

2022年秋季专业基础课程

场 论



授课教师：彭淼 谭茂金
地球物理与信息技术学院



媒质中的稳定电场

第2讲 稳定电场的基本规律

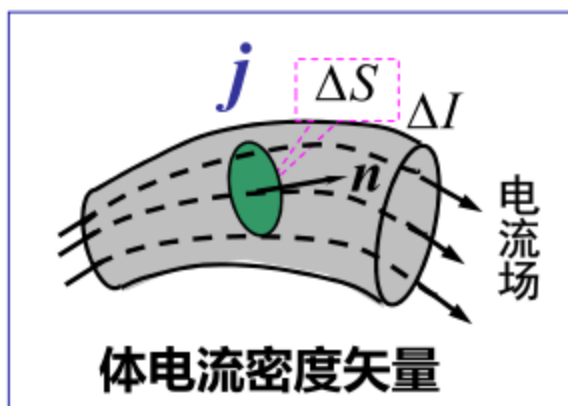
第3讲 边界条件和界面电荷

第4讲 唯一性定理和电像法



前情提要

➤ 媒质中稳定电场的基本规律



$$j = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

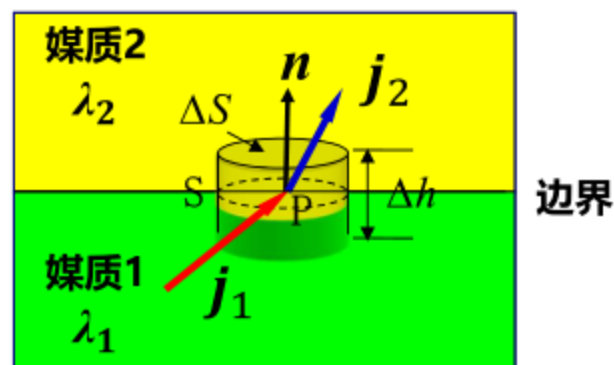


点式欧姆定律

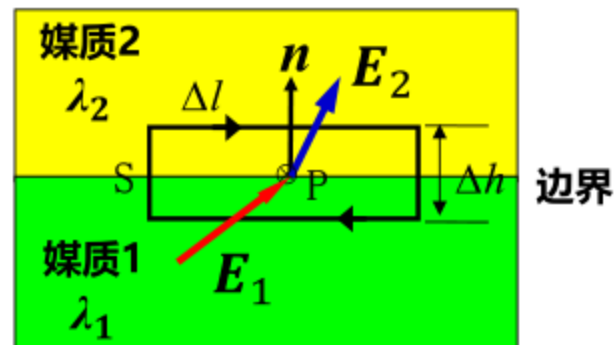
$$j = \lambda E$$



边界条件



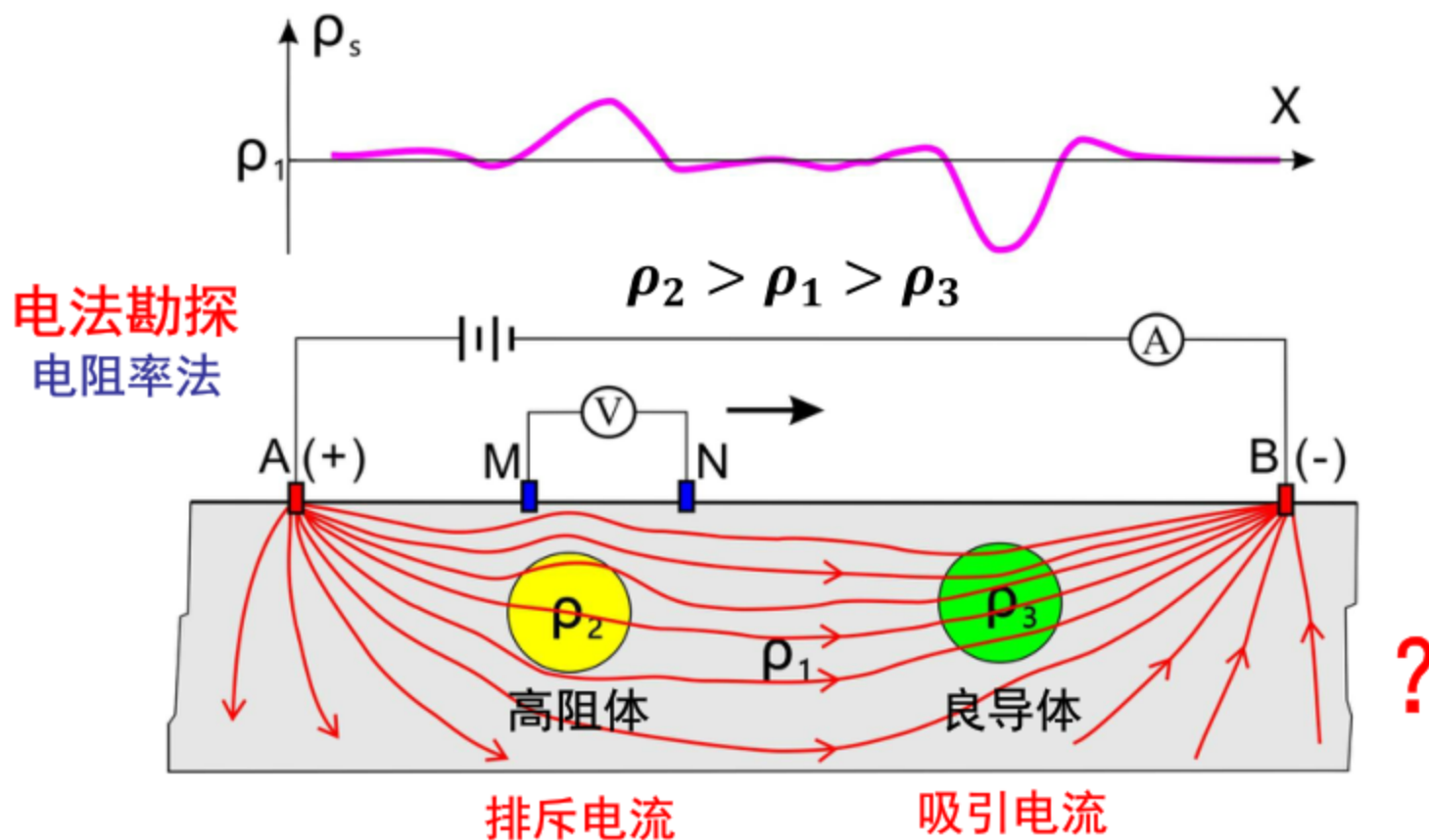
$$j_{2n} = j_{1n}$$



$$E_{2t} = E_{1t}$$

问题引出

“为什么良导吸引电流，高阻排斥电流？”



1 电流线的折射定律

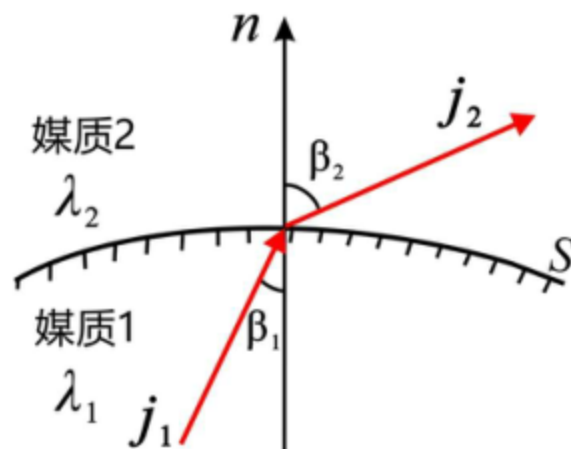
1.1 折射定律的推导

由第一边界条件 $j_{2n} = j_{1n}$ 和点式欧姆定律：

$$\lambda_2 E_{2n} = \lambda_1 E_{1n}$$

再利用第二边界条件 $E_{2t} = E_{1t}$ ，得：

$$\lambda_2 \frac{E_{2n}}{E_{2t}} = \lambda_1 \frac{E_{1n}}{E_{1t}}$$



如图， β_1 是 j_1 与法线 n 反方向的夹角， β_2 是 j_2 与法线 n 的夹角，分别称为入射角和折射角，上式可写为：

$$\lambda_2 \cot \beta_2 = \lambda_1 \cot \beta_1$$

上式称为电流线的**折射定律**，电流线过媒质界面时发生**偏折**。

1 电流线的折射定律

1.2 折射定律的性质

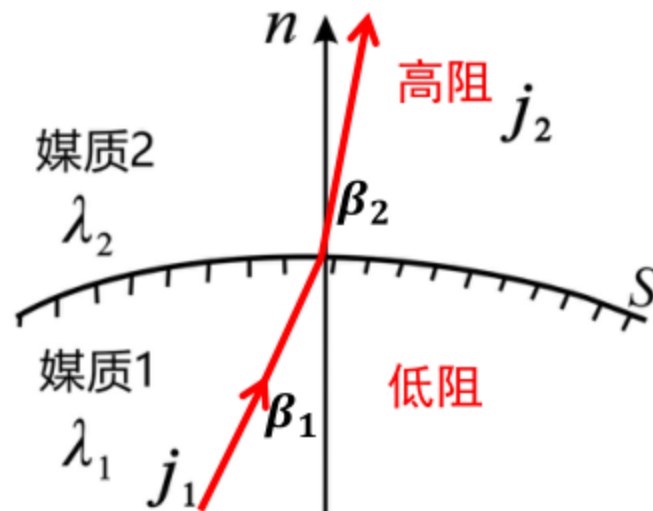
$$\lambda_2 \cot \beta_2 = \lambda_1 \cot \beta_1$$



$$\lambda_1 / \lambda_2 = \tan \beta_1 / \tan \beta_2$$



$$\lambda \propto \beta$$



- 如果 $\lambda_2 > \lambda_1$ ，那么 $\beta_2 > \beta_1$

➤ **性质1：** 电流从高阻体流向低阻体，电流线将偏离法线。

- 如果 $\lambda_2 < \lambda_1$ ，那么 $\beta_2 < \beta_1$

➤ **性质2：** 电流从低阻体流向高阻体，电流线将靠近法线。

1 电流线的折射定律

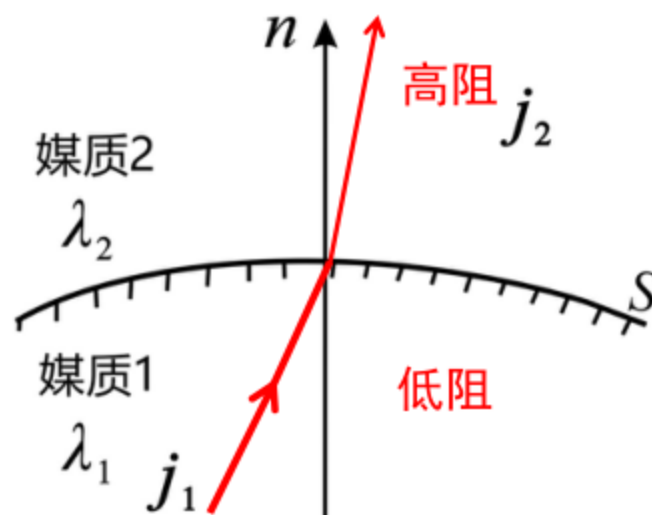
1.2 折射定律的性质

- 电流密度过界面时满足： $j_{2t} \neq j_{1t}$, $j_2 \neq j_1$

在媒质交界面上 j_2 和 j_1 的关系：

$$j_2 = j_1 \left[(\cos\beta_1)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin\beta_1 \right)^2 \right]^{1/2}$$

- 如果 $\lambda_2 > \lambda_1$ ，那么 $j_2 > j_1$
从高阻体流向低阻体，电流密度增大。
- 如果 $\lambda_2 < \lambda_1$ ，那么 $j_2 < j_1$
从低阻体流向高阻体，电流密度减小。



➤ **性质3：**电流过界面时方向有变化，电流密度的大小也有突变。

2 媒质交界面上的电荷

2.1 界面电荷的分布

- 过媒质交界面**电场强度**的变化 **界面电荷存在吗？**

界面上电流密度的法线分量连续，由点式欧姆定律可知电场强度的**法向分量**必定**不连续**。

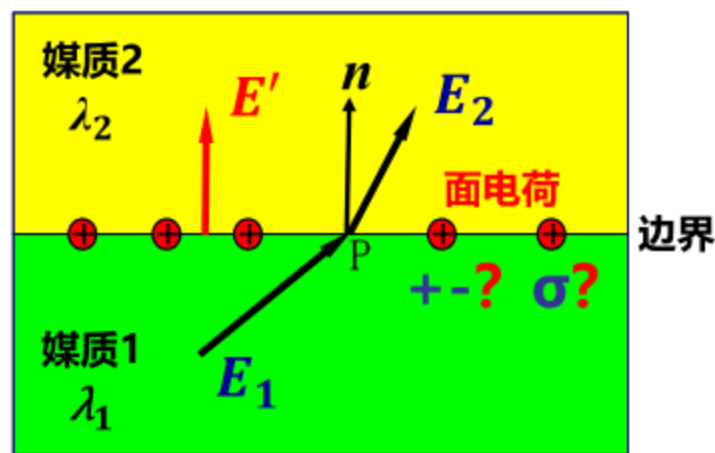
$$j_{2n} = j_{1n} \quad \Rightarrow \quad E_{2n} \neq E_{1n}$$

电场强度法向分量突变是因为产生了一个**附加电场**：

$$E' = E_{2n} - E_{1n} \neq 0$$

➤ 媒质交界面上**存在累积的面电荷**。

- 问题：① 累积电荷的正负号？
② 界面电荷如何分布？



2 媒质交界面上的电荷

2.1 界面电荷的分布

由稳定电场中电场与电荷面密度的关系：

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \sigma dS$$

采用第一边界条件的推导方法，可得：

$$(\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n}) \cdot \Delta S = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot \Delta S$$

即 $\sigma = \varepsilon_0 (\mathbf{E}_{2n} - \mathbf{E}_{1n})$

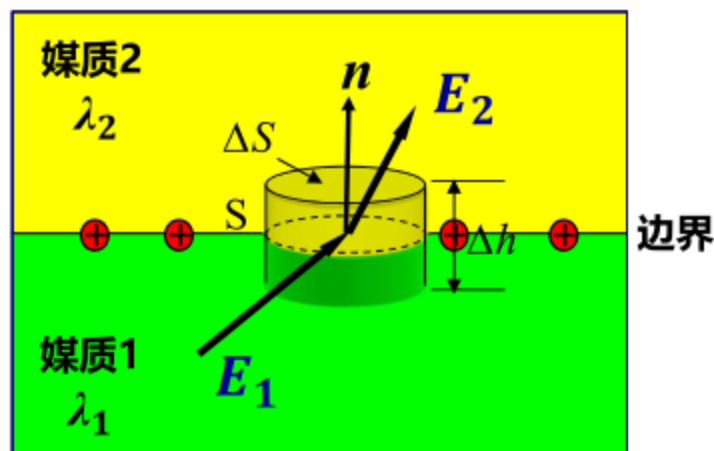
在界面上 $j_{2n} = j_{1n} = j_n$

界面电荷的分布为

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) j_n$$

穿过小圆柱体的通量 φ

$$\varphi = \mathbf{E}_{2n} \cdot \Delta S + \mathbf{E}_{1n} \cdot (-\Delta S)$$

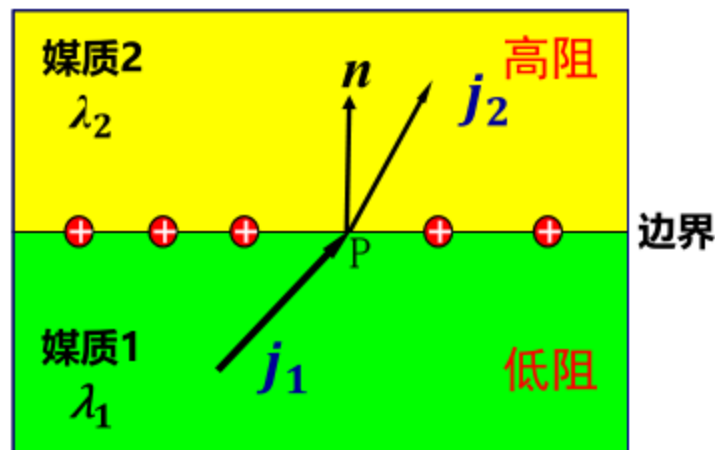


2 媒质交界面上的电荷

2.2 界面电荷的性质

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) j_n$$

- 如果 $\lambda_2 > \lambda_1$ ，那么 $\sigma < 0$
从高阻体流向低阻体，界面电荷为**负**；
- 如果 $\lambda_2 < \lambda_1$ ，那么 $\sigma > 0$
从低阻体流向高阻体，界面电荷为**正**。



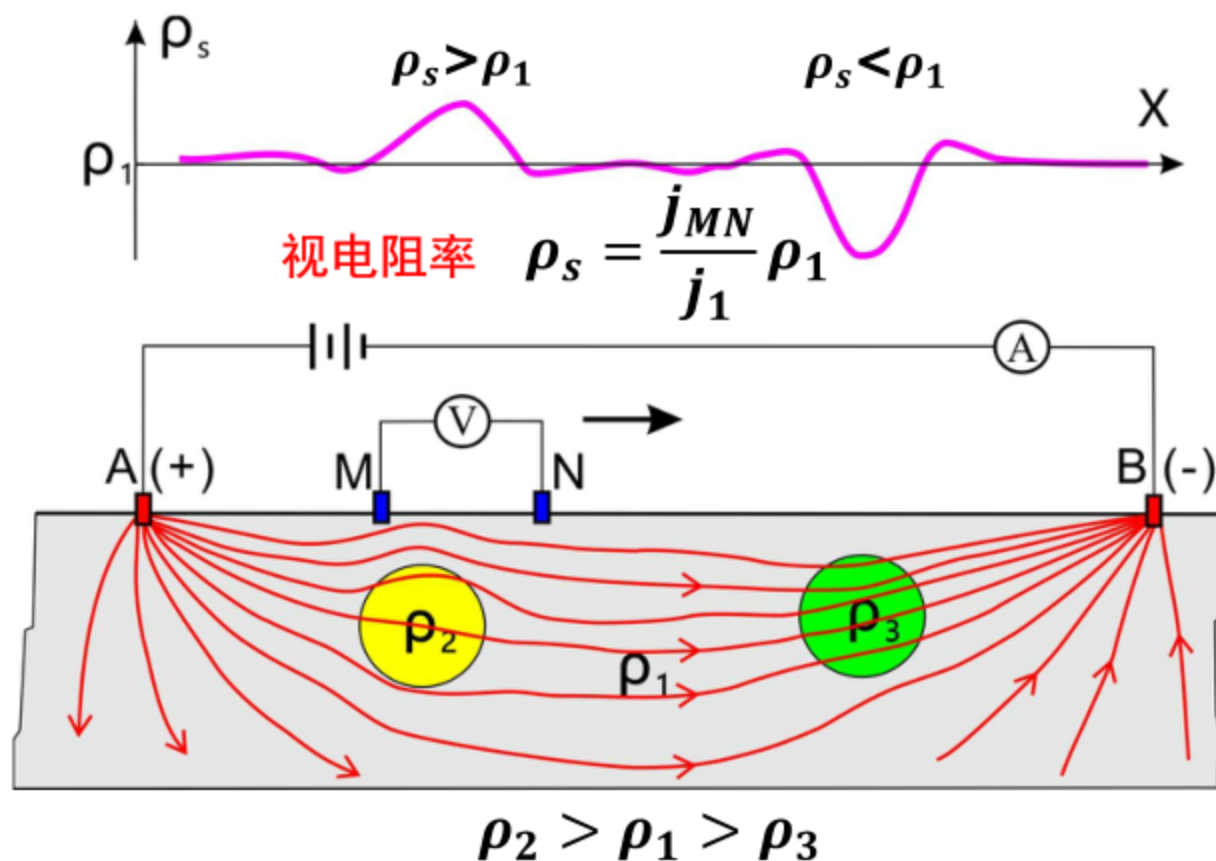
➤ 性质1：稳定电场的界面电荷与媒质介电常数无关，只与 λ 和 j_n 有关；

➤ 性质2：电流从**高阻体流向低阻体** ($\lambda_2 > \lambda_1$)，媒质界面带**负电荷**；

➤ 性质3：电流从**低阻体流向高阻体** ($\lambda_2 < \lambda_1$)，媒质界面带**正电荷**。

思考与测验

课后思考：为什么在异常体上方测量得到的电阻率值并不等于均匀大地的真实电阻率？





3 电极上的电荷

3.1 电极上的电荷和全电荷量

设电极埋在电导率为 λ 的媒质之中，电极本身为良导体，其电导率 λ_m 比周围媒质的电导率 λ 大得多，即 $\lambda_m \gg \lambda$ 。

如果是通电流强度为 I 的正电极， j_n 为正值，因此电极表面上的电荷密度为

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 j_n}{\lambda} > 0$$

表示正电极上所带电荷为正电荷。

电极上全电荷量为

$$Q = \int_S \sigma dS = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} \int_S j_n dS$$

即

$$Q = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} I$$



3 电极上的电荷

如果是负电极，同样可知其所带电荷为负

$$-Q = \frac{\varepsilon_0}{\lambda} (-I)$$

总之，电流从正电极流入媒质，正电极上带正电荷；电流从媒质流入负电极，负电极上带负电荷。

3.2 点电源的场强公式

电极上电荷量值与电流强度成正比，与媒质的电导率成反比。此电荷量与电极的大小形状无关，也与媒质的介电常数 ε 无关。已知电极上所带的电荷量，那么点源所直接产生的电场就可以由点电荷的公式算出

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \mathbf{r} \quad \longrightarrow \quad E = \frac{I}{4\pi\lambda r^3} \mathbf{r}$$



4 媒质体的边界和边界条件

4.1 媒质体的边界

实验室水槽中水的边界包括水泥底、水泥壁和水的交界面以及空气和水的交界面，这都是媒质(水)和介质的交界面。如果再将电极、金属体、固态媒质体浸入水中，那么水的边界就包括四种交界面，即水的边界 = 水与介质的交界面 + 水与良导体的交界面 + 水与电极的交界面 + 水与别种媒质的交界面。

一般来说，任何媒质体的边界不外乎是以下几种交界面的某种组合：

(媒 -- 介质) S_a , (媒 -- 良导体) S_b ,
(媒 -- 电极) S_c , (媒 -- 媒) S_d ,
(无限远界面) S_0 。

4.2 媒质体的边界条件

稳定电场的两个边界条件为

$$j_{2n}|_s = j_{1n}|_s \text{ (第一边界条件)}$$

$$U_2|_s = U_1|_s \text{ (第二边界条件, 偶层除外)}$$



4 媒质体的边界和边界条件

对于上述边界条件，不同界面表现出各自的特殊性，归纳如下：

(1) 在媒质与介质的交界面 S_a 上，第一边界条件为

$$j_n|_{S_a} = 0$$

(2) 在媒质与良导体的交界面 S_b 上，第二边界条件为

$$U|_{S_b} \approx \text{未知常数}$$

(3) 在媒质与电极的交界面 S_c 上，第二边界条件为

$$U|_{S_c} \approx \text{未知常数或已知常数，或已知电流密度}$$



课堂总结

➤ **依据：**点式欧姆定律+两个边界条件

➤ **重点**

- 折射定律： $\lambda_2 \cot \beta_2 = \lambda_1 \cot \beta_1$

- 折射定律性质： $j_2 = j_1 \left[(\cos \beta_1)^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \sin \beta_1 \right)^2 \right]^{1/2}$

- 界面电荷分布： $\sigma = \epsilon_0 \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) j_n$

➤ **难点：**根据不同媒质物性判断电流过界面后**性质**的变化

- 从**高阻**流向**低阻**，电流线**偏离**法线，电流密度**增大**，界面带**负**电荷；

- 从**低阻**流向**高阻**，电流线**靠近**法线，电流密度**减小**，界面带**正**电荷。



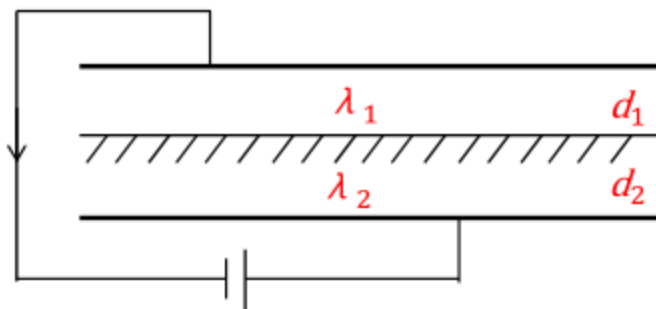
课堂测验：一、判断题6题；二、计算题1题

一、判断题（共6题，60分）

- 1、两种媒质的交界面上电流密度的法线分量连续，电场强度的法线分量也连续。
- 2、电流线过媒质界面时会发生偏折，如果偏离法线说明是从低阻体流向高阻体。
- 3、电流线过媒质界面时其方向和大小都会发生变化，流出界面的电流密度大小仅与流入界面的电流密度及其入射方向有关。
- 4、媒质的交界面上存在积累的面电荷，若界面电荷是正电荷，说明是从低阻流到高阻。
- 5、在媒质与空气的交界面上，电流密度的法线分量为0。
- 6、通电流的水槽中放进一个金属球体，那么金属球内的电场强度近似为0。

二、计算题（共1题，40分）

- 1、两大平行金属平板之间，充满两层不同的均匀媒质，其电导率分别是 λ_1 和 λ_2 ，厚度分别为 d_1 和 d_2 ，电流强度为 I ，每板的面积径为 S ，其线度比板间距离大得多。求：（1）媒质中的电流密度。（2）媒质中的电场强度。（3）界面上的电荷密度。



谢谢！

