北京工业大学2011—2012学年第一学期末
概率论与数理统计(工)课程试题答案

注：本试卷共六大题，满分100分

一、填空题(每空2分, 共30分)

1. 已知$P(A)=0.5,\ P(A\cup B)=0.7.$
   若A与B互斥，则$P(B)=?$ 答: 0.2
   若A与B相互独立，则$P(B)=?$ 答: 0.4
2. 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，即$X\sim P(\lambda)$.
   若 $P\{X\ge 1\}=1-e^{-2}$，则 $\lambda=?$ 答: 2
   $P\{X=1\}=?$ 答: $2e^{-2}$
3. 已知随机变量$X\sim N(2,9)$，利用试卷末附表得到
   $P\{-1<X<11\}=?$ 答: 0.8185
4. 设$X\sim B(6,0.3),\ Y\sim P(1.5)$，且$X$和$Y$相互独立，
   则$E(X-2Y)=?$ 答: -1.2
   $Var(X-2Y)=?$ 答: 7.26
5. 设X,Y独立同分布，记$U=X-Y,\ V=X+Y,$
   则U和V的协方差$\mathrm{Cov}(U,V)=?$ 答: 0
6. 设离散型随机变量X的分布函数为:
   $$F(x)=\begin{cases}0, & x<-2\\ 0.35, & -2\le x<0\\ 0.85 & 0\le x<4\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$
   则 $P\{0\le X\le 3\}=?$ 答: 0.5
   $E(X)=?$ 答: -0.1
7. 设离散型随机变量(X,Y)的联合概率分布为:

(X,Y)	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$
p_{ij}	1/6	1/9	1/18	1/3	a	b

   且X与Y相互独立，则$a=?$ 答: 2/9
   $b=?$ 答: 1/9
8. 设随机变量$X\sim N(\mu,1)$, $Y\sim\chi^2_{10}$，且X与Y相互独立。
   令 $T=\sqrt{10}\dfrac{X-\mu}{\sqrt{Y}}$， 则$T\sim ?$ 答: $T\sim t_{10}$
9. 设$x_1,x_2,\cdots,x_7$是抽自总体$N(\mu,\sigma^2)$的一组随机样本，
   样本均值 $\overline{x}=8.16$，样本方差$s^2=0.36$。
   当已知$\sigma^2=0.25$时，μ的置信系数为0.90的置信区间为? 答:[7.8491 , 8.4709]
   当σ^2未知时，μ的置信系数为0.90的置信区间为? 答:[7.7193 , 8.6007]

(由此以下各题目要求写过程，否则没有分数)

二、(14分)　根据世界卫生组织数据，我国居民肺癌患病率为38.46人/10万人。另外根据我国《居民营养与健康状况调查》结果，居民吸烟率为31 %。而根据医学研究发现，吸烟者患肺癌的概率是不吸烟者的10.8倍。

(1). 求不吸烟者患肺癌的概率与吸烟者患肺癌的概率各是多少。

(2). 随机抽取一位居民做检查后发现其患有肺癌，求该居民是吸烟者的概率。

解: (写出以下表示给2分)

随机抽取一位居民，用B_1表示抽取的这位居民吸烟，用 B_2表示抽取的这位居民不吸烟，用A表示抽取的这位居民患有肺癌。则

$P(A) = 38.46/100000 = 3.846 \times 10^{-4}$，

$P(B_1) = 0.31$，

$P(B_2) = 1 - P(B_1) = 1 - 0.31 = 0.69.$

设 $P(A|B_2) = x$, 则 $P(A|B_1) = 10.8P(A|B_2) = 10.8x.$

(1). (6分)　用全概率公式，

$$3.846 \times 10^{-4} = P(A) = P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2),$$

即 $0.31 \times 10.8x + 0.69x = 3.846 \times 10^{-4}$, 得到 $x = 9.5245 \times 10^{-5}$.

所以 $P(A|B_2) = x = 9.5245 \times 10^{-5}$, 即 9.5245人/10万人，

$P(A|B_1) = 10.8P(A|B_2) = 1.0286 \times 10^{-3}$, 即 102.86人/10万人。

(2). (6分)　用贝叶斯公式，

$$\begin{aligned} P(B_1|A) &= \frac{P(B_1A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(B_1) \times P(A|B_1)}{P(B_1) \times P(A|B_1) + P(B_2) \times P(A|B_2)} \\ &= \frac{0.31 \times 1.0286 \times 10^{-3}}{3.846 \times 10^{-4}} \\ &= 0.8291. \end{aligned}$$

三、(14分)　设连续型随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} a(x-1), & x\in[1\,,\,2] \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

设随机变量 $Y=e^{-X}$，求:

(1). 常数 a；

(2). $E(X)$；

(3). Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；

(4). $E(Y)$.

解: (1). (4分) $a\int_1^2(x-1)dx=\frac{1}{2}a=1$，$a=2$。

(2). (4分) $E(X)=2\int_1^2 x(x-1)dx=\frac{5}{3}$。

(3). (4分) $Y=e^{-X}$, $X=-\ln Y$，当$y\in[e^{-2},\ e^{-1}]$时,

$$f_Y(y)=2(-\ln y-1)\left|\frac{d}{dy}(-\ln y)\right|=-2(\ln y+1)\frac{1}{y}.$$

得到

$$f_Y(y)=\begin{cases} -2(\ln y+1)\dfrac{1}{y}, & y\in[e^{-2},e^{-1}] \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

(4). (2分)

$$E(Y)=\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} y\times[-2(\ln y+1)\frac{1}{y}]dy=\int_{e^{-2}}^{e^{-1}}-2(\ln y+1)dy=2e^{-1}-4e^{-2}.$$

也可以这样计算

$$E(Y)=E(e^{-X})=2\int_1^2 e^{-x}(x-1)dx=2e^{-1}-4e^{-2}.$$

四、(14分)　设二维随机向量 (X,Y) 联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & -1\le x\le 1,\ x+y\le 1,\ 0\le y\le x+1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1). 求 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$；
(2). 求 Y 的边缘密度函数 $f_Y(y)$；
(3). 回答 X 与 Y 相互独立吗？说明理由；
(4). 求 $E(X)$ 和 $Var(X)$.

解: (1). (4分) 当$x\in[-1\,,\,0]$时，

$$f_X(x)=\int_0^{x+1}dy=x+1;$$

当 $x\in[0\,,\,1]$时，

$$f_X(x)=\int_0^{-x+1}dt=-x+1.$$

所以

$$f_X(x)=\begin{cases}x+1, & x\in[-1\,,\,0]\\ -x+1, & x\in[0\,,\,1]\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2). (3分)　当 $y\in[0\,,\,1]$时，

$$f_Y(y)=\int_{y-1}^{-y+1}dx=-2y+2;$$

所以

$$f_Y(y)=\begin{cases}-2y+2, & y\in[0\,,\,1]\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(3). (2分) 答：不独立，因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$.

(4). (5分)　$E(X)=\int_{-1}^{1}xf_X(x)dx=\int_{-1}^{0}x(x+1)dx+\int_0^1 x(-x+1)dx=0,$

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2f_X(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(x+1)dx+\int_0^1 x^2(-x+1)dx=\frac{1}{6},$$

$$Var(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{6}\,.$$

五、(14分)　设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单样本，X的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} 5^\theta \theta x^{-(\theta+1)}, & x \geq 5 \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \quad (\theta > 1\text{是未知参数})$$

(1). 求 θ 的矩估计 $\widehat{\theta}$;
(2). 求 θ 的极大似然估计 θ^*.

解: (1). (7分—原理4分，计算2分，结果1分)

$$E(X) = \int_5^\infty 5^\theta \theta x^{-\theta} dx = \frac{5\theta}{\theta - 1},$$

令 $\dfrac{5\theta}{\theta-1} = \overline{X}$，得 $\widehat{\theta} = \dfrac{\overline{X}}{\overline{X} - 5}$.

(2). (7分—似然函数2分，取对数2分，求导数2分，结果1分)
由 $L(\theta) = 5^{n\theta}\theta^n \prod_{i=1}^n x_i^{-(\theta+1)}$，
得 $\ln L(\theta) = n\theta \ln 5 + n \ln\theta - (\theta+1)\sum_{i=1}^n \ln x_i$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \ln L(\theta) = n \ln 5 + \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0.$$

得

$$\theta^* = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\ln X_i - \ln 5)}.$$

六、(14分)　(此题借鉴了《国家标准 GB11673–2003：含乳饮料卫生标准》的有关条款)　某饮料制品公司生产一种瓶装含乳饮料。设这种饮料每瓶脂肪含量X(单位: 克) 服从正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，μ 和 σ^2未知。现在随机抽取7瓶这种饮料化验其脂肪含量，数据如下：

$$5.40\,,\ 5.41\,,\ 5.64\,,\ 6.23\,,\ 4.90\,,\ 5.06\,,\ 4.91.$$

如果要求这种饮料每瓶的平均脂肪含量是5.5克，标准差不得超过0.3克。做以下假设检验：

(1). 取显著性水平$\alpha = 0.05$, 能否认为这种饮料每瓶的平均脂肪含量符合要求?

(2). 取显著性水平$\alpha = 0.05$, 能否认为这种饮料每瓶脂肪含量的标准差符合要求?

解：　根据数据，计算得到　$\overline{x} = 5.3643, \quad s = 0.4732 \quad (2分)$,

(1). $H_0: \mu = 5.5 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq 5.5$ (1分)

当H_0 成立时, $\dfrac{\overline{X} - 5.5}{S/\sqrt{7}} \sim t_6$. 故拒绝域是 $\left|\dfrac{\overline{X} - 5.5}{S/\sqrt{7}}\right| > t_6(0.025) = 2.4469.$

代入数值，得

$$\left|\frac{\overline{x} - 5.5}{s/\sqrt{7}}\right| = \frac{0.1357}{0.4732\sqrt{7}} = 0.7587 < 2.4469. \ (公式3分，分位点1分)$$

故接受H_0，即认为这种饮料每瓶的平均脂肪含量符合要求。　　(1分)

(2). $H_0: \sigma \leq 0.3 \longleftrightarrow H_1: \sigma > 0.3$ (1分)

拒绝域是 $\dfrac{6S^2}{0.3^2} \geq \chi_6^2(0.05) = 12.592.$

代入数值，得

$$\frac{6s^2}{0.3^2} = 14.928 > 12.592. \ (公式3分，分位点1分)$$

故拒绝H_0，即认为这种饮料每瓶脂肪含量的标准差不符合要求。　　(1分)