《地球物理计算方法》

第3章 常微分方程的数值求法

第3章　常微分方程的数值求法

3.1 欧拉（Euler）方法

3.2 改进的欧拉方法

3.3 龙格-库塔（Runge-Kutta）方法

3.4 亚当姆斯（Adams）方法

3.5 收敛性与稳定性

3.6 例题选讲

问题的提出

常微分方程初值问题：

在许多实际问题中，往往不能直接给出函数的解析表达式$y=y(x)$，但是根据已知条件，有时可列出含有待求函数$y(x)$及其导数$y'(x)$的关系式——常微分方程。

如：已知常微分方程及边界条件：

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y\big|_{x_0} = y_0 \end{cases}, (a \le x \le b)$$

求函数$y=y(x)$ 的函数表达式。

问题的提出

例如:一曲线通过点(1, 2)，且在该曲线上任一点M(x , y)处的切线斜率为 2x ，求该曲线的函数表达式。

设所求曲线为$y=y(x)$，由已知条件可得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 2 \end{cases}$$

（注：1阶方程只需要1个初始/边界条件）

问题的提出

(1) 求出一般解：

$$dy = 2xdx \Rightarrow \int dy = \int 2xdx \Rightarrow y = x^2 + c$$

c 为积分常数。

(2) 已知条件定解：

由已知条件：$\boldsymbol{y|_{x=1}=2 \rightarrow 2=1^2+c \rightarrow c=1}$

故函数解析表达式为：$\boldsymbol{y=x^2+1}$

问题的提出

存在的问题：

(1) 只有少数问题能求出$\boldsymbol{y=y(x)}$的解析表达式，对大多数微分方程要求解出函数$\boldsymbol{y(x)}$的准确表达式，计算量大、甚至不可能；

(2) 不需要完全得到$y=y(x)$，有时只需得到在某些节点处的函数近似值即可。

问题的提出

办法：数值解法－差分法

利用给定常微分方程及边界条件用数值方法解出函数$\boldsymbol{y=y(x)}$在若干离散点处函数近似值的方法，

即在区间[a, b]上有若干离散点：

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b,$$

用离散化方法求出y_k，作为解析解精确值$y(x_k)$的近似值：

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,$$

一般：$h=x_{i+1}-x_i$称为步长。

问题的提出

初值问题差分方法的特点：

步进式：即求解过程顺着节点排列的次序一步一步地向前推进。只要给出由已知信息y_n，y_{n-1}，y_{n-2} …，来计算y_{n+1}的递推公式。

求解的核心思路：设计差分格式，用离散方式来消掉导数。

3.1 欧拉（Euler）方法

$$y_n = \sqrt{1+2x\,y(x_n)}$$

1、欧拉格式： 微分的离散化—差商代替导数

在节点x_n处列出一阶方程,

$$\begin{cases} y'(x_n) = f(x_n, y(x_n)) \\ y_0 \text{已知} \end{cases}$$

将x_n处的导数$y'(x_n)$近似地用差商表示（向前差商格式）

$$y'(x_n) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

$$\Leftrightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_n, y(x_n))$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n)\,(n = 0,1,2\cdots)$$

注：这里y_n是$y(x_n)$的近似。

3.1 欧拉（Euler）方法

例题1

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \quad (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

这里取h=0.1。

解：欧拉格式具有的形式为,

$$y_{i+1} = y_i + h\left(y_i - \frac{2x_i}{y_i}\right)$$

由$y(0)$=1，可以逐步地计算出近似值：$y(0.1)$,$y(0.2)$…。

3.1 欧拉（Euler）方法

该微分方程有解析表达式：$y = \sqrt{1+2x}$

可以将x=0.1,0.2代入计算准确值：y(0.1),y(0.2)…

表 3 - 1

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0 .1	1 .100 0	1 .095 4	0 .6	1 .509 0	1 .483 2
0 .2	1 .191 8	1 .183 2	0 .7	1 .580 3	1 .549 2
0 .3	1 .277 4	1 .264 9	0 .8	1 .649 8	1 .612 5
0 .4	1 .358 2	1 .341 6	0 .9	1 .717 8	1 .673 3
0 .5	1 .435 1	1 .414 2	1 .0	1 .784 8	1 .732 1

计算值　理论值

3.1 欧拉（Euler）方法

p阶精度：一种数值方法的精度是p阶的，如果其局部截断误差为 $O(h^{p+1})$

(补充：主局部截断误差)

截断误差：

按泰勒公式的展开：

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + hy'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi), \quad x_i < \xi < x_{i+1}$$

欧拉公式：

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y(x_i)) \\ &= y(x_i) + hy'(x_i) \end{aligned}$$

欧拉公式的截断误差:

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{h^2}{2}y''(\xi) \longrightarrow \text{欧拉格式是1阶精度}$$

3.1 欧拉（Euler）方法

2、隐式Euler方法： 向后差商公式。

$$y'(x_{n+1}) \approx \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = \frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h}$$

$$\Leftrightarrow y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + h \cdot f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))$$

$$\Rightarrow \underline{y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_{n+1}, y_{n+1})}$$

y_0已知

特点： 非显式格式，计算比较困难，需要迭代解方程；

代数精度：一阶；

3.1 欧拉（Euler）方法

3、Euler两步格式

用中心差商表示：

$$y'(x_n) \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{x_{n+1} - x_{n-1}} = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(x_n, y_n)$$

特点：两步法，需要已知 y_0，y_1；

二阶方法，$R = y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^3}{3} y'''(\xi)$

3.2 改进的欧拉方法

1、梯形格式

从**数值积分**角度理解欧拉公式，

将常微分方程：

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

在区间$[x_k, x_{k+1}]$上求积分如下：

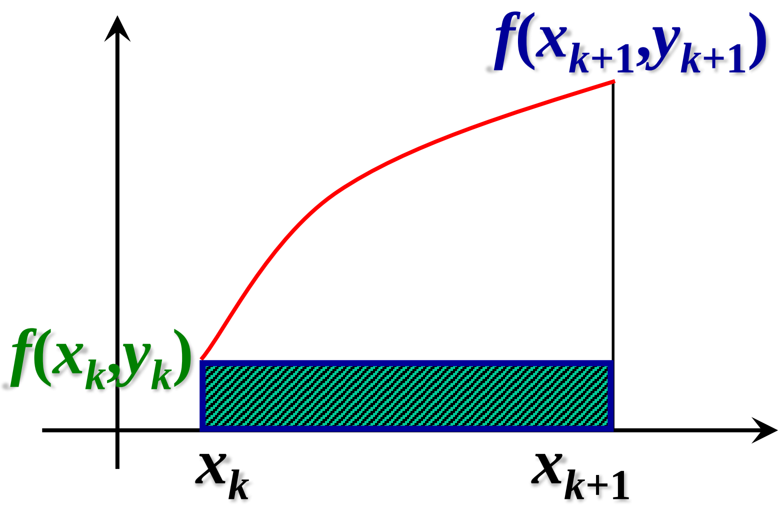
$$\Rightarrow dy = f(x, y)dx$$

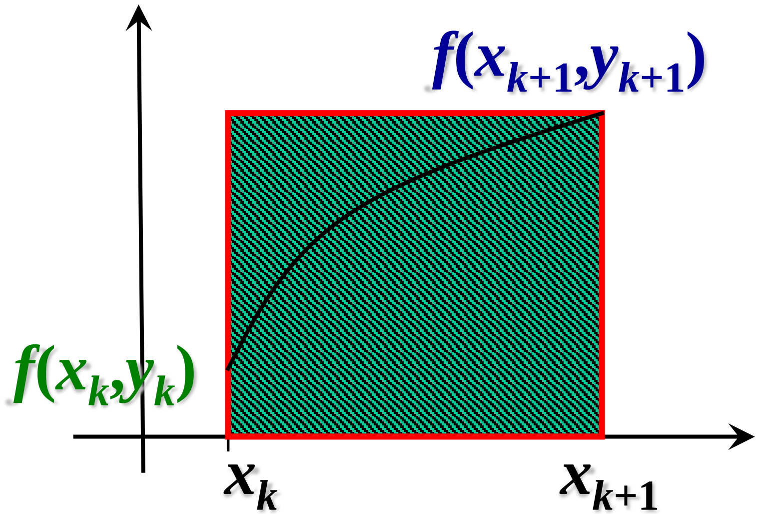
$$\Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} dy = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx \Rightarrow y_{k+1} - y_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)dx$$

即：通过数值积分法，从$y|_{x0}=y_0$逐渐求出y_k，以此作为$y(x_k)$的近似值。

3.2 改进的欧拉方法

（1）用矩形公式作近似计算—欧拉公式：





取小矩形面积：

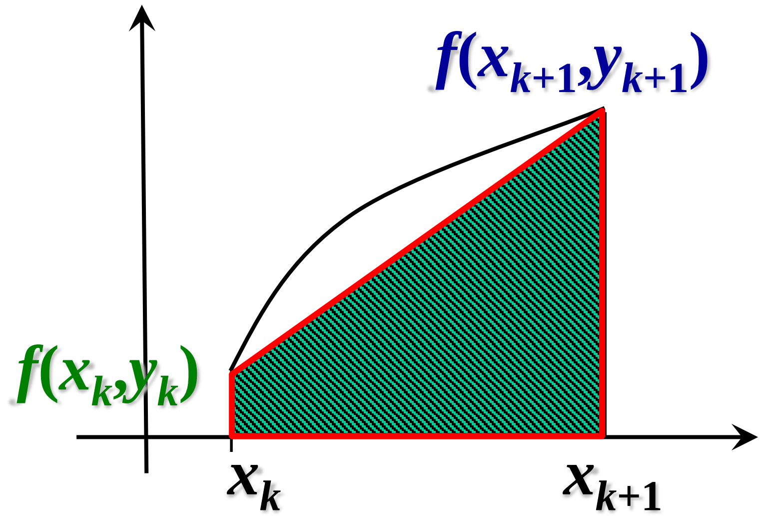
$y_{k+1}-y_k \approx (x_{k+1}-x_k)f(x_k, y_k)=hf(x_k, y_k)$　显式欧拉公式

取大矩形面积：

$y_{k+1}-y_k \approx (x_{k+1}-x_k)f(x_{k+1}, y_{k+1})=hf(x_{k+1}, y_{k+1})$ 隐式欧拉公式

3.2 改进的欧拉方法

（2）用梯形积分作近似计算：



$$y_{k+1}-y_k \approx \frac{h}{2}[f(x_k,y_k)+f(x_{k+1},y_{k+1})]$$ 隐式公式

——此式称为**梯形格式**。

3.2 改进的欧拉方法

2、改进的Euler方法

欧拉方法： 显式算法，其计算量小，但精度低；

梯形方法： 提高了精度，但它是一种隐式算法，需要借助于迭代过程求解，计算量大。

实际应用： 将梯形公式与显式欧拉公式结合使用：

（1）欧拉方法求得一个初步的近似值：

$$y_{n+1}^{(0)} = y(x_n) + hy'(x_n)$$

（2）将近似值代入梯形公式作迭代计算：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})]$$

3.2 改进的欧拉方法

显式与隐式的结合建立预报-校正系统：

$$\begin{cases} \text{预报} \quad \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ \text{校正} \quad y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] \end{cases}$$

用**预估-校正公式**求解常微分方程的方法称为——**<u>改进的欧拉法</u>**。

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

平均化形式

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_c = y_n + hf(x_{n+1}, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

改进欧拉法的计算流程

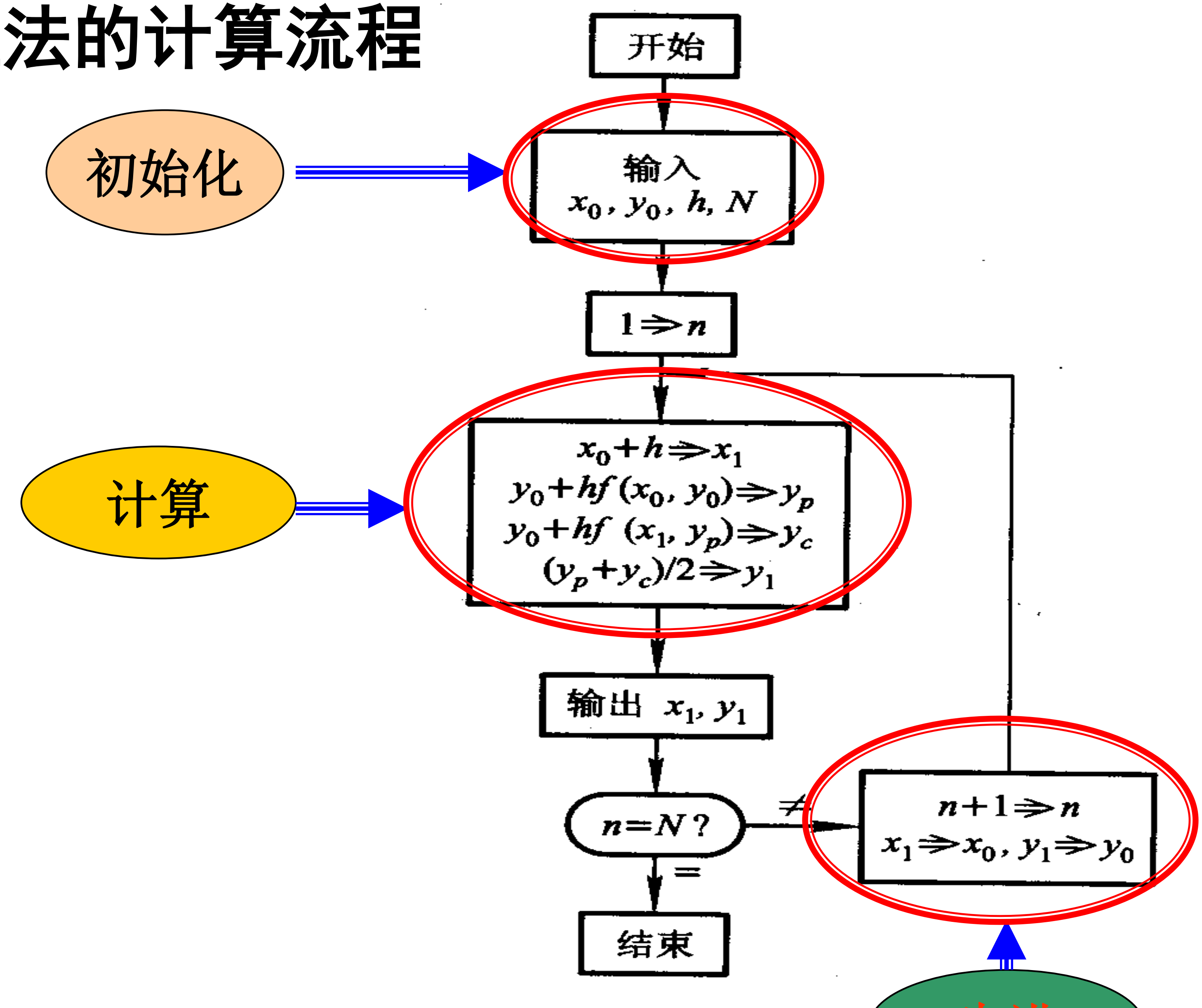


图 3－2

3.2 改进的欧拉方法

例题2

$$y' = y - \frac{2x}{y} \quad (0 < x < 1)$$

$$y(0) = 1$$

解：求解初值问题的改进的欧拉格具有形式，

$$\begin{cases} y_p = y_i + h\left(y_i - \dfrac{2x_i}{y_i}\right) \\ y_c = y_i + h\left(y_p - \dfrac{2x_{i+1}}{y_p}\right) \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \end{cases}$$

3.2 改进的欧拉方法

表 3-2

x_n	y_n	$y(x_n)$	x_n	y_n	$y(x_n)$
0.1	1.095 9	1.095 9	0.6	1.486 0	1.483 2
0.2	1.184 1	1.183 2	0.7	1.552 5	1.549 2
0.3	1.266 2	1.264 9	0.8	1.616 5	1.612 5
0.4	1.343 4	1.341 6	0.9	1.678 2	1.673 3
0.5	1.416 4	1.414 2	1.0	1.737 9	1.732 1

补充：差分格式的精度分析

定义：设差分格式具有m阶精度，对于一切次数小于等于m的多项式是准确的，而对于次数为m+1的多项式是不准确的，则称该差分格式具有m阶代数精度（简称精度）。

等价定义：设差分格式 $y_{n+1} \approx y_n + hy'(x_n)$ 对于 $1, x, x^2, \cdots, x^m$ 是准确的，而对于 x^{m+1} 是不准确的，则称该差分格式具有m阶代数精度。

补充：差分格式的精度分析

例如：Euler格式

$y=1$时 左边＝右边＝1

$y=x$时 左边＝右边＝x_n+h

$y=x^2$时 左边＝$y_{n+1} \approx x_{n+1}^2 = (x_n + h)^2$

右边＝$y_{n+1} \approx x_n^2 + 2hx_n$

左边≠右边

Euler格式具有一阶代数精度。

练习：梯形格式具有几阶代数精度？

小结：Euler方法的分类

Euler方法分为：显式格式和隐式格式。

显式格式： Euler格式（1阶）， Euler两步格式（2阶）

特点：计算量小，稳定性差；

隐式格式：隐式Euler格式（1阶）， 梯形格式（2阶）

特点：迭代法求解，计算量大，稳定性好；

综合应用： 改进的Euler格式（预报校正系统）（2阶）

即：显式格式得到预报值，隐式格式迭代一次得到校正值。

3.3 龙格-库塔方法

1、龙格-库塔方法设计思想

如果 $f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，满足，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

微分中值定理

差商的定义：

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}=y'(\xi),\xi\in(x_n,x_{n+1})$$

于是有

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hf(\xi,y(\xi))$$

其中 $k^*=f(\xi,y(\xi))$ **称作区间** $[x_n,x_{n+1}]$ **上的平均斜率。**

3.3 龙格-库塔方法

问题：

计算近似值 $y(x_{n+1})$ 的关键是如何选择算法来确定平均斜率 k^*？

对于**欧拉格式**，

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

取点 x_n 的斜率 $k^* = f(x_n, y_n)$ 作为区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的平均斜率；

精度低!

3.3 龙格-库塔方法

改进的欧拉格式，

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_n + hf(x_n, y_n))]$$

于是：

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$$

其中预估-校正

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1) \end{cases}$$

取点x_n和x_{n+1}的斜率值k_1 和k_2 的算术平均值作为区间$[x_n, x_{n+1}]$上的平均斜率.

3.3 龙格-库塔方法

Runge-Kutta算法的基本思想：

在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上取几个点处的斜率，然后计算它们的加权平均值作为$[x_n, x_{n+1}]$上的平均斜率 k^*，以此来构造更高阶精度的格式，这就是Runge-Kutta 算法的基本思想。

3.3 龙格-库塔方法

2、二阶Runge-Kutta

$\forall x_{n+p} \in [x_n, x_{n+1}]$ 有

$$x_{n+p} = x_n + ph, \quad 0 < p \leq 1$$

条件

令 x_n 和 x_{n+p} 处的斜率值分别为 k_1 和 k_2 。其中：$k_1 = f(x_n, y_n)$

问题

如何确定 k_2 ，使得所构造的格式具有二阶精度?

3.3 龙格-库塔方法

采用预报-校正格式：

（1）先用显式欧拉格式来预报x_{n+p}点的函数值y_{n+p}，然后取该点的斜率值为k_2，

$$y_{n+p} = y_n + phk_1$$

$$k_2 = f(x_{n+p}, y_{n+p})$$

（2）用k_1和k_2的加权平均来计算平均斜率 k^*，

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2] \\ k_1 \quad = f(x_n, y_n) \\ k_2 \quad = f(x_{n+p}, y_n + phk_1) \end{cases}$$

3.3 龙格-库塔方法

于是，有**二阶Runge-Kutta**格式，

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)k_1 + \lambda k_2] \\ k_1 \quad = f(x_n, y_n) \\ k_2 \quad = f(x_{n+p}, y_{n+p}) \end{cases}$$

其中 λ, p 为待定参数。

希望合理的确定λ、p，以提高精度。

3.3 龙格-库塔方法

定理： **当** $\lambda p = \dfrac{1}{2}$ **时，Runge-Kuta格式具有二阶精度。**

采用精度分析方法：对$y=x^2$能够精确成立。

特别地，当 $p = 1, \lambda = \dfrac{1}{2}$ **时，有**

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[k_1 + k_2] \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_n + hk_1) \end{cases}$$

改进欧拉格式

3.3 龙格-库塔方法

特别地，当 $p=\dfrac{1}{2},\lambda=1$时，有

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hk_2 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \end{cases}$$

变形的欧拉格式

3.3 龙格-库塔方法

3、三阶龙格-库塔方法（了解）

$\forall x_{n+q}, x_{n+p} \in [x_n, x_{n+1}]$ 有x_{n+p}, x_{n+q}。

$$x_{n+p} = x_n + ph, \quad 0 < p \leq 1 \qquad x_{n+q} = x_n + qh, \quad p \leq q \leq 1$$

条件

令x_n，x_{n+p}，x_{n+q} 处的斜率值分别为k_1,k_2和k_3 。

其中：$k_1 = f(x_n, y_n)$;

问题

如何确定k_2,k_3，使其加权平均得到近似的K*，进而使得所构造的格式具有三阶精度?

3.3 龙格-库塔方法

取k_1,k_2和k_3的加权平均为k^*，计算格式为：

$$y_{n+1}=y_n+h[(1-\lambda-\mu)k_1+\lambda k_2+\mu k_3]$$

其中，λ,μ 为待定参数。

合理的确定 λ,μ ，以使y_{n+1}具有3阶精度。

3.3 龙格-库塔方法

采用逐步预报校正格式： 首先用k_1和k_2的加权平均来预报y_{n+q}及斜率k_3 (k_1, k_2用前面的方法计算）：

$$y_{n+q} = y_n + qh[(1-\alpha)k_1 + \alpha k_2]$$

$$k_3 = f(x_{n+q}, y_{n+q})$$

然后，采用泰勒展开法选择参数λ, μ, p, q，保证上述格式具有三阶精度。

3.3 龙格-库塔方法

三阶Runge-Kutta格式

根据预报校正，得到下列差分格式：

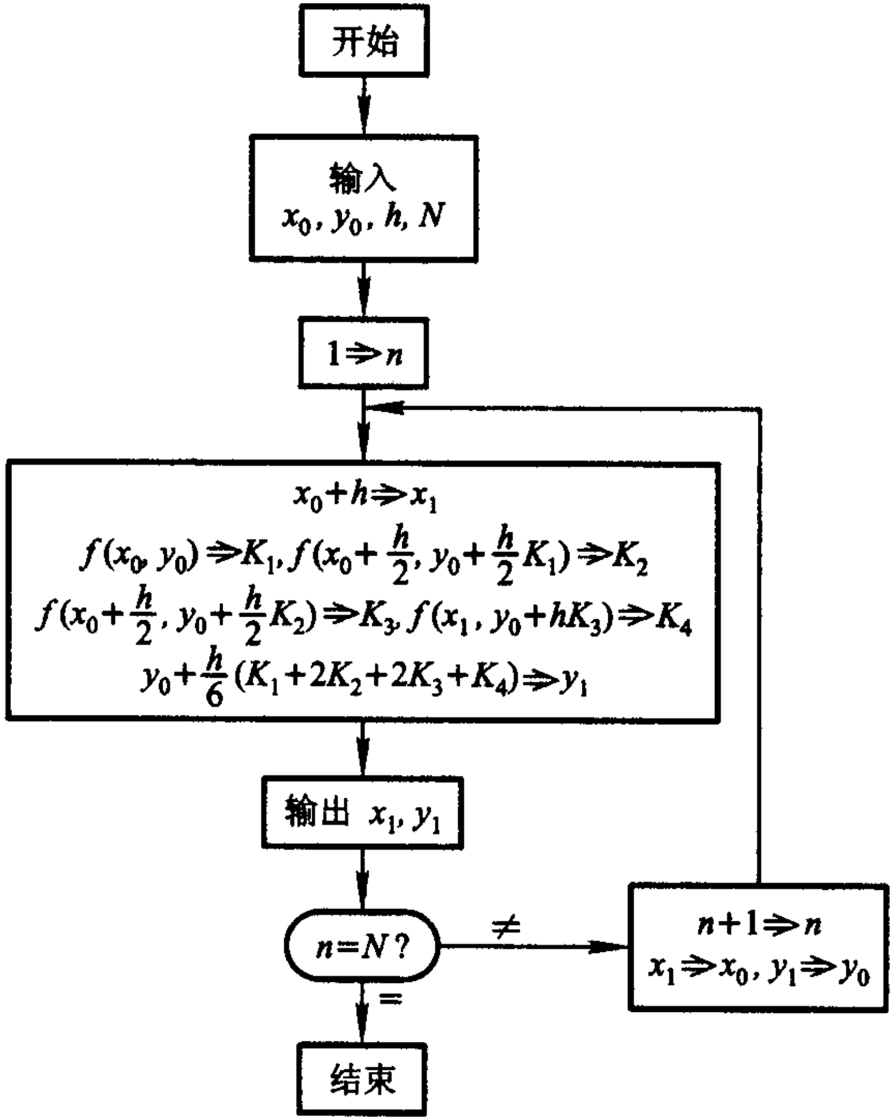
$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\
k_1 \quad = f(x_n, y_n) \\
k_2 \quad = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \\
k_3 \quad = f(x_{n+1}, y_n + h(-k_1 + 2k_2))
\end{cases}
$$

3.3 龙格-库塔方法

4、四阶龙格-库塔方法（了解）

按照上面的做法的思路，经过较复杂的数学推理和计算，可以导出四阶龙格—库塔格式，这里给出一个较有用的四阶格式：

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 = f(x_n, y_n) \\
k_2 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}k_1) \\
k_3 = f(x_{n+\frac{1}{2}}, y_n + \dfrac{h}{2}k_2) \\
k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3)
\end{cases}
$$



四阶龙格-库塔格式计算流程图

3.4 亚当姆斯方法

龙格-库塔方法的实质：

就是通过几个点(x_{n+p}，x_{n+q})上的预报斜率值估算需求点x_{n+1}的斜率值。而没有用已给点上的斜率值，从而造成了重复计算。

为了**充分利用前面已知点(x_{n-1}，x_{n-2},……)的斜率值信息来构造求解格式**，提出另一类方法——亚当姆斯（*Adams*）方法来解决这个问题。

3.4 亚当姆斯方法

利用 $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0$ 的信息，得到n阶的显式及隐式

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=0}^{n}\lambda_i y'_{n-i} \quad , \quad y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=-1}^{n}\lambda_i y'_{n-i}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

特别地，*Euler* 格式与隐式 *Euler* 是一阶 *Adams* 方法.

基本思想： 利用x_n，x_{n-1}，x_{n-2} …上的斜率值来减少计算y_{n+1}的计算量或提高精度，$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h \cdot f(\xi, y(\xi))$ 。

1、二阶显式Admas方法

设计计算格式，

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[(1-\lambda)y_n' + \lambda y_{n-1}'] \\ y_n' = f(x_n, y_n) \\ y_{n-1}' = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

思路：取合理的λ，使上述格式具有二阶精度—二阶Adams格式。

3.4 亚当姆斯方法

对计算格式的右端项进行展开,得到：

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) - \lambda h^2 y''(x_n) + \ldots$$

注：$y'_{n-1} = y'(x_{n-1}) = y'(x_n - h)$的泰勒展开.

将上式与y_{n+1}的泰勒展开式进行对比：

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + \ldots$$

选取参数$\lambda=-1/2$，则该格式具有二阶精度。

补充：y'_{n+1}和y'_{n-1}的泰勒展开。

3.4 亚当姆斯方法

这样导出的计算格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(3y'_n - y'_{n-1})$$

称之为二阶$Adams$格式. 称之为二阶$Adams$格式.

类似地可以导出三阶$Adams$格式:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}(23y'_n - 16y'_{n-1} + 5y'_{n-2})$$

3.4 亚当姆斯方法

四阶*Adams*格式

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55y'_n - 59y'_{n-1} + 37y'_{n-2} - 9y'_{n-3})$$

其中 $y'_{n-k} = f(x_{n-k}, y_{n-k})$

◆它们都是显式的，算法简单。

◆不足： 只利用了n,n-1,…近似n+1点的导数，精度低，可加入n+1点的导数信息，即采用隐格式算法来提高计算精度。