2022年秋季专业基础课程

场 论

授课教师：彭淼 谭茂金

地球物理与信息技术学院

稳定电流磁场

第10讲 稳定电流磁场的基本规律

第11讲 磁矢势和磁标势

第12讲 磁介质的磁化

第13讲 磁介质中的稳定电流磁场

本讲内容

1　毕奥-萨伐尔定律

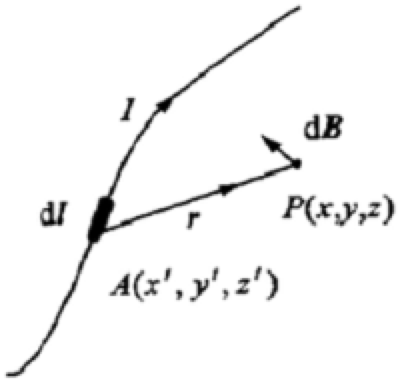
2　安培环路定理

1 毕奥-萨伐尔定律

- 在载流导线周围的磁针会发生偏转，这表明电流在周围空间产生磁场。
- 一定分布的电流对应着一定分布的磁场，但是电流的分布是多种多样的。例如，直线电流、环状电流等。任何形状的电流都可以看成由许多小段电流所组成，空间中任一点的磁感应强度可以看作是由这许多小段电流所产生磁场的叠加。
- 要确定一定分布的电流所对应的一定分布的磁感应强度，首先要确定一小段电流在空间任一点所产生的磁感应强度。

1　毕奥-萨伐尔定律

在场源点$A(x^{'},y^{'},z^{'})$放一无限小段线电流元 $Id\vec{l}$ ，则在观察点 $P(x,y,z)$产生的磁感应强度 $d\vec{B}$ 为



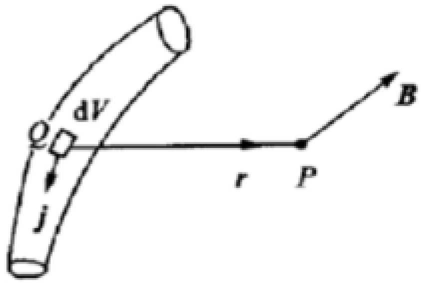
$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

称为毕奥-萨伐尔定律。

式中， μ_0为真空磁导率， $\mu_0=4\pi\times10^{-7}H\cdot m^{-1}$

$\vec{r}$ 是场源点到观察点的矢径。

当电流具有体密度分布时，可以沿着电流方向将它分为无限细小的电流管。设j为电流密度，dS为垂直电流管的截面，则流过电流管的电流强度为 $I=jdS$ ，因此



$$Idl=jdSdl=jdV$$

式中，dl是电流管的长度元；dV 是 $dSdl$ 构成的无限小体积元。

1 毕奥-萨伐尔定律

因为电流密度$\vec{j}$ 和电流管元 $d\vec{l}$ 同方向，所以

$$Id\vec{l}=\vec{j}dV$$

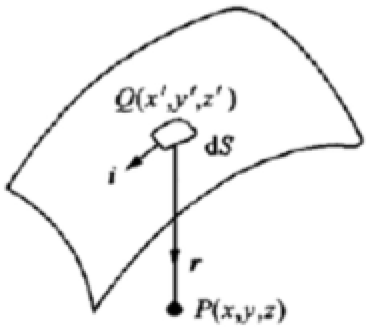
代入毕奥-萨伐尔定律式中，并对整个体积积分，就得到具有体分布的电流产生的磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j}\times\vec{r}}{r^3}dV$$

当电流具有面密度(电流的面密度是垂直通过单位横截线的电流)分布时，可以沿着电流方向将它分为许多无限小块面电流元，设 $\vec{i}$ 为面电流密度,dy 为横截线的宽度，则流过横截线 dy的出流强度 $\vec{I}=\vec{i}dy$，因此

$$\vec{I}dl=\vec{i}dydl=\vec{i}dS$$

式中，dl是小块面电流的长度元；dS是 $dydl$构成的无限小面元。



如图, 因为面电流密度 $\vec{i}$ 与$d\vec{l}$ 同方向，所以

$$Id\vec{l}=\vec{i}dS$$

1　毕奥-萨伐尔定律

代入毕奥-萨伐尔定律式中，遍及整个面积积分，得到面分布的电流产生的磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{i}\times\vec{r}}{r^3}dS$$

当电流为线分布时，可将线电流分成无限小线电流元 $Id\vec{l}$，代入毕奥-萨伐尔定律式中，并遍及整个线长积分，得到线电流产生的磁场为

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_L\frac{Id\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

- 从毕奥—萨伐尔定律出发导出体分布、面分布和线分布电流产生磁场的普遍的积分公式。
- 这是矢量函数的积分，在实际应用中往往要计算标量函数的积分，因此，一般计算其分量。现研究直角坐标下磁感应强度的x,y,z分量。

1 毕奥-萨伐尔定律

(1) 体分布电流

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{j_y(z-z') - j_z(y-y')}{r^3} dV'$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{j_z(x-x') - j_x(z-z')}{r^3} dV'$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{j_x(y-y') - j_y(x-x')}{r^3} dV'$$

(2) 面分布电流

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{i_y(z-z') - i_z(y-y')}{r^3} dS'$$

$$B_y = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{i_z(x-x') - i_x(z-z')}{r^3} dS'$$

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{i_x(y-y') - i_y(x-x')}{r^3} dS'$$

(3) 线分布电流

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{(z-z')dy' - (y-y')dz'}{r^3}$$

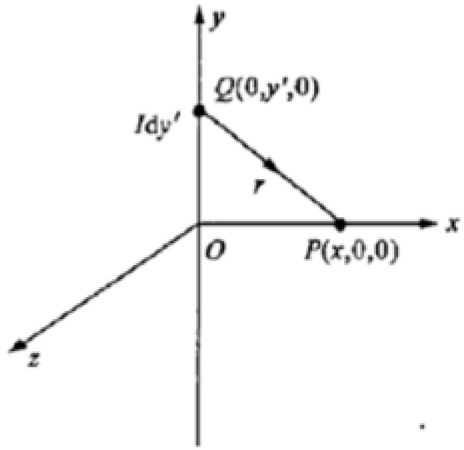
$$B_y = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{(x-x')dz' - (z-z')dx'}{r^3}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_L \frac{(y-y')dx' - (x-x')dy'}{r^3}$$

1 毕奥-萨伐尔定律

例题1 无限长直线电流的磁场

一无限长直导线通以电流 I ,置于 y 轴上，求在x轴上的 $P(x,0,0)$ 点的磁感应强度。



解：在 $Q(0,y',0)$点取电流元 Idy' 由于

$dx'=0, dz'=0, x'=0, z'=0,$ 并且 $y=0, z=0,$

$r=(x^2+y'^2)^{1/2}$,代入线分布电流磁场的积分公式(5.1-7)，得

$$B_z=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{\infty}\frac{-2xdy'}{(x^2+y'^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{xy'}{x^2\sqrt{x^2+y'^2}}\Bigg|_0^{\infty}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

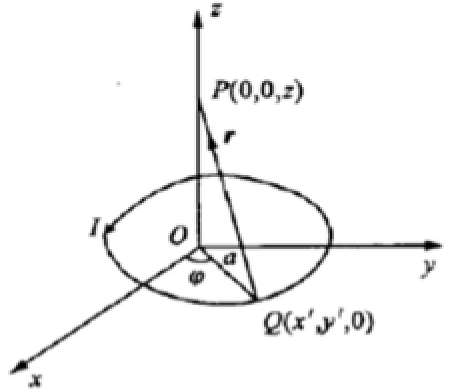
写成矢量形式即

$$\vec{B}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{e}_z$$

1　毕奥-萨伐尔定律

例题2　圆形电流中垂线上任一点的磁场.

圆形导线通以电流 I，置于xOy平面上，圆心是坐标原点，求z轴土的点$P(0, 0, z)$的磁感应强度。



解：在 $Q(x', y', 0)$ 点取一电流元，由于 $dz' = 0, x = 0,$

$y = 0, z' = 0,$ 并且　$r = (a^2 + z^2)^{1/2},$

代入线分布电流磁场的积分公式，得

$$\left.\begin{aligned}
B_x &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L \frac{z dy'}{(a^2+z^2)^{3/2}} = 0 \\
B_y &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L \frac{z dx'}{(a^2+z^2)^{3/2}} = 0 \\
B_z &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_L \frac{x' dy' - y' dx'}{(a^2+z^2)^{3/2}}
\end{aligned}\right\}$$

为了计算上式的积分，将 x' 和 y' 换成极坐标

$$x' = a\cos\varphi,\ y' = a\sin\varphi,\ x'^2 + y'^2 = a^2$$

代入式中得

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi}(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}$$

写成矢量形式为 $\vec{B} = \dfrac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$

1 毕奥-萨伐尔定律

例题3 电流均匀流过2a的无限长平面导体薄板，电流面密度为i,薄板置于xoy平面上，中心在坐标原点，求P(0,0,z)点的磁感应强度。

解：如图。导体薄板通以电流，电流面密度为i，薄板置于xOy平面上，中心在坐标原点，求P(0，0，z)点的磁感应强度。

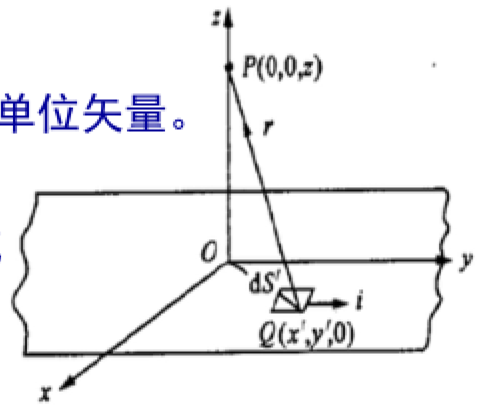
在Q(x’,y’,0)点取一面电流元，由于面电流沿y轴，故$i_x = 0, i_z = 0, i_y = i,$

并且$z' = 0, x = 0, y = 0$，代入面分布电流磁场的积分公式(5.1-6)中得

$$dS' = dx'dy', \quad r^3 = (x'^2 + y'^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-a}^{+a}\int_0^{\infty}\frac{2zi dx'dy'}{(x'^2+y'^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 iz}{2\pi}\int_{-a}^{+a}\frac{dx'}{(x'^2+z^2)} = \frac{\mu_0 i}{\pi}\tan^{-1}\frac{a}{z} \quad, B_y = 0\ , \quad B_z = 0$$

写成矢量形式：$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{\pi}\tan^{-1}\frac{a}{z}\vec{e_x}$ ，式中 $\vec{e_x}$ 为x轴的单位矢量。

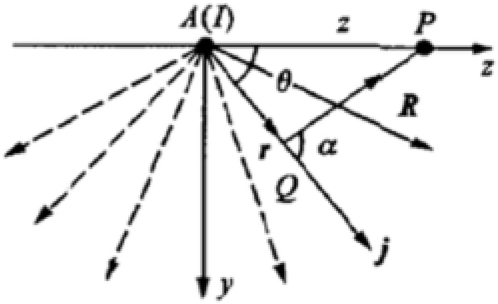


如果薄板是无限大薄板，即 $a \to \infty$ ，则上面的结果变成

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} e_x$$

1 毕奥-萨伐尔定律

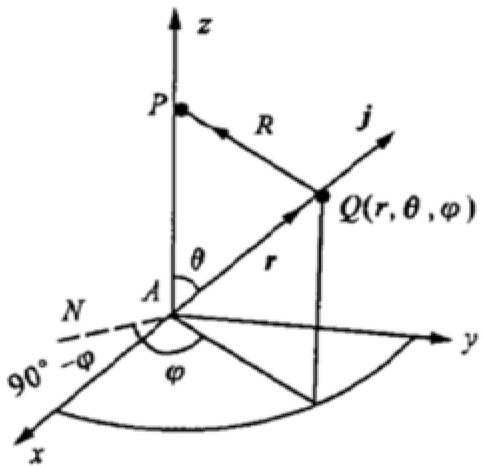
例题4 xAz平面下为一均匀各向同性的半无限空间非磁性导电媒质，电流由A点流入，电流强度为I，求位于z轴上$P(0,0,z)$点的磁感应强度。



解：设点电源在坐标原点上，即A点与坐标原点重合，观察点$P(0,0,z)$位于z轴上，y轴垂直向下，x轴垂直于图平面.在$Q(r,\theta,\varphi)$点取一体电流元jdV，它与观察点P的距离为R，如图，此电流元在P点产生的磁场为

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}\times\vec{R}}{R^3}dV$$

$$dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{jdV}{R^2}\sin\alpha$$



式中, α 为 $\vec{j}$ 与 $\vec{R}$ 之间的夹角。

1　毕奥-萨伐尔定律

由

$$j = \frac{I}{2\pi r^2}$$

$$R = (r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta)^{1/2}$$

$$\sin\alpha = \frac{z\sin\theta}{R} = \frac{z\sin\theta}{\sqrt{r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta}}$$

$$dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi$$

代入磁场公式中，得

$$dB = \frac{\mu_0 I z \sin^2\theta dr d\theta d\varphi}{8\pi^2 (r^2 + z^2 - 2rz\cos\theta)^{3/2}}$$

由于Q点并不一定在yAz平面内，因而AQP平面和Axz平面之间有一夹角φ 。磁场的方向沿AQP平面的法线AN，并与Axz平面成$90^o - \varphi$角，即dB与地面成$90^o - \varphi$ 角。现在把dB分解为平行于地面和垂直于地面的两个分量

$$dB_{//} = dB\sin\varphi$$

$$dB_{\perp} = dB\cos\varphi$$

1 毕奥-萨伐尔定律

但是由于电流分布对yAz平面是对称的，垂直于地面的磁场分量 $dB_\perp$ 求和后应等于零。

证明如下:

设取与Ayz平面对称的两点Q和Q'。这两点的电流在P点产生的磁场分别为$d\vec{B}$ 和$d\vec{B}'$，其分量为$dB_\perp$、$dB_{//}$和$dB'_\perp$ $dB'_{//}$ 。由于 $dB_\perp$ 和 $dB'_\perp$ 大小相等而符号相反，结果相互抵消。这个结论对半空间中任意一对Q和 Q' 点都是正确的，所以，$dB_\perp$的总和 $B_\perp$ 为零。显然，对于水平分量来说，其在任何一对对称点上都是大小相等方向相同的，所以求和后量值加倍。即

$$B_{//} = \frac{\mu_0 Iz}{8\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{\sin^2\theta\sin\varphi drd\theta d\varphi}{(r^2+z^2-2rz\cos\theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{\mu_0 Iz}{8\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \sin^2\theta\sin\varphi d\theta d\varphi\left[\frac{r-z\cos\theta}{z^2\sin\theta\sqrt{r^2+z^2-2rz\cos\theta}}\right]_0^\infty$$

1 毕奥-萨伐尔定律

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 z}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi d\theta(1+\cos\theta)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{8\pi^2 z}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi z}$$

因此，总磁场的磁感应强度为

$$B = \sqrt{E_{\parallel}^2 + B_{\perp}^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi z}$$

这个结果表明：

- 从点电源流入均匀各向同性的半无限空间非磁性导电媒质中的电流产生磁场的磁感应强度与电流I成正比
- 与点电源至观察点的距离成反比
- 磁场的方向垂直于AP，并平行于地面，可按右手螺旋法则来确定.

2 安培环路定理

2.1 稳定电流磁场的通量和散度

稳定电流磁场的磁感应线是闭合的曲线，这表明：磁感应强度B的场是无源场，通过任何闭合曲面的磁通量为零说明B的无源性，即

$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

此式是表示B的无源性的积分形式，用高斯定理将(5.2-1)式变换成

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{B}dV=0$$

由于曲面*S*是任意选取的，所以被积函数恒为零，即

$$\nabla\cdot\vec{B}=0$$

此为表示*B*无源性的微分形式，表明磁场中任意一点磁感应强度的散度恒为零。

2 安培环路定理

2.2 稳定电流磁场的环流和旋度

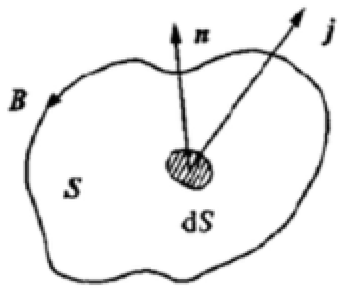
电流磁场中磁感应强度沿闭合曲线的环流与通过闭合曲线所包围电流强度I成正比。

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

式中，L为任一闭合曲线；I为通过L所包围的总电流强度。

上式称为安培环路定理的积分形式。应当注意的是：不被L所包围的电流对磁场有贡献，但是对环流没有贡献。

对于连续分布的电流，在计算磁场沿闭合曲线L的环流时，只需考虑通过以L为边界的曲面S的电流，在S以外流过的电流没有贡献。在以L为边界的曲面S上取一面积元dS,设通过dS面的电流密度为j，则通过dS面元的电流强度为 $dI = \vec{j}\cdot d\vec{S}$，故通过$S$面的总电流强度为



$$I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

2 安培环路定理

于是在电流连续分布的情况下，安培环路定理的积分形式表示为

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$

为了求得微分形式，用斯托克斯定理将 $\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}$ 写成 $\int_S \nabla\times\vec{B}\cdot d\vec{S}$ 则上式可写成

$$\int_S \nabla\times\vec{B}\cdot dS = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot dS$$

由于 $d\vec{S}$ 的任意性，故得

$$\nabla\times\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

这是安培环路定理的微分形式.它表示稳定电流磁场的有旋性。

2 安培环路定理

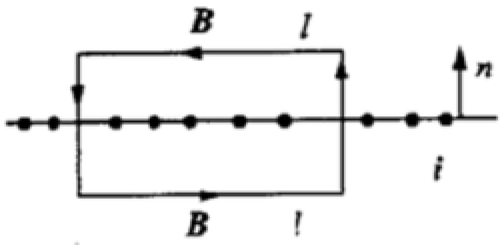
2.3 稳定电流磁场与静电场的对比

静电场	稳定电流磁场
$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$
$\nabla\times\vec{E}=0$	$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$

- 稳定电流磁场与静电场不同，稳定电流磁场是一个无源有旋场，而静电场是一个有源无旋场。
- 磁场的涡旋性由磁感应强度的旋度决定，并且与电流密度成正比。
- 磁场的涡旋分布只有在电流流过的区域内存在，因此该区域又称为磁场的涡旋空间。

2 安培环路定理

例题5 无限大导电薄板，通以电流，面密度为i，求薄板中心附近的磁感应强度。



解：垂直面电流方向的一个截面，电流垂直纸面向外，求薄板中心附近的磁感应强度。

由于电流均匀分布在无限大导电薄板上，电流面密度是常量，故在薄板的中心附近，磁感应强度B总是垂直于i并平行于板面，板两边的B方向相反。

作闭合曲线，平行板面的边长为l，则磁感应强度B沿闭合曲线的环流为$2Bl$，而闭合曲线所包围的电流是$I=il$，应用安培环路定理的积分形式得到

$$2Bl = \mu_0 il$$

故

$$B = \frac{\mu_0 i}{2}$$

写成矢量形式

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} i \times \vec{n}$$

式中，$\vec{n}$ 为面法线方向的单位矢量。

谢谢！