第1章 插值方法

1.5 牛顿插值公式

内 容

- 插值法概念
- 各种插值方法

（拉格朗日、牛顿、埃米尔特、分段、样条）

- 插值余项
- 曲线拟合

内容引入

注1：拉格朗日插值的缺点：无承袭性（继承性），多加一个节点，需要重新计算所有的插值基函数$l_i(x)$。

承袭性（继承性）的含义：假设对于具有n+1（$n\geq 0$）个插值节点的多项式插值问题，已经得到了对应的插值多项式$P_n(x)$，若未能满足插值精度要求，需通过增加一个插值节点 （x_{n+1}，f（x_{n+1})））并利用已知的$P_n(x)$来构造新的具有n+2个节点的插值多项式$P_{n+1}(x)$，基于此将$P_{n+1}(x)$表示为$P_n(x)$与一个修正项$H_{n+1}(x)$的和的形式，即，

$$P_{n+1}(x)= P_n(x)+ H_{n+1}(x) \qquad (1)$$

从而只要确定了$H_{n+1}(x)$，就可以给出$P_{n+1}(x)$。从而，我们称（1）式为具有继承性的插值多项式。

注：牛顿插值属于具有继承性的插值多项式。

考察由点斜式一次Lagrange插值公式（3）

$$P_1(x)=f(x_0)+\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)\text{（22）}$$

记 $P_0(x)=f(x_0)$ 为零次插值多项式，则 $P_1(x)$可以表示为，

$$P_1(x)=P_0(x)+H_1(x)=P_0(x)+c_1(x-x_0)$$

其中，修正项系数，

$$c_1=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

继续修正$P_1(x)$可进一步得到二次插值多项式$P_2(x)$，

$$P_2(x)=P_1(x)+H_2(x)=P_1(x)+c_2(x-x_0)(x-x_1)$$

利用$P_2(x_2)=f(x_2)=P_1(x_2)+H_2(x_2)$ 确定$c_2(x)$，得到$c_2(x)$的表达式为，

$$c_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}-\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

记 $c_0=f(x_0)$，从而有，

$$P_2(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1),$$

其中，

$$c_0=f(x_0)$$

$$c_1=f[x_0,x_1]=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$c_2=f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

继续求 $P_3(x)$，修正项 $H_3(x)$ 的系数表达式更复杂，需引入差商进行简化表示。

2. 差商及其性质

定义

一阶差商： $f[x_0,x_1]=\dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

二阶差商（一阶差商的差商）.

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

n阶差商 $f[x_0,x_1,\cdots x_n]=\dfrac{f[x_1,x_2\cdots,x_n]-f[x_0,x_1\cdots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}$

注：0阶差商， $f(x_i)$

2. 差商及其性质

差商的显式表达式：

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}=\frac{\frac{f(x_1)}{x_1-x_2}+\frac{f(x_2)}{x_2-x_1}-(\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0})}{x_2-x_0}$$

$$=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

依次类推， $f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}$

2. 差商及其性质

注：差商的值与节点的次序无关：

$$f[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} (x_k - x_j)}$$

$$f[x_0, x_1] = f[x_1, x_2] \quad \Rightarrow \quad f[x_i, x_j] = f[x_j, x_i]$$

$$f[x_i, x_j, x_k] = f[x_i, x_k, x_j] = f[x_k, x_j, x_i]$$

差商表

差商计算用下表进行表示：

$\boldsymbol{x_k}$	$\boldsymbol{f(x_k)}$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1])$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2])$	$f[x_0,x_1, x_2])$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3])$	$f[x_1,x_2,x_3])$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3])$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4])$	$f[x_2,x_3, x_4])$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4])$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4])$
…	…	…	…	…	…

3、牛顿插值多项式

按照差商的定义，

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x](x-x_0),$$

$$f[x_0,x]=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x](x-x_1),$$ (利用差商值与节点顺序无关)

$$f[x_0,x_1,x]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x_0,x_1,x_2,x](x-x_2),$$

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_{n-1},x]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_n),$$

将后一个式子带入前一个式子，得，

$$\begin{aligned}f(x)=&f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+\\&f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})+\\&f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n).\end{aligned} \quad (25)$$

令 $f(x)=P_n(x)+R(x)$,

3、牛顿插值多项式

其中，$P_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\dots$

$$+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) \qquad (26)$$

$$R(x)=f[x_0,x_1,\cdots,x_n,x](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) \qquad (27)$$

称$P_n(x)$称为牛顿插值公式，它是一种差商型插值公式. $R(x)$称为差商型误差估计.

此外，由1.1节定理2知，插值多项式存在唯一性，牛顿插值公式(26)与拉格朗日插值公式(10)完全相同，

牛顿插值多项式中x^n项的系数为：

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(x_k-x_j)}=\sum_{k=0}^{n}\Big[\prod_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{1}{(x_k-x_j)}f(x_k)\Big] \text{(拉格朗日插值中}x^n\text{项的系数)}$$

注：差商与导数的关系，

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\xi\in[a,b]$$

并且，牛顿插值余项与拉格朗日插值余项相同，

$$R_n(x)=|p_n(x)-f(x)|=\left|f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)\right|$$

（差商型误差）　（导数型误差）

3、牛顿插值多项式

牛顿插值公式特点：

（1）承袭性：每增加一个节点，插值多项式只增加一项，即

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + H_{n+1}(x)$$
$$= P_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

（2）利用差商表计算多个插值节点的牛顿插值多项式，比Lagrange插值公式计算更方便。

3、牛顿插值多项式

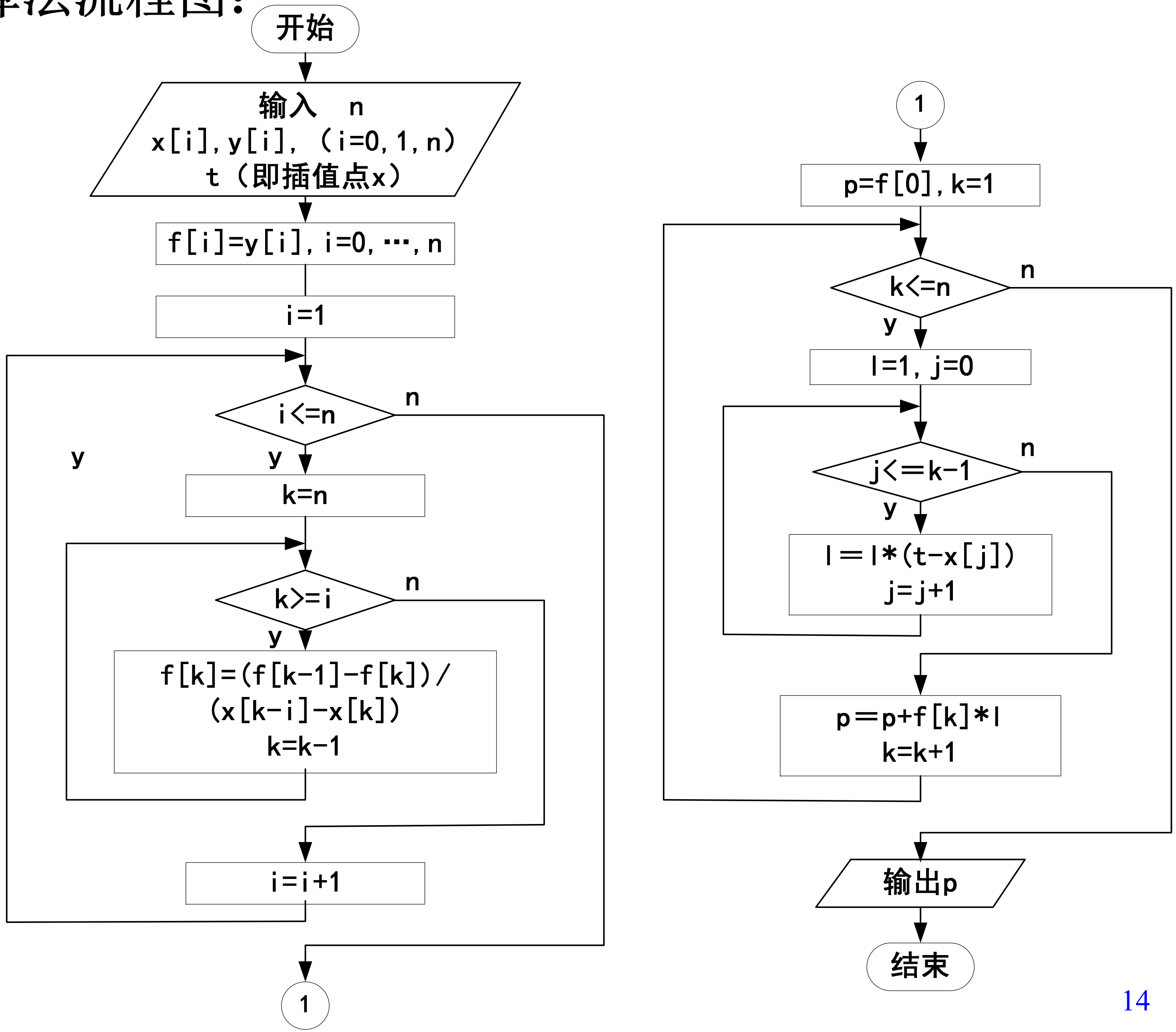
例1：已知函数$f(x)$当$x=-2, -1, 0, 1$时，其对应函数值为$f(x)=13, -8, -1, 4$。求$f(0.5)$的值。

解：根据已知点，填写以下差商表：

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	*
−2	13				1
−1	−8	−21			(x+2)
0	−1	7	14		(x+2)(x+1)
1	4	5	−1	−5	(x+2)(x+1)x

$$f(x)=13-21(x+2)+14(x+2)(x+1)-5x(x+2)(x+1)$$

牛顿插值算法流程图：


开始
输入 n
x[i], y[i], （i=0, 1, n）
t（即插值点x）
f[i]=y[i], i=0, …, n
i=1
i<=n
n
y
y
k=n
k>=i
n
y
f[k]=(f[k-1]-f[k])/
(x[k-i]-x[k])
k=k-1
i=i+1
1
1
p=f[0], k=1
k<=n
n
y
l=1, j=0
j<=k-1
n
y
l＝l*(t-x[j])
j=j+1
p＝p+f[k]*l
k=k+1
输出p
结束

第1章 插值方法

1.6 埃尔米特插值

1.6 埃尔米特插值

特点：不但要求$P_n(x)$与$f(x)$在节点处的函数值相同，而且要求在插值节点处有相同的导数值(两类插值：带完全导数和带不完全导数).

已知:函数$y=f(x)$在$n+1$个节点$x_0,x_1,x_2,\ldots,x_n$处的函数值为$y_0,y_1,\ldots,y_n$,导数值为$y'_0,y'_1,\ldots,y'_n$(带完全导数的插值问题）

求:当$x=x'$时，$y=f(x')$的值。

构造一个近似函数$P_n(x)$：

n+1个条件

1、$P_n(x)$与$f(x)$在插值节点处函数值相等（插值的基本条件）。

2、在节点处它们具有相同的导数值，

n+1个条件

1.6 埃尔米特插值

解决方法：

构造一个2n+1次代数多项式函数$H_{2n+1}(x)$，使得

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i)=y_i \\ H_{2n+1}'(x_i)=y_i' \end{cases} \quad i=0,1,\cdots,n$$

$H_{2n+1}(x)$怎么构造？

1、基于基函数的方法；

2、继承+待定系数的方法。

1.6 埃尔米特插值

带完全导数的Hermite插值多项式解法1-Lagrange插值多项式法：

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n}y_i'\beta_i(x)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left\{[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}]l_i^2(x)y_i+(x-x_i)l_i^2(x)y_i'\right\}$$

其中:

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$ （利用Lagrange基函数推导）

1.6 埃尔米特插值

已知$f(x)$在互异节点$\{x_i\}_{i=0}^n$处的函数值$\{f(x_i)\}_{i=0}^n$以及导数值$\{f'(x_i)\}_{i=0}^n$，要求构造不超过$2n+1$次多项式H_{2n+1}满足$2n+2$个插值条件

$$\begin{cases} H_{2n+1}(x_i) = f(x_i) \\ H'_{2n+1}(x_i) = f'(x_i) \end{cases}, i = 0,1,2,\dots,n.$$

解：采用构造Lagrange插值多项式的方法，构造一组插值基函数来解决Hermite插值问题。设$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)(i=0,1,2,\dots,n)$分别是满足如下插值条件的$2n+1$次多项式,

$$\begin{cases} \alpha_i(x_j) = \delta_{ij} \\ \alpha'_i(x_j) = 0 \end{cases}, j = 0,1,2,\dots,n. \quad [1]$$

$$\begin{cases} \beta_i(x_j) = 0 \\ \beta'_i(x_j) = \delta_{ij} \end{cases}, j = 0,1,2,\dots,n. \quad [2]$$

1.6 埃尔米特插值

于是Hermite插值多项式可以写为，

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n} f^{'}(x_i)\beta_i(x) \quad [3]$$

[3]式满足$2n+2$个已知条件. 下面求$2n+1$次插值基函数$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)$.

对于节点为$\{x_i\}_{i=0}^{n}$的拉格朗日插值基函数$l_i^2(x)$满足：

$$\begin{cases} l_i^2(x_j)=0 \\ [l_i^2(x)]'_{x=x_j}=2l_i(x_j)l_i^{'}(x_j)=0 \end{cases}, j=0,1,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n. \quad [4]$$

且$l_i^2(x)$是$2n$次多项式，由[1]式设$\alpha_i(x)$=$(A_i x+B_i)l_i^2(x)$ [5]

进而有，

$$\alpha_i^{'}(x)=A_i l_i^2(x)+(A_i x+B_i)[l_i^2(x)]' \quad [6]$$

[5]式已满足$i\neq j$的$2n$个插值条件，故只需要约束A_i和B_i使之满足其他

1.6 埃尔米特插值

两个插值条件，即

$$\begin{cases}\alpha_i(x_i) = A_i x_i + B_i = 1 \\ \alpha_i'(x_i) = A_i + 2(A_i x_i + B_i) l_i'(x_i) = 0\end{cases}$$

解得，

1

$$\begin{cases}A_i = -2\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{x_i - x_j} \\ B_i = 1 - A_i x_i = 1 + 2x_i \sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \dfrac{1}{x_i - x_j}\end{cases} \quad [7]$$

将A_i和B_i代入基函数$\alpha_i(x)$中得，

$$\alpha_i(x) = [1 - 2(x - x_i)\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}] l_i^2(x) \quad [8]$$

定义$\beta_i(x)$的表达式为：$\beta_i(x)=C_i(x-x_i)l_i^2(x)$ [9]

则有，$\beta_i'(x)=C_i l_i^2(x)+C_i(x-x_i)[l_i^2(x)]'$.

[9]式已满足[2]式中除$\beta_i'(x_i)=1$之外的所有插值条件，故只需要考虑约束，

$\beta_i'(x_i)=C_i l_i^2(x_i)+C_i(x_i-x_i)[l_i^2(x_i)]'=1$,得到$C_i=1$.

所以,$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)$ [10]

于是[3]式可以写为，

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n}y_i'\beta_i(x)=\sum_{i=0}^{n}\{[1-2(x-x_i)\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}]l_i^2(x)y_i$$

$$+(x-x_i)l_i^2(x)y_i'\}$$

其中，$l_i(x)=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}, l_i'(x_i)=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$.

1.6 埃尔米特插值

两个节点的带完全导数的三次Hermite插值多项式为,

$$H_3(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0+\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1+$$

$$(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0'+(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1'$$

1.6 埃尔米特插值

带完全导数的Hermite插值多项式解法2-待定系数法：

设$H_{2n+1}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n+1}x^{2n+1}$，利用2n+2个插值条件建立以$a_0,a_1,\cdots,a_{2n+1}$为未知量的线性方程组，解出$H_{2n+1}(x)$。

1.6 埃尔米特插值

插值余项：

$$R_{2n+1}(x) = f(x) - H_{2n+1}(x) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}(x-x_0)^2 \cdots (x-x_n)^2$$

二点三次Hermite插值余项为:

$$R(x) = f(x) - H_3(x)$$

$$R(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$$

1.6 埃尔米特插值

例：求满足下列条件的二点三次埃尔米特插值多项式。

x_i	1	2
y_i	2	3
y'_i	1	-1

$$H_3(x)=\left[1-2(x-x_0)\frac{1}{x_0-x_1}\right]\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0$$
$$+\left[1-2(x-x_1)\frac{1}{x_1-x_0}\right]\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1$$
$$+(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2 y_0'$$
$$+(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2 y_1'$$

解法一：根据Hermite插值公式得到，

$$H_3(x)=-2x^3+8x^2-9x+5$$

1.6 埃尔米特插值

解法二：利用待定系数法求解，

假设$H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, H_3'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2$, 将$(x_0, y_0)=(1, 2)$，$(x_0, y_0')=(1, 1)$和$(x_1, y_1)=(2, 3)$，$(x_1, y_1')=(2, -1)$代入$H_3(x)$和$H_3'(x)$得到如下方程组，

$$\begin{cases} a_0+a_1+a_2+a_3=2 \\ a_0+2a_1+4a_2+8a_3=3 \\ a_1+2a_2+3a_3=1 \\ a_1+4a_2+12a_3=-1 \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_0=5 \\ a_1=-9 \\ a_2=8 \\ a_3=-2 \end{cases}$$

所以，$H_3(x)=5-9x+8x^2-2x^3$

1.6 埃尔米特插值

解法三：利用继承性+待定系数法求解（重点掌握），

假设$H_3(x)=N_1(x)+(ax+b)(x-x_0)(x-x_1)$,牛顿插值$N_1(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$,

将$(x_0,y_0)=(1,2)$和$(x_1,y_1)=(2,3)$，代入$N_1(x)$和$H_3(x)$得到$N_1(x)=x+1$，

$H_3(x)=ax^3+(b-3a)x^2+(2a-3b+1)x+2b+1$,再利用$(x_0,y_0')=(1,1)$，$(x_1,y_1')=(2,-1)$

代入$H_3'(x)$得到$a=-2,b=2$,最终，$H_3(x)=-2x^3+8x^2-9x+5.$

带不完全导数埃尔米特插值多项式构建

例，求一个不超过三次的Hermite插值多项式$H_3(x)$，使得$H_3(x_i)=y_i(i=0,1,2)$,

$H_3'(x_1)=y_1'$.

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	-1	0	1
y'_i	/	0	/

解法一：利用数据$(x_i,y_i)(i=1,2)$构造一个二次牛顿插值多项式，

$$N_2=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)=x$$

再令$H_3(x)=N_2(x)+a(x+1)x(x-1)$,由$H_3'(0)=0$,得到$a=1$,代入$H_3(x)$，得到

$$H_3(x)=x^3.$$

带不完全导数埃尔米特插值多项式构建

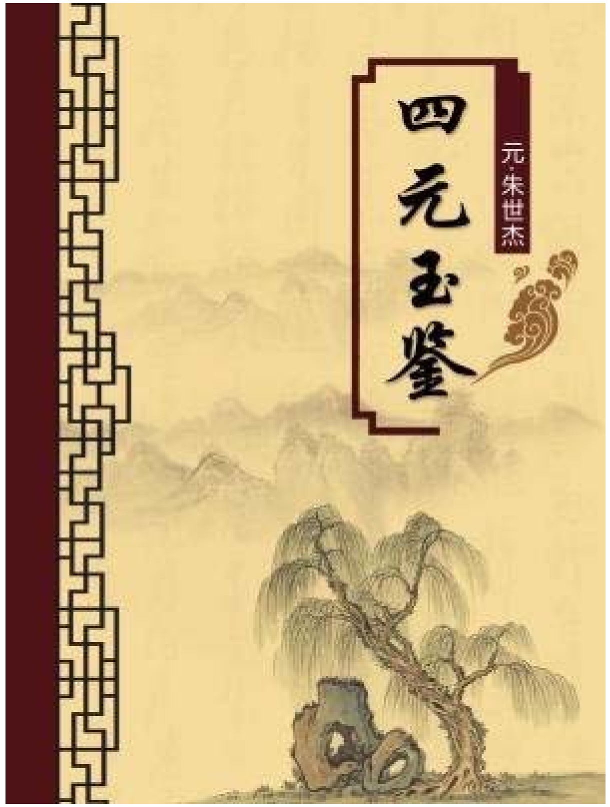
解法二：令$H_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$,利用插值条件，得到

$$
\begin{cases}
a_0-a_1+a_2-a_3=-1 \\
a_0=0 \\
a_0+a_1+a_2+a_3=1 \\
a_1=0
\end{cases}
$$

解得，$a_0=0, a_1=0, a_2=0, a_3=1$.故得，$H_3(x)=x^3$.

数学史–元代数学家朱世杰

朱世杰（1249年－1314年），字汉卿，号松庭，汉族，燕山（今北京）人氏，元代数学家、教育家。有“中世纪世界最伟大的数学家”之誉。朱世杰在当时天元术的基础上发展出“四元术”，也就是列出四元高次多项式方程组，以及消元求解的方法。他创造出“垛积法”，即高阶等差数列的求和方法，与“招差术”，即高次内插法。主要著作是《算学启蒙》与《四元玉鉴》。《四元玉鉴》中有两项重要成就，即创立了一般的高阶等差级数求和公式及等间距四次内插法公式。早于拉格朗日插值和牛顿插值数百年（1736-1813）。



数学史-元代数学家朱世杰

朱世杰生活的大时代

世界

①中世纪（Middle Ages， 大约500--1400 ）的漫漫长夜长达近千年，代表事件分别是罗马帝国的灭亡与文艺复兴。

②中世纪的数学最辉煌的地域是中国（宋元四大家）、印度（婆罗摩笈多）、波斯（海亚姆）、意大利（斐波那契）。

③翻译传播希腊与印度的数学和科学

中国

①宋元（960-1279-1368）四百年是中国古代数学的黄金时代，涌现出四位大数学家，人称“宋元四大家”：

南宋：李冶（1192-1279）、秦九韶（1202-1261）、杨辉（约1238 -1298）、元：朱世杰（1249-1314）

②四人皆有著作，成就了中国古代数学的最高峰