour les sinistres graves. Cette étape est une préparation pour l'estimation des IBNyR. En effet, nous avons un vecteur des montants de charges ultimes supérieurs au seuil grave. Nous cherchons une distribution pour caractériser la sévérité des sinistres graves ; la moyenne théorique de cette distribution sera multipliée par les nombres d'IBNyR de sinistres graves pour obtenir les montants d'IBNyR par année de survenance.

Remarque 4.2.4. *Au début, pour sélectionner le seuil grave, nous avons dû faire l'hypothèse que les dépassements de seuil suivent une loi Pareto généralisée (GPD). Là on choisit une loi pour la charge ultime des sinistres graves. Ce sont deux choses différentes. Il y a un effet d'IBNeR dans le développement des sinistres. Les charges de sinistres graves vues à l'ultime ne sont pas forcément celles à la dernière date de vision (année courante). C'est pourquoi on cherche une nouvelle loi pour les sévérités ici. D'après la sous-section 3.1.1, la famille de lois GEV donne les "meilleurs" candidats.*

Nous proposons cinq distributions pour caractériser la sévérité des sinistres graves :

- Loi Log-Normal
- Loi Pareto généralisée
- Loi Pareto tronquée à droite
- Loi Weibull

Nous calibrons les paramètres de chacune de ces lois par deux méthodes : la méthode des moments (*MME*) et la méthode de maximum de vraisemblance (*MLE*). Nous nous basons sur plusieurs critères pour retenir la "meilleure" parmi ces distributions.

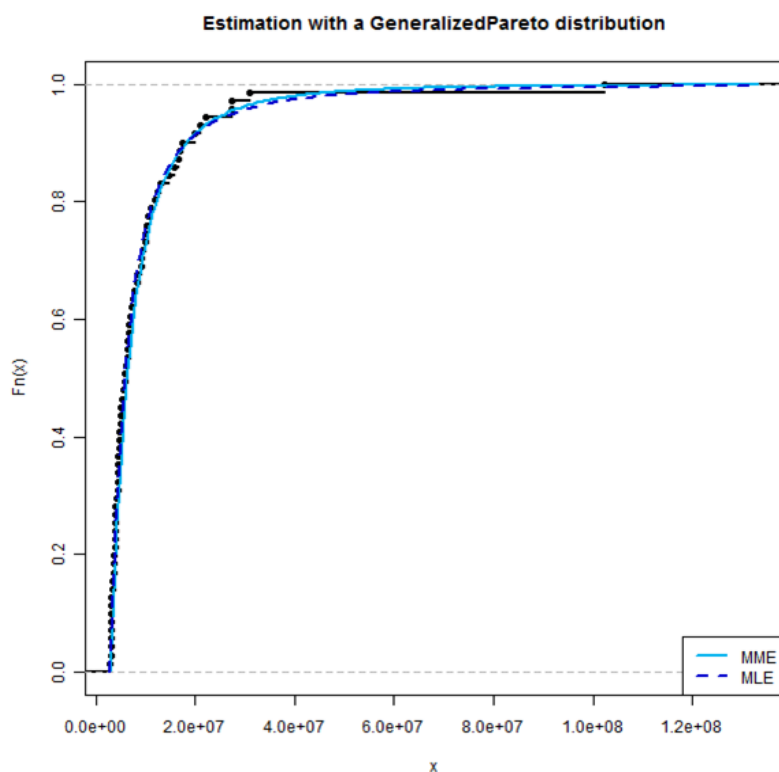
- Critère *AIC*
- Distance de Cramér-Von Mises
- Distance de Kolmogorov Smirnov

Nous traçons également les fonctions de répartition théoriques (à comparer à la fonction de répartition empiriques) et les diagrammes Quantile-Quantile (*Q-Q plots*) pour faciliter la sélection.

Les deux méthodes *MME* et *MLE* sont détaillées dans l'annexe B, l'estimation des paramètres de loi *GEV* par ces deux méthodes sont présentée dans l'annexe C et enfin, les critères de sélection de la distribution la plus appropriée sont expliqués dans l'annexe D.

Nombres d'IBNyR

Nous appliquons la méthode de Schnieper pour estimer les nombres d'IBNyR. L'idée de Schnieper sur les montants agrégés a été présentée parmi les méthodes agrégées de provisionnement. Ici, nous

FIGURE 4.3 – Exemple : *fitting* d'une distribution par MME et MLE

appliquons Schnieper sur les nombres de graves. Il faut noter que la méthode Schnieper de base sur les montants tendent à séparer les effets d'*IBNeR* et les effets d'*IBNyR*. Ici, la méthode Schnieper sur les nombres sert à estimer les nombres d'*IBNyR*.

Rappelons la décomposition de Schnieper :

$$C_{i,1} = N_{i,1} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

$$C_{i,j} = C_{i,j-1} - D_{i,j} + N_{i,j} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n \quad \text{et } j = 2, \dots, n$$

Ici, le triangle C est le triangle cumulés des "graves" (vision dynamique), N est le triangle de passages d'attritionnel à grave ou des graves déclarées tardivement. D est le triangle de passages de grave à attritionnel. La décomposition de Schnieper se traduit comme suit : Pour une année de survénance i donnée, le nombre de sinistres graves à l'année de développement j (nombre de sinistres survenus en année i dont la charge à l'année de développement j est supérieure ou égale au seuil grave) est égal au nombre de sinistres graves à l'année de développement $j - 1$, plus le nombre de sinistres graves tardifs (survenus en i mais déclarés en $i + j$) et de sinistres dont le statut change d'attritionnel à grave en passant de l'année de développement $j - 1$ à j , moins les sinistres vus comme graves à l'année de développement $j - 1$ mais retombent en dessous du seuil grave à l'année de développement j .

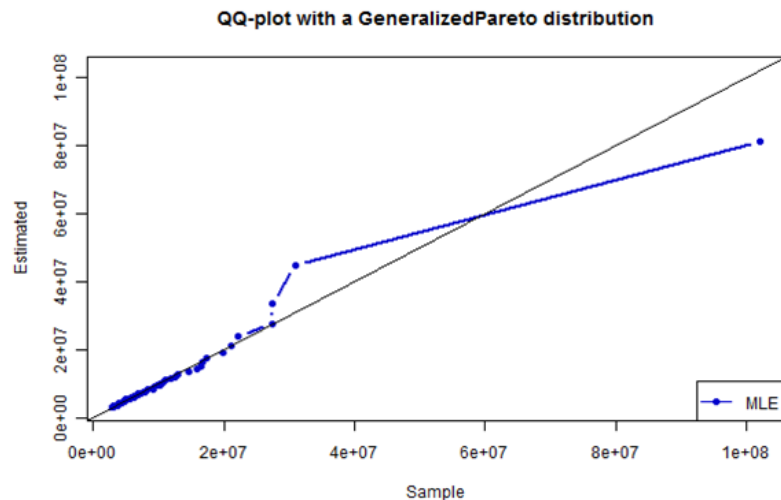


FIGURE 4.4 – Exemple de Q-Q plot

Mathématiquement, cela se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 N_{i,1} &= \sum_{k|AY(k)=i} \mathbb{1}\{C_{k,1} \geq T_{\text{Atypical}}\} \\
 N_{i,j} &= \sum_{k|AY(k)=i} \mathbb{1}\{C_{k,j-1} < T_{\text{Atypical}}, C_{k,j} \geq T_{\text{Atypical}}\}, \quad \forall j = 2, \dots, n \\
 D_{i,1} &= 0 \\
 D_{i,j} &= \sum_{k|AY(k)=i} \mathbb{1}\{C_{k,j-1} \geq T_{\text{Atypical}}, C_{k,j} < T_{\text{Atypical}}\}, \quad \forall j = 2, \dots, n
 \end{aligned}$$

Remarque 4.2.5. Rappelons que l'ensemble des sinistres graves connus (reported) à l'année courante n est K_n . Les formules ci-dessus restent valables pour tous les sinistres, que ce soient notifiés ou tardifs, i.e. $k \in K_n \cup \overline{K}_n$ où \overline{K}_n est l'ensemble des sinistres tardifs non-connus à l'année courante (IBNyR).

Remarque 4.2.6. $N_{i,1}$ correspond au nombre de sinistres graves survenus à l'année i et déclarés cette même année (année de développement $j = 1$). $D_{i,1}$ est le nombre de sinistres qui passent de grave à attritionnel, dûs au dégonflement de leur charge, dès l'année de développement 1 (ce qui n'est pas possible). Il est donc mis à 0 par défaut.

Remarque 4.2.7. Pour les sinistres déclarés tardivement, nous les enregistrons (dès leur notification) quand même à partir de leur année de survenance (i.e. l'année de développement $j = 1$), comme expliqué dans la sous-section 3.3. Ainsi la formule de $D_{i,j}$ inclut à la fois les sinistres étant grave dès sa survenance, déclarés tardivement et ceux dont la charge a gonflé pour passer d'attritionnel à grave.

Les deux hypothèses de Schnieper restent inchangées :

$$E[N_{i,j} | \mathcal{D}_{i+j-1}] = E_i \lambda_j$$

$$E[D_{i,j} | \mathcal{D}_{i+j-1}] = X_{i,j-1} \delta_j$$

Par contre, le vecteur d'exposition doit être bien choisi pour assurer la cohérence avec le triangle de nombres. En effet, la première hypothèse suggère que le nombre de passages d'attritionnel à grave doit être proportionnel à l'exposition de l'année de survenance considérée (le coefficient de proportionnel λ_j dépend de l'année de développement j).

Remarque 4.2.8. Dans *Future Losses*, nous avons pris le vecteur de primes retraitées de différents effets (effet tarifaire + effet d'inflation) comme vecteur d'exposition. Ce choix est discutable puisque la prime retraitée n'est pas forcément proportionnelle au nombre attendu de sinistres graves déclarés tardivement ou passant d'attritionnel à grave. En effet, les montants de sinistres graves ne sont pas homogènes, ils peuvent varier de 3 million à 100 million par exemple. Une année où on a collecté beaucoup de primes ne correspond pas forcément à une année avec beaucoup de sinistres graves mais plutôt à une année avec un ou deux sinistres très graves. Toutefois, nous n'avons pas d'autres indicateurs plus pertinents pour l'exposition. D'ailleurs, dans l'optique Best Estimate, le nombre d'IBNyR estimé sera multiplié par une sévérité qui est aussi une moyenne sur des montants ultimes des sinistres graves, toutes années de survenance confondues. Le choix du vecteur de primes comme vecteur d'exposition est retenu pour la suite.

Comparaison des deux modèles

	Modèle 1	Modèle 2
IBNeR	Méthode ligne à ligne sur la base historique des sinistres	
	Développement direct à l'ultime grâce au ratio P/I	Passant par les années de développement (Chain-Ladder)
IBNyR	Méthode agrégée avec données externes : vecteur d'exposition	
	Méthode Bornhuetter-Ferguson pour les nombres	Méthode Schnieper pour les nombres

TABLE 4.2 – Modèle 1 vs Modèle 2

4.3 Test et validité des hypothèses des deux modèles

Nous discutons dans cette section la validité des deux modèles de référence en testant leurs hypothèses et en comparant leur projection d'IBNR avec l'historique de sinistres sur plusieurs branches. Bien que les résultats renvoyés par ces deux modèles ne soient pas directement comparables à cause des deux visions différentes de sinistres graves, nous les représenterons sur une même échelle pour mieux comprendre le mécanisme de fonctionnement et les limites des deux modèles.

Modèle 1

Projection d'*IBNeR*

Pour les sinistres dont la charge est supérieure au seuil grave, la projection directe à l'ultime par une régression linéaire sur le ratio P/I subit beaucoup de critiques. Une droite ne semble pas adaptée à décrire la relation entre le facteur de développement à l'ultime (noté fd) et le ratio P/I . Le R^2 du modèle dans les cas de test les plus favorables ne dépasse pas 0,2. Plus généralement, le ratio P/I ne suffit pas lui-même pour estimer le développement à l'ultime, ni les passages par années de développement. Sur le graphique ci-dessous, nous voyons que le facteur de développement à l'ultime suggéré par le modèle linéaire ne peut pas dépasser 1, ce qui entraînerait probablement une sous-estimation des *IBNeR*.

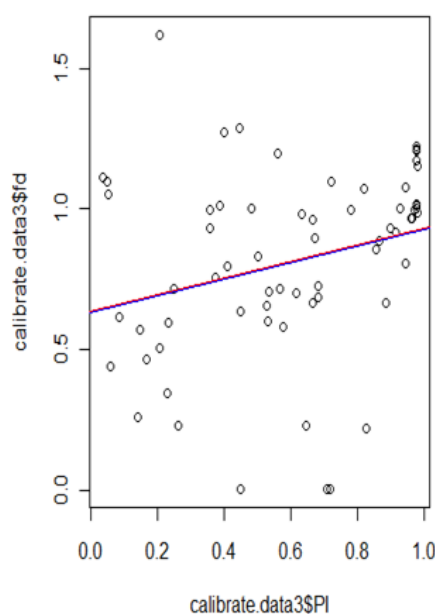


FIGURE 4.5 – Exemple : facteur de développement à l'ultime en fonction du ratio P/I

J'ai essayé d'ajouter le montant de charge et/ou l'année de développement comme aux facteurs explicatifs dans la régression linéaire mais cela n'a pas amélioré le pouvoir explicatif du modèle. Les modèles *GLM* n'étaient non plus appropriés. [2] a proposé dans son mémoire des versions stochastiques pour dépasser la non-adaptation d'une régression linéaire. L'idée principale est de former des zonages (soit scinder les P/I en intervalles et chercher une distribution des fd sur chaque intervalle, soit identifier les zones où la relation entre fd et P/I se caractérise mieux). Ces approches s'adaptent mieux à notre situation mais les zonages sur un nombre assez limité de points peuvent entraîner un

sur-apprentissage dans le modèle.

Dans les deux cas extrêmes où $P/I < 0,02$ ou $P/I > 0,98$, le modèle propose de prendre une moyenne des facteurs de développement historiques. Sur certaines branches telles que l'aviation, nous n'avons quasiment pas de données de sinistres appartenant à ces deux cas extrêmes pour faire le calibrage.

Pour les sinistres dont la charge reste inférieure au seuil grave, appliquer un facteur de développement moyen \widehat{fd} directement à l'ultime est trop brutal. L'idée de définir une probabilité P pour qu'un sinistre dont la charge actuelle est inférieure au seuil repasse au-dessus à l'ultime et une probabilité $(1 - P)$ dans le cas où l'ultime en reste en dessous, avec les facteurs de développement à l'ultime $\widehat{fd}_1, \widehat{fd}_2$ correspondants, est intéressante, mais poserait aussi un problème de calibration sur peu de données et nécessiterait une simulation Monte Carlo sur l'ensemble des sinistres pour avoir le *Best Estimate*. Si nous appliquons la moyenne du facteur de développement à l'ultime ($P \times \widehat{fd}_1 + (1 - P) \times \widehat{fd}_2$) à chacun des sinistres, nous revenons à appliquer \widehat{fd} . L'approche probabiliste n'apporte aucune valeur ajoutée dans ce dernier cas.

Projection d'IBNyR

La projection d'IBNyR dépend de la projection d'IBNeR puisque la sévérité sera calibrée sur les montants de charges ultimes individuelles et ces dernières dépendent de la projection d'IBNeR. C'est la première limite du modèle. Une erreur d'estimation sur la projection d'IBNeR pourrait entraîner une erreur beaucoup plus grave sur la projection d'IBNyR. J'en reparlerai avec plus de détail à la fin du mémoire.

La projection des nombres d'IBNyR repose sur la méthode ALR dont l'hypothèse fondamentale est la proportionnalité entre le vecteur d'exposition $(E_i)_{i=1,\dots,n}$ (le vecteur des primes retraitées ici) et le nombre de sinistres graves attendus :

$$E[X_{i,j} \mid X_{i,1}, \dots, X_{i,j-1}] = \alpha_j E_i$$

Rappelons que les α_j sont estimés par :

$$\widehat{\alpha}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} X_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} E_i}$$

Nous pouvons vérifier graphiquement si α_j peut être considéré comme indépendant des années de survénance i , c'est à dire que si $\frac{X_{1,j}}{E_1} \approx \dots \approx \frac{X_{n,j}}{E_n}$, pour $j = 1, \dots, n$.

Ci-dessous les résultats de test sur le triangle de nombres de sinistres graves dont la charge ultime sera supérieure au seuil grave. Je représente pour chacune des années de développement j les couples $(E_i, X_{i,j})$ (Je ne représente que les 9 premières années de développement car à partir de la 9^e année de développement, nous n'observons plus de nouveaux sinistres graves). Ils ne sont pas alignés et la droite de régression ne passe pas par l'origine. Si l'hypothèse ALR était satisfaite, nous devrions avoir, pour chacune des années de développement j , des points très proches de la droite $y = \alpha_j x$.

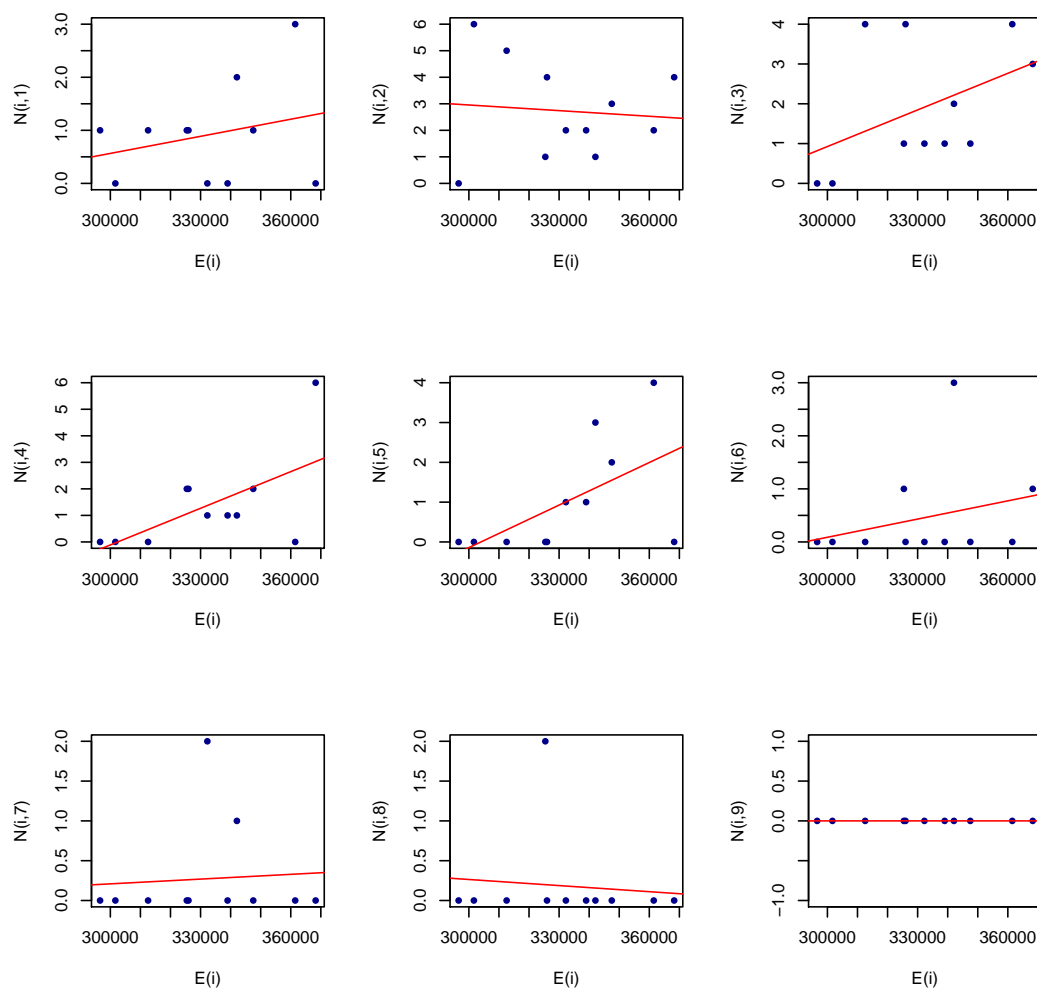


FIGURE 4.6 – Vérification de l'hypothèse ALR

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\widehat{\alpha}_j (\times 10^{-6})$	2,74	8,94	6,87	5,47	4,55	2,42	1,76	1,49	0,00	0,00	0,00

TABLE 4.3 – Les estimateurs de α_j par la méthode *ALR*

La méthode est sensible aux triangles de nombres qui sont a priori beaucoup plus volatils que ceux des montants. Surtout pour les sinistres graves avec trop peu d'observations et un comportement atypique, nous ne pouvons pas vérifier l'hypothèse *ALR* en nous basant sur nos observations historiques.

Modèle 2

Projection d' *IBNeR*

Le seuil d'*IBNeR* est choisie de façon que les facteurs de développement retenus soient plus ou moins homogènes. Nous analysons plus précisément ces facteurs de développement, comme avec la méthode Chain-ladder classique.

Hypothèse 4.3.1. (Hypothèse de proportionnalité)

Pour $j = 1, \dots, n-1$, les facteurs de développement sont indépendants des sinistres :

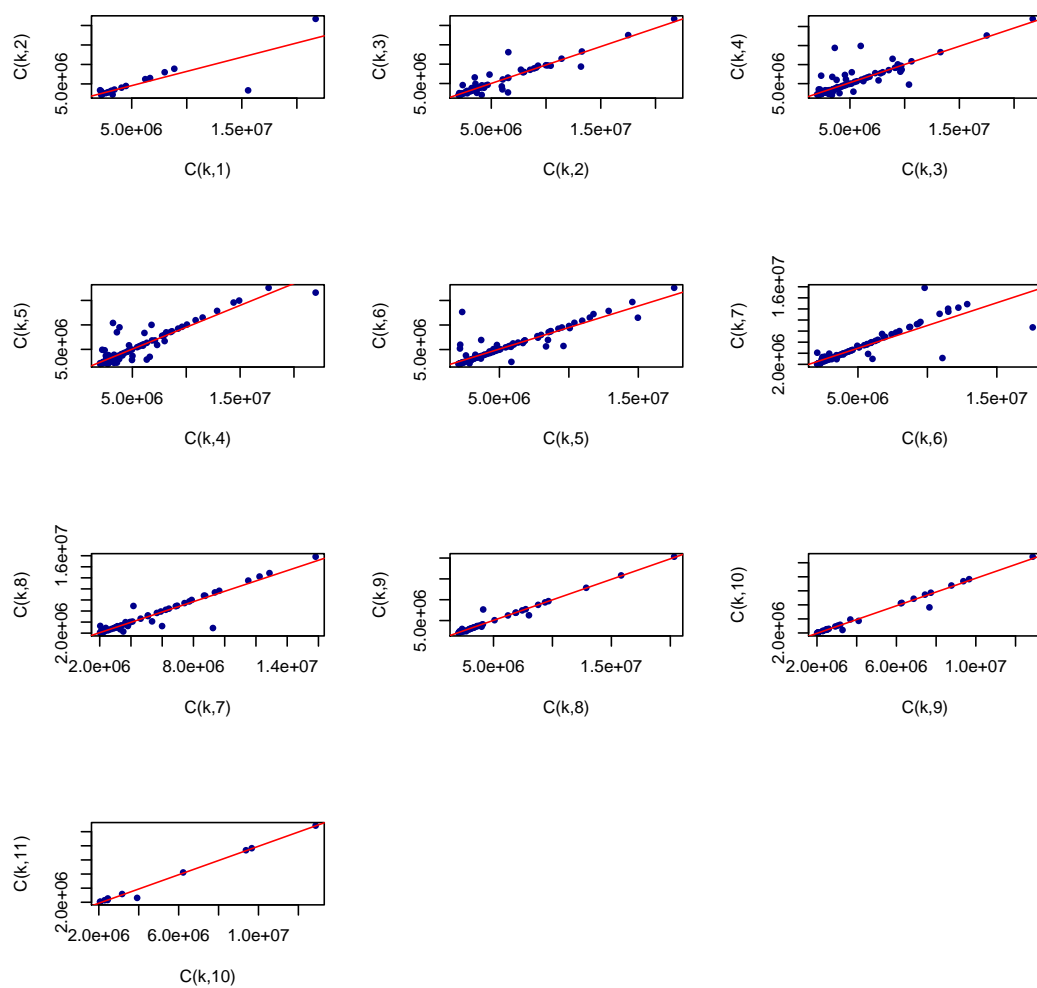
$$\frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \frac{C_{2,j+1}}{C_{2,j}} = \dots = \frac{C_{k,j+1}}{C_{k,j}} = \dots = \frac{C_{K,j+1}}{C_{K,j}}$$

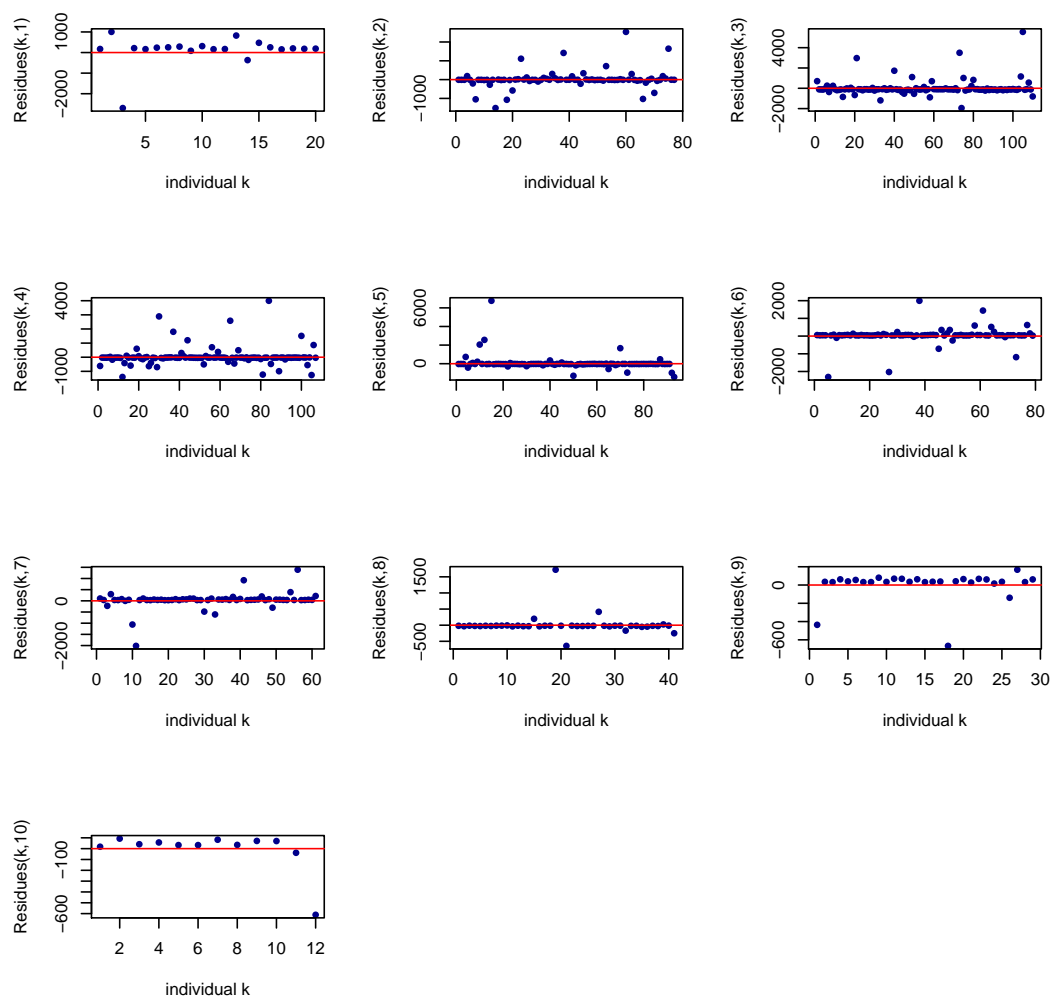
Remarque 4.3.1. Comme des link-ratios ne sont calculés qu'à partir des montants de charge au-delà du seuil d'*IBNeR*, les $C_{k,j}$ retenus pour notre test doivent aussi être supérieures ou égales au seuil d'*IBNeR*.

La validation de Chain-ladder ligne à ligne est empirique, puisqu'il s'agit d'une méthode déterministe. Nous utilisons le *C-C plot*² et le graphique des résidus³ pour valider les hypothèses de Chain-ladder ligne à ligne. Je présente ci-dessous le résultat de test sur la branche Responsabilité civile.

Une analyse statistique sur la moyenne et l'écart-type du facteur de développement pour chacun des passages $j \rightarrow j+1$ a été faite.

-
2. graphe représentant des couples $\{(C_{k,j}, C_{k,j+1}), k \in \mathcal{K}_n(j+1)\}$
 3. graphe des couples $\left\{\left(k, \frac{C_{k,j} - E_j[C_{k,j}]}{\sigma_j(C_{k,j})}\right), k \in \mathcal{K}_n(j)\right\}$

FIGURE 4.7 – *C-C plots Chain-ladder ligne à ligne*

FIGURE 4.8 – Graphes de résidus *Chain-ladder* ligne à ligne

j	$F_{k,j}$		
	moyenne	écart-type	variation
1	0,998	0,259	0,259
2	1,026	0,235	0,229
3	1,089	0,410	0,376
4	1,050	0,361	0,344
5	1,079	0,534	0,495
6	1,010	0,193	0,191
7	1,002	0,176	0,175
8	1,021	0,149	0,146
9	0,981	0,071	0,072
10	0,970	0,097	0,100

$variation = \text{écart-type}/\text{moyenne}$

TABLE 4.4 – Analyse statistique du facteur de développement (branche *Liability*)

Nous remarquons que même après l'application du seuil d'*IBNeR* pour éliminer les facteurs de développement jugés non-pertinents pour caractériser l'évolution des sinistres graves, les statistiques ci-dessus ne sont pas totalement satisfaisantes. Le rapport écart-type/moyenne des facteurs est élevé sur certaines années (50 % pour le passage de l'année de développement $j = 4$ à 5 dans l'exemple ci-dessus). Bien évidemment, le choix du seuil d'*IBNeR*, tout comme celui du seuil grave, est un compromis entre le nombre d'observations retenues et la qualité d'ajustement.

Un autre problème avec les *link-ratios* \hat{f}_j est qu'ils sont estimés à partir des facteurs de passages individuels au-delà du seuil d'*IBNeR*, mais s'applique ensuite à l'ensemble des sinistres. Le fait d'appliquer les *link-ratios* calibrés au-delà du seuil d'*IBNeR* aux sinistres dont la charge courante est en dessous du seuil d'*IBNeR* par exemple, est non-justifiable. Cependant, dans *Future Losses*, on ne retient à la fin de la projection d'*IBNeR* que les sinistres dont la charge ultime est supérieure ou égale au seuil grave. Donc si l'hypothèse implicite que le seuil d'*IBNeR* sépare définitivement les sinistres graves et attritionnels est vraie, nous allons au final éliminer les sinistres issus des développements non-justifiables. Ainsi, le fait d'appliquer des *link-ratios* "graves" aux sinistres "attritionnels" n'aurait pas d'impacts sur le résultat final.

Projection d'*IBNyR*

Pour l'estimation des nombres d'*IBNyR*, nous testons les hypothèses de Schnieper. Comme avec Chain-ladder, nous testons principalement les hypothèses de proportionnalité. Nous voulons vérifier si :

$$\frac{N_{1,j}}{E_1} \approx \dots \approx \frac{N_{n,j}}{E_n} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n,$$

$$\frac{D_{1,j}}{C_{1,j-1}} \approx \dots \approx \frac{D_{n,j}}{C_{n,j-1}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, n$$

Encore une fois, le fait de travailler avec les nombres rend difficile la validité des hypothèses. Pour

les années de développement récentes, le nombre de passage d'attritionnel à grave ou inversement de grave à attritionnel est très limité. Nous ne pouvons jamais vérifier les hypothèses de Schnieper sur les triangles de nombres.

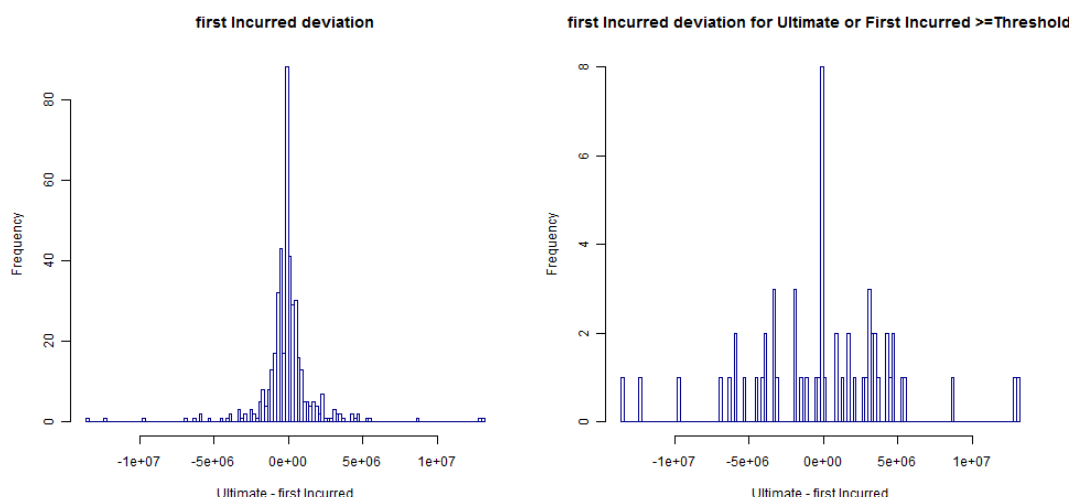
4.3.1 Comparaison des résultats entre deux modèles

Bien que les deux modèles de référence ne soient pas directement comparables, nous essayons de les appliquer à quelques branches d'activité et représenter les résultats sur un même repère pour mieux appréhender le contexte. Je présente ci-dessous le test effectué sur la branche Dommage (*Property*) en utilisant les données de 2005 à 2014.

Avant d'appliquer les deux modèles, j'essaie d'avoir une première idée sur la qualité de l'estimation de la charge. Si l'estimation Dossier/Dossier a été bien faite dès le début, le montant de charge saisi en première année de développement (i.e. l'année de survenance du sinistre) doit être proche du montant ultime. J'introduis donc l'indice *FID* (*First Incurred Deviation*) pour quantifier la première estimation faite pour la charge. Pour un sinistre donné, c'est la différence entre la charge ultime et la charge évaluée en première année de développement.

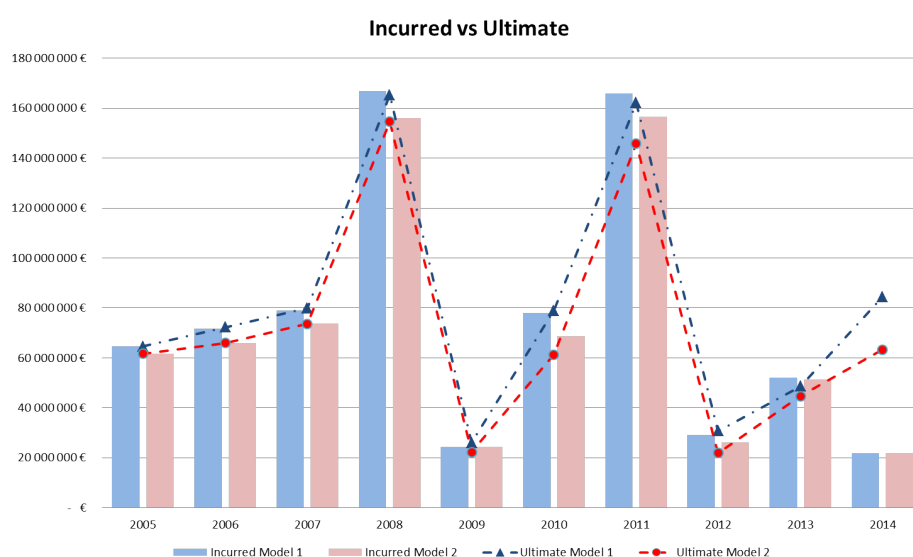
$$FID_k = C_{k,n} - C_{k,1}$$

Bien évidemment, cet indice ne peut être calculé que pour les sinistres déjà clos, c'est-à-dire ceux dont la charge à l'ultime est connue. Je présente ci-dessous la distribution de l'indice *FID* pour deux ensembles de sinistres différents : les sinistres clos disponibles dans notre base de données (charge au-dessus du seuil d'extraction de 500 000 €) et les sinistres rentrant dans la provision d'*IBNeR* des sinistres graves (les sinistres dont le montant de charge a dépassé le seuil grave de 3 000 000 € dans leur vie).

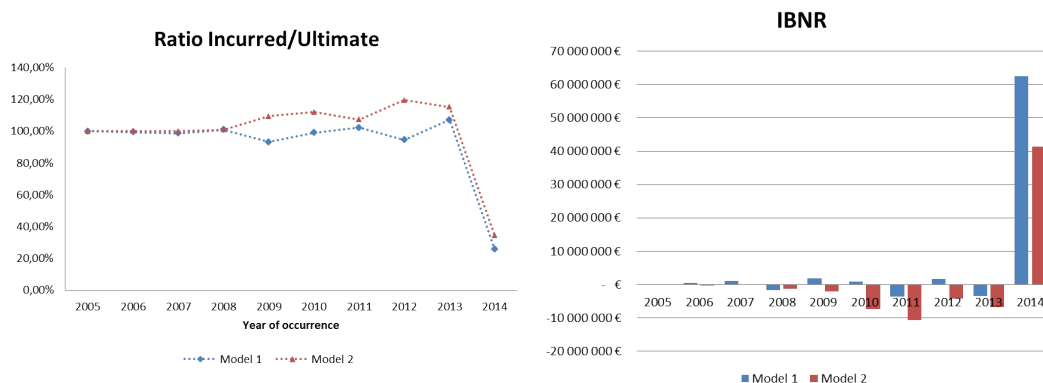


Dans tous les deux cas, la distribution de *FID* semble être centré autour de 0. Cela suggère qu'a priori il n'y a pas de tendance significative de sur-estimation ou de sous-estimation de la charge pour la branche Dommage. S'il n'y a pas de changement de politique de provision Dossier/Dossier ou de tendance de sinistres, nous ne devrions pas avoir un gros montant d'*IBNeR*.

Pour vérifier notre intuition, nous analysons les estimations faites par les deux modèles. Comme le modèle 1 provisionne une classe de sinistres plus large (il suffit pour un sinistre de toucher le seuil grave au moins une fois dans sa vie pour être provisionné), il paraît logique que les charges D/D (*Incurred*) et les charges ultimes (*Ultimates*) sont plus élevées dans le modèle 1. L'écart entre deux modèles n'est pas très grand dans cet exemple, sauf pour l'année 2014 où il y a encore beaucoup d'incertitudes. Sur la branche Responsabilité civile par exemple, nous constatons un écart plus important entre deux modèles.



Sur les années de survenance anciennes (de 2005 à 2008), comme la majorité des sinistres connus sont clos et qu'il ne nous reste quasiment pas de sinistres tardifs, les ratio Charge/Ultime sont très proches de 1. De 2009 à 2013, les deux modèles prévoient les ratios assez différents. Dans le modèle 1 où nous provisionnons les sinistres graves selon la vision d'AXA CS, nous attendons une baisse de la charge à l'ultime, alors que dans le modèle 2 où la notion grave est dynamique, nous attendons une charge de sinistres graves plus élevée à l'ultime qu'à la date de vision 2014. L'année la plus récente (2014) devrait potentiellement être suivie d'un gros montant de réserve, surtout en termes d'*IBNyR*. Tous les deux modèles prévoient des ratios Charge/Ultime très faibles (aux alentours de 20 - 30 %). Dans tous les deux modèles, le montant d'*IBNeR* est faible. Ce résultat est cohérent avec la distribution du *FID*.



4.4 Modèle 2 ajusté : Version adaptée à la vision grave chez AXA CS

Les tests faits dans le chapitre précédent nous aident plutôt à mieux appréhender les principes des deux modèles de référence qu'à comparer leurs prédictions sur les montants de réserves, puisqu'ils se basent sur deux visions différentes de sinistres graves. Pour pouvoir faire des comparaisons dans un même repère, il nous faut ajuster le modèle 2 à la vision grave chez AXA CS. Redéfinir la vision grave entraîne à la fois une modification de la base de sinistres servant au provisionnement et un changement de méthodologie de provisionnement. Je résume le modèle 2 ajusté dans deux premières sous-sections et mentionner certaines de ses limites dans la troisième sous-section.

4.4.1 Base de sinistres pour la projection d'*IBNeR*

Dans le modèle 2, nous cherchons à développer tous les sinistres au-delà du seuil d'extraction 100 000 €, en n'utilisant que des facteurs de développement des charges au-delà du seuil d'*IBNeR*. Dans le modèle 2 ajusté, nous nous restreignons à une base de sinistres plus petite : ceux dont la charge a touché le seuil grave de 3 000 000 €. Par contre, nous allons utiliser tous les facteurs de développement sous-jacents (il n'y a plus de seuil d'*IBNeR*). En effet, avec la modification de la vision grave, la notion d'*IBNeR* change aussi. Dans le modèle 2, *IBNeR* est lié à l'évolution de tous les sinistres, c'est-à-dire que le montant d'*IBNeR* peut être dû aux sinistres qui n'ont pas touché le seuil grave dans le passé, ce que nous classons à la catégorie *IBNyR* dans la vision d'AXA CS. Dans le modèle 2 ajusté, l'effet d'*IBNeR* n'est capté qu'à travers l'évolution de la charge de sinistres ayant dépassée le seuil grave.

Après développer tous les sinistres à l'ultime, nous retenons dans le modèle 2 seulement les sinistres dont la charge ultime sera supérieure ou égale au seuil grave. La projection d'*IBNeR* dans le modèle 2 ajusté raisonne de façon différente. Nous partons d'une base de sinistres ayant le statut grave et à l'ultime nous les gardons tous. La réserve d'*IBNeR* est simplement la différence entre la somme des charges ultimes et la somme des charges D/D connues aujourd'hui.

Remarque 4.4.1. Nous venons de voir que la réserve *IBNeR* dans le modèle 2 contient déjà une part d'*IBNyR* dans le modèle 2 ajusté. En effet, la décomposition du montant *IBNR* en *IBNeR* et *IBNyR*

n'a pas été bien spécifiée dès le début puisqu'il y en a plusieurs possibilités et chacune présente des avantages et des inconvénients. Celle qui semble être la plus cohérente avec la vision grave chez AXA CS traite des passages d'attritionnel à grave dans la partie IBNyR pour faciliter la projection d'IBNeR qui ne repose que sur une base de sinistres dont le nombre d'éléments est fixe et connu. Pourtant ce dernier n'est fixe que pour une année de vision. L'année prochaine, il y aura à nouveau des sinistres qui passent d'attritionnel à grave et qui rentrent donc dans l'ensemble des sinistres dont nous devons prévoir l'évolution afin d'en tirer le montant d'IBNeR. Nous ne pouvons pas comparer les estimations d'IBNeR (et ainsi celles d'IBNyR) faites en deux années différentes comme ce que nous avons habitude à faire avec les IBNR. Par exemple si la provision est parfaite, nous aurons :

$$Incurred_n + IBNR(n) = Incurred_{n+1} + IBNR(n + 1)$$

mais nous n'aurons pas une telle égalité avec les IBNeR ou les IBNyR.

$$Incurred_n + IBNeR(n) \neq Incurred_{n+1} + IBNeR(n + 1)$$

4.4.2 Projection d'IBNyR : lien entre Schnieper et ALR

Avec le changement au niveau de la projection d'IBNeR, nous sommes obligés à changer la projection d'IBNyR. Premièrement, la sévérité calibrée sur les charges ultimes prédites via la projection d'IBNeR doit être revue. Deuxièmement, les triangles de nombres de graves ne sont plus les mêmes.

Comme les sinistres graves provisionnés dans cette optique n'ont pas nécessairement une charge ultime supérieure ou égale au seuil grave, il s'avère difficile de travailler avec un seul triangle de nombres. La solution la plus simple est de procéder comme le modèle 1, c'est-à-dire de développer deux triangles de nombres : l'un pour le cas où la charge ultime est supérieure ou égale au seuil grave, l'autre pour le cas contraire.

Concernant la façon dont on développe chacun des triangles, on ne peut plus utiliser la méthode Schnieper. La raison est que cette méthode déduit des passages de grave à attritionnel via le triangle D tandis que nous voulons également les provisionner si nous restons avec la vision "une fois grave toujours grave". Intuitivement, nous devons enlever le triangle D de Schnieper. D'ailleurs, le triangle N de Schnieper n'est pas identique au triangle dans la méthode ALR (pour simplifier, on suppose qu'on ne distingue pas les 2 cas $C_{i,J} \geq T_{Atypical}$ et $C_{i,J} < T_{Atypical}$). En effet, le triangle d'ALR est le triangle de nouveaux graves alors que N est celui des dépassements du seuil grave. Un sinistre peut dépasser le seuil grave plusieurs fois dans sa vie mais son statut ne peut changer d'attritionnel à grave qu'une seule fois au maximum, selon la vision d'AXA CS. Prenons un exemple simple pour mettre en lumière cette différence : soit un seuil grave de 3 000 000 € et un sinistre dont la charge (en million d'euros) évolue comme suit :

j		1	2	3	4	5
Charge $C_{i,j}$		1	4	2	5	2
Schnieper	N	(+1)		(+1)		
	D	(+1)			(+1)	
ALR		(+1)				

TABLE 4.5 – Schnieper vs ALR

Le sinistre est compté 2 fois dans le triangle N , 2 fois dans le triangle D mais une seule fois dans le triangle d' ALR . Le comptage est en réalité un peu plus compliqué lors que nous distinguons deux triangles ALR . Si le sinistre est clos après l'année de développement $j = 5$ par exemple, sa charge ultime est 2, inférieure au seuil grave $T_{Atypical} = 3$, donc il est compté une fois dans le triangle ALR des sinistres dont la charge ultime est inférieure au seuil grave. Si sa charge ultime est 3 plutôt que 2, il doit être compté une fois dans l'autre triangle ALR .

Alors que la construction du triangle N de Schnieper et celle d' ALR sont différentes, la méthodologie pour les développer reste la même. L'hypothèse commune est que le nombre incrémental dans le triangle est proportionnel à l'exposition, pour toutes les années de survenance.

Finalement, pour passer de la vision dynamique des sinistres graves à celle retenue par AXA CS, nous passons de la méthode Schnieper à ALR . Donc, le module Projection d' $IBNyR$ du modèle 2 ajusté est identique à celui du modèle 1. La différence des deux modèles viennent de la projection d' $IBNeR$.

Remarque 4.4.2. Dans la méthode Schnieper, on fait l'hypothèse que le nombre de dépassements du seuil grave (vision dynamique de sinistres graves) est proportionnel à l'exposition. Dans la méthode ALR , on suppose que le nombre de nouveaux graves est proportionnel à l'exposition. Ce sont deux hypothèses différentes et celle dans la méthode ALR paraît intuitivement plus logique.

4.4.3 Limites du modèle

Le modèle 2 ajusté, étant une version adaptée à la vision de sinistres graves chez AXA CS, présente par défaut les limites du modèle 2 citées dans la sous-section 4.3. Il contient une limite supplémentaire dans le module de projection d' $IBNeR$. Nous avons choisi d'enlever le seuil d' $IBNeR$ pour prendre en compte tous les facteurs de développement individuels disponibles dans la base. Par contre, ces derniers sont plus hétérogènes que ceux au-delà du seuil d' $IBNeR$. Cela influe l'estimation des facteurs Chain-ladder. Si maintenant nous gardons le seuil d' $IBNeR$ pour filtrer les facteurs individuels, le développement ligne à ligne posera un problème avec les sinistres contenant des passages de charge en dessous de ce seuil.

Un autre défaut, encore plus grave et commun pour le modèle 2 et sa version ajustée, est l'application d'un vecteur de *link-ratios* à tous les sinistres et calibrer une loi de sévérité dessus pour caractériser le coût à l'ultime d'un sinistre grave. Comme précisé Mahon dans son papier [3],

"it is incorrect to apply average severity loss development factors to individual losses, and call the result the ultimate value of that claim. This has to do with the nature of loss development of an

individual claim."

Bibliographie

- [1] Mario V. Wüthrich & Michael Merz. Stochastic claim reserving methods in insurance. *Wiley Finance*, 2008.
- [2] ? Développement ligne à ligne par le ratio P/I . *Document interne AXA*.
- [3] John B. Mahon. Transition matrix theory and individual claim loss development. *Casualty Actuarial Society Forum*, Spring 2005.

"To find out what happens when you change something, it is necessary to change it."

Box, Hunter, and Hunter, Statistics for Experimenters (1978)

5

Idées d'amélioration

Sommaire

5.1	Projection d'IBNeR	70
5.1.1	Chain-ladder ligne à ligne et choix de pondération	70
5.1.2	Munich Chain-ladder et son adaptation aux données ligne à ligne	78
5.1.3	Méthode retenue	84
5.2	Projection d'IBNyR	84
5.2.1	Méthode Chain-ladder	85
5.2.2	Méthode ALR	86
5.2.3	Méthode de sinistres espérés (a priori ALR)	87
5.2.4	Méthode Bornhuetter-Ferguson mixte	87
5.2.5	Méthode Cape-Cod	88
5.2.6	Méthode Benktander-Hovinen	89
5.2.7	Synthèse	89
	Bibliographie	92

Nous avons parcouru les 4 premiers chapitres qui nous fournissent (quasiment) tous les éléments disponibles et nécessaires pour répondre au problème de provisionnement des sinistres graves chez AXA CS. Nous avons revu dans le chapitre 2 le cadre général du provisionnement non-vie, suivi des méthodes utilisées dans la pratique. Ensuite, nous avons étudié dans le chapitre 3 la théorie des valeurs extrêmes pour faire face au caractère "fréquence faible-coût élevé" des sinistres graves et les contraintes très spécifiques dans le choix de provisionnement chez AXA CS. Tous ces points particuliers rendent difficile l'application directe des méthodes vues dans le chapitre 2 et nous motivent à étudier les deux modèles de références développés chez AXA (modèle 1 et modèle 2 avec sa version ajustée), présentés dans le chapitre 4. Après avoir vérifié leurs hypothèses et les avoir testés sur nos

données réelles chez AXA CS, nous avons identifié leurs qualités et défauts. Je présenterai dans ce 5^e chapitre les améliorations apportées aux deux modèles de référence afin de dépasser leurs limites.

5.1 Projection d'*IBNeR*

5.1.1 Chain-ladder ligne à ligne et choix de pondération

Je commence par la méthode Chain-ladder ligne à ligne avec certaines limites citées précédemment. Rappelons notre situation face au développement des sinistres graves. Ci-dessous le graphique (branche Dommage (*Property*)) représentant les facteurs de développements individuels des sinistres graves (en enlevant quelques valeurs aberrantes) en fonction de la charge à laquelle s'applique les facteurs. Nous distinguons les facteurs des différentes années de développement par couleur. Nous

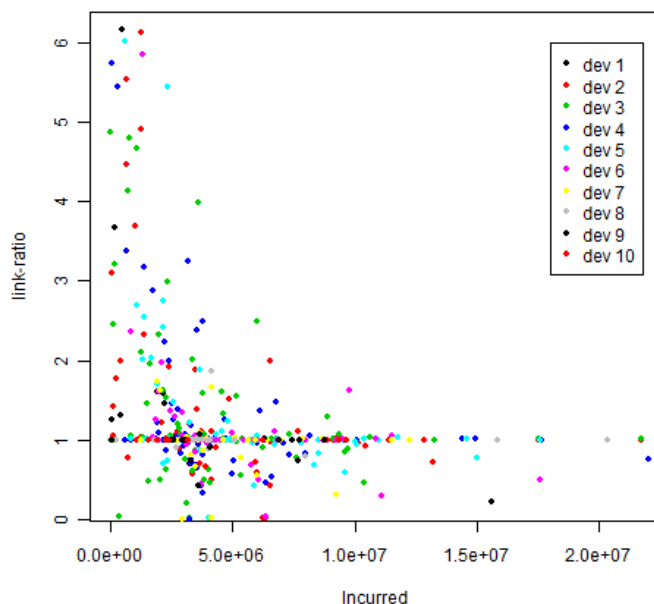


FIGURE 5.1 – facteurs de développement individuels

constatons que les facteurs sont volatils. Pour les montants de charges faibles, l'effet est remarquable. Pour les montants de charges élevés, nous observons moins de volatilité. Cela peut être dû au fait que les charges de montant élevé se stabilisent plus vite. Cependant, il faut noter que nous avons très peu de données sur les très gros montants afin de quantifier sa volatilité. Concernant les années de développement, il est aussi difficile de mesurer leur impact sur les facteurs individuels.

Je cherche dans cette section des idées pour modifier Chain-ladder ligne à ligne du modèle 2 ajusté

(pour la projection d'IBNeR). Plutôt qu'un seul *link-ratio* par année de développement appliqué à tous les sinistres, il s'avère plus logique d'appliquer un *link-ratio* spécifique à chacun des sinistres. Ce dernier est toujours une moyenne pondérée des facteurs de développement individuels, mais le choix de pondération repose cette fois-ci sur la proximité entre le sinistre à développer et les sinistres de référence. L'intuition est que les sinistres avec les montants de charges relativement proches vont se développer de manière similaire.

Remarque 5.1.1. Cette idée de pondération peut être vue comme un mixte de Chain-ladder avec l'approche *k-plus proches voisins* et la méthode *Incremental Claim Development (ICD)*.

Nous supposons avoir dans notre historique deux sinistres : l'un développé de $C_{1,1} = 3$ (million d'euros) à $C_{1,2} = 30$ ($F_{1,1} = 10$) l'autre de $C_{2,1} = 30$ à $C_{2,2} = 60$ ($F_{2,1} = 2$). Nous remarquons qu'un sinistre peut évoluer facilement de 3 à 30, mais il est beaucoup moins probable pour un sinistre dont la charge actuelle est 30 de passer à 300 (dans cet exemple, il se développe à 60). Maintenant on veut développer un sinistre de $C_{3,1} = 35$. Quel facteur de développement peut-on utiliser ? Intuitivement, nous pensons qu'il y aurait plus de chance qu'il se développe avec un facteur de développement proche de $F_{2,1} = 2$.

Première proposition

Notons toujours $\mathcal{K}_n(j)$ le sous-ensemble des sinistres dont la charge de l'année de développement j est connue à l'année courante n ¹. Ma première proposition est la suivante :

Pour $k \in \mathcal{K}_n(j) \setminus \mathcal{K}_n(j+1)$,

$$\widehat{C_{k,j+1}} = C_{k,j} \widehat{F_{k,j}}$$

avec :

$$\widehat{F_{k,j}} = \frac{1}{\sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+1)} w_{k,k'}^j} \sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+1)} w_{k,k'}^j F_{k',j} \quad (5.1)$$

où $F_{k',j} = \frac{C_{k',j+1}}{C_{k',j}}$ et $w_{k,k'}^j = \frac{1}{|C_{k,j} - C_{k',j}|^\beta}$ mesurant la proximité entre k et k' .

Condition : $\beta \geq 0$. Le cas $\beta = 0$ correspond à Chain-ladder avec l'équi-pondération des facteurs de développement individuels. Plus β est grand, plus la proximité des deux sinistres k et k' au niveau de la charge joue dans l'estimation.

La formule ci-dessus ne permet que de prévoir la charge du sinistre k dans un an ; c'est-à-dire que si la dernière charge connue est $C_{k,j}$, nous ne pouvons prévoir que $C_{k,j+1}$ et non pas $C_{k,j+2}$. En effet, $\widehat{F_{k,j+1}}$ va dépendre de $w_{k,k'}^{j+1} = \frac{1}{|C_{k,j+1} - C_{k',j+1}|^\beta}$ qui est non-connu puisque $C_{k,j+1}$ est non-connu. Je propose donc de remplacer $C_{k,j+1}$ par son estimateur $\widehat{C_{k,j+1}}$ pour estimer $w_{k,k'}^{j+1}$. $\widehat{F_{k,j+1}}$ est donc estimé par :

$$\widehat{\widehat{F_{k,j+1}}} = \frac{1}{\sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+2)} \widehat{w_{k,k'}^{j+1}}} \sum_{k' \in \mathcal{K}_n(j+2)} \widehat{w_{k,k'}^{j+1}} F_{k',j+1} \quad (5.2)$$

1. voir 4.2.1 pour les propriétés de $\mathcal{K}_n(\cdot)$

Pour un sinistre k dont la dernière charge connue correspond à l'année de développement j (i.e. survenu à l'année $n - j + 1$), nous estimons sa charge ultime par :

$$\widehat{C}_{k,n} = C_{k,j} \widehat{F}_{k,j} \widehat{F}_{k,j+1} \dots \widehat{F}_{k,n-1}$$

Pour choisir β , nous allons utiliser nos observations historiques. Pour chacun des sinistres, nous supposons que nous ne connaissons (au plus) que le montant de charge pour les deux premières années de développement (Pour la première année de développement, il y a beaucoup de charges initialisées à 0 donc il vaut mieux partir de la deuxième année de développement). Nous utilisons 5.1 et 5.2 pour prévoir les charges des autres années de développement, ensuite les comparer aux vrais montants.

Pour un sinistre $k \in \mathcal{K}_n(3)$ et une valeur β donnée,

$$Erreur_k(\beta) = \frac{1}{J-2} \sum_{j=3}^J |C_{k,j} - \widehat{C}_{k,j}(\beta)|,$$

où $3 \leq J \leq n$ est l'année de développement la plus récente où le montant de charge est connu.

$$J = J(k) = \max \{ 3 \leq j \leq n \mid k \in \mathcal{K}_n(j) \}$$

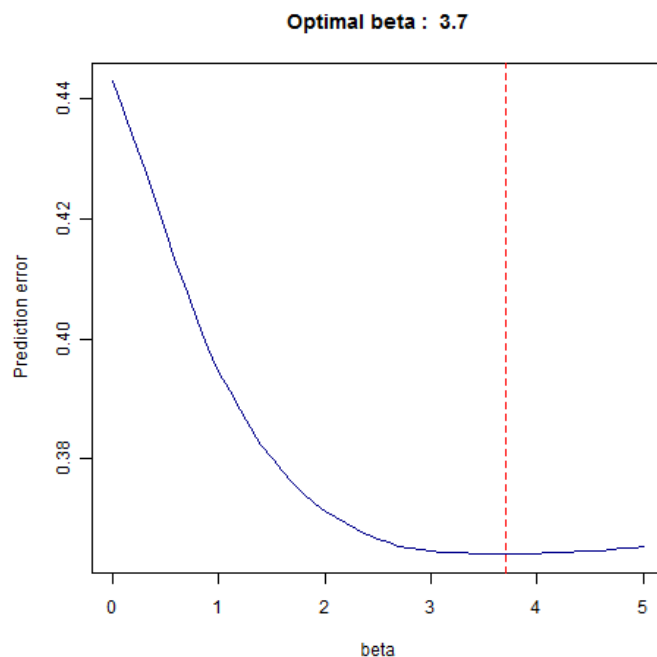
$$\beta^* = \operatorname{argmin}_{\beta \geq 0} \left\{ \sum_{k \in \mathcal{K}_n(3)} Erreur_k(\beta) \right\}$$

Exemple : Pour la branche Dommage, $\beta^* = 3,7$

Après avoir β^* , on peut développer tous les sinistres non-clos à l'ultime. On en déduit l'*IBNeR* pour chacun des sinistres et l'*IBNeR* agrégé par année de survenance. Le vecteur des montants ultimes sera utilisé pour estimer la sévérité des *IBNyR* (2 cas : Ultime \geq seuil grave et Ultime $<$ seuil grave).

Après avoir testé cette première proposition et avoir analysé le développement de chacun des sinistres, j'ai constaté quelques limites :

- limite 1 : Lorsque la charge du sinistre à développer et celle d'un sinistre de référence sont identiques, nous ne pouvons pas calculer le poids w . Ce problème peut être résolu en mettant arbitrairement l'écart entre la charge des deux sinistres à 1 plutôt que 0.
- limite 2 : le paramètre β mesure l'intensité de l'impact de la proximité des sinistres sur leur développement. Cependant un seul paramètre β ne peut pas résoudre tous nos problèmes. Par exemple si nous voulons développer un sinistre dont la charge $C_{k,j}$ est 30 000 000 € et que nous disposons dans l'historique un seul sinistre de référence dont la charge correspondante est exactement 30 000 000 €. Supposons que ce sinistre a été ouvert à 30 000 000 € au lieu de 3 000 € du à une erreur de saisie. Le paramètre β est calibré en minimisant l'erreur d'estimation sur l'ensemble des sinistres. Il est probable que β^* n'arrive pas à discriminer ce cas atypique. Il peut être assez grand. Pour cette grande valeur de β , le sinistre de référence atypique va beaucoup influencer sur le développement du sinistre à développer ; sachant qu'il y a d'autres sinistres de référence dont la charge est proche de 30 000 000 € (32 500 000 € par exemple) dont le développement est plus courant et plus probable pour le sinistre à développer (avec un facteur de développement égal à 1,1 par exemple).

FIGURE 5.2 – Choix optimal de β

Deuxième proposition

Pour palier aux problèmes constatés ci-dessus, j'ai modifié la définition de proximité des sinistres et ai rajouté un paramètre "tolérance" noté ε . Ainsi le poids $w_{k,k'}^j$ est redéfini comme suit :

$$w_{k,k'}^j = \frac{1}{\max\left\{\varepsilon, \left|\frac{C_{k,j} - C_{k',j}}{C_{k,j}}\right|\right\}^\beta}$$

Avec un paramètre $\varepsilon > 0$, nous arrivons à dépasser la première limite (problème de division par 0 lorsque $C_{k,j} = C_{k',j}$) sans avoir besoin de remplacer arbitrairement une distance 0 par 1. Le but d'introduire le paramètre ε ne se limite pas à ce stade. Il a aussi pour vocation de "déformer" l'échelle de distance et donc de corriger la deuxième limite.

Nous choisissons en fait de minorer la distance entre les charges des deux sinistres par ε , ainsi de majorer le poids par $\varepsilon^{-\beta}$. D'une telle manière nous réduirons l'impact des sinistres de référence identiques ou très proches du sinistre à développer. Revenons à l'exemple d'un sinistre de charge actuelle 30 000 000 € à développer. Si jamais il y a un sinistre de référence dont la charge correspondante est exactement 30 000 000 € et que son développement est atypique, nous sommes sûrs que son facteur de développement aberrant est pondéré identiquement que les facteurs "normaux" des autres sinistres au voisinage de 30 000 000 €. Lorsque la distance est supérieure à ε , nous pénalisons les facteurs de développement individuels comme dans la première proposition.

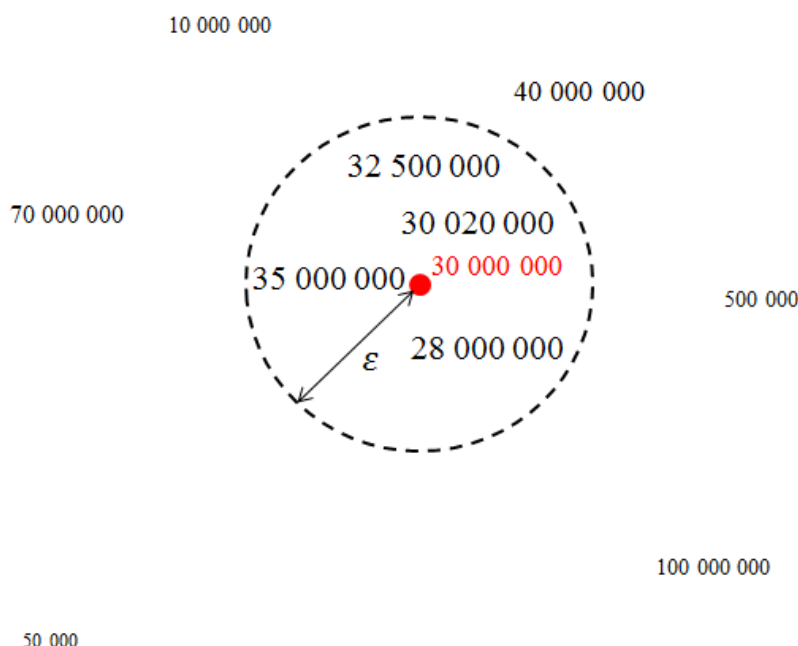


FIGURE 5.3 – Distance entre sinistres

J'illustre ci-dessus notre exemple dans lequel nous devons développer un sinistre dont la charge actuelle est 30 000 000 € (point rouge), disposant dans l'historique de 10 sinistres de référence (en noir). Dans cet exemple, nous donnons le même poids aux facteurs de développement correspondant aux montants de charge au voisinage ε de 30 000 000 €. En dehors de ce voisinage, les facteurs individuels sont pondérés normalement en fonction de la distance de la charge correspondante avec 30 000 000 €. Sur le graphique, plus les chiffres sont de petite taille, plus l'impact du facteur correspondant est faible.

Nous remarquons bien que la définition de distance a été également modifiée dans la formule de $w_{k,k'}^j$. On a normalisé la différence entre les deux charges par la charge du sinistre à développer. Ce choix de normalisation a pour but d'étendre le voisinage des sinistres de charge élevée, dont l'effectif est généralement faible. En effet, le dénominateur dans la formule de $w_{k,k'}^j$ peut se réécrire comme suit :

$$\left(\frac{\max\{\varepsilon|C_{k,j}|, |C_{k,j} - C_{k',j}|\}}{|C_{k,j}|} \right)^\beta$$

Prenons un exemple dans lequel $\varepsilon = 0, 1$ et $C_{k,j} = 3000000$ €. Nous allons pondérer identiquement les sinistres de référence dont la charge est comprise entre 2 700 000 € et 3 300 000 €. Nous pouvons également garder la définition de distance comme dans la proposition 1 en prenant une tolérance stricte $\tilde{\varepsilon} = 300\,000$ pour avoir le même voisinage $3\,000\,000 \pm \tilde{\varepsilon}$ €. Sur ce voisinage, le nombre des sinistres est en général suffisamment grand pour faire une moyenne fiable des facteurs de développement individuels.

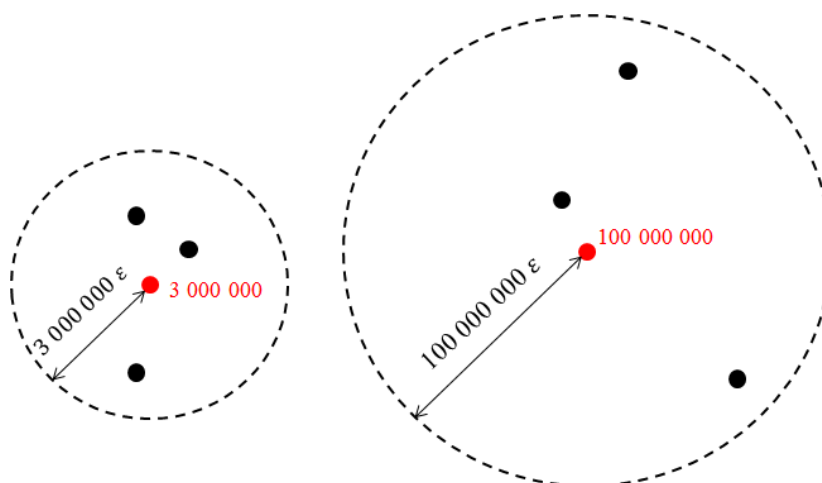


FIGURE 5.4 – Voisinage d'un sinistre à développer

Si maintenant nous devons développer un autre sinistre dont la charge est 100 000 000 €, la deuxième définition de distance donnera le même poids aux sinistres de référence dont la charge est comprise entre 99 000 000 € à 101 000 000 €, alors que la première définition de distance avec une tolérance stricte $\varepsilon = 300\,000$ nous donne un voisinage de 99 700 000 à 100 300 000. Le nombre de sinistres de référence appartenant au premier voisinage est certainement plus grand qu'au deuxième et donc plus probable de pouvoir réduire l'impact d'un facteur de développement aberrant. Plus la charge de sinistre à développer est élevée, moins nous disposons de sinistres de référence dont la charge en est proche donc plus nous avons besoin d'étendre le voisinage.

Remarque 5.1.2. *La proposition 2 nous permet d'étendre le voisinage d'un sinistre de charge élevée mais ne peut pas le faire pour un sinistre dont la charge est anormalement petite. Par exemple si la charge du sinistre à développer est 5 000 €, les facteurs de développement de référence correspondant aux sinistres au voisinage de $5\,000 \pm \varepsilon$ €. Ce voisinage est trop petit et ça risque de n'avoir qu'un ou deux sinistres de référence dedans, sachant que leurs facteurs de développement peuvent être très atypiques. Bien que nous n'avons rarement des sinistres "graves" dont la charge (à un moment dans sa vie) était aussi faible, nous voulons les éliminer de notre estimation d'IBNR.*

Les facteurs de développement atypiques peuvent provenir de l'erreur d'enregistrement comptable, d'une trop mauvaise évaluation faite par le gestionnaire de sinistres ou d'un codage spécifique (pour identifier les bordereaux par exemple), mais aussi de l'évolution réelle des sinistres (surtout sur la branche Responsabilité civile). D'une part nous voulons exclure de l'étude les facteurs aberrants provenant de l'erreur comptable, du codage spécifique. D'autre part, nous ne voulons pas enlever tous les facteurs atypiques puisqu'ils peuvent refléter le caractère d'un sinistre grave. Ce compromis rend très délicat le traitement des valeurs aberrantes. Je pense qu'il n'y a pas d'algorithme qui peut bien traiter les développements aberrants et qui fonctionne sur toutes les branches d'activité. Le jugement de l'actuaire, avec l'aide des gestionnaires de sinistres si besoin, dans cette étape est crucial. C'est pour cette raison que j'ai implémenté dans l'outil de provisionnement une suggestion pour le traitement des facteurs atypiques (d'enlever ceux en dessous du quantile 5 % des facteurs négatifs et ceux au-dessus du quantile 95 % des facteurs positifs) mais j'ai laissé la décision finale à

l'utilisateur en lui fournissant les box-plots des facteurs individuels par année de développement.

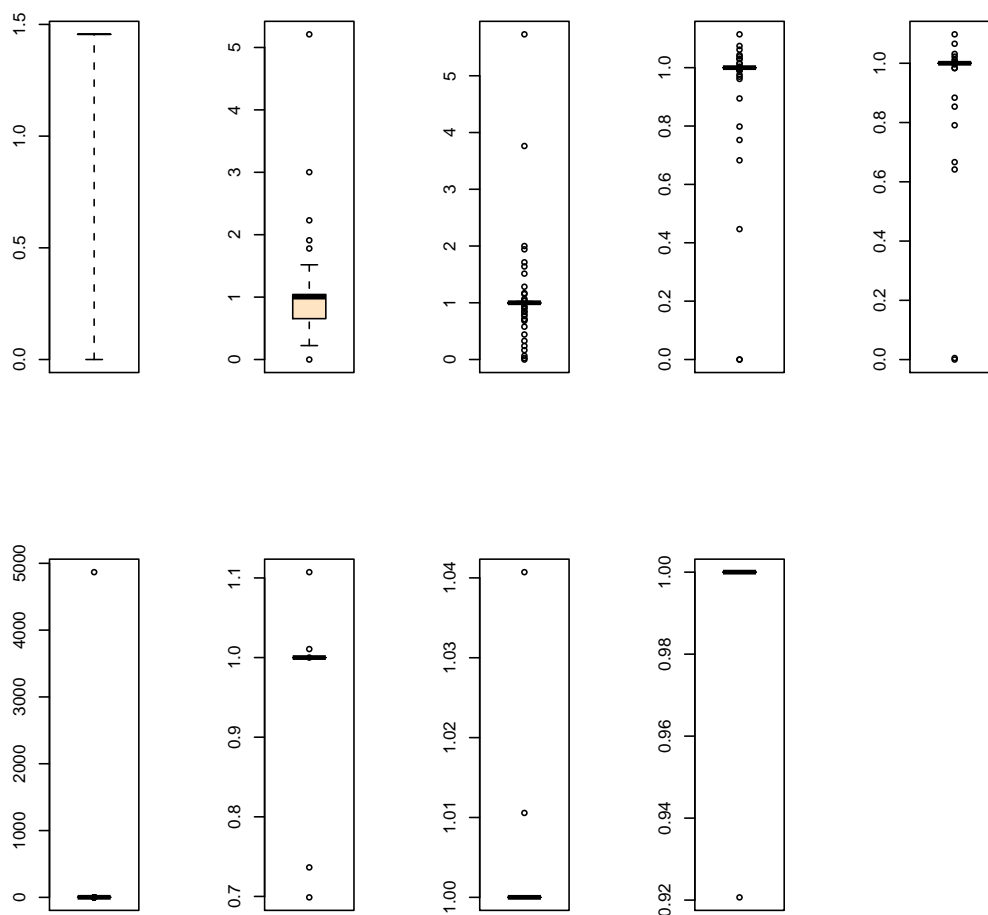


FIGURE 5.5 – boxplots des facteurs de développement individuels

Remarque 5.1.3. Dans les deux propositions, nous avons admis une hypothèse implicite que l'impact de la proximité des sinistres sur leur développement ne dépend pas de l'année de développement. Si nous voulons être plus précis, nous pouvons introduire les différents paramètres β_j pour différencier cet impact entre différentes années de développement. L'ajout de paramètres dans le modèle peut nous aider à mieux approcher la réalité mais nécessite plus d'estimations à faire et ainsi entraînerait plus d'erreur d'estimation. J'ai choisi de conserver un seul paramètre β dans le modèle.

Troisième proposition

Nous gardons les formules de la proposition 2 à une modification près. En effet, les facteurs individuels de référence proviennent des passages de la charge de sinistres graves mais à n'importe quel moment. Le comportement d'un sinistre grave peut changer complètement après le premier moment où il dépasse le seuil grave. C'est aussi pour cette raison que le modèle 2 a introduit la notion Seuil d'*IBNeR*. Ici, nous ne retenons plus ce seuil mais nous ne prenons en compte que les facteurs de développement individuels après le premier dépassement du seuil grave. C'est-à-dire que si un sinistre dépasse le seuil grave à la troisième année de développement par exemple, ses deux premiers facteurs de développement seront exclus de l'ensemble des facteurs de référence. Ce traitement fait perdre un certain nombre de facteurs de référence, mais nous assure que le comportement atypique d'un sinistre de référence avant son dépassement du seuil grave n'influe pas sur nos estimations de *link-ratios*.

Justification

Nous retenons la proposition 3 pour la suite et nous discutons maintenant son adéquation. En effet, toutes les explications faites ci-dessus viennent de notre intuition concernant le comportement des sinistres graves. Par conséquent, notre modèle mathématique pour l'estimation des *link-ratios* doit être remis en question. "Comment vérifions notre intuition sur la dépendance entre la proximité des sinistres et leur développement ?" La réponse est que nous n'en avons pas besoin. Rappelons que le paramètre β mesure l'impact de la proximité des sinistres sur leur développement et il est choisi pour minimiser l'erreur de prédiction sur l'historique des sinistres. Donc le choix de β est par sa définition suffisant pour justifier notre algorithme. S'il n'y a pas de dépendance entre les deux éléments mentionnés ci-dessus par exemple, le *backtest* sur l'historique nous indiquera que $\beta = 0$ renvoie une erreur d'estimation minimale.

Nous avons un algorithme pour sélectionner le "meilleur" β . Mais son calibrage dans les propositions 2 et 3 dépend du choix de la "tolérance" ε . Comment fixer ce paramètre ? Théoriquement nous pouvons aussi faire varier ε dans un intervalle suffisamment grand et sélectionner le "meilleur" $\beta(\varepsilon)$ auquel nous pouvons associer une erreur de prédiction renvoyée par le *backtest*. La valeur ε retenue est celle qui minimise l'erreur de prédiction. Dans l'implémentation de l'outil, cette approche est coûteuse en temps de calcul puisque nous devons calculer l'erreur pour plusieurs valeurs de ε et de β , sachant qu'une erreur est calculée sur tout l'historique de sinistres. J'ai donc effectué une analyse exploratoire sur le développement des sinistres historiques pour plusieurs branches d'activité afin de prédéfinir une valeur cohérente pour ε . Un bon a priori est $\varepsilon = 0,1$; c'est-à-dire que les sinistres dont la charge varie aux alentours de 10% de celle du sinistre à développer ont un même impact sur le développement de ce dernier. Bien évidemment, l'utilisateur a la possibilité de modifier ε en fonction de l'erreur de prédiction associée.

Remarque 5.1.4. La proposition 3 (et 2) de Chain-ladder ligne à ligne pour la projection d'*IBNeR* est inspirée des méthodes Chain-ladder, *k-plus proches voisins* (*kNN*), *Incremental Claim Development* (*ICD*) [1], toutes présentées dans le chapitre 2. Je récapitule leur points communs et leurs différences.

Différemment de la version Chain-ladder ligne à ligne implémentée dans l'outil *Future Losses*, celle de la proposition 3 (appelée désormais Chain-ladder ligne à ligne) pondère des facteurs de

développement individuels de manières différentes, selon la proximité de la charge entre le sinistre à développer et les sinistres de référence.

L'idée d'introduire la proximité de charges de sinistres est inspirée de la méthode ICD. La différence est que dans ICD nous développons directement les montants de charges (ou de payés) incrémentaux alors que Chain-ladder ligne à ligne développe les montants cumulés à travers l'estimation des link-ratios. Nous pensons que passer par des links-ratios nous permet de développer plus logiquement les sinistres de montants de charges élevés que nous n'avons probablement pas observés dans l'historique. La proximité dans ICD est mesurée sur tous les montants incrémentaux passés entre 2 sinistres. Chain-ladder ligne à ligne quantifie leur proximité en se basant sur les charges (montants cumulés) de la vision courante. Enfin, Chain-ladder ligne à ligne propose une nouvelle mesure de distance et introduit une tolérance pour déformer la distance absolue.

En introduisant une tolérance dans le calcul de distance, nous formons un voisinage autour de la charge de sinistre à développer dans lequel l'impact des sinistres de référence est identique. L'idée est similaire de l'approche kNN. La première différence est que dans Chain-ladder ligne à ligne le nombre de "plus proches voisins" n'est pas fixé à une certaine valeur k . La deuxième différence est que dans Chain-ladder ligne à ligne, le développement des sinistres de référence en-dehors de ce voisinage a quand même un impact sur le sinistre à développer, mais moins fort que l'impact des sinistres dans le voisinage. Comme nous n'avons pas beaucoup d'observations, nous voulons les utiliser toutes (en leur donnant des poids différents).

5.1.2 Munich Chain-ladder et son adaptation aux données ligne à ligne

Jusqu'à présent, les idées d'amélioration que j'ai proposées ne concernent que la version Chain-ladder ligne à ligne dans le modèle 2 ajusté. Nous disposons dans le modèle 1 de la méthode du ratio P/I dont l'approche est intéressante. Une idée naturelle est de chercher à la combiner avec la méthode Chain-ladder ligne à ligne, c'est-à-dire d'utiliser à la fois le développement de la charge D/D et celui des payés. Malheureusement, aucune méthode ligne à ligne trouvées dans la littérature (de ma connaissance) procède d'une telle manière. Cependant, Chain-ladder ligne à ligne est une méthode développée sur la base de la méthode agrégée Chain-ladder classique et dans la classe des méthodes agrégées, nous disposons de la méthode Munich Chain-ladder qui est en fait une amélioration de Chain-ladder en utilisant à la fois des charges et des payés. Je n'ai pas présenté Munich Chain-ladder dans le préambule sur le provisionnement des sinistres (chapitre 2) puisqu'elle ne fait pas partie des méthodes classiques selon mon point de vue. Je présenterai donc dans cette sous-section ses principes fondamentaux et ensuite ma proposition pour l'adapter au développement ligne à ligne.

Munich Chain-ladder

Si nous appliquons Chain-ladder séparément sur les montants (cumulés) de Payés (notés P pour *Paid*) et de Charges (notés I pour *Incurred*), nous n'obtiendrons pas toujours les mêmes ultimes. En effet, les projections sont faites indépendamment sur le triangle des P et le triangle des I . Nous constatons en réalité que ces deux facteurs ne se développent pas indépendamment. Pour une année d'origine i donnée, le ratio P/I peut varier au cours des années de développement mais converge vers

1 à l'ultime. Cependant, lorsqu' on applique Chain-ladder séparément sur le triangle P et I , on verra que si le dernier ratio P/I observé est au-dessus (respectivement en dessous) de 1, il en reste au-dessus (respectivement en dessous) à l'ultime. D'où un écart des montants ultimes estimés sur le triangle des P et celui des I .

Pour résoudre ce problème, Quarg et Mack ont proposé Munich Chain-ladder dans [2]. Leur idée est que pour une année de développement j , si le ratio P/I d'une année de survénance i est au-dessus de la moyenne sur toutes les années de survénance, un des trois scénarios suivants se réalisent pour le passage à l'année de développement $j + 1$:

- I se développera plus vite que prédit Chain-ladder pour rattraper l'écart avec P ,
- P se développera plus lentement que prédit Chain-ladder pour réduire l'écart avec I ,
- les deux scénarios précédents se réalisent en même temps.

Idem, nous pouvons regarder le ratio I/P à une année de survénance i et, suivant son positionnement par rapport à la moyenne, prédire le développement du montant I et P de j à $j + 1$.

Formellement, nous étudions la corrélation entre les résidus de Pearson de P , I et de P/I , I/P .

Hypothèse 5.1.1. (Hypothèses MCL)

- [Indépendance entres différentes années de survénance, à la fois pour les payés et les charges] :

$$\{P_{1,j}, I_{1,j} | j = 1, \dots, n\}, \dots, \{P_{n,j}, I_{n,j} | j = 1, \dots, n\}$$

sont stochastiquement indépendants

- Il existe $f_1^P, \dots, f_{n-1}^P > 0, f_1^I, \dots, f_{n-1}^I > 0$ et $\sigma_1^P, \dots, \sigma_{n-1}^P > 0, \sigma_1^I, \dots, \sigma_{n-1}^I > 0$ tels que $\forall 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n - 1$ on a :

$$\begin{aligned} E[P_{i,j+1} | \mathcal{P}_j] &= f_j^P P_{i,j} \quad \text{et} \quad \text{Var}(P_{i,j+1} | \mathcal{P}_j) = (\sigma_j^P)^2 P_{i,j} \\ E[I_{i,j+1} | \mathcal{I}_j] &= f_j^I I_{i,j} \quad \text{et} \quad \text{Var}(I_{i,j+1} | \mathcal{I}_j) = (\sigma_j^I)^2 I_{i,j} \end{aligned}$$

- Il existe deux constantes λ^P et $\lambda^I > 0$ telles que $\forall 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n - 1$, on a :

$$\begin{aligned} E\left[\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \middle| \mathcal{B}_i(j)\right] &= f_j^P + \lambda^P \frac{\sigma\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \middle| \mathcal{P}_i(j)\right)}{\sigma(Q_{i,j}^{-1} | \mathcal{P}_i(j))} \left(Q_{i,j}^{-1} - E[Q_{i,j}^{-1} | \mathcal{P}_i(j)]\right) \\ E\left[\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} \middle| \mathcal{B}_i(j)\right] &= f_j^I + \lambda^I \frac{\sigma\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} \middle| \mathcal{I}_i(j)\right)}{\sigma(Q_{i,j} | \mathcal{I}_i(j))} \left(Q_{i,j} - E[Q_{i,j} | \mathcal{I}_i(j)]\right) \end{aligned}$$

avec comme notations :

- $\mathcal{P}_j = \{P_{i,k}; k \leq j, 1 \leq i \leq n\}$
- $\mathcal{I}_j = \{I_{i,k}; k \leq j, 1 \leq i \leq n\}$
- $\mathcal{B}_j = \{P_{i,k}, I_{i,k}; k \leq j, 1 \leq i \leq n\}$
- $Q_{i,j} = \frac{P_{i,j}}{I_{i,j}}$ et $Q_{i,j}^{-1} = \frac{I_{i,j}}{P_{i,j}}$
- $\sigma(X | C) = \sqrt{\text{Var}(X | C)}$

Remarque 5.1.5. *Comprons les hypothèses de Munich Chain-ladder à celles de Chain-ladder :*

- *La première hypothèse est plus forte que l'hypothèse de Chain-ladder classique faite séparément sur les payés et les charges puisqu'il nous faut ici une indépendance des couples (P, I) .*
- *La deuxième hypothèse est pareille que celle du modèle de Mack (version distribution-free de Chain-ladder).*
- *C'est la troisième hypothèse qui marque une différence nette de Munich Chain-ladder par rapport à Chain-ladder classique. Elle dit que conditionnellement aux observations historiques des payés et charges (les deux en même temps), les facteurs de développement des payés (resp. des charges) dépendent de la position relative du ratio I/P (resp. P/I) par rapport à sa moyenne.*

En notant

$$Res(X | C) = \frac{X - E[X | C]}{\sigma(X | C)}$$

le résidu de X conditionnellement à C , avec les propriétés :

$$E[Res(X | C) | C] = 0 \quad \text{et} \quad Var(Res(X | C) | C) = 1,$$

nous pouvons déduire des hypothèses MCL :

$$Corr\left(Res(Q_{i,j}^{-1} | \mathcal{P}_i(j)), Res\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} | \mathcal{P}_i(j)\right)\right) = \lambda^P$$

et

$$Corr\left(Res(Q_{i,j} | \mathcal{I}_i(j)), Res\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} | \mathcal{I}_i(j)\right)\right) = \lambda^I.$$

Donc λ^P (resp. λ^I) est le coefficient de corrélation linéaire entre les résidus de I/P (resp. P/I) et F^P (resp. F^I). C'est la clé de la méthode Munich Chain-ladder. Les paramètres sont estimés empiriquement : $\widehat{f_j^P}$, $\widehat{f_j^I}$, $\widehat{\sigma_j^P}$, $\widehat{\sigma_j^I}$ comme dans le modèle de Mack :

$$\begin{aligned} \widehat{f_j^P} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j}} \sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j} \frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma_j^P}^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} P_{i,j} \left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} - \widehat{f_j^P} \right)^2 \\ \widehat{f_j^I} &= \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j}} \sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j} \frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma_j^I}^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} I_{i,j} \left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} - \widehat{f_j^I} \right)^2 \end{aligned}$$

Les résidus $Res\left(\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} | \mathcal{P}_i(j)\right)$, $Res\left(\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} | \mathcal{I}_i(j)\right)$ et $Res(Q_{i,j}^{-1} | \mathcal{P}_i(j))$, $Res(Q_{i,j} | \mathcal{I}_i(j))$ sont respectivement estimés par :

$$\widehat{Res}(P_{i,j+1}) = \frac{\frac{P_{i,j+1}}{P_{i,j}} - \widehat{f_j^P}}{\widehat{\sigma_j^P}} \sqrt{P_{i,j}}, \quad \widehat{Res}(I_{i,j+1}) = \frac{\frac{I_{i,j+1}}{I_{i,j}} - \widehat{f_j^I}}{\widehat{\sigma_j^I}} \sqrt{I_{i,j}}$$

et

$$\widehat{Res}(Q_{i,j}^{-1}) = \frac{Q_{i,j}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1}}{\widehat{\rho}_j^P} \sqrt{P_{i,j}}, \quad \widehat{Res}(Q_{i,j}) = \frac{Q_{i,j} - \widehat{q}_j}{\widehat{\rho}_j^I} \sqrt{I_{i,j}}$$

avec

$$\widehat{q}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} P_{i,j}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} I_{i,j}},$$

$$\widehat{\rho}_j^{P^2} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j+1} P_{i,j} (Q_{i,j}^{-1} - \widehat{q}_j^{-1})^2 \quad \text{et} \quad \widehat{\rho}_j^{I^2} = \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j+1} I_{i,j} (Q_{i,j} - \widehat{q}_j)^2$$

Les estimateurs de λ^P et λ^I s'obtiennent avec la formule de corrélation linéaire :

$$\widehat{\lambda}^P = \frac{\sum_{i,j} \widehat{Res}(Q_{i,j}^{-1}) \widehat{Res}(P_{i,j+1})}{\sum_{i,j} \widehat{Res}(Q_{i,j}^{-1})^2} \quad \text{et} \quad \widehat{\lambda}^I = \frac{\sum_{i,j} \widehat{Res}(Q_{i,j}) \widehat{Res}(I_{i,j+1})}{\sum_{i,j} \widehat{Res}(Q_{i,j})^2}$$

Munich Chain-ladder ligne à ligne

Je propose dans ce paragraphe une version ligne à ligne de Munich Chain-ladder, qui relie Chain-ladder ligne à ligne et la méthode du ratio P/I . Contrairement à Chain-ladder ligne à ligne (version modèle 2 et 2 ajusté), la version individualisée de Munich Chain-ladder ne donne pas les mêmes résultats que Munich Chain-ladder. Je discuterai après la présentation de la méthode sa valeur ajoutée par rapport à Chain-ladder ligne à ligne.

Pour simplifier, nous donnons un poids identique à des facteurs de développement individuels, c'est-à-dire que nous gardons la vision du modèle 2 ajusté.

Les hypothèses sont très similaires des hypothèses de Munich Chain-ladder :

Hypothèse 5.1.2. (Hypothèses MCL ligne à ligne)

- [Indépendance entres différents sinistres, à la fois pour les payés et les charges] :

$$\{P_{1,j}, I_{1,j} \mid j = 1, \dots, n\}, \dots, \{P_{K,j}, I_{K,j} \mid j = 1, \dots, n\}$$

sont stochastiquement indépendants

- Il existe $f_1^P, \dots, f_{n-1}^P > 0, f_1^I, \dots, f_{n-1}^I > 0$ et $\sigma_1^P, \dots, \sigma_{n-1}^P > 0, \sigma_1^I, \dots, \sigma_{n-1}^I > 0$ tels que $\forall 1 \leq k \leq K$ et $1 \leq j \leq n-1$ on a :

$$E[P_{k,j+1} \mid \mathcal{P}_j] = f_j^P P_{k,j} \quad \text{et} \quad \text{Var}(P_{k,j+1} \mid \mathcal{P}_j) = (\sigma_j^P)^2 P_{k,j}^2$$

$$E[I_{k,j+1} \mid \mathcal{I}_j] = f_j^I I_{k,j} \quad \text{et} \quad \text{Var}(I_{k,j+1} \mid \mathcal{I}_j) = (\sigma_j^I)^2 I_{k,j}^2$$

- Il existe deux constantes λ^P et $\lambda^I > 0$ telles que $\forall 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n-1$, on a :

$$E \left[\frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} \middle| \mathcal{B}_k(j) \right] = f_j^P + \lambda^P \frac{\sigma \left(\frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} \middle| \mathcal{P}_k(j) \right)}{\sigma(Q_{k,j}^{-1} \middle| \mathcal{P}_k(j))} \left(Q_{k,j}^{-1} - E[Q_{k,j}^{-1} \middle| \mathcal{P}_k(j)] \right)$$

$$E \left[\frac{I_{k,j+1}}{I_{k,j}} \middle| \mathcal{B}_k(j) \right] = f_j^I + \lambda^I \frac{\sigma \left(\frac{I_{k,j+1}}{I_{k,j}} \middle| \mathcal{I}_k(j) \right)}{\sigma(Q_{k,j} \middle| \mathcal{I}_k(j))} \left(Q_{k,j} - E[Q_{k,j} \middle| \mathcal{I}_k(j)] \right)$$

Remarque 5.1.6. Dans cette version ligne à ligne, nous avons modifié les hypothèses sur la variance conditionnelle. Nous avons supposé que $\text{Var} \left(\frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} \middle| \mathcal{P}_k(j) \right) = (\sigma_j^P)^2$, indépendante de $P_{k,j}$ (idem pour I). Cette hypothèse est cohérente avec le choix d'équi-pondération des facteurs individuels.

Les estimateurs sont plus simples dans cette version ligne à ligne équi-pondérée :²

$$\widehat{f_j^P} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j+1)} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j+1)} \frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma_j^{P^2}} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j+1) - 1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j+1)} \left(\frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} - \widehat{f_j^P} \right)^2$$

$$\widehat{f_j^I} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j+1)} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j+1)} \frac{I_{k,j+1}}{I_{k,j}} \quad \text{et} \quad \widehat{\sigma_j^{I^2}} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j+1) - 1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j+1)} \left(\frac{I_{k,j+1}}{I_{k,j}} - \widehat{f_j^I} \right)^2$$

Les résidus $\text{Res} \left(\frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} \middle| \mathcal{P}_k(j) \right)$, $\text{Res} \left(\frac{I_{k,j+1}}{I_{k,j}} \middle| \mathcal{I}_k(j) \right)$ et $\text{Res}(Q_{k,j}^{-1} \middle| \mathcal{P}_{k,j})$, $\text{Res}(Q_{k,j} \middle| \mathcal{I}_{k,j})$ sont respectivement estimés par :

$$\widehat{\text{Res}}(P_{k,j+1}) = \frac{\frac{P_{k,j+1}}{P_{k,j}} - \widehat{f_j^P}}{\widehat{\sigma_j^P}}, \quad \widehat{\text{Res}}(I_{k,j+1}) = \frac{\frac{I_{k,j+1}}{I_{k,j}} - \widehat{f_j^I}}{\widehat{\sigma_j^I}}$$

et

$$\widehat{\text{Res}}(Q_{k,j}^{-1}) = \frac{Q_{k,j}^{-1} - \widehat{q_j^{-1}}}{\widehat{\rho_j^P}}, \quad \widehat{\text{Res}}(Q_{k,j}) = \frac{Q_{k,j} - \widehat{q_j}}{\widehat{\rho_j^I}}$$

avec

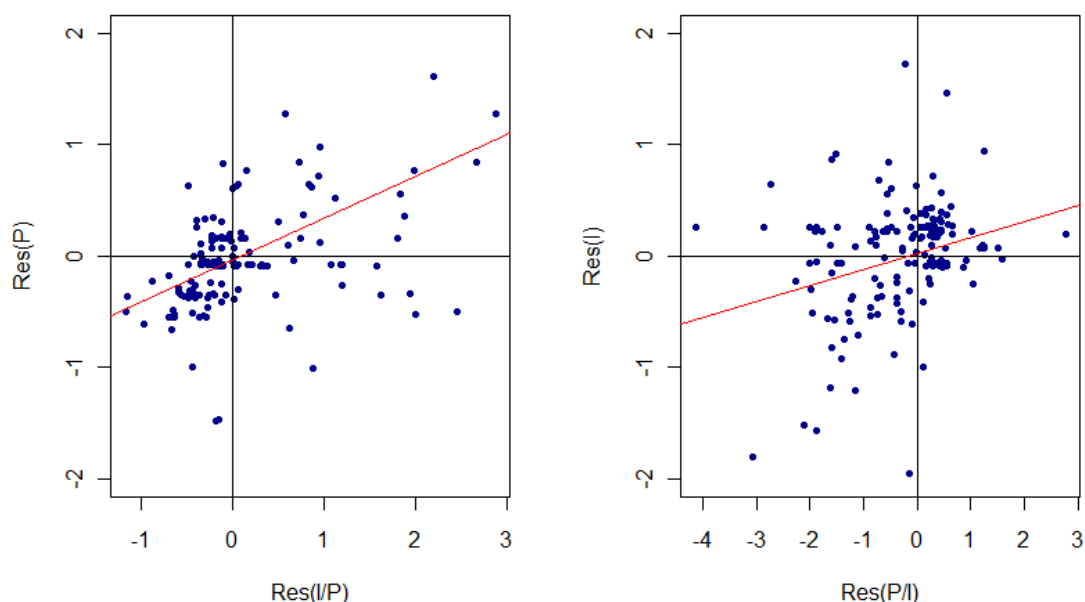
$$\widehat{q_j} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j)} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j)} \frac{P_{k,j}}{I_{k,j}},$$

$$\widehat{\rho_j^{P^2}} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j) - 1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j)} (Q_{k,j}^{-1} - \widehat{q_j^{-1}})^2 \quad \text{et} \quad \widehat{\rho_j^{I^2}} = \frac{1}{\#\mathcal{K}_n(j) - 1} \sum_{k \in \mathcal{K}_n(j)} (Q_{k,j} - \widehat{q_j})^2$$

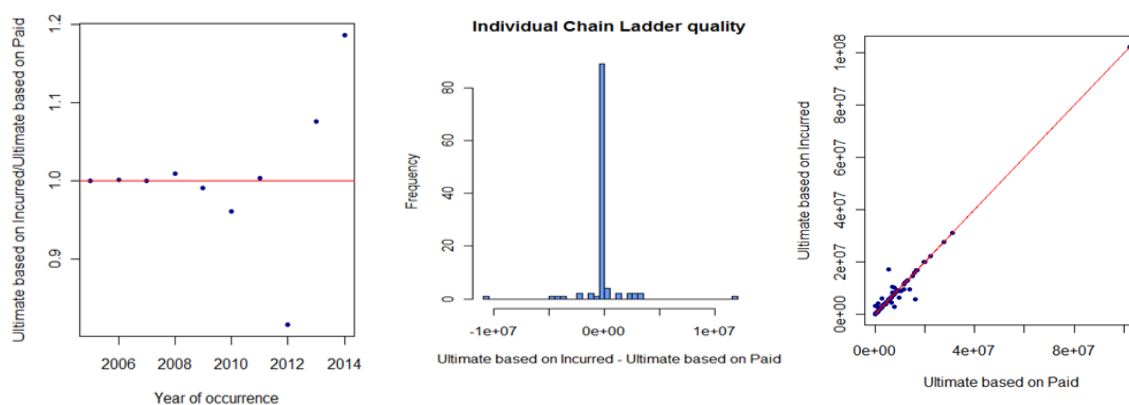
Les estimateurs de λ^P et λ^I s'obtiennent avec la formule de corrélation linéaire, comme dans Munich Chain-ladder.

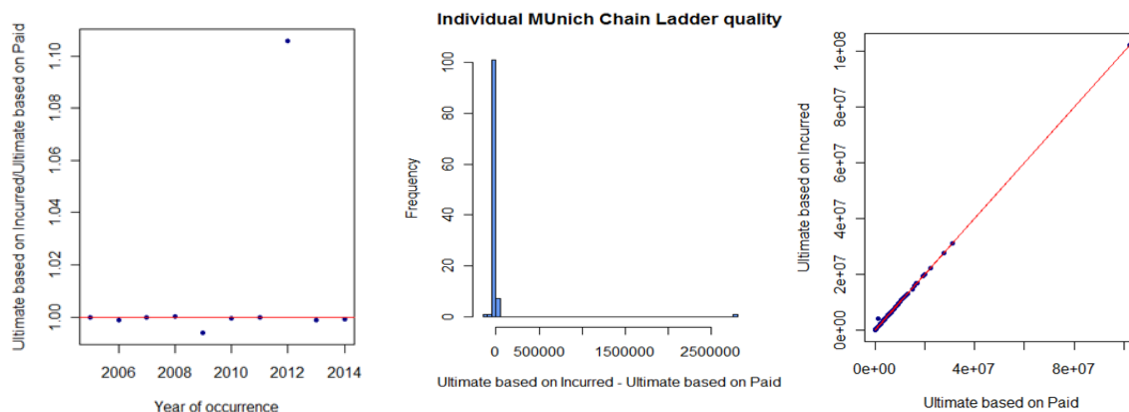
2. $\#$ désigne le cardinal.

Nous avons testé Munich Chain-ladder ligne à ligne sur plusieurs branches d'activité. Elle donne un résultat intéressant sur la branche Responsabilité Civile. Je présente ci-dessous les deux graphes de corrélation linéaire entre les résidus.



Nous obtenons un coefficient $\hat{\lambda}^P$ très significatif et un coefficient $\hat{\lambda}^I$ un peu moins significatif. En comparant le développement des sinistres basé sur les payés et celui basé sur les charges, nous constatons que Munich Chain-ladder ligne à ligne a réussi à réduire l'écart d'estimation sur les charges et les payés.





Sur les autres branches d'activité, $\hat{\lambda}^I$ n'est pas significativement supérieur à 0. Nous avons même obtenu dans certains cas un $\hat{\lambda}^I$ négatif. Il paraît que les payés s'ajuste pour rattraper les charges mais pas vice versa. Dans Chain-ladder ligne à ligne, nous avons choisi de développer les charges, en considérant qu'elle est plus pertinente dans notre cas. En conservant cette considération, nous ne gagnerons rien avec Munich Chain-ladder si $\hat{\lambda}^I$ est nul.

Ci-dessus nous avons développé une version ligne à ligne de Munich Chain-ladder en partant de Chain-ladder ligne à ligne équi-pondérée. Pour pouvoir développer Munich Chain-ladder ligne à ligne avec pondération des facteurs en fonction de la proximité des sinistres comme nous avons proposée, nous devons revoir les hypothèses et les estimateurs de la méthode. L'hypothèse d'indépendance des différents sinistres n'est plus vérifiée puisque leur développement dépend de leur proximité. Je n'ai pas réussi à développer une telle méthode. Cela pourrait être un sujet intéressant qui nécessite plus de développements mathématiques.

5.1.3 Méthode retenue

Comme Munich Chain-ladder ligne à ligne n'apporte une valeur ajoutée que sur la branche Responsabilité civile, nous ne l'avons pas retenue. De plus, la version que nous avons développée ne prend pas en compte l'impact de la proximité des sinistres sur leur développement. Des recherches plus avancées seront nécessaires pour pouvoir combiner Munich Chain-ladder avec notre développement ligne à ligne avec la prise en compte de la proximité des sinistres. Nous conservons dans ce mémoire la méthode Chain-ladder ligne à ligne (proposition 3).

5.2 Projection d'IBNyR

Nous discutons dans cette section la projection du triangle de nombres. Parmi les méthodes agréées pour le provisionnement présentées dans le deuxième chapitre, nous avons vu que Chain-ladder n'est pas adaptée au triangle des nombres des sinistres graves très volatil, Schnieper n'est pas adaptée à la vision de sinistres graves chez AXA CS. Il nous reste donc Bornhuetter-Ferguson, ALR,

Benktander-Hovinen et Cape-Cod comme candidats pour la projection de nombres d'*IBNyR* dans le process de provisionnement des sinistres graves. La méthode Bornhuetter-Ferguson dans son cadre théorique nécessite un ratio S/P ³ a priori dont nous ne disposons pas, il nous faut un moyen pour estimer le ratio S/P . Nous introduisons dans cette partie une nouvelle méthode qui peut être vue comme un mixte entre *ALR* et Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder. Nous l'appelons Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR* (ou encore Bornhuetter-Ferguson mixte). Cette méthode a été également proposée par Olivier Karusisi dans son document interne chez AXA CS [3]. Il est parti de la méthode Bornhuetter-Ferguson et a proposé une estimation a priori pour le nombre de graves de l'année de survenance i , à partir du vecteur d'exposition et du triangle supérieur. De mon côté, j'ai vu cette méthode comme une alternative de la méthode Cape-Cod.

Prenons l'exemple avec un triangle de nombres cumulés et un vecteur d'exposition (vecteur de primes) comme suit :

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9	N+10	Exposition
2004	0	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5	338 986
2005	0	2	3	4	5	5	7	7	7	7		332 261
2006	1	2	3	5	5	6	6	8	8			325 429
2007	2	3	5	6	9	12	13	13				342 085
2008	3	5	9	9	13	13	13					361 484
2009	0	4	7	13	13	14						368 272
2010	1	4	5	7	9							347 531
2011	1	5	9	11								325 977
2012	1	6	10									312 549
2013	0	6										301 671
2014	1											296 593

TABLE 5.1 – Triangle des nombres cumulés

5.2.1 Méthode Chain-ladder

La méthode Chain-ladder est une approche extrême où nous n'utilisons pas du tout l'information rapportée par le vecteur d'exposition. Nous estimons les *link-ratios* f_j grâce au triangle :

3. ici, on parle du ratio S/P pour les nombres, i.e. le nombre moyen de sinistres graves par unité de prime

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9	N+10
2004	0	2	3	4	5	5	5	5	5	5	5
2005	0	2	3	4	5	5	7	7	7	7	7
2006	1	2	3	5	5	6	6	8	8	8	8
2007	2	3	5	6	9	12	13	13	13	13	13
2008	3	5	9	9	13	13	13	13,84	13,84	13,84	13,84
2009	0	4	7	13	13	14	15,02	15,99	15,99	15,99	15,99
2010	1	4	5	7	9	9,90	10,62	11,31	11,31	11,31	11,31
2011	1	5	9	11	13,52	14,87	15,96	16,99	16,99	16,99	16,99
2012	1	6	10	13,41	16,48	18,13	19,46	20,71	20,71	20,71	20,71
2013	0	6	9,82	13,17	16,18	17,80	19,10	20,34	20,34	20,34	20,34
2014	1	4,33	7,09	9,51	11,69	12,86	13,80	14,69	14,69	14,69	14,69

\widehat{f}_j^{CL}	4,33	1,64	1,34	1,23	1,10	1,07	1,06	1	1	1
----------------------	------	------	------	------	------	------	------	---	---	---

TABLE 5.2 – Méthode Chain-ladder - Triangle des nombres cumulés

5.2.2 Méthode ALR

Nous commençons par construire le triangle de nombres incrémentaux à partir du triangle de nombres cumulés. Ensuite, nous calculons les ratios α_j qui représentent le nombre moyen de sinistres graves, par unité d'exposition, manifestés à l'année de développement j . Nous en déduisons la partie inférieure du triangle.

	N	N+1	N+2	N+3	N+4	N+5	N+6	N+7	N+8	N+9	N+10	Exposition
2004	0	2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	338 986
2005	0	2	1	1	1	0	2	0	0	0	0	332 261
2006	1	1	1	2	0	1	0	2	0	0	0	325 429
2007	2	1	2	1	3	3	1	0	0	0	0	342 085
2008	3	2	4	0	4	0	0	0,54	0	0	0	361 484
2009	0	4	3	6	0	1	0,65	0,55	0	0	0	368 272
2010	1	3	1	2	2	0,84	0,61	0,52	0	0	0	347 531
2011	1	4	4	2	1,48	0,79	0,58	0,49	0	0	0	325 977
2012	1	5	4	1,71	1,42	0,76	0,55	0,47	0	0	0	312 549
2013	0	6	2,07	1,65	1,37	0,73	0,53	0,45	0	0	0	301 671
2014	1	2,65	2,04	1,62	1,35	0,72	0,52	0,44	0	0	0	296 593

$\widehat{\alpha}_j$	2,74	8,94	6,87	5,47	4,55	2,42	1,76	1,49	0	0	0	($\times 10^{-6}$)
----------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	---	---	---	----------------------

TABLE 5.3 – Méthode ALR - Triangle des nombres incrémentaux

5.2.3 Méthode de sinistres espérés (a priori ALR)

Dans le cadre théorique de la méthode de sinistres espérés, nous ne reposons pas du tout sur le triangle observé. Nous pouvons par exemple multiplier le vecteur des primes par un ratio S/P via un avis d'expert (ratio "Nombre moyen de sinistres graves/Prime" dans notre situation). Cependant ce ratio n'est pas disponible chez nous. Par conséquent, nous l'estimons par la méthode ALR. Cette solution est notée ici Méthode des sinistres espérés avec ratio ALR.

Nous estimons le ratio "Nombre moyen de sinistres graves / Prime" commun pour toutes les années des survénances en sommant les $\widehat{\alpha}_j$ calculés dans la méthode ALR :

$$\widehat{\alpha} = \sum_{j=0}^{10} \widehat{\alpha}_j = 3,435 \times 10^{-5}$$

En multipliant ce ratio au vecteur d'exposition, nous obtenons un estimateur a priori du vecteur de nombres ultimes de sinistres graves μ_i :

Année	Exposition	$\widehat{\mu}_i$
2004	338 986	11,61
2005	332 261	11,38
2006	325 429	11,15
2007	342 085	11,72
2008	361 484	12,38
2009	368 272	12,61
2010	347 531	11,90
2011	325 977	11,16
2012	312 549	10,70
2013	301 671	10,33
2014	296 593	10,16

TABLE 5.4 – Méthode des sinistres espérés avec ratio ALR

5.2.4 Méthode Bornhuetter-Ferguson mixte

Nous implémentons la méthode Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori ALR. Rappelons l'estimateur de Bornhuetter-Ferguson :

$$\widehat{C}_{i,n}^{BF} = C_{i,n-i+1} + (1 - \widehat{\beta}_{n-i+1}) \widehat{\mu}_i$$

avec, dans notre cas, $\widehat{\mu}_i$ estimé par la méthode précédente et $\widehat{\beta}_{n-i+1} = \frac{1}{\prod_{j=n-i+1}^{n-1} \widehat{f}_j^{CL}}$.

Remarque 5.2.1. Ici, C désigne le nombre cumulé et non pas la charge cumulée.

Année	$\widehat{\mu}_i$	$\widehat{\beta}_{n-i+1}$	\widehat{R}_i^{BF}	$C_{i,n-i+1}$	$\widehat{C}_{i,n}^{BF}$
2004	11,61	1	0	5	5
2005	11,38	1	0	7	7
2006	11,15	1	0	8	8
2007	11,72	1	0	13	13
2008	12,38	0,94	0,75	13	13,75
2009	12,61	0,88	1,57	14	15,57
2010	11,90	0,80	2,43	9	11,43
2011	11,16	0,65	3,94	11	14,94
2012	10,70	0,48	5,54	10	15,54
2013	10,33	0,30	7,28	6	13,28
2014	10,16	0,07	9,47	1	10,47

TABLE 5.5 – Méthode Bornhuetter-Ferguson

5.2.5 Méthode Cape-Cod

Rappelons que l'idée la méthode Cape-Cod est très proche de la méthode Bornhuetter-Ferguson mixte. Cette méthode estime un ratio "Nombre de sinistre espéré par unité d'exposition" α et une cadence (par Chain-ladder). La différence se réside dans la façon dont on estime α . L'estimateur du nombre ultime de sinistres graves dans l'exemple selon la méthode Cape-Cod est :

$$\widehat{C}_{i,n}^{CC} = C_{i,n-i+1} + (1 - \beta_{n-i+1})\widehat{\alpha}^{CC} E_i$$

avec

$$\widehat{\alpha}^{CC} = \frac{\sum_{i=1}^n C_{i,n-i+1}}{\sum_{i=1}^n \beta_{n-i+1} E_i} = 3,529 \times 10^{-5}$$

Année	E_i	$\widehat{\beta}_{I-i}$	$C_{i,I-i}$	$\widehat{C}_{i,J}^{CC}$
2004	338 986	1	5	5,00
2005	332 261	1	7	7,00
2006	325 429	1	8	8,00
2007	342 085	1	13	13,00
2008	361 484	0,94	13	13,77
2009	368 272	0,88	14	15,62
2010	347 531	0,80	9	11,51
2011	325 977	0,65	11	15,06
2012	312 549	0,48	10	15,71
2013	301 671	0,30	6	13,51
2014	296 593	0,07	1	10,75

TABLE 5.6 – Méthode Cape-Cod

5.2.6 Méthode Benktander-Hovinen

Comme expliqué dans le chapitre 2, la méthode Benktander-Hovinen n'est rien d'autre qu'une combinaison de Chain-ladder et Bornhuetter-Ferguson, avec le facteur de pondération qui repose sur la cadence Chain-ladder et donc qui varie suivant l'année de survenance.

$$\widehat{C_{i,n}}^{BF} = \widehat{\beta_{n-i+1}} \widehat{C_{i,n}}^{CL} + (1 - \widehat{\beta_{n-i+1}}) \widehat{C_{i,n}}^{BF}$$

Ayant calculé tous les trois paramètres nécessaires, nous pouvons déduire directement la charge ultime estimée par la méthode Benktander-Hovinen.

Année	$\widehat{\beta_{n-i+1}}$	$\widehat{C_{i,n}}^{CL}$	$\widehat{C_{i,n}}^{BF}$	$\widehat{C_{i,n}}^{BH}$
2004	1	5	5	5
2005	1	7	7	7
2006	1	8	8	8
2007	1	13	13	13
2008	0,94	13,84	13,75	13,83
2009	0,88	15,99	15,57	15,94
2010	0,80	11,31	11,43	11,33
2011	0,65	16,99	14,94	16,27
2012	0,48	20,71	15,54	18,04
2013	0,30	20,34	13,28	15,36
2014	0,07	14,69	10,47	10,75

TABLE 5.7 – Méthode Benktander-Hovinen

5.2.7 Synthèse

Les résultats d'estimation sont synthétisés dans le tableau suivant (la première colonne indique l'année de survenance, la deuxième correspond au nombres observés à l'année courante, les cinq suivantes colonnes contiennent respectivement les nombres ultimes estimés par les différentes méthodes : Chain-ladder (CL), Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori ALR (BF*), Additive Loss Reserving (ALR), Benktander-Hovinen (BH) et Cape-Cod (CC).

Année	$C_{i,n-i+1}$	CL	BF*	ALR	BH	CC
2004	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00	5,00
2005	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00	7,00
2006	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00	8,00
2007	13,00	13,00	13,00	13,00	13,00	13,00
2008	13,00	13,84	13,75	13,54	13,83	13,77
2009	14,00	15,99	15,57	15,20	15,94	15,62
2010	9,00	11,31	11,43	10,97	11,33	11,51
2011	11,00	16,99	14,94	14,33	16,27	15,06
2012	10,00	20,71	15,54	14,91	18,04	15,71
2013	6,00	20,34	13,28	12,81	15,36	13,51
2014	1,00	14,69	10,47	10,35	10,75	10,75

TABLE 5.8 – Nombres de graves ultimes estimés par différentes méthodes agrégées

Les deux approches extrêmes sont Chain-ladder et la méthode de sinistres espérés (*a priori estimator*). Toutes les autres méthodes donnent des résultats compris entre les deux visions extrêmes. L'estimateur a priori est dans cet exemple (et dans tous les tests que j'ai effectués) le plus "optimiste". De plus, cette méthode donne des estimations à l'ultime plus ou moins proches entre différentes années de survenance. En effet, il ne repose pas sur les observations passées. Il est calculé en multipliant un ratio "Nombre de graves par unité d'exposition" avec une exposition correspondante, sachant que les expositions (primes) ne varient pas beaucoup au cours des années. Cette méthode donne plutôt une vision générale sur l'ensemble des années étudiées. Par conséquent, pour certaines années où le taux de graves était élevé telles que 2007, 2008, 2009, l'estimateur a priori est même en dessous de la dernière charge connue. Par contre pour les années les plus anciennes où on n'attend plus de retards dans la déclaration des sinistres, l'estimateur a priori ne colle pas non plus avec l'historique. Donc, cette vision a priori nous fournit une information supplémentaire à tenir compte mais ne peut être notre choix final. Chain-ladder, contrairement à l'estimation a priori, donne des résultats très différents entre différentes années de survenance. C'est la vision la plus "pessimiste" dans cet exemple. Comme nous avons remarqué, le triangle des nombres est constitué de très peu d'observations et le fait de se reposer uniquement sur ce dernier n'est pas une bonne idée.

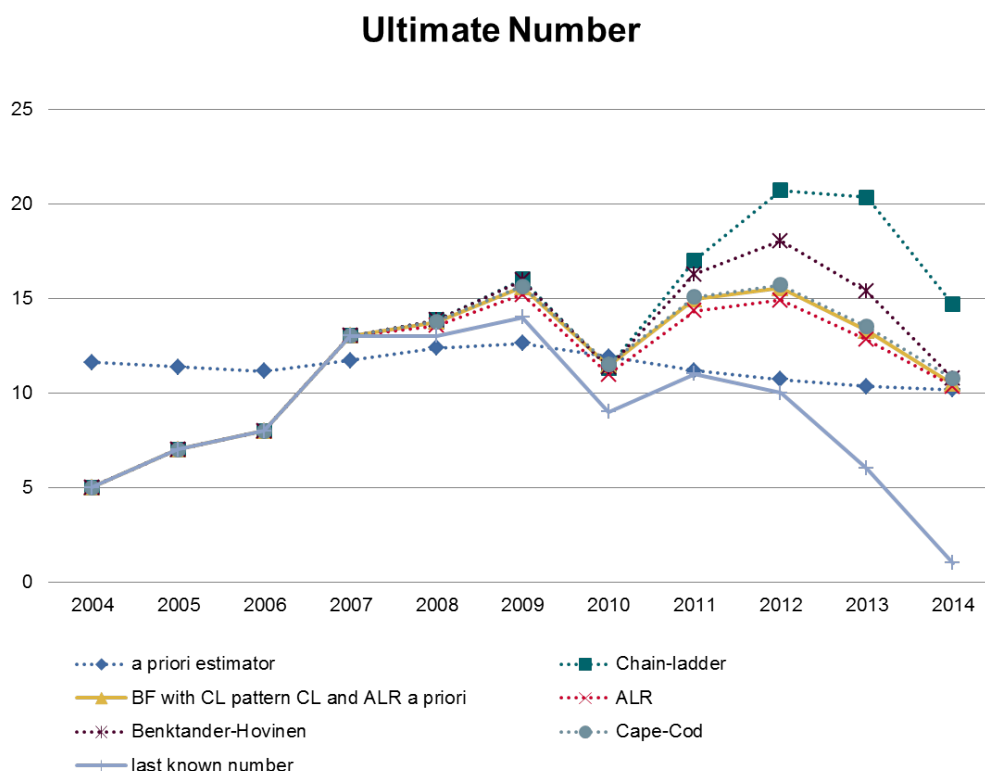


FIGURE 5.6 – Exemple : nombres de graves ultimes

Nous comparons les méthodes restantes : *ALR*, *Cape-Cod*, *Benktander-Hovinen* et *Bornhuetter-Ferguson* mixte. *ALR* donne les résultats les plus proches de la vision a priori. Cela s'explique par le fait qu'à la fois l'estimation de cadence et celle du ratio "Nombre de graves par unité d'exposition" dépendent de l'exposition. Cette dernière est dans notre exemple (et généralement) plus stable entre différentes années de survenance que le nombre de graves observés. *Benktander-Hovinen*, au contraire, est proche de *Chain-ladder*. Rappelons que cette méthode donne plus de poids à l'estimateur de *Chain-ladder* par rapport à *Bornhuetter-Ferguson*. Nous avons remarqué dans le chapitre 2 que *Benktander-Hovinen* sera moins adéquate que la méthode *Bornhuetter-Ferguson* lorsque la méthode *Chain-ladder* n'est pas appropriée pour les années récentes. C'est probablement le cas pour les nombres de sinistres graves. Finalement, il nous reste deux méthodes : *Cape-Cod* et *Bornhuetter-Ferguson* mixte. Elles renvoient toutes les deux des résultats très similaires, comme observé sur le graphique et le tableau de synthèse. Cette similitude peut être justifiée lors du développement mathématique des estimateurs dans le chapitre 2. En effet, nous avons montré que l'idée de *Cape-Cod* est très proche de la méthode *ALR* sur laquelle repose l'estimateur du ratio "Nombre de graves par unité d'exposition" dans la méthode *Bornhuetter-Ferguson* mixte. Notre test sur données réelles nous la confirme.

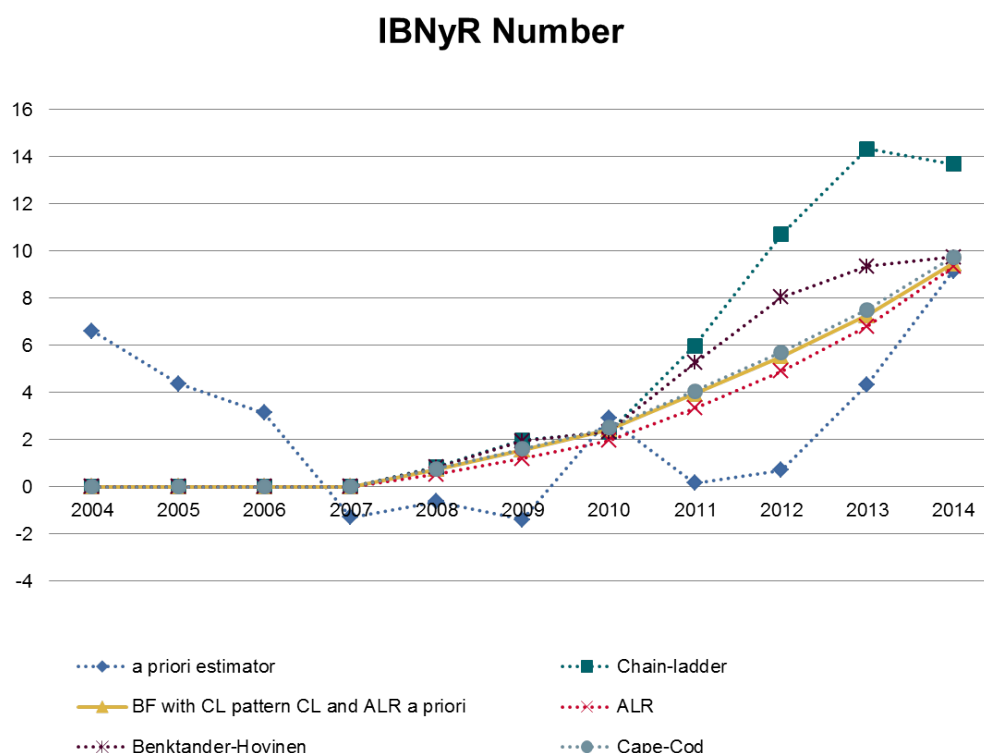


FIGURE 5.7 – Exemple : nombres d'IBNyR de sinistres graves

Nous retenons au final la méthode Bornhuetter-Ferguson mixte. Elle prévoit dans l'exemple un nombre d'IBNyR légèrement moins élevé que Cape-Cod. La raison est que le poids du vecteur d'exposition est un peu plus élevé dans l'estimation du ratio "Nombre de graves par unité d'exposition" chez Bornhuetter-Ferguson mixte et pour les années récentes où les sinistres ne sont pas tous clos, la vision a priori est moins sévère que Chain-ladder. Cette méthode fait aussi partie de la famille Bornhuetter-Ferguson à laquelle appartient la méthode utilisée pour le provisionnement des sinistres attritionnels chez AXA CS. Finalement, nous pensons que son idée est plus facile à capter et son modèle mathématique est plus simple que Cape-Cod.

Bibliographie

- [1] Bas Lodder. Incremental claim development (icd). *Swiss Mobiliar Insurance & Pension*, 2015.
- [2] Gerhard Quarg & Thomas Mack. Munich chain ladder : A reserving method that reduces the gap between ibnr projections based on paid losses and ibnr projections based on incurred losses. *Casualty Actuarial Society*, 2(2) :266–299.
- [3] Olivier Karusisi. Projection à l'ultime des sinistres graves. *Document interne AXA*.

"It's hard to build models of inflation that don't lead to a multiverse. It's not impossible, so I think there's still certainly research that needs to be done. But most models of inflation do lead to a multiverse, and evidence for inflation will be pushing us in the direction of taking [the idea of a] multiverse seriously."

Alan Guth

6

Prise en compte de l'inflation

Sommaire

6.1 Inflation et montants de charge de sinistres	93
6.2 Inflation et pratique comptable	94
6.3 Inflation et Seuil grave	95
Bibliographie	96

Je reviens dans ce chapitre au problème d'inflation que j'ai négligé tout au long des chapitres précédents. L'inflation est un problème complexe qui pourrait avoir un impact non-négligeable sur le provisionnement, notamment dans le cadre des sinistres graves. Il est plus particulièrement difficile à traiter dans le contexte d'AXA CS.

6.1 Inflation et montants de charge de sinistres

Il y a potentiellement deux choix pour le traitement des données en amont : tout actualiser à l'année courante (il faut modéliser l'inflation à part) ou garder les enregistrements comptables (l'inflation est incorporée dedans).

Le premier choix a été retenu dans l'outil *Future Losses* (à partir duquel nous avons proposé le modèle 2). En effet, l'objectif de cet outil est de modéliser les sinistres pour une année future. Il paraît donc logique d'actualiser tous les montants de sinistres à la vision aujourd'hui pour faire la modélisation et enfin inflater les pertes modélisées à l'année future.

Dans l'optique de provisionnement, nous voulons calculer la somme à mettre à côté pour pouvoir régler les sinistres. Par exemple si nous avons payé 200 million € (vision d'aujourd'hui) et anticipons

une charge ultime 300 million € (vision ultime) qui ne vaut que 290 million € aujourd'hui, nous devons mettre en réserves aujourd'hui 100 million € plutôt que 90 million €.

Si nous voulons exclure l'effet d'inflation du développement des sinistres, nous pouvons envisager un modèle plus complexe du type de Taylor (2000) mentionné dans [1]. Notons $(X_{t_i})_{i \in \mathcal{N}}$ les montants incrémentaux payés en t_i mais exprimés en valeur de t_1 . L'idée de Taylor est de trouver un indice d'inflation $\lambda(\cdot)$ pour pouvoir faire le lien entre la charge exprimée en t_1 :

$$C_1 = \sum_{i=1}^{\infty} X_{t_i}$$

et la charge non indexée (incorporée l'inflation) qui doit être plus grande que C_1 :

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda(t_i)}{\lambda(t_1)} X_{t_i}$$

Nous pouvons ensuite développer les sinistres en utilisant C_1 pour éliminer l'effet d'inflation des facteurs de développement et enfin rajouter l'inflation pour avoir C .

Dans notre modèle, nous avons choisi de faire les développements avec les montants non-indexés C . L'effet d'inflation sera donc capturé dans les facteurs de développement des sinistres. L'hypothèse sous-jacente est que l'inflation a un effet constant sur toutes les années.

$$\frac{\lambda(t_i)}{\lambda(t_1)} = (1 + \tau)^{t_i - t_1} \quad (6.1)$$

Cette hypothèse semble être un peu forte mais c'est exactement ce qu'on fait actuellement chez AXA CS. Plus précisément, le taux d'inflation est mise à $\tau = 1,5\%$ pour les dommages matériels et à $\tau = 3\%$ pour les dommages corporels.

6.2 Inflation et pratique comptable

Un autre problème est la façon dont les montants de sinistres sont enregistrés dans la base de données. Tant qu'un sinistre reste ouvert, ses montants (charges, payés, etc.) sont enregistrés, année par année, en valeurs non-indexées, c'est-à-dire avec l'inflation incorporée dedans. Cependant, après sa clôture, il continue à être enregistré dans la base par sa charge ultime (cette fois-ci avec les valeurs non-inflées puisque le sinistre a été clos). Prenons un exemple avec deux sinistres survenus en 2012, l'un clos en 2014 et l'autre encore ouvert jusqu'à 2015.

Sinistre	dev1	dev2	dev3	dev4
1	2,5	3	3,5	3,5
2	3	3,1	2,9	3

TABLE 6.1 – Inflation et pratique comptable

Quand nous estimons les facteurs de passage de l'année de développement 3 à l'année de développement 4, nous utilisons comme référence les facteurs individuels 3 et 3,5 (million d'€) qui ne sont pas exprimés dans une même base. 3 est un montant avec l'inflation complète tandis que 3,5 est un montant avec la prise en compte partielle d'inflation (jusqu'à 2014). Ce choix d'enregistrement est naturel d'un point de vue comptable mais peut paraître non-cohérent avec le choix de prendre en compte de l'inflation dans les facteurs de développement. Nous allons justifier dans le paragraphe suivant notre choix.

Dans la méthode Chain-ladder ligne à ligne, contrairement à plusieurs autres méthodes ligne à ligne, nous avons choisi de ne pas modéliser la date de clôture d'un sinistre. Il y en a deux raisons. La première est que la base de données que nous avons utilisée continue à enregistrer un sinistre après sa clôture. Elle dispose d'une variable indiquant si un sinistre est clos à l'année d'extraction de la base mais pas son année de clôture exacte. Pour identifier la date de clôture, nous devrions revenir vers des gestionnaires de sinistres ou bien extraire plein de base de données de différentes années. La deuxième raison est que la méthode Chain-ladder ligne à ligne peut prendre en compte la possibilité de clôture d'un sinistre. Nous développons chaque sinistre non-clos à l'année courante jusqu'à l'ultime (après n années de développement). Si à une année de développement, il y a des sinistres de référence qui sont clos et certains d'autres encore ouverts, nous allons faire une moyenne pondérée des facteurs 1 (pour les sinistres clos) et des facteurs différents de 1 (évolution propre du sinistre + effet d'inflation). La présence des facteurs 1 nous dit que la possibilité de clôture pour le sinistre à développer est prise en compte et le facteur estimé correspond à une vision *Best Estimate*. Pour les années de développement où tous les sinistres de référence sont clos par exemple, le facteur estimé sera 1 et sera appliqué au sinistre à développer, ce qui revient à dire que ce dernier est clos. Nous pensons que cette démarche n'est pas moins adéquate que la modélisation des dates de clôture.

Bien évidemment, nous pouvons développer un modèle comme celui de Taylor pour exclure l'inflation dans le développement d'un sinistre, modéliser sa date de clôture et enfin ré-appliquer l'inflation aux années où le sinistre est encore ouvert. Un tel modèle, bien qu'il semble être plus sophistiqué, serait compliqué à développer et d'ailleurs rencontrerait un autre problème que je détaillerai dans la section suivante.

6.3 Inflation et Seuil grave

Dans cette section je précise une autre contrainte chez AXA CS qui m'a motivé à travailler directement avec les données non-indexées. Pour faciliter la communication entre succursales, AXA CS voudrait maintenir un seuil grave constant pour toutes les années. Cela dit que si aujourd'hui le seuil grave est 3 000 000 €, il sera maintenu l'année prochaine à 3 000 000 € plutôt que $3\,000\,000 \times (1 + \tau)$ €. Il y a donc des sinistres qui passent d'attritionnel à grave simplement à cause de l'inflation. Un modèle qui exclut l'inflation des développements de sinistres devrait raisonner par plusieurs étapes. Premièrement pour constituer la base de sinistres graves à développer, nous devrions utiliser les montants non-indexés. Ensuite nous ré-indexons ces sinistres pour éliminer l'inflation et effectuer un développement ligne à ligne. Nous appliquons à nouveau l'inflation jusqu'à la date de clôture d'un sinistre. Pour construire les deux triangles de nombres dans la projection d'*IBNyR*, nous devons aussi utiliser la base de données non-indexée.

Traitement d'inflation

Pour résumé, nous avons choisi d'utiliser comme *inputs* les données non-indexées pour incorporer l'effet d'inflation dans le développement des sinistres. Ce choix réduit beaucoup d'étapes de traitement par rapport aux autres méthodes qui indexent les montants et reste intuitivement cohérent avec les contraintes d'AXA CS. La seule étape où il faut retraiter l'inflation est l'estimation de la sévérité pour la projection d'*IBNyR*. Comme les données sont non-indexées, les montants de charges ultimes estimés à travers la projection d'*IBNeR* ne sont pas exprimés dans une même base. Il y aura des charges ultimes représentées sur la base 2020 et des charges ultimes représentées sur la base 2025 par exemple. Il n'est pas logique de calibrer une loi de sévérité sur ces charges ultimes. Nous proposons d'actualiser les charges ultimes à l'année courante avant d'estimer la loi de sévérité et en déduire une sévérité moyenne. Dans la projection d'*IBNyR*, suivant l'année de survenance, nous appliquons un facteur approprié (en utilisant l'équation 6.1) pour inflater cette sévérité moyenne.

Ce traitement d'inflation est une solution simple proposée dans une durée de stage assez limitée. Il n'est certainement pas optimal et nécessitera des travaux supplémentaires pour pouvoir mieux prendre en compte l'effet d'inflation dans notre modèle.

Bibliographie

- [1] Mario V. Wüthrich & Michael Merz. Stochastic claim reserving methods in insurance. *Wiley Finance*, 2008.

"I think it is much more interesting to live with uncertainty than to live with answers that might be wrong."

Richard Feynman

7

Modèle retenu et Risque de provisionnement

Sommaire

7.1	Rappel du modèle	97
7.2	Backtesting et comparaison avec les autres modèles	98
7.2.1	Branche Responsabilité Civile	98
7.2.2	Branche Dommage	101
7.2.3	Comparaison globale	103
7.3	Incertitude à un an	104
7.3.1	CDR (IBNyR)	105
7.3.2	CDR (IBNeR)	106
7.3.3	CDR(IBNR)	107
	Bibliographie	108

7.1 Rappel du modèle

Nous avons passé par plusieurs étapes pour arriver au modèle final de provisionnement des sinistres graves. Partant des deux modèles de références (modèle 1 et modèle 2), nous avons les ajustés au cadre spécifique du provisionnement chez AXA CS (modèle 2 ajusté), puis les avons comparés et validé leurs hypothèses. Nous avons proposé un nouveau modèle, inspirant des deux modèles de référence, des méthodes agrégées connues (Chain-ladder, Bornhuetter-Ferguson, ALR, Munich Chain-ladder) et des méthodes ligne à ligne (*kNN*, *Incremental Claim Development*). Le modèle retenu est composé de 3 modules principaux :

- Estimation du seuil grave (graphique de Hill, fonction de dépassement moyen, estimateur de Cheng & Peng, méthode Bootstrap de Danielsson),

- Projection d'*IBNeR* : Méthode Chain-ladder ligne à ligne avec pondération des facteurs de développement des sinistres en fonction de leur proximité,
- projection d'*IBNyR* :
 - Méthode Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR* pour les nombres d'*IBNyR* ;
 - lois des valeurs extrêmes pour la sévérité au-dessus du seuil grave, moyenne empirique des sinistres connus pour la sévérité en dessous du seuil.

7.2 *Backtesting* et comparaison avec les autres modèles

Pour évaluer la pertinence du modèle retenu, je l'ai comparé aux autres modèles présentés dans ce mémoire, à travers des estimations faites sur plusieurs branches d'activité. J'ai comparé les montants d'*IBNR*, *IBNeR* et *IBNyR* de la vision 2014. Ensuite, j'ai refait tourner les modèles à la vision 2013 pour évaluer la variation de la charge ultime estimée entre 2013-2014. Cette variation nous donne une information supplémentaire, mais n'est pas suffisante pour conclure quel modèle est le meilleur dans une vision *Best Estimate*. (Nous verrons dans la section suivante la mesure de l'incertitude à un an.) Enfin, j'ai comparé le montant total d'*IBNR* estimé par chacun des modèles avec le montant effectivement mis par AXA CS en 2014. Bien évidemment, les modèles sont développés pour *challenge* les estimations faites actuellement chez AXA CS. Ils ne sont pas censés renvoyer les mêmes chiffres que ceux qu'on a mis actuellement. Par contre, nous envisageons plus ou moins une cohérence des estimations. Si parmi les modèles proposés, il y en a un qui prévoit un montant d'*IBNR* complètement différent des autres et du montant effectivement mis par AXA CS, ce modèle devrait probablement être remis en question.

Tous les modèles mentionnés dans cette section utilisent la même méthode Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR* pour estimer les nombre d'*IBNyR*. Ils se distinguent principalement par la projection d'*IBNeR*. Pour la suite, je noterai :

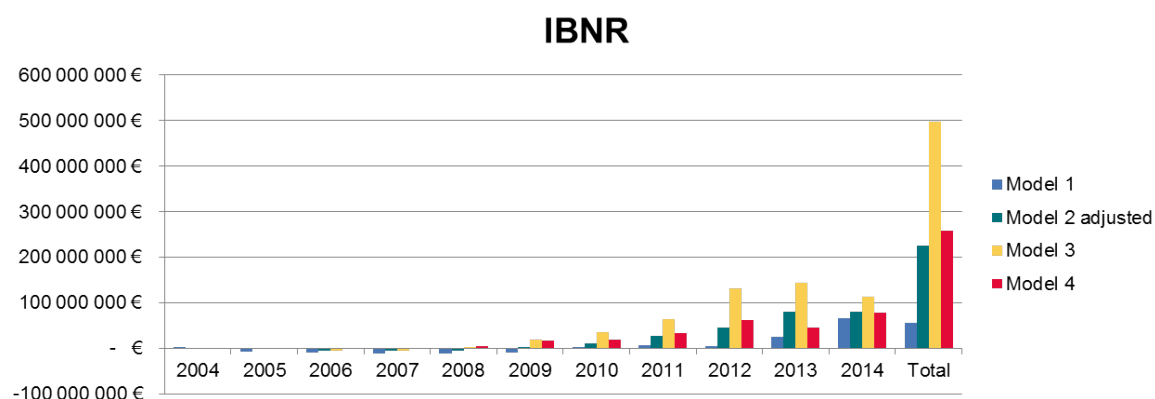
- Modèle 1 : le modèle du ratio P/I ,
- Modèle 2 ajusté : le modèle Chain-ladder individuel dans lequel les facteurs de développement individuels sont pondérés par les montants de charge,
- Modèle 3 : le modèle Munich Chain-ladder individuel dans lequel les facteurs de développement individuels sont équi-pondérés (sauf pour la branche Responsabilité civile, ce modèle renvoie les mêmes résultats que Chain-ladder ligne à ligne avec équi-pondération des facteurs individuels),
- Modèle 4 : le modèle Chain-ladder individuel finalement retenu dans lequel les facteurs de développement individuels sont pondérés en fonction de la proximité des sinistres.

Je présente les résultats pour les branches Responsabilité civile et Dommage. Les résultats sur les autres branches sont mis en Annexe E.

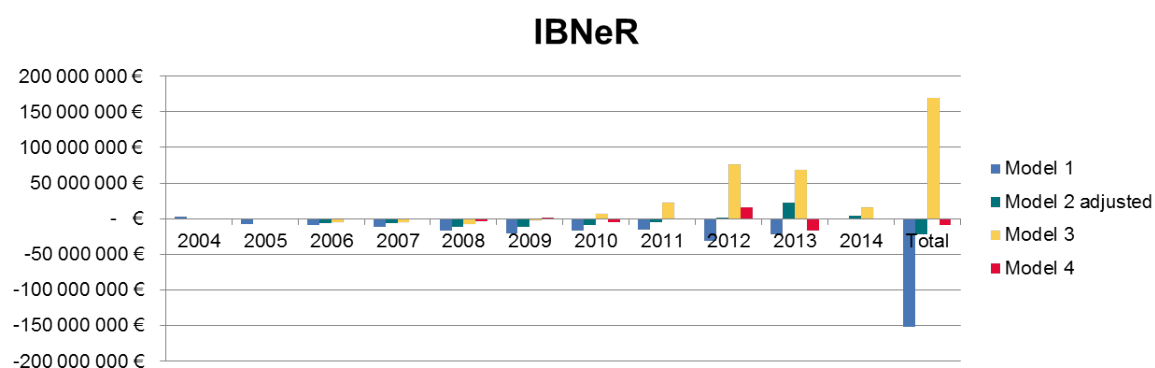
7.2.1 Branche Responsabilité Civile

C'est la branche à déroulement long. Tous les modèles estiment des *IBNR* non nuls pour les années anciennes. Le modèle 1 est le plus optimiste en estimant des *IBNR* négatifs pour certaines années

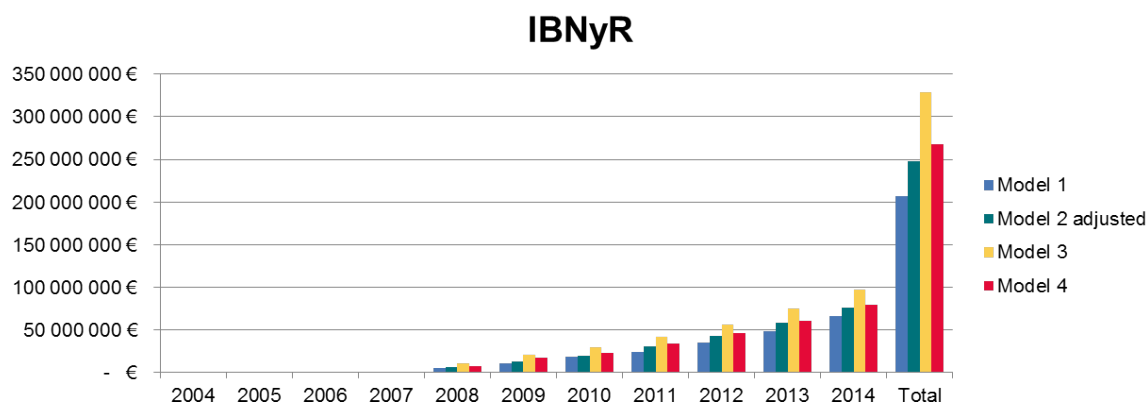
anciennes et des *IBNR* relativement faibles (par rapport aux autres modèles) pour les années récentes. Cela est principalement dû à une sous-estimation des *IBNeR* par la méthode du ratio *P/I* (elle estime rarement un *link-ratio* supérieur à un). Le modèle 3 estime un montant total d'*IBNR* relativement élevé par rapport aux autres. Le modèle 2 ajusté et 4 renvoient les résultats assez proches.

FIGURE 7.1 – Responsabilité civile - *IBNR*

Les estimations d'*IBNeR* confirment nos explications sur les *IBNR*. Le modèle 1 et le modèle 3 donnent deux visions extrêmes tandis que le modèle 2 ajusté et le modèle 4 n'estiment pas beaucoup d'*IBNeR* (qui sont d'ailleurs négatifs).

FIGURE 7.2 – Liability - *IBNeR*

Les modèles utilisent une même méthode pour la projection d'*IBNyR*. Pourtant, leurs estimations ne sont pas identiques puisque la construction des deux triangles des nombres et la calibration de loi de sévérité dépendent toutes les deux de la projection d'*IBNeR*. Les *IBNyR* suivent cependant une même tendance. C'est toujours le modèle 1 le plus optimiste et le modèle 3 le plus pessimiste.

FIGURE 7.3 – Responsabilité civile - *IBNyR*

Nous avons regardé la variation de la charge ultime cumulée des années 2004-2013 entre deux visions : 2013 et 2014. Sur la branche Responsabilité civile, le modèle 1 donne une variation faible. Le modèle 3 donne une variation relativement élevée. Le modèle 4 que nous avons retenu renvoie des variations faibles sauf pour l'année 2012. Pour expliquer la dégradation de l'année de survenance 2012, nous avons analysé la matrice des développements individuels des sinistres. En effet, il y a deux sinistres survenus en 2012 qui ont passé en grave en 2014 avec les montants de charge respectivement de 14 million € et 32,5 million €. Ce sont deux développements très atypiques que nous n'avons pas constatés sur les années antérieures. Quand nous positionnons à la vision 2013 pour faire le provisionnement (en utilisant les données 2004-2013), nous ne pouvons pas anticiper une dégradation aussi forte. C'est en 2014 que nous connaissons des montants de charge si élevés pour enrichir notre base de données.

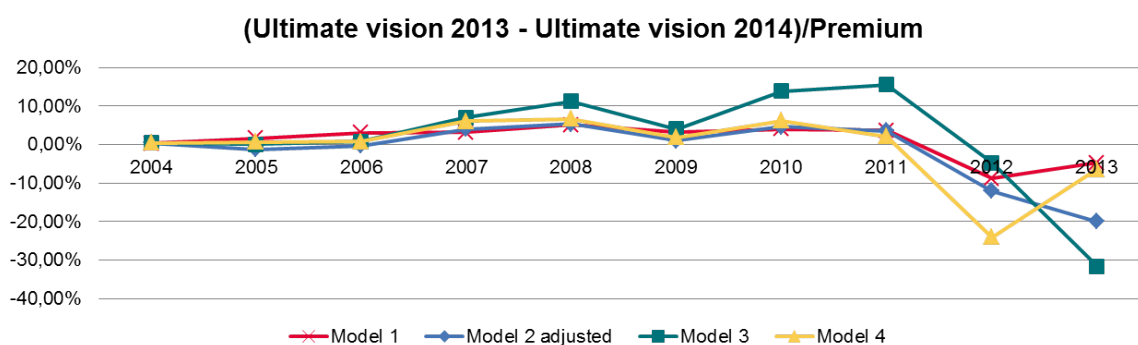


FIGURE 7.4 – Responsabilité civile - vision 2013 vs 2014

Nous avons enfin comparé les montants d'*IBNR* prévus par les quatre modèles au montant effectivement mis par AXA CS. Le modèle 1 prévoit un montant d'*IBNR* trop faible. Ce sont les modèles 2 ajusté et 4 qui estiment un montant proche de la vision d'AXA CS.

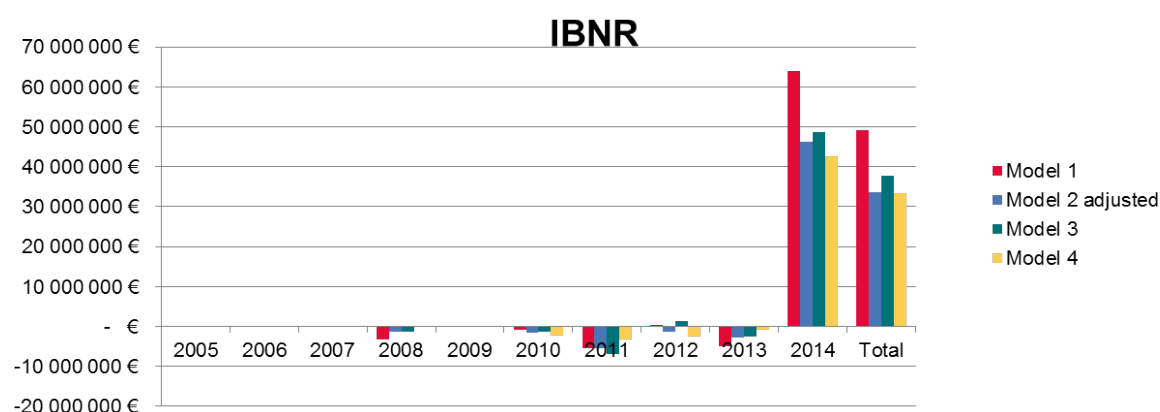
Modèle	Simplicité	Méthodologie	Consistance		Cohérence 2013-2014	
			<i>IBNR</i>	Score	Δ Ultime / Prime	Score
1	***	*	57 713 731 €	*	1,15 %	**
2 ajusté	***	**	225 173 302 €	***	-1,09 %	**
3	*	**	498 060 187 €	**	2,15 %	*
4	**	***	257 744 246 €	***	-0.22 %	***
Vision ACS			290 00 000 €			

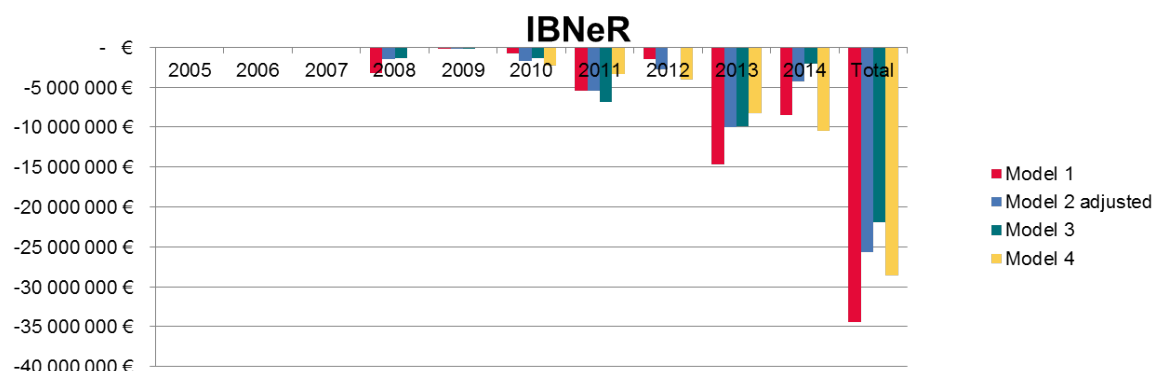
TABLE 7.1 – Responsabilité civile - Comparaison

7.2.2 Branche Dommage

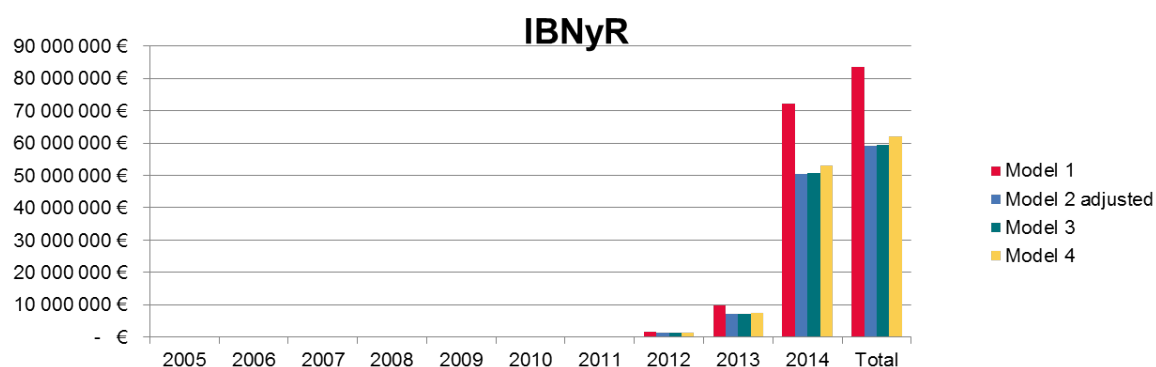
La branche Dommage est une branche à déroulement court. Nous ne constatons pas beaucoup d'*IBNR*. Sur les trois années les plus anciennes 2005-2007, nous n'avons pas d'*IBNR*, d'après tous les 4 modèles. Les montants d'*IBNR* sont même négatifs pour la période 2008-2013. C'est en 2014 (l'année la plus récente dans l'étude) que nous attendons beaucoup d'*IBNR*. La tendance commune est qu'on récupère de l'argent pour les années anciennes et envisage encore beaucoup de réserves pour l'année courante.

Les *IBNeR* sont négatifs (ou nuls) pour toutes les années de survenance, d'après les 4 méthodes. Sur cette branche, nous n'avons pas constaté des grandes écarts entre les méthodes. C'est toujours le modèle 1 le plus optimiste qui estime qu'on va récupérer environ 35 million d'euros et le modèle 3 le plus pessimiste (au global).

FIGURE 7.5 – Dommage - *IBNR*

FIGURE 7.6 – Dommage - *IBNeR*

Les *IBNyR* sont cohérents entre 4 différents modèles. La raison a été donnée ci-dessus.

FIGURE 7.7 – Dommage - *IBNyR*

Les variations de l'estimation de charge ultime 2005-2013 faite à la vision 2013 et à la vision 2014 sont similaires entre les 4 modèles. Au niveau global, le modèle 4 présente une plus faible variation. Pour expliquer des bonis de l'année de survenance 2013, nous avons regardé la matrice de développement des sinistres. Il y avait des sinistres survenus en 2013 qui ont des comportements atypique en 2014, ceux qu'on n'a jamais observés jusqu'à 2013. Par exemple, un sinistre a passé de 11,6 million € à 73 000 €.

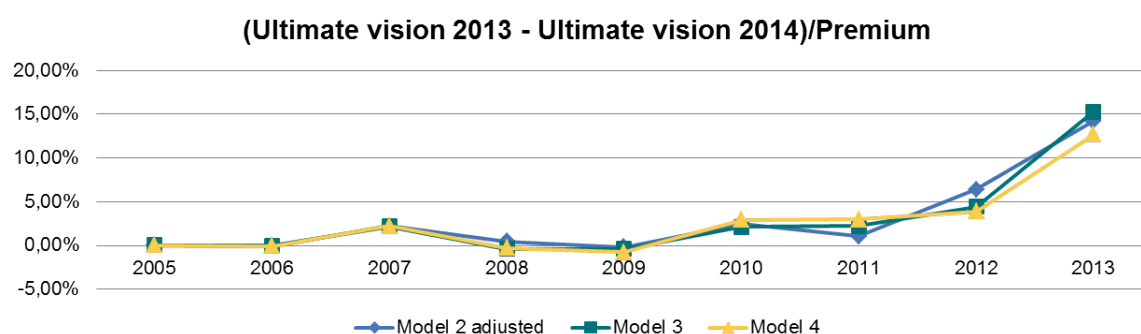


FIGURE 7.8 – Dommage - vision 2013 vs 2014

C'est toujours le modèle 4 qui estime le montant total d'*IBNR* le plus proche du montant effectivement mis chez AXA CS. Il renvoie aussi la plus faible variation de la charge ultime entre deux visions 2013, 2014. Le modèle 1 présente sur cet exemple son principal défaut. Quand nous utilisons les données 2005-2014, nous constatons une faible corrélation entre le ratio *P/I* et le facteur de développement à l'ultime. Pourtant, sur les données 2005-2013, nous n'observons plus une telle corrélation. La projection d'*IBNeR* n'a pas pu fonctionner à la vision 2013.

Modèle	Simplicité	Méthodologie	Consistance		Cohérence 2013-2014	
			<i>IBNR</i>	Score	Δ Ultime / Prime	Score
1	***	*	49 226 959 €	**	NA	-
2 ajusté	***	**	33 516 312 €	**	-2,78 %	**
3	*	**	37 638 304 €	***	-2,62 %	*
4	**	***	42 672 924 €	***	-2,49 %	***
Vision ACS			41 000 000 €			

TABLE 7.2 – Dommage - Comparaison

7.2.3 Comparaison globale

Après avoir testé les 4 modèles sur plusieurs branches d'activité, nous avons fait une comparaison globale. Au niveau de la simplicité des méthodes, ce sont le modèle 1 (avec le ratio *P/I*) et le modèle 2 ajusté (avec équi-pondération des facteurs de développement individuels) les plus simples à implémenter. Le modèle 3 (Munich Chain-ladder ligne à ligne) semble être le modèle le plus compliqué. Au niveau de la méthodologie, le modèle 4 que nous avons retenu paraît être le meilleur. C'est aussi le modèle qui renvoie les estimations les plus cohérentes avec la vision actuelle d'AXA CS et qui minimise en général la variation de l'estimation faite en 2013 et 2014.

Modèle	Simplicité	Méthodologie	Consistance avec la vision ACS	Cohérence 2013-2014
1	***	*	*	-
2 ajusté	***	**	***	**
3	*	**	**	**
4	**	***	***	***

TABLE 7.3 – Comparaison globale

7.3 Incertitude à un an

Jusqu'à présent, nous n'avons estimé que le *Best Estimate* de la charge ultime et de la réserve. Comme mentionné dans le préambule sur le provisionnement (chapitre 2), le risque de réserve à un an est aussi intéressé par l'assureur dans le contexte de Solvabilité II. J'explique dans cette section comment j'ai quantifié cette incertitude à un an.

Je commence par rappeler la notion *Claims Development Result (CDR)* introduite pour la première fois par M. Wüthrich, M. Merz et N Lysenko [1]. Pour une année de survenance i , son CDR_i est défini comme suit :

$$CDR_i(n+1) = E[C_{i,n} | \mathcal{D}_n] - E[C_{i,n} | \mathcal{D}_{n+1}] = E[R_i | \mathcal{D}_n] - (X_{i,n-i+2} + E[R_i | \mathcal{D}_{n+1}])$$

On en déduit le CDR agrégé qui est simplement la somme sur toutes les années de survenance :

$$CDR(n+1) = \sum_{i=1}^n CDR_i(n+1)$$

Le $CDR(n+1)$ est la différence entre le *Best Estimate* de la charge ultime faite à l'année n et celle faite à l'année $n+1$ quand nous disposerons des informations supplémentaires sur l'année $n+1$. Nous pouvons proposer un estimateur du CDR :

$$\widehat{CDR}_i(n+1) = \widehat{C}_{i,n}^{(n)} - \widehat{C}_{i,n}^{(n+1)} = \widehat{R}_i^{(n)} - (X_{i,n-i+2} + \widehat{R}_i^{(n+1)})$$

$$\widehat{CDR}(n+1) = \sum_{i=1}^n \widehat{CDR}_i(n+1)$$

Remarque 7.3.1. Ici, nous nous positionnons à l'année n où nous n'observons pas encore $X_{i,n-i+2}$. Par conséquent, $\widehat{CDR}_i(n+1)$ et $\widehat{CDR}(n+1)$ sont non-connus. Nous allons générer N scénarios possibles pour $X_{i,n-i+2}$ afin d'avoir une distribution du $\widehat{CDR}(n+1)$.

Remarque 7.3.2. Dans la section 7.2, nous avons comparé la charge ultime estimée à la vision 2013 et celle à la vision 2014. Si nous prenons $n = 2013$, ce que nous avons observé en 2014 ne correspond qu'à une réalisation de $X_{i,n-i+2}$. Donc la différence au niveau de la charge ultime entre les visions 2013 et 2014 n'est qu'une seule réalisation de la distribution $\widehat{CDR}(n+1)$.

Comme notre modèle a deux modules différents : la projection d'*IBNeR* et la projection d'*IBNyR*, nous introduisons trois notions de *CDR* : $CDR(IBNeR)$, $CDR(IBNyR)$ et $CDR(IBNR)$. Nous avons omis l'année $(n+1)$ dans les notations mais ce sont tous des *CDR* pour l'année $n+1$. Plus précisément, $CDR(IBNR) = \widehat{CDR}(n+1)$. Les deux autres *CDR* correspondent à l'incertitude à un an liée à chacun des modules (projection d'*IBNeR* et projection d'*IBNyR*).

Il faut noter que nous n'avons pas la propriété d'additivité :

$$CDR(IBNR) \neq CDR(IBNeR) + CDR(IBNyR)$$

puisque la projection d'*IBNyR* dépend de la projection d'*IBNeR*.

7.3.1 *CDR (IBNyR)*

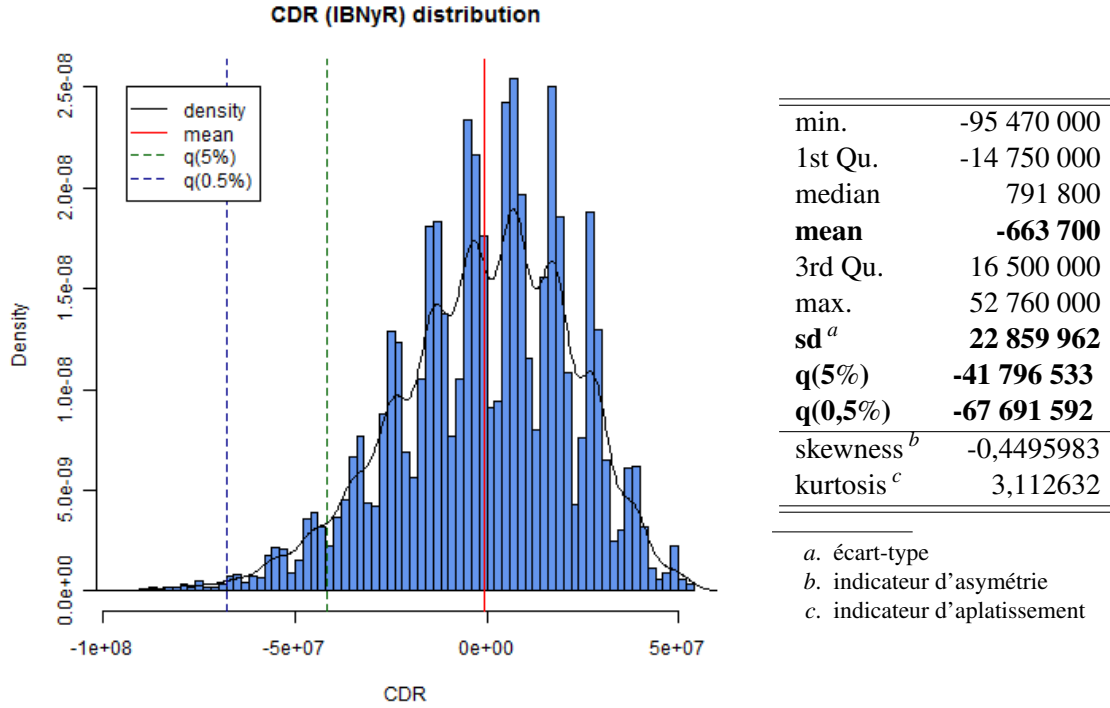
Pour obtenir une distribution de $\widehat{CDR}(IBNyR)$, nous simulons N scénarios pour la nouvelle diagonale $(X_{i,n-i+2}, i = 1, \dots, n)$ correspondant à l'année $n+1$. La difficulté est que notre méthode est un mixte entre Bornhuetter-Ferguson à cadence Chain-ladder et la méthode *ALR*. Un modèle stochastique qui renvoie le même *Best Estimate* que Bornhuetter-Ferguson mixte n'est pas facile à construire. Nous avons choisi de simuler les nombres incrémentaux de sinistres graves en $n+1$ en utilisant le modèle stochastique de la méthode *ALR* :

$$X_{i,n-i+2} \sim \text{Poisson}(E_i \alpha_{n-i+1})$$

En estimant α_{n-i+1} par $\widehat{\alpha}_{n-i+1}$, nous pouvons simuler N diagonales fictives pour l'année $n+1$. Pour chaque scénario, nous ré-appliquons le module Projection d'*IBNyR* pour prévoir le montant ultime d'*IBNyR*. Nous en déduisons une distribution empirique du $\widehat{CDR}(IBNyR)$.

Remarque 7.3.3. *Pour quantifier l'incertitude propre de la projection d'IBNyR, nous supposons que les sévérités ne changent pas en passant de l'année n à l'année $n+1$.*

Nous présentons ci-dessous cette distribution empirique pour la branche Dommage. Sa moyenne est très faible (-663 700 €). En moyenne, l'estimation de la charge ultime ne varie pas beaucoup entre 2013 et 2014. Cependant, l'écart-type est très grand. On s'intéresse aussi souvent au quantile 0,5 % pour une vision prudente. Ce quantile s'élève à -67,7 million dans cet exemple. Cela dit qu'avec une probabilité de 0,5 %, nous attendons un mali de 67,7 million pour l'année $n+1$.



7.3.2 CDR (IBNeR)

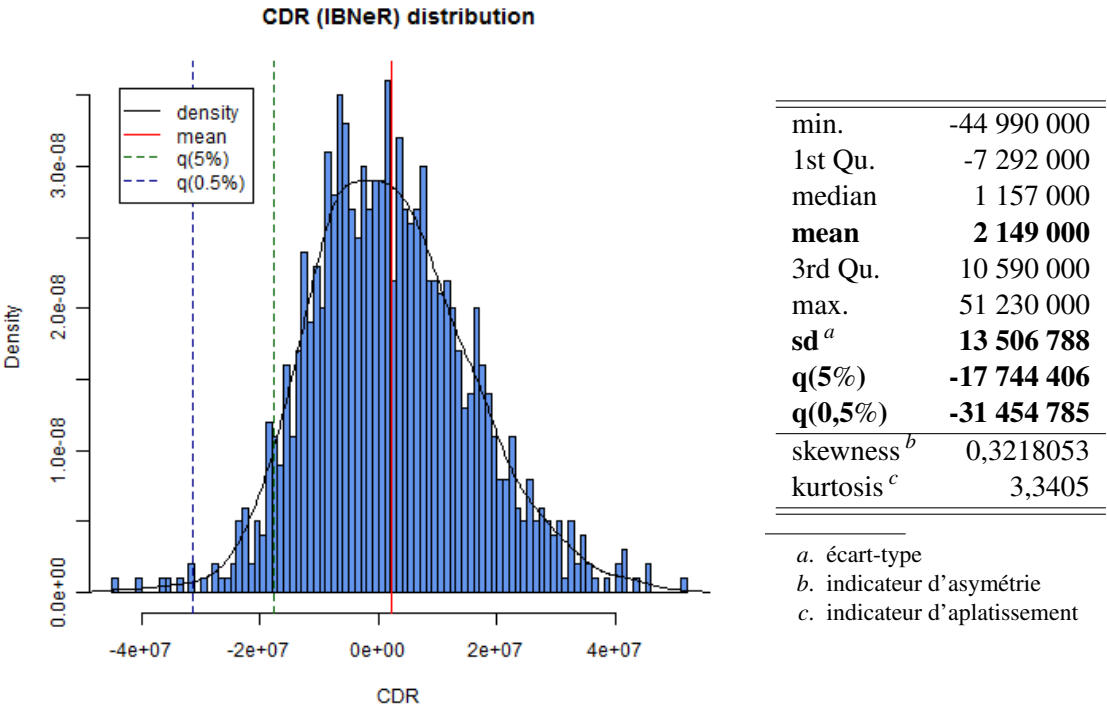
Pour le module de projection *IBNeR*, nous avons besoin de simuler N scénarios pour la charge de chacun des sinistres à l'année $n + 1$ et ensuite appliquer la projection d'*IBNeR* à chacun de ces scénarios. Dans la formule de Chain-ladder ligne à ligne que nous avons retenue, les poids normalisés

$\frac{w_{k,k'}^j}{\sum_{k'} w_{k,k'}^j}$ peuvent s'interpréter comme des probabilités. En effet,

$$\frac{w_{k,k'}^j}{\sum_{k'} w_{k,k'}^j} > 0 \forall j = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \sum_{k'} \frac{w_{k,k'}^j}{\sum_{k'} w_{k,k'}^j} = 1.$$

Donc $\widehat{F}_{k,j}$ est la moyenne de la distribution empirique de $(F_{k',j})_{k'}$, notée \mathcal{F} . Nous pouvons supposer que $F_{k,j} \sim \mathcal{F}$. Nous pouvons donc simuler les réalisations de $F_{k,j}$ suivant cette distribution empirique \mathcal{F} (en utilisant Monte Carlo non-paramétrique ou méthode d'inversion générique ou Bootstrap, ces trois méthodes reviennent au même).

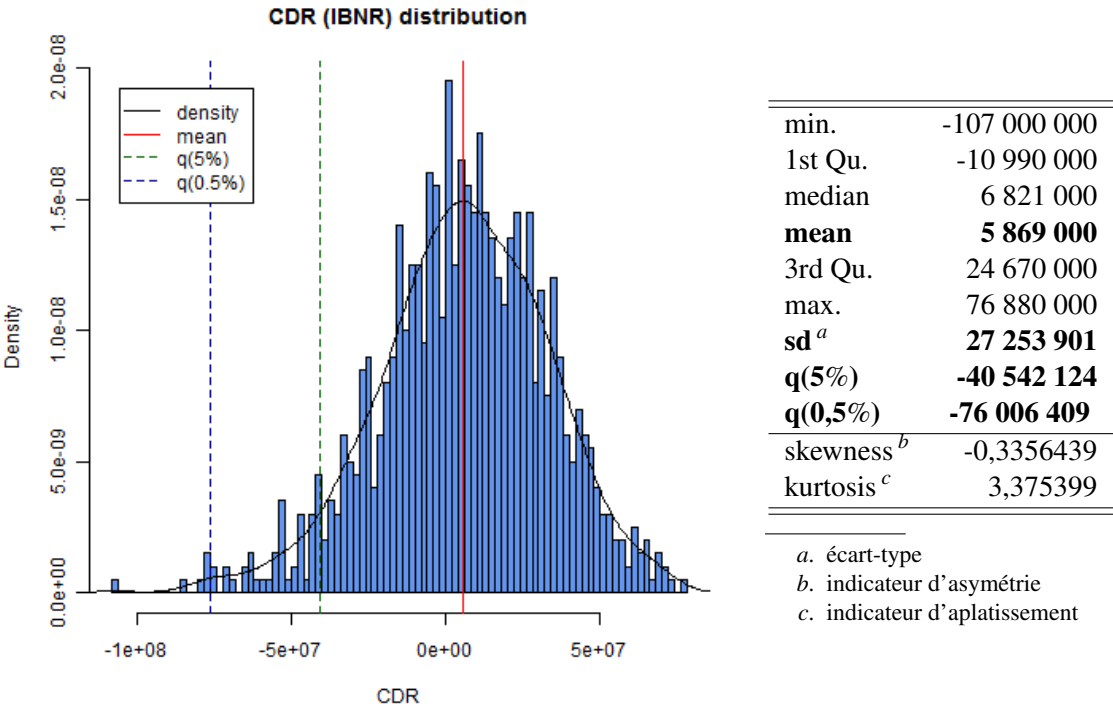
Toujours sur la branche Dommage, nous observons une moyenne du $\widehat{CDR}(\text{IBNeR})$ aux alentours de 2 million et un quantile 0,5 % de -31,5 million.



7.3.3 CDR(IBNR)

Enfin, pour mesurer l'incertitude à un an au niveau global du modèle, nous simulons N scénarios pour les charges à l'année $n + 1$ des sinistres connus et pour la nouvelle diagonale des triangles de nombres. Nous appliquons ensuite tout le modèle (projection d'IBNeR + projection d'IBNyR) sur chacun des scénarios. Nous en déduisons une distribution empirique du $\widehat{CDR}(IBNR)$.

Toujours sur la branche Dommage, nous obtenons un $\widehat{CDR}(IBNR)$ en moyenne plus grand que la somme des $\widehat{CDR}(IBNeR)$ moyen et $\widehat{CDR}(IBNyR)$ moyen. Par contre, si nous raisonnons au niveau du quantile 0,5 %, le modèle global a une incertitude à 1 an plus faible que la somme des deux modules.



Bibliographie

[1] Michael Merz & Natalia Lysenko Mario V. Wüthrich. Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method.

8

Allocation économique des provisions

Sommaire

8.1 Allocation d'<i>IBNeR</i>	109
8.2 Allocation d'<i>IBNyR</i>	110

Nous avons un modèle pour le provisionnement des sinistres graves, applicable à chacune des branches d'activité mais au niveau global d'AXA CS. Nous discutons dans ce dernier chapitre son allocation économique aux différentes succursales d'AXA CS. Comme le modèle estime séparément les réserves *IBNeR* et les réserves *IBNyR*, nous cherchons aussi deux allocations, l'une pour les *IBNeR* et l'autre pour les *IBNyR*.

8.1 Allocation d'*IBNeR*

Rappelons que la projection d'*IBNeR* est faite par une version ligne à ligne de Chain-ladder. Nous développons chacun des sinistres non-clos. J'ai mentionné dans les chapitres précédents certains avantages des méthodes ligne à ligne par rapport à des méthodes agrégées. Dans ce chapitre, nous en découvrons encore un. Un développement ligne à ligne nous permet de connaître le montant d'*IBNeR* de chaque sinistre. Grâce à la base technique disponible chez AXA CS, nous pouvons facilement identifier la succursale à laquelle un sinistre est rattaché. D'une telle manière, nous pouvons répartir la réserve *IBNeR* par succursale, ce que nous n'arrivons pas à faire avec une méthode de provisionnement agrégée.

8.2 Allocation d'*IBNyR*

L'allocation d'*IBNyR* est plus difficile puisque les réserves *IBNyR* sont estimées par une méthode agrégée.

La première solution est d'appliquer le module Projection d'*IBNyR* à chacune des succursales. Nous construisons deux triangles de nombres de sinistres graves et un vecteur d'exposition (de primes) par succursale et appliquons la méthode Bornhuetter-Ferguson mixte. Cette solution paraît logique, mais les triangles de nombres sont très instables. Si nous nous raisonnons par succursale, le triangle risque d'avoir très peu de sinistres sur les cellules. L'estimation par la méthode Bornhuetter-Ferguson ou n'importe quelle autre méthode ne sera pas pertinente.

Une méthode courante est d'allouer les réserves en prorata de la prime collectée par succursale. La prime pure est par définition l'espérance des pertes. Pourtant, l'espérance des pertes ne fait pas une distinction entre les pertes graves (*Major Losses*) et les pertes attritionnelles. Nous retournons vers une autre notion qui couvre les primes : le profil de risque (engagement, parts, rétention, primes).

Chaque succursale d'AXA CS a son propre profil de risque. Pour chaque branche d'activité, elle souscrit un programme d'assurance qui regroupe des tranches différentes. Il faut noter qu'AXA n'est pas toujours le seul assureur sur ces tranches. Sur une tranche donnée, AXA CS peut avoir une part importante ou faible. L'engagement est une agrégation de ces tranches. Les sinistres graves ne surviennent que dans les tranches élevées. Une succursale qui n'a pas de tranches élevées peut aussi collecter un montant de primes aussi élevé qu'une succursale dont l'engagement contient des tranches élevées. Pourtant, seulement la dernière peut subir des sinistres graves. L'engagement, les tranches et la part sur chaque tranche apportent des informations intéressantes sur la probabilité de survenance des sinistres graves et sur leur montant s'ils surviennent.

Nous avons identifié des facteurs clés pour l'allocation des réserves aux différentes succursales d'AXA CS. La question est comment combiner ces deux facteurs pour avoir une pondération entre succursales. Ce mémoire a été rédigé avant la fin de mon stage quand je n'ai pas encore trouvé une solution concrète pour allouer les réserves *IBNyR*. Ce sera un défi pour la fin de mon stage mais aussi une question ouverte pour tous les lecteurs intéressés par ce sujet d'allocation optimale.

Conclusion

À travers ces 8 chapitres, nous avons trouvé une réponse pour le problème de provisionnement des sinistres graves chez AXA Corporate Solutions. Le modèle retenu a été construit sur la base des modèles existants chez AXA CS, en apportant quelques idées d'amélioration. Ces idées proviennent de la revue littéraire des différentes méthodes de provisionnement.

Défi

Le défi qui nous a été posé était de construire un modèle pour le provisionnement des sinistres graves chez AXA CS. Un sinistre rentre définitivement dans le provisionnement des graves dès lors que sa charge dépasse le seuil grave. Dans cette optique, la charge ultime d'un sinistre grave n'est pas forcément au-dessus du seuil. Le modèle traite donc deux cas correspondant à deux positions de la charge ultime par rapport au seuil.

Accomplissements

Nous avons proposé un modèle qui estime séparément les *IBNeR* et les *IBNyR*. Pour la projection d'*IBNeR*, nous avons utilisé un développement ligne à ligne qui pondère des facteurs de développement individuels en fonction de la proximité entre le sinistre à développer et les sinistres de référence. Cette méthode est mieux adaptée au comportement des sinistres graves que la méthode Chain-ladder classique. Elle nous permet aussi de connaître le montant d'*IBNeR* de chacun des sinistres connus. Nous pouvons ainsi allouer facilement les réserves *IBNeR* aux différentes succursales d'AXA CS. La projection d'*IBNyR* se fait par une méthode agrégée. Nous distinguons deux groupes d'*IBNyR* : les sinistres tardifs dont la charge ultime sera au-dessus du seuil grave et les sinistres tardifs dont la charge ultime sera au-dessous. Nous utilisons une approche fréquence-coût pour estimer le montant *IBNyR* de chaque groupe. La fréquence (le nombre de sinistres tardifs) s'estime par une méthode dite Bornhuetter-Ferguson avec cadence Chain-ladder et a priori *ALR*. Nous utilisons dans cette méthode un triangle de nombres et un vecteur de primes comme exposition. A partir de ces deux éléments, nous estimons le ratio "nombre moyen de sinistres graves par unité d'exposition" et en déduisons un estimateur a priori du nombre ultime de sinistres graves. Le montant de réserve dépend de cet estimateur a priori et de la cadence estimée par Chain-ladder.

Nous avons testé notre modèle sur plusieurs branches d'activité. Il donne en général des résultats plus plausibles que les autres modèles. L'incertitude à un an a été quantifiée. En moyenne, le *Claims*

Developemnt Result (CDR) est relativement faible par rapport au montant total de la charge ultime. Par contre, les quantiles 5 % et 0,5 % du *CDR* sont élevés (en valeur absolue), ce qui est inévitable dans le cadre du provisionnement des sinistres graves.

Limites

Le modèle présente encore des limites. Premièrement, il n'est pas bien avancé sur le traitement de l'inflation. Le problème de l'inflation est complexe et nécessitera plus de recherche. Deuxièmement, la date de clôture d'un sinistre n'est pas modélisée dans la projection d'*IBNeR*. Troisièmement, la projection d'*IBNyR* par l'approche fréquence-coût n'est pas stable. La calibration de la sévérité et la construction des deux triangles de nombres dépendent tous les deux de la projection d'*IBNeR*. Une petite erreur dans l'estimation des *IBNeR* peut entraîner une erreur beaucoup plus importante dans la projection d'*IBNyR*. Le choix de la sévérité repose sur très peu de points disponibles dans l'historique des sinistres. Les triangles des nombres sont en général instables.

Dans Chain-ladder ligne à ligne, nous n'avons développé que les charges. L'analyse du développement des payés pourrait apporter des informations supplémentaires. Le modèle Munich Chain-ladder ligne à ligne que j'ai développé n'a pas pu tenir compte de l'impact de la proximité des sinistres sur leur développement.

Concernant l'allocation économique des réserves aux différentes succursales d'AXA CS, la méthode Chain-ladder ligne à ligne nous permet d'allouer directement les *IBNeR*. Par contre, le montant de réserves d'*IBNyR* qui s'estime par une méthode agrégée posera une difficulté dans son allocation économique.

Perspectives

Face aux limites mentionnées ci-dessus, j'ai proposé quelques perspectives.

Un modèle plus sophistiqué pour le traitement de l'inflation pourrait être développé. Pour ce faire, nous devrions potentiellement modéliser la date de clôture d'un sinistre.

La méthode Chain-ladder ligne à ligne que j'ai proposée utilise la distance entre les charges de l'année de développement j pour calculer la proximité et prévoir le passage de j à $j + 1$. On peut également penser que les charges passées (des années de développement $m < j$) ont un impact sur le développement de j à $j + 1$. Le modèle retenu a un seul paramètre β pour quantifier l'impact de la proximité des charges sur toutes les années de développement. Une approche plus fine pour mesurer cet impact sur chacune des années de développement pourrait être meilleure.

Pour le développement des triangles de nombres dans la projection d'*IBNyR*, un ratio "nombre moyen de sinistres graves par unité d'exposition" estimé indépendamment du triangle réduirait la volatilité de la méthode. Une exposition plus appropriée que la prime collectée serait aussi envisageable. Comme le calibrage de la sévérité repose sur très peu de points, nous pourrions utiliser des données marché. A titre d'exemple, le *blending* de la courbe d'*OEP* du marché et celle de la modélisation

interne a été développé chez AXA pour mieux calibrer la loi de sévérité.

Enfin, une allocation optimale des *IBNyR* aux différentes succursales d'AXA CS nécessiterait une phase de recherche supplémentaire pour compléter le modèle.

Bibliographie

- [1] AXA. Axa corporate solutions presentation. 2015.
- [2] Arthur Charpentier & al. Mesurer le risque lors du calcul des provisions pour sinistres à payer.
- [3] Hans Bühlmann & Alois Gisler. A course in credibility theory and its applications.
- [4] Hélène Gibello & Benoît Lebrun. Crédibilisation des méthodes de provisionnement non-vie. *Mémoire d'actuariat*.
- [5] P. D. England & R. J. Verrall. Stochastic claims reserving in general insurance.
- [6] Mario V. Wüthrich & Michael Merz. Stochastic claim reserving methods in insurance. *Wiley Finance*, 2008.
- [7] Ragnar Norberg. Prediction of outstanding liabilities in non-life insurance. *Astin Bulletin*, 23(1), 1993.
- [8] Ragnar Norberg. Prediction of outstanding liabilities : Li model variations and extensions. *Astin Bulletin*, 29(1) :5–25, 1999.
- [9] John B. Mahon. Transition matrix theory and individual claim loss development. *Casualty Actuarial Society Forum*, Spring 2005.
- [10] Jens M. Dittmer. Nearest-neighbour methods for reserving with respect to individual losses. August 2006.
- [11] FIA Karl Murphy FIA, Andrew McLennan FIAA. A method for projecting individual large claims. 2006.
- [12] Bas Lodder. Incremental claim developpement (icd). *Swiss Mobiliar Insurance & Pension*, 2015.
- [13] Beneteau. Modèle de provisionnement sur données détaillées en assurance non-vie. *Mémoire d'actuariat*, 2004.
- [14] Dinh & Chau. Mesure de provisions cohérentes et méthodes lignes à lignes pour des risques non-vie. *Mémoire d'actuariat*, 2012.
- [15] Le & Viot. Méthode d'évaluation stochastique des provisions techniques d'une entreprise d'assurance dommages par une approche ligne à ligne. *Mémoire d'actuariat*, 2013.
- [16] Christian Y. Robert. Théorie des valeurs extrêmes. Mars 2012.
- [17] Shihong Cheng & Liang Peng. Confidence intervals for the tail index. *Bernoulli*, 7(5) :751–760, 2001.
- [18] J. Danielsson. Using a bootstrap method to choose the sample fraction in tail index estimation. *Journal of Multivariate Analysis*, 76 :226–248, 2001.

- [19] ? Développement ligne à ligne par le ratio P/I . *Document interne AXA*.
- [20] Gerhard Quarg & Thomas Mack. Munich chain ladder : A reserving method that reduces the gap between ibnr projections based on paid losses and ibnr projections based on incurred losses. *Casualty Actuarial Society*, 2(2) :266–299.
- [21] Olivier Karusisi. Projection à l'ultime des sinistres graves. *Document interne AXA*.
- [22] Michael Merz & Natalia Lysenko Mario V. Wüthrich. Uncertainty of the claims development result in the chain ladder method.



Preuve des lemmes

A.1 Preuve du lemme 2.1.1

Cette preuve est issue de [Wüthrich & Merz] "Stochastic claims reserving methods in insurance".

Rappel du lemme

Supposons que P_1, \dots, P_H sont des estimateurs non-biaisés et stochastiquement indépendants de μ , de variances $\sigma_1^2, \dots, \sigma_H^2 > 0$. Alors l'estimateur par combinaison linéaire non-biaisé de P_1, \dots, P_H qui donne la variance minimale est donné par :

$$P = \frac{\sum_{h=1}^H \frac{P_h}{\sigma_h^2}}{\sum_{h=1}^H \frac{1}{\sigma_h^2}}, \quad \text{avec} \quad \text{Var}(P) = \left(\sum_{h=1}^H \frac{1}{\sigma_h^2} \right)^{-1}$$

Démonstration. Soient $\vec{P} = (P_1, \dots, P_H)'$ et $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_H)'$ deux vecteurs de dimension H . Notons V la matrice de variance-covariance de \vec{P} qui est en fait une matrice diagonale ($V_{h,h} = \sigma_h^2$ et $V_{h,k} = 0 \quad \forall h, k = 1, \dots, H; h \neq k$). Nous avons, avec $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^H$,

$$E[\vec{\alpha}' \vec{P}] = \mu \vec{\alpha}' \mathbb{1} \quad \text{et} \quad \text{Var}(\vec{\alpha}' \vec{P}) = \vec{\alpha}' V \vec{\alpha} = \sum_{h=1}^H \alpha_h^2 \sigma_h^2$$

Le Lagrangien pour l'estimateur non-biaisé à variance minimale est donné par :

$$\mathcal{L}(\vec{\alpha}, \lambda) = \frac{1}{2} \vec{\alpha}' V \vec{\alpha} - \lambda (\vec{\alpha}' \mathbb{1} - 1)$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \vec{\alpha}} \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \lambda) &= V\vec{\alpha} - \lambda \mathbb{1} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathcal{L}(\vec{\alpha}, \lambda) &= \vec{\alpha}' \mathbb{1} - 1 = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} \vec{\alpha}' \mathbb{1} = \mathbb{1}' \vec{\alpha} = 1 \\ \vec{\alpha} = \lambda V^{-1} \mathbb{1} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\vec{\alpha} = (\mathbb{1}' V^{-1} \mathbb{1})^{-1} V^{-1} \mathbb{1}$$

et que :

$$Var(\vec{\alpha}' \vec{P}) = (\mathbb{1}' V^{-1} \mathbb{1})^{-1}$$

La démonstration se termine par poser $P = \vec{\alpha}' \vec{P}$.

□

A.2 Preuve du lemme 4.2.1

Rappel du lemme

La méthode Chain-ladder ligne à ligne (version *Future Losses*) donne les mêmes estimateurs de *link-ratios*, et donc la même charge ultime agrégée par année d'origine, que la même Chain-ladder.

Démonstration. En agrégeant la charge des sinistres k (au delà du seuil d'*IBNeR*) par année de survenance i , on note :

$$(\tilde{C}_{i,j}, \tilde{C}_{i,j+1}) = \left(\sum_{k|AY(k)=i} C_{k,j} \mathbb{1}\{C_{k,j}, C_{k,j+1} \geq T_{IBNeR}\}, \sum_{k|AY(k)=i} C_{k,j+1} \mathbb{1}\{C_{k,j}, C_{k,j+1} \geq T_{IBNeR}\} \right)$$

La formule pour estimer le *link-ratio* f_j dans la méthode Chain-ladder ligne à ligne se réécrit :

$$\widehat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} \widehat{C}_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j} \widehat{C}_{i,j}}$$

On retrouve la formule Chain-ladder classique. En utilisant les mêmes *link-ratios*, on obtiendra les mêmes charges ultimes agrégées par année de survenance, que ce soit un développement de Chain-ladder classique ou un développement ligne à ligne.

$$\sum_{k|AY(k)=i} \widehat{C}_{k,J}^{\text{CL ligne à ligne}} = \widehat{C}_{i,J}^{CL}, \quad \forall i = 1, \dots, I$$

□

B

Inférence statistique

Pour estimer les paramètres d'une distribution étant donné un échantillon, nous disposons au moins deux méthodes classiques : l'estimation du maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood Estimation* : *MLE*) et l'estimation par méthode des moments (*Method of Moments Estimation* : *MME*).

Soit un échantillon x_1, \dots, x_n de n observations i.i.d, issues d'une distribution de densité $f_0(\cdot)$. On suppose que f_0 appartient à une famille de distributions $\{f_0(\cdot|\theta), \theta \in \Theta\}$, d'où $f_0(\cdot) := f_0(\cdot|\theta_0)$. La vraie valeur θ_0 est inconnue et on veut chercher un estimateur $\hat{\theta}$ de θ_0 .

B.1 Estimation du maximum de vraisemblance

On définit la densité jointe de n variables aléatoires X_1, \dots, X_n i.i.d de densité f :

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \dots f(x_n | \theta)$$

Notons x_1, \dots, x_n les n réalisations (les observations) correspondantes. On appelle la fonction de vraisemblance :

$$\mathcal{L}(\theta | x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta)$$

Le log-vraisemblance est ainsi défini par :

$$\mathcal{LL}(\theta | x) := \ln(\mathcal{L}(\theta | x_1, \dots, x_n)) = \sum_{i=1}^n \ln(f(x_i | \theta))$$

La méthode du maximum de vraisemblance consiste à trouver la valeur θ qui maximise $\mathcal{LL}(\theta | x)$:

$$\{\hat{\theta}^{MLE}\} \subseteq \left\{ \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}} \mathcal{LL}(\theta | x) \right\}$$

B.2 Estimation par méthode des moments

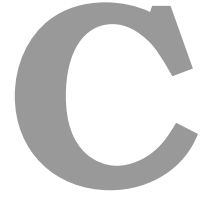
La méthode des moments estime le (ou l'ensemble de) paramètre(s) θ en égalisant certains moments théoriques (qui dépendent de θ) avec leurs contreparties empiriques. Par exemple si $\theta \in \mathbb{R}^2$, on peut l'estimer en égalisant les deux premiers moments théoriques et empiriques.

Pour rappel, la moyenne empirique et la variance empirique de X sont respectivement données par :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

L'estimateur $\widehat{\theta}^{MME}$ du vrai paramètre θ_0 donné par la méthode des moments satisfait le système d'équations :

$$\begin{cases} E[X(\theta)] &= \bar{x} \\ Var(X(\theta)) &= s_x^2 \end{cases}$$



Calibration des lois de sévérité

Je détaille ci-dessous l'estimation des paramètres des lois de sévérité *GEV* utilisées dans la projection d'IBNyR (Weibull, Log-Normal, Pareto tronquée à droite, Pareto Généralisée), suivant la méthode du maximum de vraisemblance et la méthode des moments. Cette méthodologie est utilisée dans l'outil Future Losses et a été retenue dans mon modèle de provisionnement des sinistres graves.

C.1 Distribution Weibull

On dit que $X \sim Weibull(u, b, c)$ si elle a pour fonction de répartition :

$$F(x) = \left(-\left(\frac{x-u}{b} \right)^c \right)$$

où u est le paramètre de localisation, b le paramètre d'échelle et c le paramètre de forme. La fonction quantile correspondante est :

$$F^{-1}(\alpha) = u + b (-\ln(1 - \alpha))^{1/c}$$

La moyenne et la variance sont respectivement :

$$E[X] = u + b \Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)$$
$$V(x) = b^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{c}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{c}\right)\right)^2$$

La log-vraisemblance s'écrit :

$$\mathcal{LL}(u, b, c|x)/n = \ln(c) - c\ln(b) + (c-1) \sum_{i=1}^n (w_i \ln(x_i - u)) - b^{-c} \sum_{i=1}^n (w_i (x_i - u)^c)$$

où w_i est le poids donné au sinistre i , n le nombre de sinistres et x_i la charge ultime du sinistre i .

L'estimation des paramètres se fait par deux méthodes MLE ou MME.

MLE

En différenciant le log-vraisemblance, nous pouvons trouver \widehat{c} qui est solution de :

$$h(c) = \frac{\sum_{i=1}^n (w_i (x_i - u)^c \ln(x_i - u))}{\sum_{i=1}^n (w_i (x_i - u)^c)} - \frac{1}{c} - \sum_{i=1}^n (w_i (x_i - u)^c)$$

MME

[to be continued]

C.2 Distribution Log-Normal

On définit la loi Log-Normal à partir d'une loi Normal.

$$X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \quad \text{ssi} \quad \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

La densité de la loi Log-Normal est donnée par :

$$f_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}x} \exp\left(-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{1}_{]0, \infty[}(x)$$

La moyenne et la variance sont respectivement :

$$\begin{aligned} E[X] &= u + \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) \\ V(x) &= \exp(2\mu + \sigma^2) [\exp(\sigma^2) - 1] \end{aligned}$$

La fonction quantile :

$$F^{-1}(\alpha) = u + \exp\left[\mu + \sigma\Phi(\alpha)\right]$$

avec Φ^{-1} est la fonction quantile de la loi Normal centrée réduite.

Le log-vraisemblance $\mathcal{LL}(\mu, \sigma | x)$ est donné par :

$$\frac{\mathcal{LL}(\mu, \sigma | x)}{n} = -\ln(\sigma \sqrt{2\pi}) - \bar{\Lambda} + \frac{1}{2\sigma^2} [S_{\Lambda, w}^2 + (\bar{\Lambda} - u)^2]$$

avec $\Lambda_i = w_i \ln(x_i - u)$ et $\hat{\Lambda} = \dots$

MLE

$$\begin{aligned}\hat{\mu}^{MLE} &= \sum_{i=1}^n w_i \ln(x_i - u) \\ \hat{\sigma}^{MLE} &= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n [w_i \ln(x_i - u) - \hat{\mu}^{MLE}]^2\end{aligned}$$

MME

$$\begin{aligned}(\hat{\sigma}^{MME})^2 &= \ln \left[1 + \left(\frac{S_{x, w}^2}{\bar{x}_w - u} \right)^2 \right] \\ \hat{\mu}^{MME} &= \ln(\bar{x}_w - u) - \frac{(\hat{\sigma}^{MME})^2}{2}\end{aligned}$$

C.3 Distribution Pareto tronquée à droite

La fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1 - (u/x)^\alpha}{1 - (u/M)^\alpha} & \forall x \geq u \\ 0 & \forall x < u \end{cases}$$

avec u le paramètre de localisation (le seuil grave), α le paramètre de forme et M la perte maximale.

La fonction quantile est :

$$F^{-1}(\alpha) = u \left[1 - \alpha \left(1 - (u/M)^\alpha \right) \right]^{-1/\alpha}$$

La moyenne et la variance sont respectivement :

$$\begin{aligned}E[X] &= \left(\frac{u}{1 - 1/\alpha} \right) \left(\frac{1 - (u/M)^{\alpha-1}}{1 - (u/M)^\alpha} \right) \\ Var(X) &= \left(\frac{u^2}{1 - 2/\alpha} \right) \left(\frac{1 - (u/M)^{\alpha-2}}{1 - (u/M)^\alpha} \right) - (E[X])^2\end{aligned}$$

Le log-vraisemblance $\mathcal{LL}(u, \alpha, M | x)$ est donné par :

$$\frac{\mathcal{LL}(u, \alpha, M)}{n} = \ln \left(\frac{\alpha u^\alpha}{1 - (u/M)^\alpha} \right) - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n w_i \ln(x_i)$$

MLE

$\hat{\alpha}^{MLE}$ est la solution de :

$$h(\alpha) = \ln(u) + \alpha^{-1} + \frac{\ln(u/M)}{(u/M)^{-\alpha} - 1} - \sum_{i=1}^n w_i \ln(x_i)$$

avec w_i le poids donné au sinistre i , n le nombre de sinistres, x_i le coût du sinistre i .

MME

$\hat{\alpha}^{MME}$ est la solution de :

$$h(\alpha) = \overline{x_w} - E[X]$$

où $\overline{x_w}$ est la moyenne pondérée de l'échantillon : $\overline{x_w} = \sum_{i=1}^n w_i x_i$

C.4 Distribution Pareto généralisée

La fonction de répartition de la loi Pareto Généralisée est :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left[1 + \xi \frac{x-u}{\sigma} \right]^{1-1/\xi} & \forall x \geq u \\ 0 & \forall x < u \end{cases}$$

avec u le paramètre de localisation (seuil grave), ξ le paramètre de forme et σ le paramètre d'échelle.

La fonction quantile est :

$$F^{-1}(\alpha) = u + \frac{\sigma}{\xi} [(1-\alpha)^{-\xi} - 1]$$

La moyenne et la variance sont respectivement :

$$\begin{cases} E[X] &= u + \frac{\sigma}{1-\xi} & \forall \xi < 1 \\ Var(X) &= \frac{\sigma^2}{(1-2\xi)(1-\xi)^2} & \forall \xi < 0,5 \end{cases}$$

Le log-vraisemblance est donné par :

$$\frac{\mathcal{LL}(u, \sigma, \xi | x)}{n} = -\ln(\sigma) - \left(1 + \frac{1}{\xi} \right) \sum_{i=1}^n w_i \ln \left(1 + \xi \frac{X_i - u}{\sigma} \right)$$

MLE

$$(\widehat{\xi}^{MLE}, \widehat{\tau}^{MLE}) = -\operatorname{argmax} \left\{ \ln\left(\frac{\tau}{\xi}\right) - \left(1 + \frac{1}{\xi}\right) \sum_{i=1}^n w_i \ln(1 + \tau(x_i - u)) \right\}$$

$$\text{où } \widehat{\tau}^{MLE} = \frac{\widehat{\xi}^{MLE}}{\widehat{\sigma}^{MLE}}.$$

MME

La moyenne et la variance empiriques pondérées sont :

$$\begin{aligned} \overline{x_w} &= \sum_{i=1}^n w_i x_i \\ S_{x,w}^2 &= \frac{n}{n-1} \sum_{i=1}^n w_i (x_i - \overline{x_w})^2 \end{aligned}$$

Les estimateurs de ξ et σ sont respectivement :

$$\begin{aligned} \widehat{\xi}^{MME} &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{(\overline{x_w} - u)^2}{S_{x,w}^2} \right] \\ \widehat{\sigma}^{MME} &= \frac{1}{2} (\overline{x_w} - u) \left[1 + \frac{(\overline{x_w} - u)^2}{S_{x,w}^2} \right] \end{aligned}$$



Mesure de la qualité d'ajustement d'un modèle statistique

D.1 Critère d'information d'Akaike (AIC)

Dans un modèle statistique, l'ajout d'un paramètre peut augmenter systématiquement la vraisemblance du modèle. Le critère d'information d'Akaike (Hirotsugu Akaike, 1973) vise à pénaliser un modèle en fonction du nombre de paramètres afin de satisfaire le critère de parcimonie.

$$AIC = 2k - \ln(\mathcal{L})$$

avec k le nombre de paramètres à estimer du modèle et \mathcal{L} le maximum de la fonction de vraisemblance du modèle. Le modèle retenu est celui qui donne l'information d'Akaike le plus petit.

D.2 Test de Kolmogorov-Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov (*KS test*) est utilisé pour déterminer si un échantillon x_1, \dots, x_n suit distribution donnée de fonction de répartition F continue, ou bien si deux échantillons suivent la même loi (hypothèse nulle)

Notons F_n la fonction de répartition empirique construite à partir de l'échantillon x_1, \dots, x_n . Le *KS test* introduit la statistique suivante :

$$D_n = \sup_x |F_n(x) - F(x)|$$

La qualité d'ajustement du *KS test* fait intervenir les valeurs critiques k_α (c'est en fait la quantile d'ordre $1 - \alpha$) de la distribution de Kolmogorov. On rejette l'hypothèse nulle au niveau α si

$$\sqrt{n}D_n > k_\alpha$$

D.3 Critère de Cramér-von Mises

Le critère de Cramér-von Mises est une alternative du test de Kolmogorov Smirnov pour mesurer la qualité d'ajustement d'une fonction de répartition théorique F vis-à-vis une fonction de répartition empirique.

Soient x_1, \dots, x_n un échantillon (dans l'ordre croissant), à tester s'il est issu d'une variable aléatoire X de distribution F . On sait que si X est continue alors $F(X) \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Étant donné que les $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ sont ordonnées dans l'ordre croissant, le critère de Cramér-von Mises teste la somme des erreurs quadratiques entre $F(x_i)$ et $\frac{2i-1}{2n}$ en y rajoutant un terme supplémentaire :

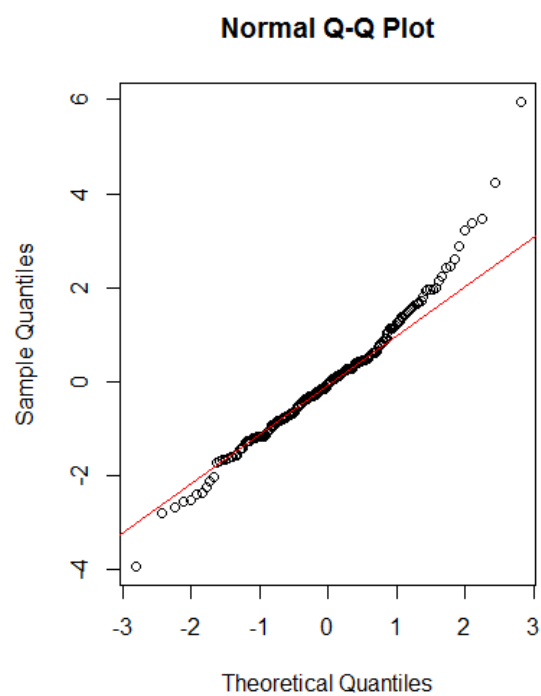
$$T = n \omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right]^2$$

À un seuil α donné, si la valeur de la statistique T est plus grande que la valeur critique t_α fournie par la table de Cramér-von Mises, on rejette l'hypothèse que les $(x_i)_{i=1, \dots, n}$ sont issues de la distribution F au niveau α .

D.4 Le diagramme Quantile-Quantile

Le diagramme Quantile-Quantile ou encore *Q-Q plot* est un outil graphique pour évaluer la pertinence de l'ajustement d'une distribution donnée à un modèle théorique ou pour comparer deux distributions. J'explique ici le premier cas.

Soient x_1, \dots, x_n un échantillon. On veut tester s'il suit une distribution F donnée. On calcule un certain nombre de quantiles empiriques x_i à partir de l'échantillon. Si ce dernier suit la distribution théorique F , on devrait avoir les quantiles empiriques x_i observés égaux aux quantiles théoriques x_i^* . On représente donc le nuage de points (x_i^*, x_i) (en abscisse les quantiles théoriques et en ordonnée les quantiles empiriques). Si la distribution théorique choisie est pertinente, le nuage de points doit former (ou s'approcher de) la première diagonale. Si les points sont alignés suivant une droite $x_i = ax_i^* + b$, le modèle choisi est pertinent à une transformation affine près.

FIGURE D.1 – Exemple de *QQ-plot* avec la loi Normal comme distribution théorique



Résultats de test sur les autres branches d'activité

E.1 Branche Automobile

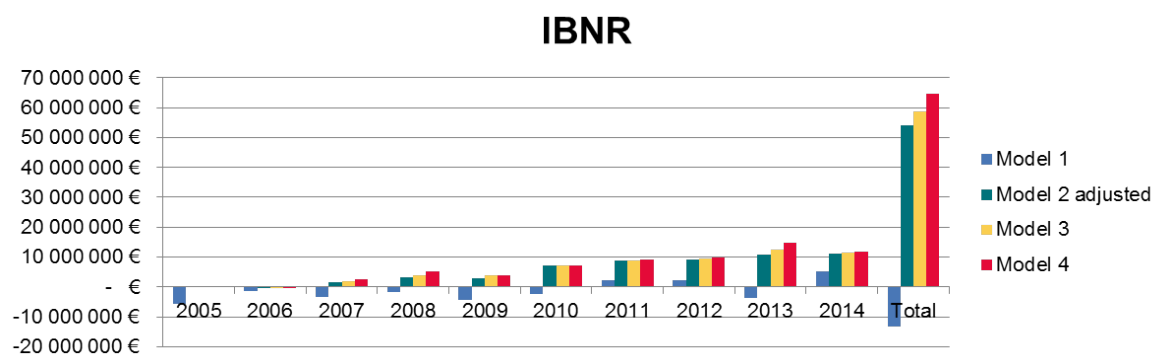


FIGURE E.1 – Automobile - IBNR

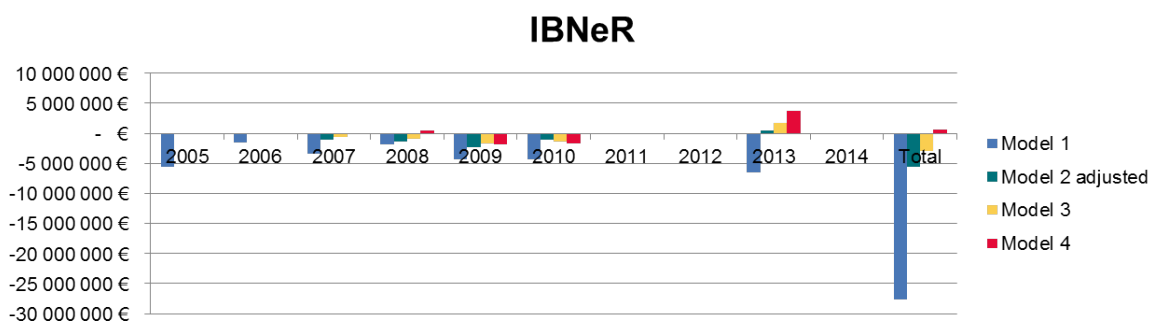
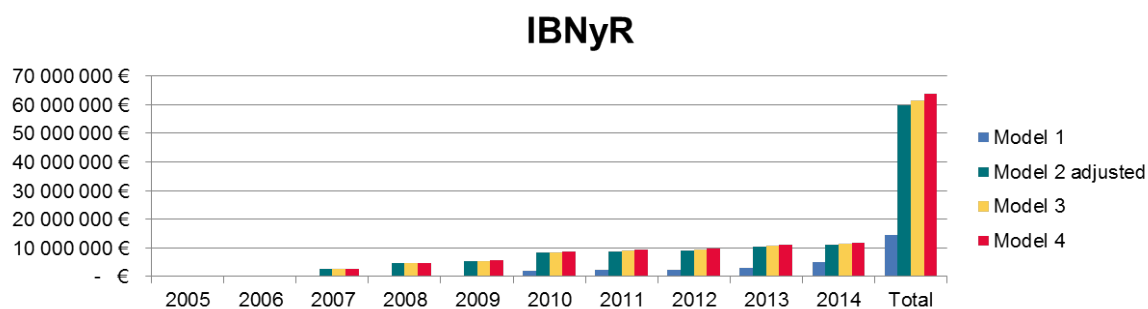
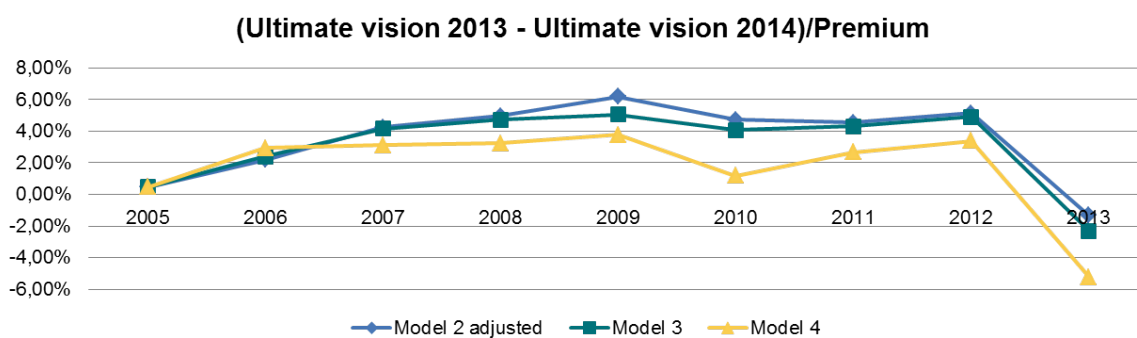
FIGURE E.2 – Automobile - *IBNeR*FIGURE E.3 – Automobile - *IBNyR*

FIGURE E.4 – Automobile - vision 2013 vs 2014

Modèle	Simplicité	Méthodologie	Consistance		Cohérence 2013-2014	
			IBNR	Score	Δ Ultime / Prime	Score
1	***	*	-13 176 189 €	*	NA	-
2 ajusté	***	**	54 145 147 €	*	-3,43 %	*
3	*	**	58 588 880 €	*	-3,06 %	**
4	**	***	61 454 565 €	*	-2,03 %	***
Vision ACS			30 000 000 €			

TABLE E.1 – Automobile - Comparaison

E.2 Branche Aviation

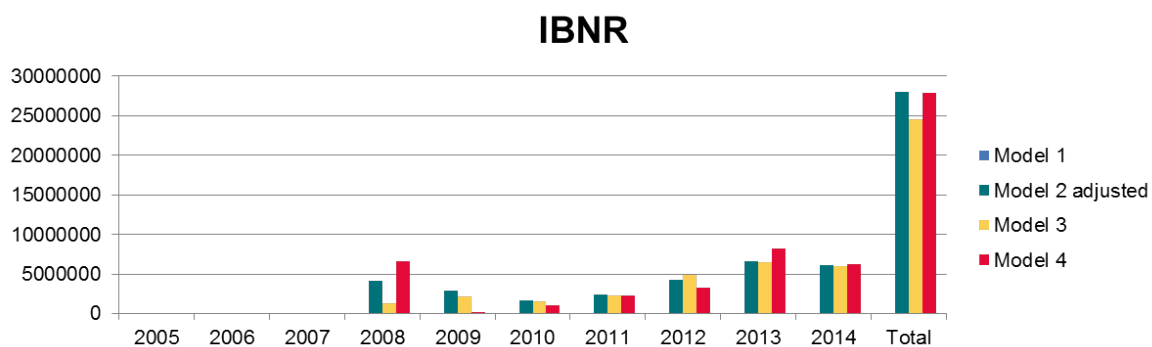


FIGURE E.5 – Aviation - IBNR

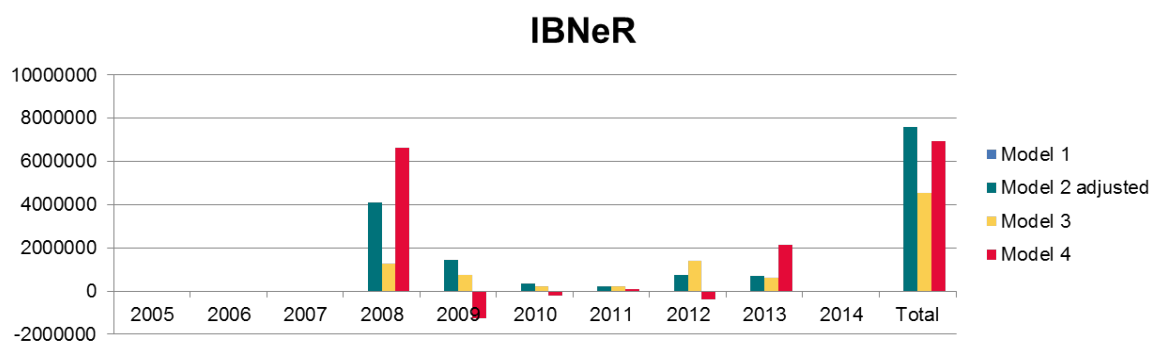


FIGURE E.6 – Aviation - IBNeR

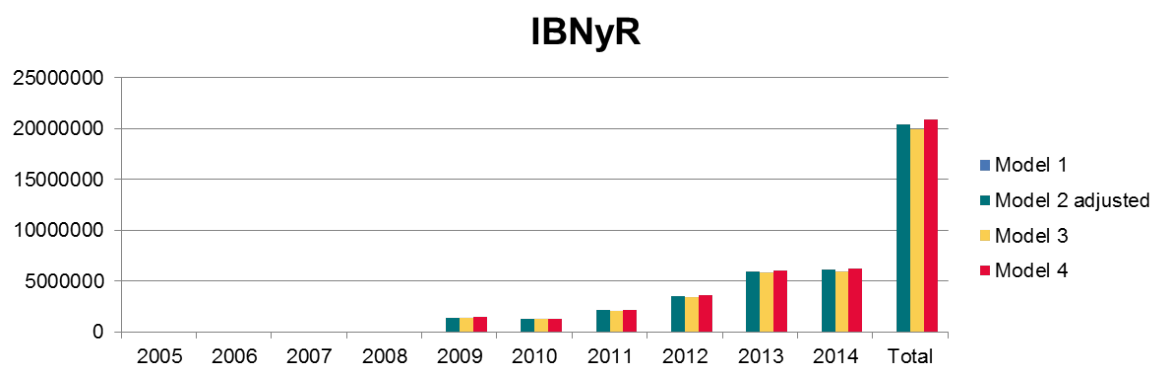


FIGURE E.7 – Aviation - IBNyR

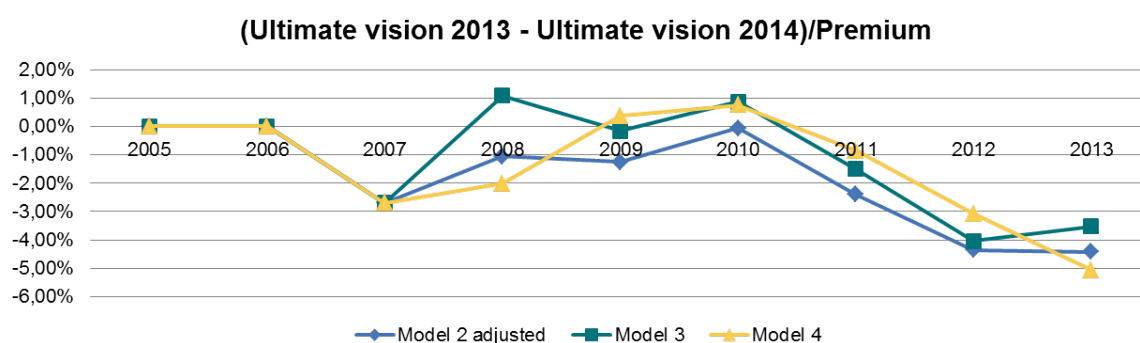


FIGURE E.8 – Aviation - vision 2013 vs 2014

Modèle	Simplicité	Méthodologie	Consistance		Cohérence 2013-2014	
			IBNR	Score	Δ Ultime / Prime	Score
1	***	*	0 €	*	NA	-
2 ajusté	***	**	28 027 586 €	*	-1,62 %	*
3	*	**	24 491 330 €	*	-0,94 %	***
4	**	***	27 889 146 €	*	-1,29 %	**
Vision ACS			60 000 000 €			

TABLE E.2 – Aviation - Comparaison



R et Shiny pour le développement de l'outil

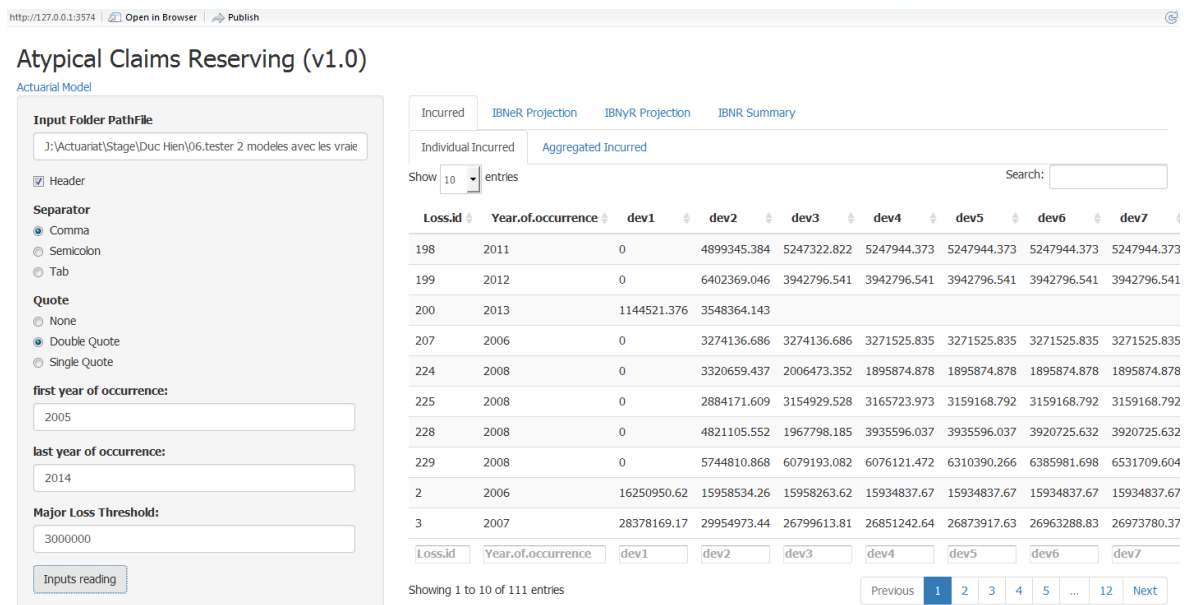


FIGURE F.1 – Shiny 1

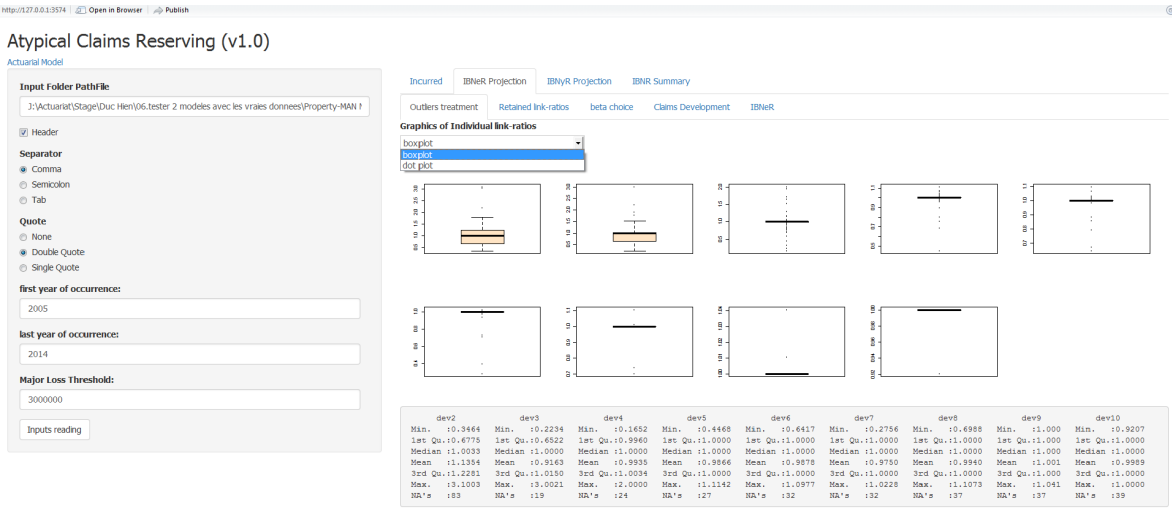


FIGURE F.2 – Shiny 2

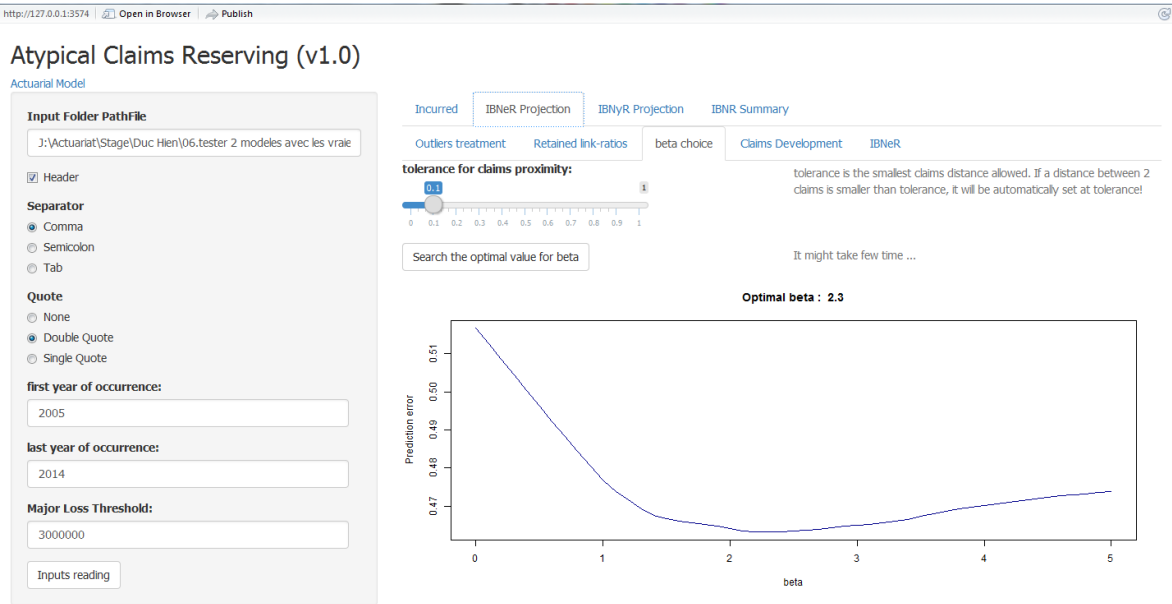
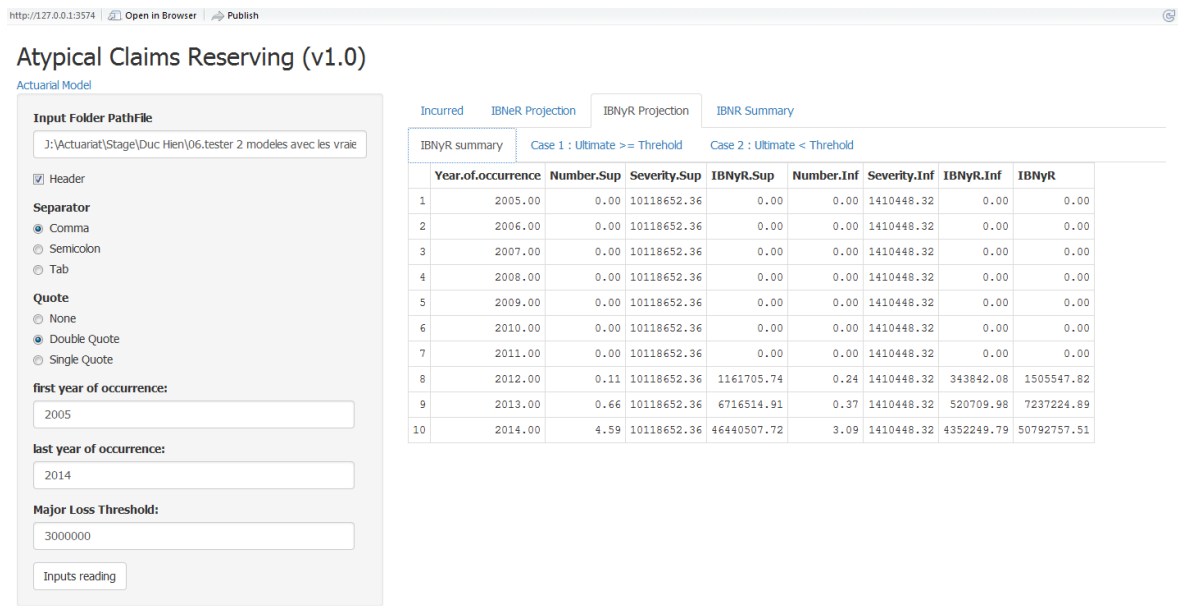


FIGURE F.3 – Shiny 3

FIGURE F.4 – *Shiny 4*

