

B.Tech. - I Semester
Examination, December 2017
BT-1002 Mathematics-I

Tune : Three Hours]

[Maximum Marks : 70

Note: i) Attempt any five questions out of eight.

किन्हीं आठ में पाँच प्रश्न हल कीजिए।

ii) All questions carry equal marks.

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

iii) In case of any doubt or dispute the English version question should be treated as final.

किसी भी प्रकार के संदेह अथवा विवाद की स्थिति में अंग्रेजी भाषा के प्रश्न को अंतिम माना जायेगा।

1. a) Expand $\sin^{-1} x$ in power of x by Maclaurin's theorem.

मैक्लारिन की प्रमेय से $\sin^{-1} x$ का x की घातों में प्रसार कीजिए।

b) Show that the curvature of a circle is constant and is equal to the reciprocal of its radius.

सिद्ध कीजिए कि वृत्त की वक्रता नियतांक है तथा यह वृत्त की त्रिज्या के व्युत्क्रम के तुल्य होता है।

2. a) Write statement of Rolle's and Lagrange's theorem and explain their geometrical meaning.

रोले व लैग्रांज प्रमेयों के कथन लिखिए तथा इनके ज्यामितीय महत्व का वर्णन कीजिए।

b). Discuss the maximum and minimum of $x^3 + y^3 - 3xy$

फलन $x^3 + y^3 - 3xy$ के महत्तम व न्यूनतम मानों की विवेचना कीजिए।

3. If $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x - y}\right)$, show that

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin 2u$$

यदि $u = \tan^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x - y}\right)$ हो तो सिद्ध कीजिए कि

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \sin 2u$$

b) Find the percentage error in calculating the area of a rectangle when an error of 1 % is made in measuring its length and breadth.

यदि आयत की लम्बाई और चौड़ाई के मापन में 1 प्रतिशत की त्रुटि कर दी जाये तो क्षेत्रफल के परिकलन में होने वाली प्रतिशत त्रुटि क्या होगी?

4. a) Evaluate $\int_a^b x dx$ from the definition of integral as a limit of sum.

योगफल की सीमा के रूप में समाकलन की परिभाषा से समाकलन $\int_a^b x dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

b) Evaluate the limit $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$

सीमा $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^{1/n}}{n}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. a) Evaluate $\iint_R e^{x+3y} dx dy$, where R is a triangle bounded by $x=0, y=0$ and $x+y=1$

$\iint_R e^{x+3y} dx dy$ का मान ज्ञात कीजिए जहाँ R, $x=0, y=0$ तथा $x+y=1$ से परिबद्ध त्रिभुज है।

b) Evaluate $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dx dy dz$

$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y+z} dx dy dz$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. a) By triple integration determine the volume of a hemisphere of radius 'a'.

त्रिक समाकलन का प्रयोग कर a त्रिज्या के अर्धगोले का आयतन ज्ञात कीजिए।

b) Evaluate $\int_0^2 \int_0^3 (x^2 + y^2) dx dy$

$\int_0^2 \int_0^3 (x^2 + y^2) dx dy$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. a) Express $\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ in terms of beta functions and hence evaluate $\int_0^1 x^t (1-x^3)^{10} dx$

$\int_0^1 x^m (1-x^n)^p dx$ को बीटा फलन के पदों में लिखिए तथा इस आधार पर $\int_0^1 x^t (1-x^3)^{10} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

b) Prove that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

सिद्ध कीजिए कि $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

8. a) Find the equation of the tangent and normal at the point $(at^2, 2at)$ on the parabola $y^2 = 4ax$.

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु $(at^2, 2at)$ पर स्पर्श रेखा व अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात कीजिए।

b) Define gamma function and prove that $\Gamma(y_2) = \Gamma(\pi)$

गामा फलन को परिभाषित कीजिए तथा सिद्ध कीजिए $\Gamma(y_2) = \Gamma(\pi)$

*** ** **