

《地球物理计算方法》

第3章 常微分方程的差分法



1、收敛性

1. 定义:对于任何固定的 $X_n = X_0 + nh$,当步长 $h \to 0$ 时,有数值

解 $y_n \rightarrow$ 精确解 $y(x_n)$,则称此方法收敛.

以欧拉公式为例(证明见板书):

(1) (P97)对于初值问题(解存在且唯一):

$$y' = f(x, y)$$
 $y(x_0) = y_0$

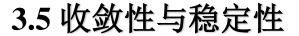
如果存在实数L>0,使得,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \quad \forall y_1, y_2 \in R$$

f关于L满足利普希茨条件,L为f的利普希茨常数。



欧拉格式的收敛性见板书, P112.





2、稳定性

定义:如果一种差分方法在某个节点 x_n 上的值 y_n 有大小为 δ 的扰动时,于其后的各节点 x_m (m>n)上的值 y_m 产生的偏差都不大于 δ 则称这种方法是稳定的。

为简单起见,考察下列模型

$$y' = \lambda y$$
, $(\lambda < 0)$



1、显式Euler格式的稳定性

设模型方程 $y' = \lambda y$

Euler公式:
$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(\lambda y_n)$$
$$= (1 + h\lambda)y_n$$

设节点值 y_n 上有大小为 ε_n 的扰动,此误差的传播使节点值 y_{n+1} 产生大小为 ε_{n+1} 的扰动值。



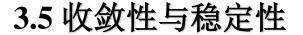
若Euler格式的计算过程不再引入新的误差,则

即

$$y_{n+1} + \mathcal{E}_{n+1} = (1+h\lambda)(y_n + \mathcal{E}_n)$$
 误差方程
$$\mathcal{E}_{n+1} = (1+h\lambda)\mathcal{E}_n$$

所以要使 $|\mathcal{E}_{n+1}| \leq |\mathcal{E}_n|$ 需满足 $|1+h\lambda| \leq 1$,即 $0 < h \leq -\frac{2}{\lambda}$

此时Euler方法是稳定的.这表明Euler方法是条件稳定的.





例 对下列初值问题,求欧拉方法的稳定性条件

$$\begin{cases} y' = -20y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解: 因为 $\lambda = -20$,所以取步长为:

$$0 < h \le -\frac{2}{\lambda} = -\frac{2}{-20} = 0.1$$

0<h<=0.1时欧拉方法是条件稳定。





2、隐式Euler格式的稳定性

模型方程 $y' = \lambda y$ 的计算表达式为,

$$y_{n+1} = y_n + h(\lambda y_{n+1}), \quad y_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} y_n$$

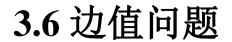
设节点值 y_n 上有大小为 \mathcal{E}_n 的扰动,此误差的传播使节点值 y_{n+1} 产生大小为 \mathcal{E}_{n+1} 的扰动值,若计算过程不再引进新的误差,则

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} (y_n + \varepsilon_n) \quad \text{if } \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{1 - h\lambda} \varepsilon_n$$



由于
$$\lambda < 0$$
,则恒有 $\left| \frac{1}{1-h\lambda} \right| \le 1$,故恒有 $\left| \mathcal{E}_{n+1} \right| \le \left| \mathcal{E}_n \right|$ 。

因此,隐式Euler格式是绝对稳定的(无条件稳定的)(对任何h>0)。





• 数学物理方程的定解问题:

• 微分方程的定解条件分为:

初始条件: $u(t = t_0) = u_0$

边界条件: $u(x=x_0)=u_0$





考察如下边值问题

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \ a < x < b \\ y(a) = \alpha, y(b) = \beta \end{cases}$$

差商直接逼近导数, 取

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h) - y(x-h)}{2h}$$

$$y''(x) = [y'(x)]' \approx \frac{y'(x+h) - y'(x)}{h} = \frac{\frac{y(x+h) - y(x)}{h} - \frac{y(x) - y(x-h)}{h}}{h}$$

$$= \frac{y(x+h) - 2y(x) + y(x-h)}{h^2}$$



3.6 边值问题

设将求解区间[a,b]划分为N等分,步长h=(b-a)/N,节点 $x_n=x_0+nh(n=0,1,...,N)$,用差商代替导数,可将边值问题离散化,导出如下差分方程组:

$$\begin{cases} \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + p_n \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} + q_n y_n = r_n \\ y_0 = \alpha, y_N = \beta, n = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases}$$

3.6 边值问题



整理得到方程组,

$$\begin{cases} (-2+h^2q_1)y_1 + (1+\frac{h}{2}p_1)y_2 = h^2r_1 - (1-\frac{h}{2}p_1)\alpha \\ (1-\frac{h}{2}p_n)y_{n-1} + (-2+h^2q_n)y_n + (1+\frac{h}{2}p_n)y_{n+1} = h^2r_n \\ n = 2, 3, \dots, N-2 \\ (1-\frac{h}{2}p_{N-1})y_{N-2} + (-2+h^2q_{N-1})y_{N-1} = h^2r_{N-1} - (1+\frac{h}{2}p_{N-1})\beta \end{cases}$$

- ◆是隐格式,只能组成一个关于yn的线性方程组;
- ◆ 该方程组是三对角型,可以采用追赶法求解。



例题选讲

例题选讲3.1: 题1, P117页, 板书。

例题选讲3.2: 题1, 2, 3, 4, 5. P120页,板书1, 5。