概率统计总复习

(第1讲)

1. 有甲、乙两袋，甲袋中有 3 只白球 2 只黑球，乙袋中有 4 只白球 4 只黑球，从甲袋中任取两球放入乙袋，然后再从乙袋中任取一球，求

(1). 最后从乙袋中取到的球为白球的概率;

(2). 在最后取到的球为白球的条件下，此球最初在甲袋中的概率.

2. （14 分）盒中装有 8 个乒乓球，其中有 6 个新的。第一次练习时，从中任取 2 个来用，用完后放回盒中。第二次练习时，再从盒中任取 2 个。

(1). 求第二次取出的球都是新球的概率；

(2). 求在第二次取出的球都是新球条件下，第一次取到的球都是新球的概率。

2. (本题 13 分) 箱中有同类产品 10 件，其中一级品 4 件，甲先从箱中任意取出 2 件，乙再从剩下的产品中任意取 2 件，求:

(1). 乙取出的 2 件都不是一级品的概率;

(2). 已知乙取出的 2 件都不是一级品，求甲先取出的 2 件都是一级品的概率.

二. （ 15 分）甲、乙、丙三门高射炮彼此独立地向同一架飞机各射击一发炮弹，设三门炮各自射中飞机的概率均为 0.7. 设若这架飞机中一发炮弹而击落的概率为 0.2, 中两发炮弹而击落的概率为 0.6，中三发炮弹飞机必击落，(1) 求飞机被击落的概率；

(2) 若飞机被击落，求该飞机只中了一发炮弹的概率。(答案： (1)0.6454 (2)0.059)

4. 设随机变量 $X \sim N(2\,,\,4^2)$, $Y \sim N(3\,,\,3^2)$, X 与 Y 相互独立，

$Z = X - Y$ 则： $Z \sim$ ______

填写以下两个空的计算过程中如果需要，可利用试卷末尾的附表

$P\{Z \le 4\} =$ ______ , $P\{\min(X,Y) \le 6\} =$ ______ (精确到 0.0001)

三. （ 15 分）设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x) = \begin{cases} Axe^{-3x^2}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$ 其中 A 为常数。

(1). 确定常数 A;

(2). 计算 $E(X)$;

(3). 计算 $Var(X)$. (答案： (1)6 (2)$\frac{\sqrt{3\pi}}{6}$ (3)$\frac{1}{3} - \frac{\pi}{12}$)

1. （14 分）设随机变量 X 的分布密度函数为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x|\geq 1 \end{cases}$

试求：（1）常数 A；

（2）X 落在 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 内的概率；

（3）X 的分布函数 $F(x)$。

2.1(工科考生做) 设连续型随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & |x|\leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

随机变量 $Y=2-2X$，求:

(1). 常数 $a=?$

(2).Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$

(3).Y 的数学期望 $E(Y)$，方差 $Var(Y)$.

三. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}0.5\cos x, & -\pi/2<x<\pi/2,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

(1). 求 $P\{0<X<\pi/4\}$;

(2). 求 X 的分布函数;

(3). 求 $E(X)$ 与 $Var(x)$.

2. (15 分)设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x\in(-1,0],\\ 1-x, & x\in(0,1],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 令 $Y=X^2$。

(1). 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 与 Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$;

(2). 求 $P(0.25<Y<1.96)$;

(3). 求 Y 的期望 $E(Y)$ 与方差 $Var(Y)$。

四. (20 分) 设随机变量 (X,Y) 的联合密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} 3x, & 0\le x\le 1, 0\le y\le x\le +\infty, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求： (1) X,Y 的边缘密度函数， X 与 Y 是否相互独立；

(2) $P\{2X+Y<1\}$　　(3)$Z=X+Y$ 的概率密度函数.

3. （18 分）设二维随机变量(X,Y)联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay(1-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求　（1）常数 A,

（2） X,Y 的边缘密度函数。

（3）判断它们是否独立,

（4）求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

4.1(工科与经济类考生做)

设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A(x+y) & 0\le y\le x\le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1). 确定常数 A.

(2). 求 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$.

(3). 计算 $P\{Y>0.5\}$.

(4). 计算 $E(X-Y)$.

3. (本题 16 分) 设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ax, & 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1). 确定常数 A;

(2). 求 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$, Y 边缘概率密度函数 $f_Y(y)$;

(3). 求 $E(XY)$.

3.(15 分)

设二维随机向量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ay & , \quad 0\le |x|\le y\le 1 \\ 0 & , \quad 其它 \end{cases}$$

(1). 确定常数 A.

(2). 求 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$ 与 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$.

(3). 判定 X 与 Y 是否相互独立，并且说明理由。

(4). 计算 $P\{X+Y>1\}$

4. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} A, & 0<x<1,\ x^2<y<x, \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

(1). 确定常数 A; (2). 求 X,Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(3). 判断 X 与 Y 是否独立. (4). 计算 $E(XY)$.

4. (本题 14 分) 设总体 X 具有概率密度函数

$$f(x;\lambda)=\begin{cases}(\lambda+1)x^{\lambda}, & 0<x<1,\ \lambda>-1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1). 求 λ 的矩估计 $\widehat{\lambda}$;

(2). 求 λ 的极大似然估计 $\widetilde{\lambda}$.

4. （14 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自随机变量 X 的一个子样，X 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta(1-x)^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计和极大似然估计。

4.设总体 X 具有概率密度：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^2}xe^{-x/\theta}, x>0\\ 0, \qquad x\le 0\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自 X 的样本，$x_1,x_2,\cdots x_n$ 是相应的样本观察值。

(1) 求 θ 的极大似然估计量；

(2) 求 θ 的矩估计量；

(3) 问所得的估计量是否是无偏估计量。

4. （14 分）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自随机变量 X 的一个子样，X 密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\theta(1-x)^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求参数 θ 的矩估计和极大似然估计。

. （10 分）某批矿砂的 10 个样品中含铬量经测定为

3. 24，3. 26，3. 27，3. 24，3. 25，3. 27，3. 26，3. 25，3. 23，3. 24.

假定测定值服从正态分布，问在显著性水平 0. 05 下能否接受这批矿砂的平均含铬量为 3. 25？

六. 对一批锰的熔点做了 4 次测定，结果为

$$1269^0C, \quad 1271^0C, \quad 1263^0C, \quad 1265^0C$$

已知锰的熔点服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 在 $\alpha = 0.05$ 下,

(1). 检验 $H_0 : \mu = 1266, \quad H_1 : \mu \neq 1266.$

(2). 检验 $H_0' : \sigma^2 = 4, \quad H_1' : \sigma^2 \neq 4.$

六. (10 分) 糖厂包装机装糖入袋，设计每袋净重标准为 100 克。为检查包装质量，某日从生产线随机抽取 9 袋，测得净重（以克为单位）为：

$$99.3, 98.7, 100.5, 101.2, 98.3, 99.7, 99.7, 101.2, 100.5$$

由此算得这 9 袋的样本均值为 $\overline{X} = 99.9$ 克，样本标准差为 $S = 1.033$ 克。假定包装后产品净重服从正态分布，问能否在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下接受"该日包装机包装产品的平均净重为设计值 100 克"？

已知 $t_8(0.025) = 2.3060$, $t_9(0.025) = 2.2622$, $t_8(0.05) = 1.8595$, $t_9(0.05) = 1.8331$.

六. (15 分)

设某工厂生产的一种零件的长度（单位： cm ）X 服从正态分布：

$X \sim N(\mu\,,\,\sigma^2)$. 现在从该工厂生产的这种零件当中随机抽取 5 件，测得长度为

$15.1\,, 14.8\,, 14.7\,, 15.2\,, 15.5$ 做以下假设检验：

(1). 取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 能否认为该厂生产的这种零件的平均长度是 15cm?

(2). 取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 能否认为该厂生产的这种零件长度的标准差不大于 0.2cm?