xg1990

地理圈的碼農

克里金(Kriging)插值的原理與公式推導

學過空間插值的人都知道克里金插值，但是它的變種繁多、公式複雜，還有個半方差函數讓人不知所云

本文講簡單介紹基本克里金插值的原理，及其推理過程，全文分為九個部分：

0.引言－從反距離插值說起
1.克里金插值的定義
2.假設條件
3.無偏約束條件
4.優化目標／代價函數
5.代價函數的最優解
6.半方差函數
7.普通克里金與簡單克里金
8.小結

0.引言——從反距離插值(IDW)說起

空間插值問題，就是在已知空間上若干離散點 (x_i, y_i) 的某一屬性(如氣溫，海拔)的觀測值 $z_i = z(x_i, y_i)$的條件下，估計空間上任意一點(x, y)的屬性值的問題。

直觀來講，根據地理學第一定律，

> *All attribute values on a geographic surface are related to each other, but closer values are more strongly related than are more distant ones.*

大意就是，地理屬性有空間相關性，相近的事物會更相似。由此人們發明了反距離插值，對於空間上任意一點(x, y)的屬性$z = z(x, y)$，定義反距離插值公式估計量

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d^\alpha} z_i$$

其中α通常取1或者2。

即，用空間上所有已知點的數據加權求和來估計未知點的值，權重取決於距離的倒數（或者倒數的平方）。那麼，距離近的點，權重就大；距離遠的點，權重就小。

反距離插值可以有效的基於地理學第一定律估計屬性值空間分佈，但仍然存在很多問題：

- α的值不確定
- 用倒數函數來描述空間關聯程度不夠準確

因此更加準確的克里金插值方法被提出來了

1.克里金插值的定義

相比反距離插值，克里金插值公式更加抽象

$$\hat{z_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$$

其中$\hat{z_o}$是點(x_o, y_o)處的估計值，即$z_o = z(x_o, y_o)$ 。

這裡的λ_i是權重係數。它同樣是用空間上所有已知點的數據加權求和來估計未知點的值。但權重係數並非距離的倒數，而是能夠滿足點(x_o, y_o)處的估計值$\hat{z_o}$與真實值z_o的差最小的一套最優係數，即

$$\min_{\lambda_i} Var(\hat{z_o} - z_o)$$

同時滿足無偏估計的條件

$$E(\hat{z_o} - z_o) = 0$$

2.假設條件

不同的克里金插值方法的主要差異就是假設條件不同。本文僅介紹普通克里金插值的假設條件與應用。

普通克里金插值的假設條件為，空間屬性z是均一的。對於空間任意一點(x, y)，都有同樣的期望c與方差σ^2。

即對任意點(x, y)都有

$$E[z(x, y)] = E[z] = c$$

$$Var[z(x, y)] = \sigma^2$$

換一種說法：任意一點處的值$z(x,y)$，都由區域平均值c和該點的隨機偏差$R(x,y)$組成，即

$$z(x,y)=E[z(x,y)]+R(x,y)]=c+R(x,y)$$

其中$R(x,y)$表示點(x,y)處的偏差，其方差均為常數

$$Var[R(x,y)]=\sigma^2$$

3.無偏約束條件

先分析無偏估計條件$E(\hat{z_o}-z_o)=0$，將$\hat{z_o}=\sum_{i=1}^n\lambda_i z_i$帶入則有

$$E(\sum_{i=1}^n\lambda_i z_i-z_o)=0$$

又因為對任意的z都有$E[z]=c$，則

$$c\sum_{i=1}^n\lambda_i-c=0$$

即

$$\sum_{i=1}^n\lambda_i=1$$

這是λ_i的約束條件之一。

4.優化目標/代價函數J

再分析估計誤差$Var(\hat{z_o}-z_o)$。為方便公式推理，用符號J表示，即

$$J=Var(\hat{z_o}-z_o)$$

則有

$$\begin{aligned}J&=Var(\textstyle\sum_{i=1}^n\lambda_i z_i-z_o)\\&=Var(\textstyle\sum_{i=1}^n\lambda_i z_i)-2Cov(\textstyle\sum_{i=1}^n\lambda_i z_i,z_o)+Cov(z_o,z_o)\\&=\textstyle\sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^n\lambda_i\lambda_j Cov(z_i,z_j)-2\sum_{i=1}^n\lambda_i Cov(z_i,z_o)+Cov(z_o,z_o)\end{aligned}$$

為簡化描述，定義符號 $C_{ij}=Cov(z_i,z_j)=Cov(R_i,R_j)$，這裡$R_i=z_i-c$，即點$(x_i,y_i)$处的属性值相对于区域平均属性值的偏差。

则有

$$J=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n}\lambda_i\lambda_jC_{ij}-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_iC_{io}+C_{oo}$$

5.代价函数的最优解

再定义半方差函数 $r_{ij}=\sigma^2-C_{ij}$，带入J中，有

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j(\sigma^2-r_{ij})-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sigma^2-r_{io})+\sigma^2-r_{oo} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j(\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j(r_{ij})-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(\sigma^2)+2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(r_{io})+\sigma^2-r_{oo} \end{aligned}$$

考虑到$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$

$$\begin{aligned} J &= \sigma^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n}\lambda_i\lambda_j(r_{ij})-2\sigma^2+2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(r_{io})+\sigma^2-r_{oo} \\ &= 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(r_{io})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{n}\lambda_i\lambda_j(r_{ij})-r_{oo} \end{aligned}$$

我们的目标是寻找使J最小的一组 λ_i，且J是λ_i的函数，因此直接将J对λ_i求偏导数令其为0即可。即

$$\frac{\partial J}{\partial\lambda_i}=0;i=1,2,\cdots,n$$

但是要注意的是，我们要保证求解出来的最优 λ_i 满足公式$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，这是一个带约束条件的最优化问题。使用拉格朗日乘数法求解，求解方法为构造一个新的目标函数

$$J+2\phi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-1)$$

其中ϕ是拉格朗日乘数。求解使这个代价函数最小的参数集$\phi,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则能满足其在$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$约束下最小化$J$。即

$$\begin{cases} \frac{\partial(J+2\phi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-1))}{\partial\lambda_k} &= 0;k=1,2,\cdots,n \\ \frac{\partial(J+2\phi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-1))}{\partial\phi} &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial(2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(r_{io})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n}\lambda_i\lambda_j(r_{ij})-r_{oo}+2\phi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-1))}{\partial\lambda_k} = 0;k=1,2,\cdots,n \\ \frac{\partial(2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(r_{io})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j}^{n}\lambda_i\lambda_j(r_{ij})-r_{oo}+2\phi(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-1))}{\partial\phi} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r_{ko}-\sum_{j=1}^{n}(r_{kj}+r_{jk})\lambda_j+2\phi &= 0;k=1,2,\cdots,n \\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i &= 1 \end{cases}$$

由于$C_{ij}=Cov(z_i,z_j)=C_{ji}$，因此同样地$r_{ij}=r_{ji}$，那么有

$$\begin{cases} r_{ko} - \sum_{j=1}^{n} r_{kj}\lambda_j + \phi & = 0; k = 1, 2, \cdots, n \\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i & = 1 \end{cases}$$

式子中半方差函数r_{ij}十分重要，最后会详细解释其计算与定义

在以上计算中我们得到了对于求解权重系数λ_j的方程组。写成线性方程组的形式就是：

$$\begin{cases} r_{11}\lambda_1 + r_{12}\lambda_2 + \cdots + r_{1n}\lambda_n - \phi & = r_{1o} \\ r_{21}\lambda_1 + r_{22}\lambda_2 + \cdots + r_{2n}\lambda_n - \phi & = r_{2o} \\ & \cdots \\ r_{n1}\lambda_1 + r_{n2}\lambda_2 + \cdots + r_{nn}\lambda_n - \phi & = r_{no} \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n & = 1 \end{cases}$$

写成矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdots \\ \lambda_n \\ -\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1o} \\ r_{2o} \\ \cdots \\ r_{no} \\ 1 \end{bmatrix}$$

对矩阵求逆即可求解。

唯一未知的就是上文中定义的半方差函数r_{ij}，接下来将详细讨论

6.半方差函数

上文中对半方差函数的定义为

$$r_{ij} = \sigma^2 - C_{ij}$$

其等价形式为

$$r_{ij} = \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2]$$

这也是半方差函数名称的来由，接下来证明这二者是等价的：

根据上文定义 $R_i = z_i - c$，有$z_i - z_j = R_i - R_j$，则

$$\begin{aligned} r_{ij} & = \frac{1}{2}E[(R_i - R_j)^2] \\ & = \frac{1}{2}E[R_i^2 - 2R_iR_j + R_j^2] \\ & = \frac{1}{2}E[R_i^2] + \frac{1}{2}E[R_j^2] - E[R_iR_j] \end{aligned}$$

又因为：

$$E[R_i^2] = E[R_j^2] = E[(z_i - c)^2] = Var(z_i) = \sigma^2$$

$$E[R_iR_j] = E[(z_i - c)(z_j - c)] = Cov(z_i, z_j) = C_{ij}$$

于是有

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2] \\ &= \frac{1}{2}E[R_i^2] + \frac{1}{2}E[R_j^2] - E[R_iR_j] \\ &= \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 - C_{ij} \\ &= \sigma^2 - C_{ij} \end{aligned}$$

$\sigma^2 - C_{ij} = \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2]$得证，现在的问题就是如何计算

$$r_{ij} = \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2]$$

这时需要用到地理学第一定律，空间上相近的属性相近。$r_{ij} = \frac{1}{2}(z_i - z_j)^2$表达了属性的相似度；空间的相似度就用距离来表达，定义i与j之间的几何距离

$$d_{ij} = d(z_i, z_j) = d((x_i, y_i), (x_j, y_j)) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

克里金插值假设r_{ij}与d_{ij}存在着函数关系，这种函数关系可以是线性、二次函数、指数、对数关系。为了确认这种关系，我们需要首先对观测数据集

$$\{z(x_1, y_1), z(x_2, y_2), z(x_3, y_3), \cdots, z(x_{n-1}, y_{n-1}), z(x_n, y_n)\}$$

计算任意两个点的 距离$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$和 半方差 $\sigma^2 - C_{ij} = \frac{1}{2}E[(z_i - z_j)^2]$，这时会得到$n^2$个$(d_{ij}, r_{ij})$的数据对。

将所有的d和r绘制成散点图，寻找一个最优的拟合曲线拟合d与r的关系，得到函数关系式

$$r = r(d)$$

那么对于任意两点$(x_i, y_i), (x_j, y_j)$，先计算其距离d_{ij}，然后根据得到的函数关系就可以得到这两点的半方差r_{ij}

7. 简单克里金（simple kriging）与普通克里金（ordinary kriging）的区别

以上介绍的均为普通克里金（ordinary kriging）的公式与推理。

事实上普通克里金插值还有简化版，即简单克里金（simple kriging）插值。二者的差异就在于如何定义插值形式：

上文讲到，普通克里金插值形式为

$$\hat{z_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i$$

而简单克里金的形式则为

$$\hat{z_o} - c = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z_i - c)$$

这里的符号c在上文介绍过了，是属性值的数学期望，即$E[z] = c$。也就是说，在普通克里金插值中，认为未知点的属性值是已知点的属性值的加权求和；而在简单克里金插值中，假设未知点的属性值相对于平均值的偏差是已知点的属性值相对于平均值的偏差的加权求和，用公式表达即为：

$$\hat{R_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R_i$$

这里的R_i在上文定义过了：$R_i = z_i - c$。

但是为什么这样的克里金插值称为“简单克里金”呢？由于有假设$E[z] = c$，也就是说$E(R_i + c) = c$，即$E(R_i) = 0$。那么上面的公式$\hat{R_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i R_i$两边的期望一定相同，那么在求解未知参数$\lambda_i$就不需要有无偏约束条件$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$。换句话说，这样的估计公式天生就能满足无偏条件。因此它被称为简单克里金。

从在上文（第4节优化目标/代价函数J）中可以知道，优化目标的推理和求解过程是通过对属性值相对于期望的偏差量R_i进行数学计算而进行的。也就是说这两种克里金插值方法虽然插值形式不一样，求解方法是一样的，重要的区别是简单克里金插值不需要约束条件$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$，求解方程组为：

$$\begin{cases} r_{11}\lambda_1 + r_{12}\lambda_2 + \cdots + r_{1n}\lambda_n + \phi & = r_{1o} \\ r_{21}\lambda_1 + r_{22}\lambda_2 + \cdots + r_{2n}\lambda_n + \phi & = r_{2o} \\ & \cdots \\ r_{n1}\lambda_1 + r_{n2}\lambda_2 + \cdots + r_{nn}\lambda_n + \phi & = r_{no} \end{cases}$$

还有更重要的一点，简单克里金的插值公式为：

$$\hat{z_o} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z_i - c) + c$$

换句话说，在计算未知点属性值$\hat{z_o}$前，需要知道该地区的属性值期望c。事实上我们在进行插值前很难知道这个地区的真实属性值期望。有些研究者可能会采用对观测数据简单求平均的方法计算期

望值c，而考虑到空间采样点位置代表性可能有偏差（比如采样点聚集在某一小片地区，没有代表性），简单平均估计的期望也可能是有偏差的。这是简单克里金方法的局限性。

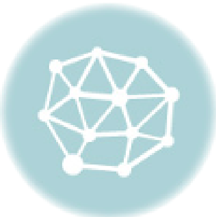
8.小结

总的来说，进行克里金插值分为这几个步骤：

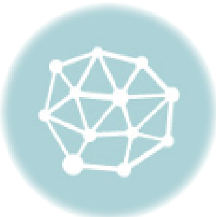
1. 对于观测数据，两两计算距离与半方差
2. 寻找一个拟合曲线拟合距离与半方差的关系，从而能根据任意距离计算出相应的半方差
3. 计算出所有已知点之间的半方差r_{ij}
4. 对于未知点z_o，计算它到所有已知点z_i的半方差r_{io}
5. 求解第四节中的方程组，得到最优系数λ_i
6. 使用最优系数对已知点的属性值进行加权求和，得到未知点z_o的估计值

打赏

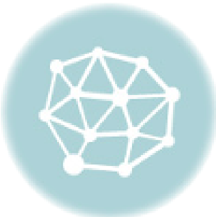
相关文章:



加权线性回归 (Weighted



用WRF模型进行气象模拟入门(1)



用WRF模型进行气象模拟入门(2)

2014年10月15日 xg1990 地学、技术 GIS、插值、统计

《克里金(Kriging)插值的原理与公式推导》有78个想法

yangbaoan

2015年3月14日 18:26

楼主，如果是球面模型，公式中的CO和C以及a是不是事先指定的

xg1990

2015年4月15日 16:54

球面模型是拟合 d 与 r 的关系 时所用到的拟合函数（见6.半方差函数）
它的参数应该是根据样本点估计出来的： 两两计算样本点的距离 d 跟半方差 r，N 个点得到 N(N-1)/2 组 (r,d)对，然后用各种模型模拟 (r,d)关系

XiaoxiDeng

2015年12月20日 21:49

请问楼主可知Gis进行Cross-validation中Standard Error如何得到的吗？

xg1990

2016年1月3日 08:56

Standard Error 的定义可以参考 https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_error
至于 "Gis进行Cross-validation" 我也不清楚是什么了......

DennisWong

2016年1月29日 12:38

不太清楚了。但是Matlab和R的package都有 cv的函数。运行起来很方便。

Teng Li

2017年2月8日 21:43

GIS用的Cross-Validation就是DL中经典的留一检验（Leave-one-out），比如你用100个数据，每次把n号数据剔除掉用剩下的99个预测第n个然后计算残差；问题是其实我预测一次就做完了，但验证的计算量确实预测的100倍！数据量越大，越不划算，我猜想可能内部有什么优化算法吧。

xg1990

2017年2月9日 04:29

cross validation方法很多的，leave-one-out只是效率比较低的一种。并不一定需要什么优化算法，换个cross validation方法就行了

ppc

2016年1月26日 15:19

请问楼主,权重系数为什么会解出负值?

xg1990
2016年1月29日 16:10

负值说明了空间属性存在负相关。举个具体例子：水面波动，在相距半个波长上的两个点相位永远相反。

Cher
2016年2月3日 22:26

多谢WHU学长，讲的很详细

TOM
2016年3月2日 09:47

楼主，这篇博客的word版有吗？公式输起来太麻烦，有的话发一份呗！
email:yadongzhangcau@sina.com

xg1990
2016年4月12日 14:38

抱歉没有word版 🙂

Mushroom
2016年3月6日 14:21

受益匪浅！辛苦博主了！

lucywang
2016年4月12日 12:56

能给一份word版本吗 76457935@qq.com

xg1990
2016年4月12日 14:38

抱歉没有word版 🙂

jimbo

2016年5月4日 21:40

计算观测数据集任意两点的距离和半方差来进行r与d的函数关系拟合，想求教楼主两个点之间的半方差怎么计算

xg1990

2016年5月5日 13:48

在第六节，6.半方差函数，提到用 0.5 * (zi-zj)^2 计算这两点的半方差

Jimbo

2016年5月10日 11:41

谢谢

erica00

2016年11月1日 00:45

大神，你在第六节写的用0.5 * (zi-zj)^2来计算半方差，这个和用rij=0.5*E[(zi-zj)^2]计算半方差效果一样吗？

xg1990

2016年11月8日 19:06

我们假设半方差r_{ij}是距离d_{ij}的函数，函数值的估计表示为数学期望的形式。
但是具体的函数形状需要一个一个的观测点来计算，因此需要计算0.5*[(zi-zj)^2]作为观测点来拟合半方差函数

erica00

2016年11月21日 22:54

明白啦，谢谢大神

刘涛

2019年8月20日 12:21

如果有多组同一空间的数据，那么就可以计算rij = 0.5 * E [（zi – zj）^ 2] 了吧？

tyyyy
2016年8月25日 10:44

请问每种克里金方法的适用条件是什么，如果我的数据转换后仍不符合正态分布该怎么办？谢谢

xg1990
2016年9月20日 19:28

不好意思，克里金方法变种太多，我还没能一一学习。普通克里金的假设是空间的期望与方差均一分布，似乎不需要正态分布的假设。

Teng Li
2017年2月8日 21:49

学长，普通克里金也是需要正态分布假设的！

xg1990
2017年2月9日 04:25

愿闻其详。我全部推导下来没发现哪里需要正态假设……

Teng Li
2017年2月9日 11:03

上面的推导过程的确看不出需要硬塞进这个假设，ArcGIS文档也没说清楚这个假设从哪里来的……http://desktop.arcgis.com/en/arcmap/latest/extensions/geostatistical-analyst/examine-the-distribution-of-your-data.htm
我个人感觉有点像中心极限定理（？），虽然每个采样点自己的分布可以是任意的。但如果采样点足够多，总体的分布就呈现正态（只是这里没有求和或求平均）

Teng Li
2017年2月9日 13:29

对不起，我理解错了，和中心极限没有关系。http://desktop.arcgis.com/zh-cn/arcmap/latest/extensions/geostatistical-analyst/understanding-transformations-and-trends.htm
"作为预测方法的克里金法并不要求数据具有正态分布。但是，正如了解不同的克里金模型中所述，要获取普通克里金法、简单克里金法和泛克里金法的分位数和概率图则要求数据必须处于正态分布。如果只考虑加权平均值预测方法，则无论数据是否正态分布，克里金法都是最好

的无偏差预测方法。但是，如果数据处于正态分布，克里金法会是所有无偏差预测方法（不仅是加权平均值预测）中最好的。”

Teng Li

2017年2月8日 21:45

普通克里金（ordinary）对数据须满足三条最基本的假设：（1）独立变量正态分布；（2）空间格局全局一致；（3）数据无趋势；此外在解方程上还有无偏假设。
当这些假设被打破的时候就衍生出一系列变种（除非你手动对数据做变换直接插值后再逆变换回去）：
（1）如果不满足正态分布，考虑log，arcsin变换或ArcGIS自带的box-cox等，一般一次变换QQ图已经比较好了，如果仍不符合可考虑先看histogram后，剔除异常值与连续多次变换迭代进行。
（2）空间规律局部变化（即半方差图各地相差很大），首先考虑经验贝叶斯（Empirical Bayesian）+Local Radius参数调节；或者加入协变量（CoKriging），或者手动设置断线（一般是河流、悬崖、道路等）。
（3）首先观察Explore Data中的Trend Analysis侧面的拟合曲线。数据趋势的剔除，自己做的话可能需要首先拟合一阶或二阶的趋势面，ArcGIS提供的是泛克里金（Universal）工具自动去二次趋势。
（4）如果除了空间（自）相关外，还利用多个变量相关性提高预测精度，此时变量独立假设打破，进入协同克里金（Ordinary/Universal CoKriging），代价就是额外的交叉相关计算和更多的参数估计。
（5）特殊数据：前面都在说连续变量（continuous）,如果需要估计的是二值binary data，也无所谓正态分布了；此时，如果用指示克里金预测值（indicator）仍是0/1，如果用概率克里金（Probability kriging），则预测出的是连续概率。
（6）博主所述，Ordinary和Simple的区别在于无偏性对方程构造的影响，但仍是在线性方程组的领域。一旦进入非线性估计，就是析取（disjunctive）克里金，还要满足个二元正态分布（这个我同样不懂）……
对于初学者，应尽可能使自己的模型简单化，除非有充分的理由，一般还是推荐使用普通克里金的默认配置。

魏强

2017年2月21日 15:09

请问，第一个假设：独立变量正态分布，指的是测量点间是独立地吗？如果是的话，测量点相互独立，协方差不就都为0了吗？

KyleS

2018年9月29日 01:47

普通克里金、泛克里金和协同克里金给出最优无偏估计（BLUP）的要求均是随机场满足固有平稳假设。如果使用变异函数建模也要求各向同性假设，但对样本的概率分布没有要求。

如果样本服从正态分布则克里金法的效果通常更好。如果随机场本身服从正态分布，则BLUP可以基于分位函数给出置信区间。

一些基于贝叶斯方法的克里金模型要求正态分布的先验假设。

周周

2020年2月4日 17:29

请问，可以给一下3.1到3.2的推导细节吗？

杨昌

2016年10月26日 17:46

学长，你知道如何使用matlab进行克里金插值的计算吗？能不能赐教一下？

xg1990

2016年10月28日 14:18

不好意思，这个我不太清楚，网上也许能搜到代码吧

Teng Li

2017年2月8日 21:57

http://mgstat.sourceforge.net/
http://cn.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/59960-krigingtoolbox
http://cn.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/31055-kriging-and-inverse-distance-interpolation-using-gstat

wenzhao Li

2020年3月30日 15:33

你好 可以咨询你kriging的tool box用法吗

闷貝

2016年12月31日 23:09

大神，这个博客是一个模板还是自己写的啊，版面字体看着好舒服，求~！！

魏强

2017年2月21日 11:00

楼主，请问利用普通克里金进行插值，通常需要多少已知测量点?

xg1990

2017年2月21日 11:19

从解方程的角度讲，3个点就够了。
但实际上需要多少点没有定论，取决于具体问题。总的原则是越多越好，分布约随机越好

魏强

2017年2月21日 14:59

非常感谢！

李浩浩

2017年5月19日 21:58

如果线性方程组无解怎么办

xg1990

2017年5月20日 15:11

那就没办法了，一般极少发生

qq

2019年1月14日 10:14

求广义逆

Frank Han

2017年9月26日 15:52

你好！看了你的文章之后受益匪浅。但我有几个问题：
请问第5节“代价函数的最优解”中，引入拉格朗日乘数之后的第二个大括号中的第一个式子，分子是不是少了一个“+\phi”？同样的问题也出现在接下来的几个式子中。
第5节的最后一个矩阵方程，中间那个向量的最后一项是不是应该为“\phi”？

xg1990

2018年12月4日 15:32

感谢指正，确实有问题，已经修改

林晨曦

2018年1月12日 13:28

根据楼主的详细推导，克里金插值利用半方差函数实际只是为了满足误差最小，而并没有体现插值目标点与已知样本点之间的空间自相关关系。比如IDW，在空间上相距较远的点则权值较小，但是kriging似乎并不会因为空间自相关较弱而权值较小，因此插值结果只具有数学意义而不具有地理学的意义。不知道楼主对这个问题的看法是什么？最后十分感谢楼主的文档，受益匪浅！

xg1990

2018年1月12日 13:34

半方差函数泛化了IDW所利用的空间自相关。IDW的「相距较远的点则权值较小」只是一种特殊情况，事实上还可能距离越远权值越大（相关性越高）。更一般地讲，距离与权值大小之间可能是任何函数关系，而半方差函数就是在描述这种关系

whu_fish

2018年1月15日 10:36

错误一：
第5节，代价函数的最优解中，引入拉格朗日乘子后分别求偏导（即该节中第一个花括号），计算后得到第二个花括号结果错误，第二个花括号中第一个式子左边少了一项"减两倍乘子"，自此下面的公式推导皆少了一项，最终的矩阵形式中，系数矩阵（即第二个矩阵）中最后一行不是0，应是乘子。
错误二：
通篇的下标数字0与字母O，再加上i的范围标注应从1开始而不是0，所以会有一定的误导。

whu_fish

2018年1月15日 10:41

关于错误一，"减两倍乘子"应改为"加两倍乘子"，最后的矩阵中最后一行应是"减一倍乘子"

xg1990

2018年12月4日 15:31

感谢指正，已经做了修改

烧饼

2018年8月10日 21:45

数学渣，跪求详细解释：第4标题代价函数J下面公式的第二步到第三步怎么推出来:
具体的

1. 第一块是怎么从Var变成了Cov
2. 第二块Sigma(lambda * Zi)不是一起的吗，lambda是怎么就拿到外面去了QAQ

求解释..

LEOUN

2018年11月13日 02:13

(1)直接按照方差公式推导就出来了，很简单。
(2) lamdbda is a constant, so it can be moved out of the sigma.

xg1990

2018年12月4日 15:01

Var是方差，Cov是协方差，具体可以查一下方差计算的一些公式

Nonentity

2019年12月31日 06:08

求问为什么换成cov时引入了j，如何将var(lambda_i*Zi)转化为lambda_io*lambda_jcov(Zi,Zj)

HUIPING LI

2018年11月27日 11:19

第5部分最后的矩阵形式，Ax=b对应的x，最后应该是ϕ而不是0。

xg1990

2018年12月4日 14:59

感谢指正，已经修改

suedez

2019年3月5日 14:48

醍醐灌顶！谢谢大神，救我狗命。。。
小白还想弱弱地请教一下，strict stationary， instinct stationary 和 second-order stationary 到底是什么区别和联系啊 TAT

GISer

2020年4月19日 17:07

strict stationary，second-order stationary， instinct stationary限制条件逐渐减弱

madao

2019年4月5日 17:17

楼主你好，kriging插值和kriging模型有什么异同？半方差函数和变异函数以及相关函数是不是同一个东西？

xg1990

2019年4月27日 08:16

模型是一个更宽泛的名词了，具体指代什么看上下文吧。半方差函数和变异函数以及相关函数不是同一个东西……

张易

2019年4月25日 20:07

楼主，已知点的r就直接用rij=1/2（zi-zj）^2计算？在确定rij和dij的函数关系的时候，就是把对应点（（d11,r11），（d12,r12）…）直接把所有点画出来进行观察？不需要处理?（例如删点啥的？）谢谢楼主大神分享，还请赐教。

xg1990

2019年4月27日 08:13

对的，删点也需要看具体情况了比如异常值

giggle

2019年7月10日 23:01

r1o 是什么意思呢？怎么衡量结果的不确定性（插值误差）？

da jax

2019年7月12日 14:56

作者您好，我有一个问题没想明白，rij=1/2*(zi-zj)^2
但是zi是一个点，有两个坐标（xi,yi）
如何计算rij？这个问题还是没有想明白

薛文文

2019年11月11日 10:41

在4代价函数当中，推导公式i中怎么出现j的，求解答！

Anquan

2019年12月23日 23:24

你好，现在知道为啥会出现j了吗，求解啊

雨夜微凉

2019年11月30日 15:40

感谢，收益匪浅，顺便问一句，这个博客是自己手撕的网页还是博客模板生成的？

Jianing Zhou

2019年12月30日 18:51

请问如果将普通克里金插值算法用c++实现，那么要如何选择拟合模型呢？

周周

2020年2月4日 17:30

数学不太好，卡在3.1到3.2的推导，可以给一下推导细节吗，谢啦

周周

2020年2月4日 17:42

我可以理解为，lamda对所有的所求点，都是一样的一套系数吗？

周周

2020年2月4日 23:13

抱歉，我修改一下我的问题，为什么3.1中那两个是相互独立的呢？

周周

2020年2月4日 23:15

我懂了，麻烦了，是因为lambda只和距离有关，和其他的无关。麻烦了

wang

2020年4月11日 17:29

感谢楼主分享，一般讲解中公式推导时，-2μ 是拉格朗日乘数 ，而不是μ ，能请教下为什么是-2μ，而不是一般的+μ?

xg1990

2020年4月12日 06:40

这个只是书写习惯，没有特定的原因哈

Lin

2020年4月15日 14:16

专业的博主！近期又涉及到GIS方面的东西，蒙圈，请问泛克里金跟普通克里金有啥区别，泛克里金是普通克里金和其他回归方法的结合？本质啥区别？

Lin

2020年4月15日 14:19

请问博主有方式可以私聊请教吗？收获很大

李酱

2020年5月11日 21:26

請問一下第3節中：
zi不是某個確定的值嗎？那E[zi]怎麼是c而不是zi呢？
同理預測值也是一個確定值，它的期望不是它本身嗎？
真實值z0是指一個確定的值還是一個在（x0,y0）處的隨機變量？

zoe zhu

2020年6月2日10:17

最後算法步驟中，1計算了兩兩半方差，怎麼3裡面還要計算半方差
沒看明白半方差怎麼計算的？（dij,rij)中距離d已知公式，但r沒有公式，依舊是一個期望，那豈不是應該用樣本去預測這個期望？E((zi-zj)的平方)應該怎麼求呢？其含義是什麼？