北京工业大学 2011—2012 年度第 I 学期

概率论与数理统计考试试题(经)及参考答案

一. 填空题(每空两分, 共 30 分)

1. 若 A,B 为随机事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B-A)=0.2$. 当 A 与 B 相互独立时，$P(B)=$ <u>0.5</u>； A 与 B 互不相容时，$P(B)=$ <u>0.2</u>。

2. 若每次试验时 A 发生的概率都是 0.2， X 表示 50 次独立试验中事件 A 发生的次数，则 $E(X)=$ <u>10</u>，$Var(X)=$ <u>8</u>。

3. 若随机变量 X 只取 ± 2，1 之三个可能值, 且 $P(X=-2)=0.15$，$P(X=1)=0.5$。则 $E(X)=$ <u>0.9</u>，$Var(X)=$ <u>1.69</u>。

4. 若随机变量 X_1,X_2 相互独立，且 $X_1\sim N(3,\ 3^2)$， $X_2\sim N(1,\ 2^2)$。令 $X=X_1-2X_2$，则 $E(X)=$ <u>1</u>，$Var(X)=$ <u>25</u>，$P(X>1)=$ <u>0.5</u>。

5. 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 则 $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma\sim$ <u>$N(0,1)$</u>，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ <u>t_{n-1}</u>，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ <u>χ^2_{n-1}</u>。进一步，记 Z_α 为标准正态分布上 α 分位点，$t_m(\alpha)$ 为自由度为 m 的 t 分布上 α 分位点，$\chi^2_m(\alpha)$ 为自由度为 m 的 χ^2 分布上 α 分位点，m 为自然数，$0<\alpha<1$ 为常数。当 σ^2 已知时，μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为 <u>$[\overline{X}-(\sigma/\sqrt{n})Z_{\alpha/2},\overline{X}+(\sigma/\sqrt{n})Z_{\alpha/2}]$</u>；当 σ^2 未知时，μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为 <u>$[\overline{X}-(S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2),\overline{X}+(S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2)]$</u>，$\sigma^2$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为 <u>$\left[\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\alpha/2)},\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)}\right]$</u>。

注：做以下各题须写出计算步骤，否则不能得分。

二. 计算题(共 70 分)

1. (14 分) 盒中装有 8 个乒乓球，其中有 6 个新的。第一次练习时，从中任取 2 个来用，用完后放回盒中。第二次练习时，再从盒中任取 2 个。

   (1). 求第二次取出的球都是新球的概率；

   (2). 求在第二次取出的球都是新球条件下，第一次取到的球都是新球的概率。

解：设 A_i 表示第一次取到 i 个新球，$i=0,1,2$； B 表示第二次取到 2 个新球。则

(1). 由全概率公式，得

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B\,|\,A_i)=\frac{C_2^2}{C_8^2}\frac{C_6^2}{C_8^2}+\frac{C_2^1C_6^1}{C_8^2}\frac{C_5^2}{C_8^2}+\frac{C_6^2}{C_8^2}\frac{C_4^2}{C_8^2}=\cdots=\frac{225}{784};$$

(2). 由贝叶斯公式，得

$$P(A_2\,|\,B)=\frac{P(A_2)P(B\,|\,A_2)}{P(B)}=\frac{90/784}{225/784}=\frac{2}{5}.$$

2. (16 分) 设二维随机向量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax(x-y), & 0\le x\le 2,\quad |y|\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

   (1). 确定常数 A；(2). 求 X 的边缘概率密度函数 $f_X(x)$；(3). 求 E(X+Y).

解：(1). 由 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^2dx\int_{-x}^{x}Ax(x-y)dy=8A=1$，得 $A=\frac{1}{8}$;

(2). $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{-x}^{x}\frac{x(x-y)}{8}dy=\frac{x^3}{4},\quad 0\le x\le 2;$

(3).

$$\begin{aligned}E(X+Y)&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)f(x,y)dxdy\\&=\frac{1}{8}\int_0^2dx\int_{-x}^{x}x(x^2-y^2)dy\\&=\frac{1}{4}\int_0^2dx\int_0^{x}x(x^2-y^2)dy\\&=\frac{16}{15}.\end{aligned}$$

3．（12 分）若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(2,\sigma^2)$ 的简单样本，求

（1）． σ^2 的矩估计；（2）. σ^2 的极大似然估计。

解：（1）． 由 $EX^2 = Var(X) + (EX)^2 = \sigma^2 + 4 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$，得 σ^2 的矩估计为

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - 4；$$

（2）． 建立似然函数

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x_i-2)^2}{2\sigma^2}\right\} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2\right\},$$

取其对数后再对 σ^2 求导，得

$$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2,$$

令上式为零，得 $\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-2)^2$ 。故 σ^2 的极大似然估计为

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-2)^2.$$

4．（16 分）设随机变量 X 服从标准正态分布 N(0, 1)，记 $Y = e^{-X}$． 求

（1）. Y 的分布函数 $F_Y(y)$；

（2）. Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；

（3）. Y 的期望和方差。

解：(1）. 对 $y > 0$，有

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(e^{-X} \le y) = P(X \ge -\ln y) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\ln y} e^{-x^2/2}dx；$$

（2）． $f_Y(y) = \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln y)^2/2}$， $y > 0$；

（3）． $EY = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx = e^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+1)^2/2}dx = e^{1/2}$；

再由 $EY^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}dx = e^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x+2)^2/2}dx = e^2$ 及

$Var(Y) = EY^2 - (EY)^2$，得 $Var(Y) = e^2 - e$.

5．(12 分) 某种元件的寿命 X（以小时计）服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2 均未知，现测得 16 只元件的寿命的均值 $\overline{x}$ =241.5，s =32.16，问：根据数据，可否认为元件的平均寿命大于 225 小时？（$\alpha = 0.05,\ t_{15}(\alpha) = 1.7531,\ t_{15}(\alpha/2) = 2.1315$）

解　构造单边假设 $H_0 : \mu \le 225 \leftrightarrow H_1 : \mu > 225$，

建立检验统计量 $t = \dfrac{\overline{x} - 225}{32.16/\sqrt{16}}$，经计算得

$$t = \frac{241.5 - 225}{32.16/\sqrt{16}} = 1.99 > t_{n-1}(\alpha) = 1.7531,$$

因此，可以认为元件的平均寿命大于 225。