实用优化算法作业(2)

1 【习题3.7(1)】用Newton 法求

$$x_1^2+4x_2^2+9x_3^2-2x_1+18x_2.$$

【解：】令

$$G=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&8&0\\0&0&18\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}-2\\18\\0\end{pmatrix}.$$

于是目标函数可写成

$$f(x)=\frac{1}{2}x^TGx+b^Tx.$$

取初始点$x^0=(1,2,5)^T$; 则

$$g^0=\nabla f(x_0)=\begin{pmatrix}0\\34\\90\end{pmatrix}.$$

则搜索方向为

$$p^0=-G^{-1}g^0=\begin{pmatrix}0\\-17/4\\-5\end{pmatrix}.$$

则

$$x^1=x^0+p^0=\begin{pmatrix}1\\-9/4\\0\end{pmatrix}.$$

由于

$$g^1=\nabla f(x_1)=0,$$

故x_1 为最优解.

2 【习题3.7(2)】用Newton 法求

$$(x_1-1)^4+2x_2^2$$

的极小点. 初始点$x^0=(0,1)^T$.

【解：】记$f(x)=(x_1-1)^4+2x_2^2$, 则

$$g(x)=\nabla f(x)=\begin{pmatrix}4(x_1-1)^3\\4x_2\end{pmatrix},\ G(x)=\begin{pmatrix}12(x_1-1)^2 & 0\\0 & 4\end{pmatrix}.$$

在初始点$x^0=(0,1)^T$ 处.

$$g^0=\begin{pmatrix}-4\\4\end{pmatrix},\ G^0=\begin{pmatrix}12 & 0\\0 & 4\end{pmatrix},$$

所以Newton 步为

$$p^0=-(G^0)^{-1}g^0=\begin{pmatrix}1/3\\-1\end{pmatrix}.$$

新的迭代点为

$$x^1=x^0+p^0=\begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix}$$

此时

$$g^1=\begin{pmatrix}-32/27\\0\end{pmatrix},\ G^1=\begin{pmatrix}16/3 & 0\\0 & 4\end{pmatrix},$$

所以Newton 步为

$$p^1=-(G^1)^{-1}g^1=\begin{pmatrix}2/9\\0\end{pmatrix}.$$

新的迭代点为

$$x^2=x^1+p^1=\begin{pmatrix}5/9\\0\end{pmatrix}$$

此时

$$g^2=\begin{pmatrix}-256/729\\0\end{pmatrix},\ \|g^2\|=256/729<0.5$$

满足终止条件，算法结束.

3【思考题】考虑函数

$$f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^3 + x_1^4,$$

确定关于点$x^* = (0,0)^T$, 使$G(x)$ 正定的最大开球. 问在此球中如何取初始点$x^{(0)}$, 其中$x_1^{(0)} = x_2^{(0)}$, 使Newton 法收敛.

【解答】略