# 北京工业大学 2019—2020 学年第一学期末
# 《概率论与数理统计》课程考试（工、经类，B卷）参考答案

## 一、填空题(共 15 个空，每空 2 分，共 30 分)

1. 设 $A$ 和 $B$ 为事件，且 $P(A)=0.2$，$P(A\cup B)=0.6$，则当设 $A$ 与 $B$ 互斥时，$P(B)=$ __0.4__；当 $A$ 与 $B$ 相互独立时，$P(B)=$ __0.5__。

2. 设连续型随机变量 $X$ 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ a+b\arcsin x, & |x|\le 1\\ 1, & x>1,\end{cases}$ 其中 $a$ 与 $b$ 为常数，则 $a=$ __0.5__，$b=$ __$1/\pi$__。

3. 若随机变量 $X$ 只取 $\pm1$ 和 2，且 $P(X=-1)=0.2$，$P(X=1)=0.4$，则 $E(X)=$ __1.0__，$Var(X)=$ __1.2__。

4. 设随机变量 $X$ 服从参数为 $\lambda$ 的泊松分布，且 $P(X=1)=P(X=2)$，则 $\lambda=$ __2__。

5. 若随机变量 $X_1, X_2$ 相互独立，且 $X_1\sim N(1,9)$，$X_2\sim N(2,4)$，$X=X_1-0.5X_2$，则 $X\sim$ __$N(0,10)$__。

6. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，$E(X)=2.4$，$Var(X)=1.44$，则 $n=$ __6__，$p=$ __0.4__。

7. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}$ 与 $S^2$ 分别为样本均值与样本方差，则 $\overline{X}\sim$ __$N(\mu,\sigma^2/n)$\_\_，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ __$t_{n-1}$\_\_，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ __$\chi^2_{n-1}$__。

8. 设 $X_1,\cdots,X_{25}$ 是抽自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，经计算得 $\bar{x}=5$，$s^2=0.09$，根据本试卷第 6 页上的 $t$ 分布表与 $\chi^2$ 分布表，得未知参数 $\mu$ 的置信系数为 0.95 的置信区间为[ 4.8762，5.1238 ]，$\sigma^2$ 的置信系数为 0.95 的置信区间为[ 0.05487，0.17418 ]。

## 二、计算题(共 5 个题，每题 14 分，共 70 分)

1. 某一地区肺癌发病率为 0.005。已知肺癌患者做肿瘤标记物试验，结果呈阳性概率为 0.95，非癌症患者做试验呈阳性概率为 0.03。求：

(1). 任选一人做肿瘤标记物试验，结果呈阳性的概率；

(2). 一人做肿瘤标记物试验结果呈阳性，其是癌症患者、非癌症患者的概率。

**解** 设 $A$ ={肿瘤标记物试验呈阳性}，$B_1$={肺癌患者}，$B_2$={非肺癌患者}，则

$P(B_1)=0.005$，　$(B_2)=0.995$，（假设 2 分，2 个概率、2 个条件概率各 1 分，共 4 分）

$P(A|B_1)=0.95$　$P(A|B_2)=0.03$，

(1). 由全概率公式，得

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=0.005\times0.95+0.995\times0.03=0.0346;$$

——（全概率公式 2 分，计算 2 分，结果 1 分）

(2). 由贝叶斯公式，得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.005\times0.95}{0.0346}=0.13728.$$

（叶斯公式 2 分，计算 2 分，结果 1 分）

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{0.995\times0.03}{0.0346}=0.86272$$

2. 随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ c-x, & 1<x<2 \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 求：

(1). 常数 $c$；(2). 分布函数 $F(x)$；(3). $E(X)$ 和 $Var(X)$；(4). $Y=X^2$ 的概率密度函数。

**解** (1). 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$， 即 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 (c-x)dx=0.5+c-0.5x^2\Big|_1^2=c-1=1$，故 $c=2$.

（积分表达式、积分计算及最后结果各 1 分，共 3 分）

(2).

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt, & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x tdt, & 0\le x<1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^x (2-t)dt, & 1\le x<2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^2 (2-t)dt+\int_2^x 0dt, & x\ge 2; \end{cases}=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.5x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-0.5x^2-1, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2; \end{cases}$$

（表达式、分段积分及结各 1 分，共 3 分）

(3) . $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\cdots=1$，

（表达式、积分式及结果各 1 分，共 3 分）

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\cdots=\dfrac{7}{6}$， （表达式、结果各 1 分）

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1/6$; （最后结果 1 分，共 3 分）

(4). 由 $Y=X^2$，得其反函数为 $x=\sqrt{y}, y>0, x>0$. 因此 $Y$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})'=\begin{cases} 0.5, & 0\le y<1 \\ \sqrt{y^{-1}}-0.5, & 1\le y<4 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（公式、结果各 1 分，共 2 分）

3. 设随机向量 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 24y(1-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 求：

(1). $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$；(2). $X$ 与 $Y$ 是否独立？为什么？(3). $E(Y)$.

**解** (1). 当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x 24y(1-x)dy=12x^2(1-x)$，

（积分表达式 2 分、积分结果 1 分）

所以 $f_X(x)=\begin{cases} 12x^2(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他, \end{cases}$ （最后结果 1 分，共 4 分）

同理，当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^1 24y(1-x)dx=12y(1-y)^2$，

$$f_Y(y)=\begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他; \end{cases}$$ （同上）

(2). 因在区域 $\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<x\}$ 内 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数度等于边缘概率密度的乘积，故 $X$ 与 $Y$ 是否独立.

(原因 1 分、结论 2 分)

(3). $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^1 12y^2(1-y)^2dy=\dfrac{2}{5}$. （积分式 2 分、结果 1 分，共 3 分）

2. 随机变量 $X$ 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ c-x, & 1<x<2 \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 求：

(1). 常数 $c$；(2). 分布函数 $F(x)$；(3). $E(X)$ 和 $Var(X)$；(4). $Y=X^2$ 的概率密度函数。

**解** (1). 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$， 即 $\int_0^1 xdx+\int_1^2 (c-x)dx=0.5+c-0.5x^2\Big|_1^2=c-1=1$，故 $c=2$.

（积分表达式、积分计算及最后结果各 1 分，共 3 分）

(2).

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dt, & x<0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x tdt, & 0\le x<1 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^x (2-t)dt, & 1\le x<2 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^1 tdt+\int_1^2 (2-t)dt+\int_2^x 0dt, & x\ge 2; \end{cases}=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 0.5x^2, & 0\le x<1 \\ 2x-0.5x^2-1, & 1\le x<2 \\ 1, & x\ge 2; \end{cases}$$

（表达式、分段积分及结各 1 分，共 3 分）

(3) . $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2 x(2-x)dx=\cdots=1$，

（表达式、积分式及结果各 1 分，共 3 分）

$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2f(x)dx=\int_0^1 x^3dx+\int_1^2 x^2(2-x)dx=\cdots=\dfrac{7}{6}$， （表达式、结果各 1 分）

$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=1/6$; （最后结果 1 分，共 3 分）

(4). 由 $Y=X^2$，得其反函数为 $x=\sqrt{y}, y>0, x>0$. 因此 $Y$ 的密度函数为

$$f_Y(y)=f_X(\sqrt{y})(\sqrt{y})'=\begin{cases} 0.5, & 0\le y<1 \\ \sqrt{y^{-1}}-0.5, & 1\le y<4 \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

（公式、结果各 1 分，共 2 分）

3. 设随机向量 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 24y(1-x), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x \\ 0, & 其他 \end{cases}$ 求：

(1). $X$ 和 $Y$ 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；(2). $X$ 与 $Y$ 是否独立？为什么？(3). $E(Y)$.

**解** (1). 当 $0\le x\le 1$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^x 24y(1-x)dy=12x^2(1-x)$，

（积分表达式 2 分、积分结果 1 分）

所以 $f_X(x)=\begin{cases} 12x^2(1-x), & 0\le x\le 1 \\ 0, & 其他, \end{cases}$ （最后结果 1 分，共 4 分）

同理，当 $0\le y\le 1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_y^1 24y(1-x)dx=12y(1-y)^2$，

$$f_Y(y)=\begin{cases} 12y(1-y)^2, & 0\le y\le 1 \\ 0, & 其他; \end{cases}$$

（同上）

(2). 因在区域 $\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<x\}$ 内 $(X,Y)$ 的联合概率密度函数度等于边缘概率密度的乘积，故 $X$ 与 $Y$ 是否独立.

（原因 1 分、结论 2 分）

(3). $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y\cdot f_Y(y)dy=\int_0^1 12y^2(1-y)^2dy=\dfrac{2}{5}$. （积分式 2 分、结果 1 分，共 3 分）