实用优化算法作业(四)

邱松强(数学学院)

1 （练习4.4）求下列约束问题的KKT 点

(1)

$$
\begin{aligned}
&\min\ 4x_1 - 3x_2 \\
&\text{s.t. } 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \\
&\quad x_2 + 7 \geq 0, \\
&\quad -(x_1-3)^2 + x_2 + 1 \geq 0.
\end{aligned}
$$

【解：】设λ_1, λ_2, λ_3 分别为各约束条件的Lagrange 乘子, 该问题的KKT 条件为

$$4 + \lambda_1 + 2(x_1-3)\lambda_3 = 0, \tag{1}$$

$$-3 + \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \tag{2}$$

$$\lambda_1 \geq 0, 4 - x_1 - x_2 \geq 0, \lambda_1(4 - x_1 - x_2) = 0, \tag{3}$$

$$\lambda_2 \geq 0, x_2 + 7 \geq 0, \lambda_2(x_2+7) = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_3 \geq 0, -(x_1-3)^2 + x_2 + 1 \geq 0, \lambda_3(-(x_1-3)^2 + x_2 + 1) = 0 \tag{5}$$

由(2) 和不等式约束乘子的非负性知,

$$\lambda_1 = 3 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0.$$

从而由(4) 知,

$$4 - x_1 - x_2 = 0. \tag{6}$$

若$\lambda_3 = 0$, 则由(1) 知, $\lambda_1 = -4 < 0$, 这与$\lambda_1 \geq 0$ 矛盾, 从而必有$\lambda_3 > 0$. 因此由(5) 知,

$$-(x_1-3)^2 + x_2 + 1 = 0. \tag{7}$$

联立(6) 和(7), 解得得

$$x_1 = 1, x_2 = 3 \text{ 或} x_1 = 4, x_2 = 0.$$

对于前者, 此时$x_2 + 7 = 10 > 0$, 故而$\lambda_2 = 0$. 代入(1) 和(2), 得

$$\begin{cases} 4 + \lambda_1 - 4\lambda_3 = 0, \\ -3 + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

此时$x_2 + 7 = 10 > 0$, 故而$\lambda_2 = 0$. 解得

$$\lambda_1 = \frac{16}{3},\ \lambda_3 = \frac{7}{3}.$$

从而得KKT 点

$$(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)^T = \left(1, 3, \frac{16}{3}, 0, \frac{7}{3}\right).$$

对于后者, 将x_1, x_2 代入(1), 得

$$4 + \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0.$$

则

$$\lambda_1 = -4 - 2\lambda_3 < 0,$$

矛盾.

(2)

$$\begin{aligned} &\min\ (x_1 - x_2 + x_3)^2 \\ &\text{s.t. } x_1 + 2x_2 - x_3 = 5, \\ &\qquad x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{aligned}$$

【解:】该问题的KKT 条件为

$$2(x_1 - x_2 + x_3) - \lambda_1 - \lambda_2 = 0, \tag{8}$$

$$-2(x_1 - x_2 + x_3) - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{9}$$

$$2(x_1 - x_2 + x_3) + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \tag{10}$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0, \tag{11}$$

$$x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0. \tag{12}$$

令(8)+(9), 得$\lambda_1=0$.

令(11)−(12), $x_2=3$.

令(9)+(10), 得$-\lambda_1+2\lambda_2=0$, 则$\lambda_2=0$.

将上述数据代入，得$x_1=\frac{3}{2}$, $x_3=\frac{1}{2}$. 从而其KKT 点为

$$(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)^T=\left(\frac{3}{2},2,\frac{1}{2},0,0\right)^T.$$

2 （思考题）问题

$$\begin{aligned}\min\ f(x)&=\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{x_i},\\ s.t.\ \sum_{i=1}^n a_ix_i&=b,\\ x_i&\geq 0, i=1,2,\cdots,n\end{aligned}$$

其中, a_j, b, c_j 均为正数. 证明：目标函数的最优值为

$$f(x^*)=\frac{\left[\sum\limits_{i=1}^n\sqrt{a_ic_i}\right]^2}{b}.$$

(提示：利用KKT 条件)

【解：】见另一个文档.

3 分别用外罚函数法和内点法求解下列约束问题：

(1)

$$\begin{aligned}\min\ f(x)&=x_1^2+x_2^2,\\ \text{s.t.}\ x_1-x_2+1&=0.\end{aligned}$$

【解：】构造罚函数

$$P(x,\sigma)=x_1^2+x_2^2+\sigma(x_1-x_2+1)^2.$$

令

$$\begin{cases}\frac{\partial P}{\partial x_1}=2x_1+2\sigma(x_1-x_2+1)=0,\\ \frac{\partial P}{\partial x_2}=2x_2-2\sigma(x_1-x_2+1)=0.\end{cases}$$

解得

$$x_1 = -\frac{2\sigma}{2+4\sigma}, x_2 = \frac{2\sigma}{2+4\sigma}.$$

令$\sigma \to \infty$, 得解$x = (-1/2, 1/2)$.

(2)

$$\min\ f(x) = x_1^2 + x_2^2,$$
$$\text{s.t. } x_1 - x_2 + 1 \le 0.$$

【注意不等号的方向】

构造内罚函数（障碍函数）

$$B(x,\sigma) = x_1^2 + x_2^2 - r\ln(-x_1 + x_2 - 1).$$

令

$$\begin{cases} \frac{\partial B}{\partial x_1} = -2x_1 + \frac{r}{-x_1+x_2-1} = 0, \\ \frac{\partial B}{\partial x_2} = 2x_2 - \frac{r}{-x_1+x_2-1} = 0. \end{cases}$$

两式相加, 得$x_1 + x_2 = 0$. 将其回代入第一式并求解有

$$x_1 = -\frac{2 \pm \sqrt{4+16r^2}}{8}.$$

那么

$$x_2 = -x_1 = \frac{2 \pm \sqrt{4+16r^2}}{8}.$$

如果取

$$x_1 = -\frac{2 - \sqrt{4+16r^2}}{8},$$

则

$$x_2 = -x_1 = \frac{2 - \sqrt{4+16r^2}}{8}.$$

那么约束条件

$$x_1 - x_2 + 1 = \frac{\sqrt{4+16r^2}}{4} + 1 > 0$$

这说明该解不在可行域内部，不符合内点法的要求. 从而舍弃这个解.

因此取

$$x_1 = -\frac{2 + \sqrt{4+16r^2}}{8},$$

则

$$x_2 = -x_1 = \frac{2+\sqrt{4+16r^2}}{8}.$$

令$r \to 0$, 得解

$$x = (-1/2, 1/2).$$

4 （练习4.9(2)）用增广Lagrange 函数法求解

$$\min\ f(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$$
$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 = 4.$$

【解：】构造增广Lagrange 函数

$$M(x,\lambda,\sigma) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 - \lambda(x_1+2x_2-4) + \frac{\sigma}{2}(x_1+2x_2-4)^2.$$

令其偏导数为0, 有

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow (2+\sigma)x_1 + (1+2\sigma)x_2 = \lambda + 4\sigma, \\ \frac{\partial M}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow (1+2\sigma)x_1 + (2+4\sigma)x_2 = 2\lambda + 8\sigma \end{cases}$$

解之得

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\lambda+4\sigma}{1+2\sigma}.$$

要使上述解为原问题的解, 则(x_1, x_2) 应满足约束条件，即

$$0 + 2\frac{\lambda+4\sigma}{1+2\sigma} = 4$$

解得$\lambda_* = 2$.

(或将x_1, x_2 代入Lagrange 乘子迭代公式, 有

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \sigma(x_1+2x_2-4) = \frac{1}{1+2\sigma}\lambda_k + \frac{4\sigma}{1+2\sigma}.$$

当$\sigma > 0$ 时, $\{\lambda_k\}$ 收敛. 对上式取极限，有

$$\lambda_* = \frac{1}{1+2\sigma}\lambda_* + \frac{4\sigma}{1+2\sigma}.$$

也解得$\lambda_* = 2$.)

代入x_2 得解

$$x_1 = 0, x_2 = 2.$$