北京工业大学 2012——2013 学年第 Ⅱ 学期

“概率论与数理统计”课程(工)试题答案

一、填空题（每空 2 分,共 30 分）

1．设 A, B 为事件，$P(A)=0.4,\ P(A\cup B)=0.6$。当 A 与 B 互不相容时，$P(B)=$ <u>0.2</u>；当 A 与 B 相互独立时，$P(B)=$ <u>1/3</u>。

2．设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases} a+be^{-0.5x}, & x\ge 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$ 其中 a 与 b 为常数，则 $a=$ <u>1</u>，$b=$ <u>−1</u>。

3．设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且 $P\{X=1\}=P\{X=2\}$，则 $\lambda=$ <u>2</u>，$E(X)=$ <u>2</u>。

4．设随机变量 X_1, X_2 相互独立，且 $X_1 \sim N(3,\ 3^2)$，$X_2 \sim N(1,\ 2^2)$。令 $X=X_1-2X_2$，则 $E(X)=$ <u>1</u>，$Var(X)=$ <u>25</u>。进一步，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，且 $\Phi(1)=0.8413$，$\Phi(2)=0.9772$，则 $P\{-4<X<11\}=$ <u>0.8185</u>。

5．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为抽自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 .$$

则 $\overline{X}\sim$ <u>$N(\mu,\sigma^2/n)$</u>，$\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sqrt{S^2}\sim$ <u>t_{n-1}</u>，$(n-1)S^2/\sigma^2\sim$ <u>χ^2_{n-1}</u>。

6．设 $X_1,\cdots,X_{25}$ 是抽自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的随机样本，经计算得 $\overline{x}=5,\ s^2=0.09$。根据本试卷第 6 页上的 t 分布表与 χ^2 分布表，得未知参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间为[<u>4.876166, 5.123834</u>]，σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间为[<u>0.05487</u>, <u>0.17418</u>]。

二、解答题（每小题 14 分，共 70 分）

1． 根据世界卫生组织数据，我国居民肺癌患病率为 38.46 人/10 万人。另外根据我国《居民营养与健康状况调查》结果，居民吸烟率为 31%，而根据医学研究发现，吸烟者患肺癌的概率是不吸烟者的 10.8 倍。

(1)．求不吸烟者患肺癌的概率与吸烟者患肺癌的概率各是多少；

(2)．随机抽取一位居民做检查后，发现其患有肺癌。求这个居民是吸烟者的概率。

解 随机抽取一位居民，用 B_1 表示其吸烟，B_2 表示不吸烟，A 表示患有肺癌。则

$$P(A)=38.46/100000=3.846\times10^{-4},\ P(B_1)=0.31,\ P(B_2)=0.69.$$

再设 $P(A|B_2)=x$，则 $P(A|B_1)=10.8\times P(A|B_2)=10.8x$。

(1)．由全概率公式，得

$$\begin{aligned} 3.846\times10^{-4}=P(A)&=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2) \\ &=0.31\times10.8x+0.69x \\ &=4.038x, \end{aligned}$$

解上述方程，得 $x=9.5345\times10^{-5}$。所以，$P(A|B_2)=x=9.5345\times10^{-5}$，即 9.5245 人/10 万人；$P(A|B_1)=1.0286\times10^{-3}$，即 102.86 人/10 万人。

(2). 由贝叶斯(或条件概率)公式，得

$$P(B_1|A)=\frac{P(B_1A)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{0.31\times 1.0286\times 10^{-3}}{3.846\times 10^{-4}}=0.829.$$

2. 设随机变量 X 有概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x|, & x\in(-1,\ 1)\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令 $Y=X^2$，求：

(1). Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$；(2). $P\{0.25<Y<1.96\}$；(3). $E(Y)$ 和 $Var(Y)$。

解 (1). 记 $F_Y(y)$ 为随机变量 Y 的分布函数，则 $y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$； $y\in(0,1]$ 时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x)dx=2\sqrt{y}-y;$$

$y>1$ 时，$F_Y(y)=1$。于是，

$$f_Y(y)=\begin{cases}\sqrt{y^{-1}}-1, & y\in(0,1]\\ 0, & \text{□ □};\end{cases}$$

(2). $P\{0.25<Y<1.96\}=F_Y(1.96)-F_Y(0.25)=1-[2\sqrt{0.25}-0.25]=0.25$；

(3). $E(Y)=E(X^2)=\int_{-1}^{1}x^2f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^2(1+x)dx+\int_0^1x^2(1-x)dx=\frac{1}{6}$；

由 $E(X^4)=\int_{-1}^{1}x^4f(x)dx=\int_{-1}^{0}x^4(1+x)dx+\int_0^1x^4(1-x)dx=\frac{1}{15}$ 及

$$Var(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=E(X^4)-[E(X^2)]^2,$$

得 $Var(Y)=\frac{1}{15}-\frac{1}{36}=\frac{7}{180}$.

3. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}c\cdot e^{-y}, & 0\le x\le y<\infty,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1). 求常数 c； (2). 求 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$；

(3). 问 X 和 Y 是否独立？为什么？ (4). 求 $E(Y)$。

解 (1). 由 $1=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=\int_0^{\infty}dy\int_0^y c\cdot e^{-y}dx=c\int_0^{\infty}ye^{-y}dx=c$，得 $c=1$；

(2). $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_x^{\infty}e^{-y}dy, & x>0,\\ 0, & x\le 0\end{cases}=\begin{cases}e^{-x} & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^{y}e^{-y}dx, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}=\begin{cases}y\cdot e^{-y} & y>0,\\ 0, & y\le 0;\end{cases}$$

(3). 因以概率为 1 的有 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不独立；

(4). $E(Y)=\int_{-\infty}^{\infty}yf_Y(y)dy=\int_0^{\infty}y^2e^{-y}dy=2$。

4．若 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为抽自总体 X 的随机样本，总体 X 有概率密度函数

$$f_X(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 为待估参数，求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}$ 与极大似然估计 θ^*。

解　记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。由 $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$。利用

$\overline{X} = E(X)$，得 $\overline{X} = \frac{\hat{\theta}+1}{\hat{\theta}+2}$。解该式，得 $\hat{\theta} = \frac{1-2\overline{X}}{\overline{X}-1}$；

记 $L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = (\theta+1)^n (\prod_{i=1}^{n} x_i)^{\theta+1}$ 为参数 θ 的似然函数。则

$$\ln L(\theta) = n\ln(\theta+1) + (\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i ,$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$ =0，解得 $\theta = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$。故

$$\theta^* = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln X_i}.$$

5．设学生某次考试成绩服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，现从该总体中随机抽取 25 位的考试成绩，算得样本均值为 76.5，标准差为 9.5 分。问在显著性水平 0.05 下，从样本看，

(1). 是否接受“$\mu = 75$”的假设？

(2). 是否接受“$\sigma = 10$”的假设？

附　t 分布与 χ^2 分布表

$t_{24}(0.025) = 2.0639$	$t_{24}(0.05) = 1.7109$	$t_{25}(0.025) = 2.0595$	$t_{25}(0.05) = 1.7081$
$\chi^2_{24}(0.025) = 39.364$	$\chi^2_{24}(0.05) = 36.415$	$\chi^2_{25}(0.025) = 40.646$	$\chi^2_{25}(0.05) = 37.652$
$\chi^2_{24}(0.975) = 12.401$	$\chi^2_{24}(0.95) = 13.848$	$\chi^2_{25}(0.975) = 13.120$	$\chi^2_{25}(0.95) = 14.611$

解　n=25，$\alpha = 0.05$，$\bar{x} = 76.5$，s=9.5。

(1). 由 $|\bar{x} - \mu_0| = |76.5 - 75| = 1.5 < \frac{s}{\sqrt{n}} t_{n-1}(\alpha/2) = \frac{9.5}{5} \times 2.0639 = 3.92141$，知接受原假设，即接受“$\mu = 75$”的假设；

(2). 由 $\frac{(n-1)s^2}{s_0^2} = \frac{24?\,9.5^2}{10^2} = 21.66?(12.401,39.364)$　$(c^2_{n-1}(1-a/2),\ c^2_{n-1}(a/2))$，知接受原假设，即接受 $\sigma = 10$ 的假设。