北京工业大学2018—2019学年第一学期
《概率论与数理统计》(工类) 课程考试 A 卷参考答案与评分标准

一、填空题 (15 个空, 每空 2 分, 共 30 分)

1. 设 $P(A)=0.5,\ P(A\cup B)=0.7$. 则当 A 与 B 互斥时, $P(B)=$ __0.2__; A 与 B 相互独立时, $P(B)=$ __0.4__.

2. 在相同条件下做 4 次独立试验, 假设每次试验时事件 A 发生的概率都是 p, 且 4 次试验中 A 恰发生 1 次与发生 2 次的概率相等. 用 X 表示 4 次试验中 A 发生的次数时, $E(X)=$ __1.6__, $Var(X)=$ __0.96__.

3. 设随机变量 X 服从参数 λ 的泊松分布, 且 $P\{X\ge 1\}=1-e^{-2}$, 则 $\lambda=$ __2__, $E(X^2)=$ __6__.

4. 设随机变量 X 可能取的值为 $-2, 0$ 和 1, 且 $P\{X=-2\}=0.4,\ P\{X=0\}=0.3$. 则 $E(X)=$ __-0.5__, $Var(X)=$ __1.65__.

5. 若随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且 $X_1\sim N(3,\ 3^2),\ X_2\sim N(1,\ 2^2),\ X=X_1-2X_2$, 则 $X\sim$ __$N(1,\ 5^2)$__, $P\{-4<X<6\}=$ __0.6826__.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本, μ 与 σ^2 为未知常数, $\overline{X}$ 与 S^2 分别为样本均值与方差, 即 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$. 则 $\overline{X}\sim$ __$N(\mu,\sigma^2)$__, $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim$ __χ^2_{n-1}__, $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sqrt{S^2/n}}\sim$ __t_{n-1}__, μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 __$[\overline{X}-(S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2),\ \overline{X}+(S/\sqrt{n})t_{n-1}(\alpha/2)]$__, σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间 __$[(n-1)S^2/\chi_{n-1}(\alpha/2),\ (n-1)S^2/\chi_{n-1}(1-\alpha/2)]$__.

二、解答题 (每题 14 分, 共 70 分)

1. 有型号相同的产品三箱, 第一箱装 12 件, 其中 2 件为次品; 第二箱装 8 件, 其中只有 1 件为次品; 第三箱装 20 件, 其中 4 件为次品.

(1). 从三箱抽取 1 箱, 然后从中随机抽取 1 件产品, 求抽到次品的概率;

(2). 如发现抽到的产品为次品, 求其抽自第 1 箱的概率.

解 设 A_1, A_2, A_3 分别表示抽到第一至三箱的产品, B 表示 {抽到次品}, 则

$$P(A_i)=1/3,\quad i=1,2,3;$$
$$P(B|A_1)=2/12=1/6,\quad P(B|A_2)=1/8,\quad P(B|A_3)=4/20=1/5.$$

(假设 2 分, 概率和条件概率 2 分, 共 4 分)

(1). $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)=\dfrac{59}{360}\approx 0.163889$;

(全概率公式 3 分, 结果 2 分)

(2). $P(A_1|B)=\dfrac{P(A_1B)}{P(B)}=\dfrac{P(A_1)P(B|A_1)}{\sum\limits_{j=1}^{3}P(A_j)P(B|A_j)}=\dfrac{20}{59}\approx 0.338983$.

(贝叶斯公式 3 分, 结果 2 分)

2. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且二者均服从 $[0,1]$ 区间上均匀分布, 令 $X = X_1 + X_2$, 求

(1). X 的概率密度函数 $f_X(x)$;

(2). $E(X)$ 和 $Var(X)$;

(3). $Y = X^2$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解 (1). 设 $F_X(x)$ 为 X 的分布函数, **(2 分)**

当 $x < 0$ 时, $F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X_1 + X_2 \le x\} = 0$;

$0 \le x \le 1$ 时, $F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X_1 + X_2 \le x\} = x^2/2$;

$1 \le x \le 2$ 时, $F_X(x) = P\{X_1 + X_2 \le x\} = 1 - (2-x)^2/2$;

$x \ge 2$ 时, $F_X(x) = 1$. **(分布函数正确 2 分)**

于是,

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 2-x, & 1 \le x < 2 \\ 0, & \text{其他} \ ; \end{cases}$$

(概率密度函数正确 1 分)

(2). $E(X) = E(X_1) + E(X_2) = 1,\ \ Var(X) = Var(X_1) + Var(X_2) = \dfrac{1}{6}$;

(各 2 分, 共 4 分)

(3). 考虑 $y = g(x) = x^2$ $(0 < x \le 2)$ 的反函数 $x = h(y) = \sqrt{y}$ $(0 < y \le 4)$ 是单调增函数, 且导函数存在, 则有 **(2 分)**

$$\begin{aligned} f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})h'(y) &= \begin{cases} \sqrt{y} \times \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ (2-\sqrt{y}) \times \dfrac{1}{2\sqrt{y}}, & 1 \le y \le 4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0.5, & 0 < y < 1 \\ 1/\sqrt{y} - 0,5, & 1 \le y \le 4 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \end{aligned}$$

(公式 2 分, 结果 1 分)

3. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 有联合概率密度函数

$$f(x,y) = \begin{cases} ay(1-x), & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1). 确定常数 a;

(2). 求边缘概率密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$;

(3). 回答 X 与 Y 是否独立? 为什么?

(4). 计算 $E(Y)$.

解 (1). 由

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x ay(1-x)\mathrm{d}y = \frac{a}{2}\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{a}{24} = 1,$$

得 $a = 24$. **(累次积分、积分值、令积分值等于 1 并求出 a 各 1 分，共 3 分)**

(2). 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f_X(x) = \int_0^x 24y(1-x)\mathrm{d}y = 12x^2(1-x)$; **(每步 1 分，共 2 分)** $x \notin [0, 1]$ 时, $f_X(x) = 0$. **(1 分)**

当 $y \in [0, 1]$ 时, $f_Y(y) = \int_y^1 24y(1-x)\mathrm{d}x = 12y(1-y)^2$; **(每步 1 分，共 2 分)** $y \notin [0, 1]$ 时, $f_Y(y) = 0$. **(1 分)**

(3). X 与 Y 不独立. 因 $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$. **(结论、原因各 1 分, 共 2 分)**

(4). $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x 24y^2(1-x)\mathrm{d}y = 8\int_0^1 (1-x)x^3\mathrm{d}x = 0.4$. **(累次积分、定积分、积分值各 1 分, 共 3 分)**

4. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的随机样本, $\sigma^2 > 0$ 是未知参数. 求 (1). σ^2 的矩估计 $\widehat{\sigma^2}$; (2). σ^2 的极大似然估计 $\widetilde{\sigma^2}$; (3). 回答 $\widehat{\sigma^2}$ 是否为 σ^2 的无偏估计, 为什么?

解 (1). $E(X^2) = \sigma^2$, **(2 分)**

令 $E(X^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$, **(2 分)**

得 $\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$; **(1 分)**

(2). σ^2 的似然函数为

$$L(\sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp\Big\{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\Big\} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2}\exp\Big\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\Big\}\ ;\quad \textbf{(2 分)}$$

对数似然函数为

$$\ell(\sigma^2) = \ln L(\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\ .\quad \textbf{(1 分)}$$

上式对 σ^2 求导, 并令其等于零, 得 **(2 分)**

$$\frac{\mathrm{d}\,\ell(\sigma^2)}{\mathrm{d}\,\sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\ .\quad \textbf{(2 分)}$$

解上述方程, 得

$$\widetilde{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2;\quad \textbf{(2 分)}$$

(3). $\widehat{\sigma^2}$ 是 σ^2 的无偏估计. 因对任意的 $\sigma^2 > 0$, 均有

$$E(\widehat{\sigma^2}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i^2) = \sigma^2\ .$$

(结论、原因各 1 分, 共 2 分)

5. 假设某品牌日光灯的使用寿命 (单位：小时) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2 未知. 现从该品牌的日光灯中随机抽取 9 只进行试验, 测得它们寿命的平均值为 100.4, 样本方差为 0.49。 问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 从样本看：

(1). 能否认为 $\mu = 100$? (2). 能否认为 $\sigma^2 < 0.5$?

解 $n = 9,\ \alpha = 0.05,\ \overline{x} = 100.4,\ s^2 = 0.49,\ s = 0.7,\ \mu_0 = 100,\ \sigma_0^2 = 0.5.$ **(2 分)**

(1). $H_0 : \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0.$ **(2 分)**

由 $0.4 = |\overline{x} - \mu_0| < \dfrac{s}{\sqrt{n}} \times t_{n-1}(\alpha/2) = (0.7/3) \times 2.3060 \approx 0.5387,$ **(公式 2 分、计算 1 分)**

接受原假设, 即能认为 $\mu = 100.$ **(1 分)**

(2). $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2.$ **(2 分)**

由 $7.84 = \dfrac{8 \times 0.49}{0.5} = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi^2_{n-1}(1-\alpha) = 2.733,$ **(公式 2 分、计算 1 分)**

接受原假设, 即不能认为 $\sigma^2 < 0.5.$ **(1 分)**