第4章　方程求根的迭代法

1 迭代过程的收敛性
- 迭代法的思想
- 压缩映像原理
- 迭代收敛速度

2 迭代过程加速
- 迭代公式的改进
- 埃特金（Aitken）加速算法

3 牛顿法及牛顿下山法

4 弦截法

5 例题选讲

引 言

问题1. 设多项式函数 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$,其中$a_n,a_{n-1},\ldots,a_0$均为实数，且$a_n\neq0$.当 n≥5 时人们已经不能用解析表达式给出方程$f(x)=0$的解。此时，求方程的根$x^*$只能借助**数值方法**给出满足一定精度的近似解。

问题2. $\sqrt{115}=?$（教材第137页 – 例6，牛顿法）

迭代法是一种逐次逼近法，它使用一个固定的迭代公式反复修改根的近似值，使其不断精确化，直至得到满足精度要求的解。

迭代法求根的过程分为两步，**第一步先提供根的某个猜测值**，即迭代初值，然后**利用迭代公式将其逐步加工**成满足精度要求的解。

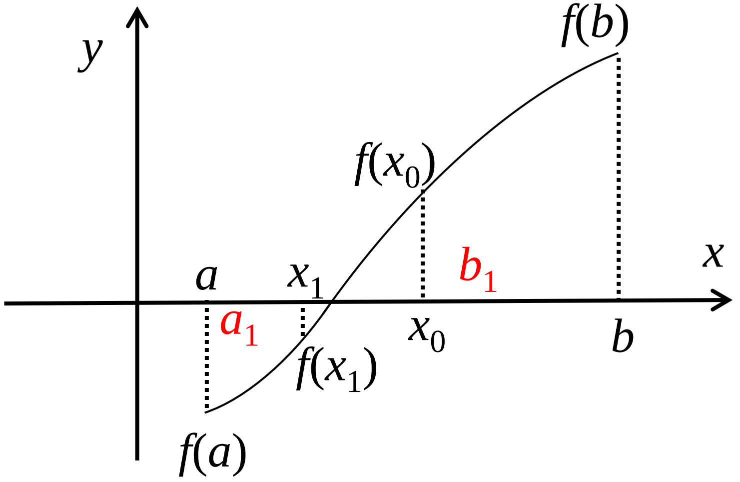
引 言

以二分法为例

设函数f(x)在[a,b]上连续,f(a)f(b)<0,根据连续函数性质，f(x)在[a,b]内一定有实的零点，即方程f(x)=0在[a,b]内一定有实根。现假定它在[a,b]内有唯一单实根x^*。

二分法实现思路（绪论部分）

二分法的基本思想：逐步将有根区间分半，通过判别函数值的符号，进一步搜索有根区间，使其充分小，从而求出满足精度的根x^*的近似值。



4.1 迭代过程的收敛性

对于一般方程$f(x)=0$,为使用迭代法，将其改写为$x=\varphi(x)$的形式，式中$\varphi(x)$称为迭代函数。由于该隐式方程不能直接求解，需给定一根的初值x_0并将其带入$\varphi(x)$，将隐式方程转化为显式计算公式$x_1=\varphi(x_0)$.若取x1作为新的输入值，又有$x_2=\varphi(x_1)$.如此反复计算，其计算表达式

$$x_{k+1}=\varphi(x_k), k=0,1,2,\ldots N. \qquad (4.1.4)$$

称为迭代公式.如果迭代值x_k有极限，则称迭代收敛，此时极限值$x^* = \lim_{k\to\infty} x_k$ 就是方程 $f(x)=0$的根。

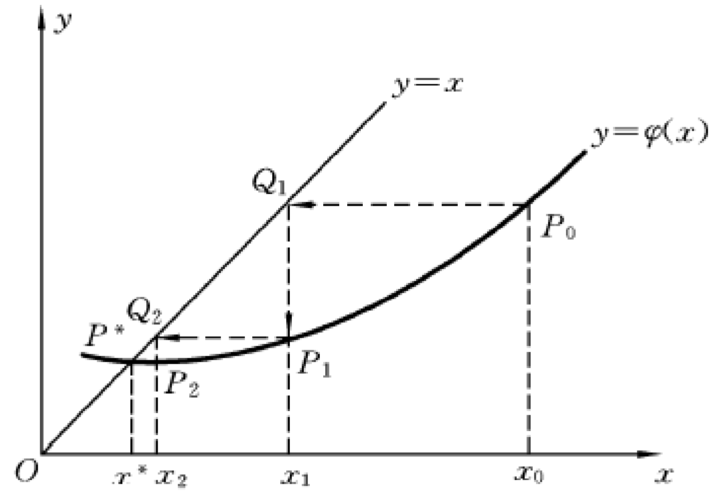


图4-1 迭代过程的几何图形解释

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.2 线性迭代函数启示

具有收敛性的方法才具有实际应用的价值，那么如何才能保证迭代的收敛性呢？以线性迭代函数φ(x)为例来进行考察。可以看出，图4-2和图4-4中迭代收敛，图4-3和图4-5迭代发散。

迭代收敛的充要条件：

$$|\varphi'(x)| = |k| < 1.$$

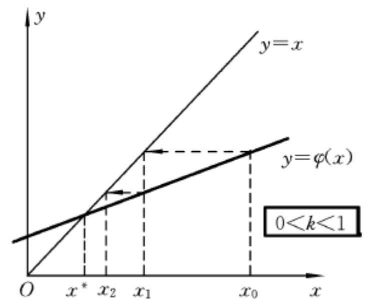


图 4-2

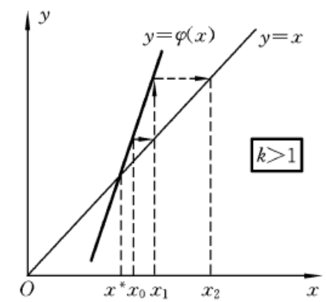


图 4-3

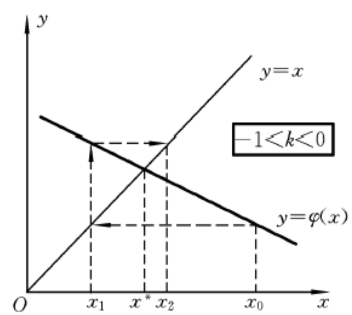


图 4-4

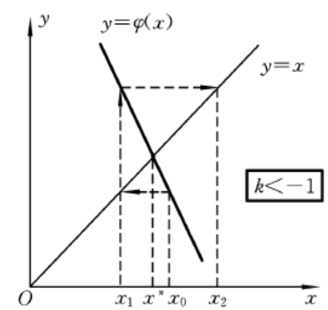


图 4-5

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.3 压缩映像原理

设x^*为方程$x=\varphi(x)$的根，则依据微分中值定理有，

$$x^*-x_{k+1}=\varphi(x^*)-\varphi(x_k)=\varphi'(\xi)(x^*-x_k)$$

式中ξ是x^*与x_k之间的一点。若存在$0\le L<1$使得对于任意$x\in[a,b]$，都有$|\varphi'(x)|\le L$,则有

$$|x^*-x_{k+1}|\le L|x^*-x_k|$$

据此反复递推，对于迭代误差$e_k=|x^*-x_k|$则有： $e_k\le L^k e_0$

由于$0\le L<1$，因而$e_k\to 0(k\to\infty)$,即迭代收敛.

需要指出的是上述推导过程，应该保证一切迭代值x_k全部落在区间$[a,b]$内，为此要求对于任意$x\in[a,b]$总有$\varphi(x)\in[a,b]$.

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.3 压缩映像原理

定理1. 设φ(x)在[a, b]上具有连续的1阶导数，且满足下列两项条件，

(1) 对于任意$x \in$[a, b]，总有φ(x) $\in$[a, b].

(2) 存在0≤L<1,使对于任意$x\in$[a,b]都有$|\varphi'(x)| \le L$， (6)

则迭代过程$x_{k+1} = \varphi(x_k)$对任意初值$x_0 \in [a, b]$均收敛于方程$x = \varphi(x)$的根x^*.且有下列误差估计式，

$$|x^* - x_k| \le \frac{1}{1-L}|x_{k+1} - x_k| \tag{7}$$

$$|x^* - x_k| \le \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \tag{8}$$

[证明见板书].

注：根据估计式(7)，只要相邻两次迭代值x_k，x_{k+1}的偏差充分小，就能保证x_{k+1}足够准确，因此可用$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$来控制迭代过程。

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.3 压缩映像原理

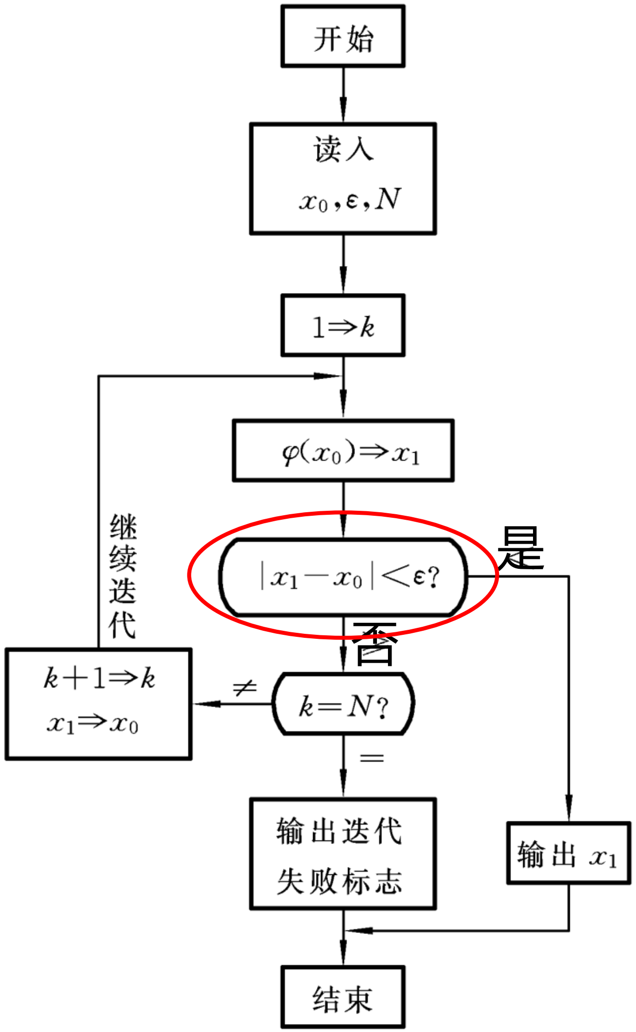


图4-6 迭代法的算法流程

例1 求方程的$x^3 - x - 1 = 0$唯一正根.

[见板书]

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.4 迭代过程的局部收敛性

在实际应用迭代法时，通常首先在根 x^*的邻近考察。如果存在邻域Δ: $|x -$

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.5 迭代过程的收敛性

一种具有实用价值的迭代方法，不但要收敛，还需要较快的收敛速度。所谓迭代过程的收敛速度，是指在**接近收敛时**迭代误差的下降速度。

如果迭代误差$e_k = x^* - x_k$ 当$k \to \infty$时成立

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^p} \to c \qquad （c \neq 0 常数）$$

则称迭代过程是p阶**收敛**的.特别地，p=1时称**线性收敛**， p=2时称**平方收敛**。

对于**在根x^*邻近收敛**的迭代公式$x_{k+1} = \varphi(x_k)$，由于$x^* - x_{k+1} = \varphi'(\xi)(x^* - x_k)$

式中ξ介于x_k与x^*之间，故有

$$\frac{e_{k+1}}{e_k} \to \varphi'(x^*)，k \to \infty$$

这样，若$\varphi'(x^*) \neq 0$，则该迭代过程仅为线性收敛. 若$\varphi'(x^*) = 0$，将$\varphi(x_k)$在x^*处进行泰勒展开有，

4.1 迭代过程的收敛性

4.1.5 迭代过程的收敛性

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi''(\xi)}{2}(x_k-x^*)^2$$

注意到

$$\varphi(x_k)=x_{k+1},\varphi(x^*)=x^*$$

由上式知，

$$\frac{e_{k+1}}{e_k^2}\to\frac{\varphi''(x^*)}{2}\text{ , }k\to\infty$$

这表明，$\varphi'(x^*)=0,\varphi''(x^*)\ \neq 0$时迭代过程为平方收敛.

定理3. 设$\varphi(x)$在$x=\varphi(x)$的根x^*邻近有连续的二阶导数，且

$$|\varphi'(x^*)|<1$$

则当$\varphi'(x^*)\neq 0$时迭代过程x_{k+1}=$\varphi(x_k)$为线性收敛；而当$\varphi'(x^*)=0,\varphi''(x^*)\ \neq 0$

为平方收敛。

4.2 迭代过程的加速

4. 2. 1 迭代公式的加工（加速迭代过程）

设x_k是根x^*的某个近似值，用迭代公式校正一次得到$\bar{x}_{k+1}$=$\varphi(x_k)$

假设$\varphi'(x)$在所考察的范围内改变不大，其估值为L，则有 x^*-$\bar{x}_{k+1} \approx L(x^* - x_k)$ [4.2.9]

此时解得 $x^* \approx \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$

其实质是**将$\bar{x}_{k+1}$与x_k加权平均**得到第$k+1$次迭代表达式

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k$$

总结起来，加工后的计算过程为：

$$\begin{cases} \text{迭代} \quad \bar{x}_{k+1} = \varphi(x_k) \\ \text{改进} \quad x_{k+1} = \frac{1}{1-L}\bar{x}_{k+1} - \frac{L}{1-L}x_k \end{cases}$$

以上迭代公式可以合并为：

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}(\varphi(x_k) - Lx_k) \qquad [4.2.10]$$

例3.[自己阅读并理解]

4.2 迭代过程的加速

4.2.2 埃特金算法

目的：**消除求导数的弊端(L的实质是导数值)**.

设将迭代值$\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$再迭代一次，又得 $\tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})$

由于

$$x^*-\tilde{x}_{k+1}\approx L(x^*-\bar{x}_{k+1})$$

将它与[4.2.9]联立，消去未知的L，则有

$$\frac{x^*-\bar{x}_{k+1}}{x^*-\tilde{x}_{k+1}}\approx\frac{x^*-x_k}{x^*-\bar{x}_{k+1}}$$

由此得

$$x^*\approx\tilde{x}_{k+1}-\frac{(\tilde{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1}-2\bar{x}_{k+1}+x_k}$$

可以看出以上新改进的公式不再含有导数信息，但需要每次迭代需要计算两次迭代中间值$\bar{x}_{k+1}$和$\tilde{x}_{k+1}$。

具体计算公式如下：

迭代

$$\bar{x}_{k+1}=\varphi(x_k)$$

迭代

$$\tilde{x}_{k+1}=\varphi(\bar{x}_{k+1})$$

改进

$$\boxed{x_{k+1}=\tilde{x}_{k+1}-\frac{(\tilde{x}_{k+1}-\bar{x}_{k+1})^2}{\tilde{x}_{k+1}-2\bar{x}_{k+1}+x_k}}$$

4.2 迭代过程的加速

4.2.2 埃特金算法

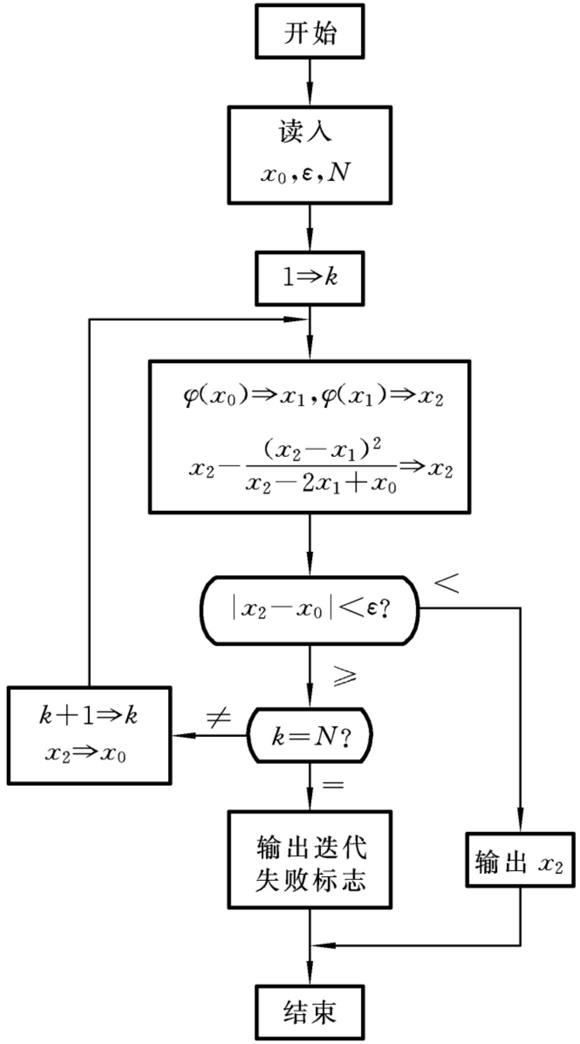


图4-7 **埃特金加速方法计算流程**

例4. 见教材

4.2 迭代过程的加速

4.2.3 一点注记

$\varphi(x)$可以是多样的，例如令$\varphi(x) = x + f(x)$，此时对应的迭代公式是$x_{k+1} = x_k + f(x_k)$，一般说此种迭代公式不一定会收敛，或者收敛速度慢。

运用此加速技术，迭代函数$x = \varphi(x) = x + f(x)$在公式（10）条件下，

$$x_{k+1} = \frac{1}{1-L}[\varphi(x_k) - Lx_k]$$

可以化简为：$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{M}$， $M = L - 1$ 是导数$f'(x_k)$的某个估计值。

该简化式是牛顿迭代公式的一种简化形式。

4.3 牛顿法

4.3.1 牛顿法迭代公式的导出（具体化$\varphi(x)$）

对于方程$f(x)=0$，设已知它的近似根x_k，则函数 $f(x)$ 在点 x_k **附近**可用一阶泰勒多项式 $p_1(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ 来近似，若取 $p_1(x)=0$ 的根作为 $f(x)=0$ 新的近似根，记作 x_{k+1}，则有如下著名的牛顿公式：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad [4.3.12]$$

相应的迭代函数是：

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

4.3 牛顿法

4.3.1 牛顿法迭代公式的导出

牛顿法的基本思想是将非线性方程f(x)=0的求根问题归结为计算一系列线性方程$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$的根，([4.3.12])

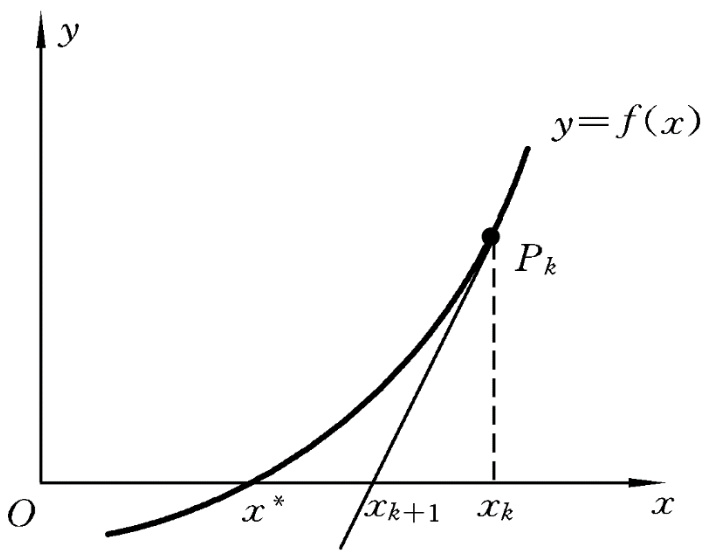


图4-8 牛顿法的几何解释

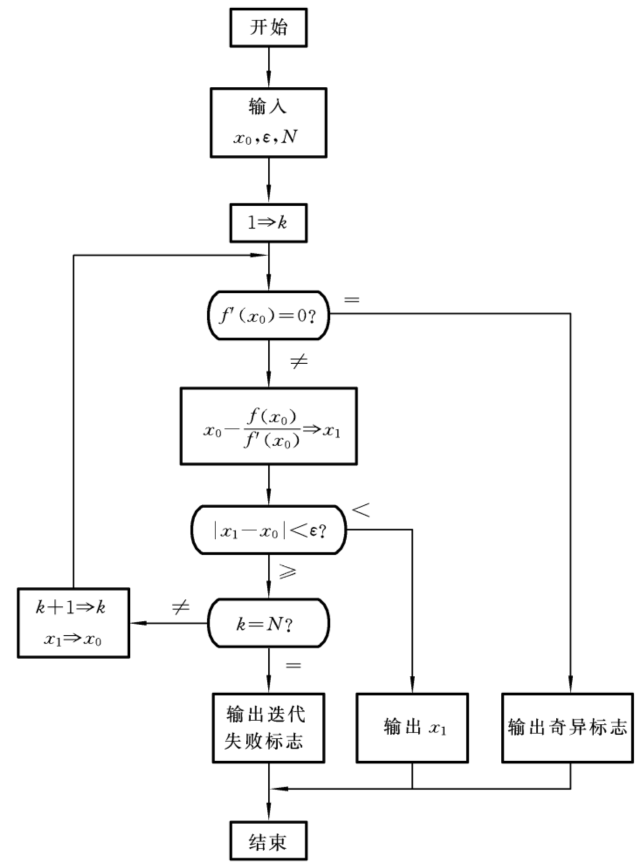


图4-9 牛顿法的计算流程

4.3 牛顿法

4.3.1 牛顿法迭代公式的导出

有牛顿迭代公式知，迭代函数为

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

对$\varphi(x)$求导得，

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

假设x^*是$f(x)=0$的单根，则$f(x^*)=0$，$f'(x^*)\neq 0$，由此可知$\varphi'(x^*)=0$，$\varphi''(x^*)\neq 0$，由定理3知，牛顿法[4. 3. 12]在$f(x)=0$的单根$\boldsymbol{x}^*$附近为平方收敛（定理4）。

4.3.2 **开方公式**

对于给定正数c，应用牛顿法解二次方程 $x^2-c=0$，可导出求开方值$\sqrt{c}$的计算公式，

$$x_{k+1}=\frac{1}{2}\left(x_k+\frac{c}{x_k}\right) \quad [4.3.14]$$

设x_k是$\sqrt{c}$的某个近似值，$\frac{c}{x_k}$也是一个近似值，式(14)表明，它们两者的算术平均值将是更好的近似值。

(例6. $\sqrt{115}=?$，$c=115$)

定理5 开方公式[4. 3. 14]对于任意给定的初值$x_0>0$均为平方收敛。

[证明见板书]

4.3 牛顿法

4.3.3 牛顿法下山法

牛顿法的缺点1：收敛过程依赖于初值x_0，如果偏离x^*较远，则牛顿法发散。（例7）

下山法：为了防止迭代发散，通常对迭代施加一项要求，保证函数值单调下降，

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)|$$

牛顿下山法：将牛顿法（收敛速度）和下山法（单调下降）相结合.

思路：第一步，用牛顿法计算$\bar{x}_{k+1}$， $\bar{x}_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

第二步，将$\bar{x}_{k+1}$与x_k加权平均作为新的改进值x_{k+1}，

$$x_{k+1} = \lambda \bar{x}_{k+1} + (1-\lambda)x_k$$

两步整合，得到迭代公式，

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (0 < \lambda \leq 1)$$

4.3 牛顿法

4.3.3 牛顿法下山法

牛顿法下山法的实施步骤：首先给定x_0，设置$\lambda = 1$，然后逐渐对λ 值减半进行试算，如果函数值满足单调性条件，即 $f(x_1) < f(x_0)$，则下山成功；反之，下山失败。若下山成功，则令$x_0 = x_1, \lambda = 1$，继续按下山法寻找 x_2 ；若下山失败，需另选初值 x_0 进行重算。

注：牛顿法的收敛性强烈地依赖于初值x_0的选取，在实际求解 $f(x) = 0$时需先用二分法分法定出足够准确的近似根x_0，然后再用牛顿法将x_0逐步精确化。

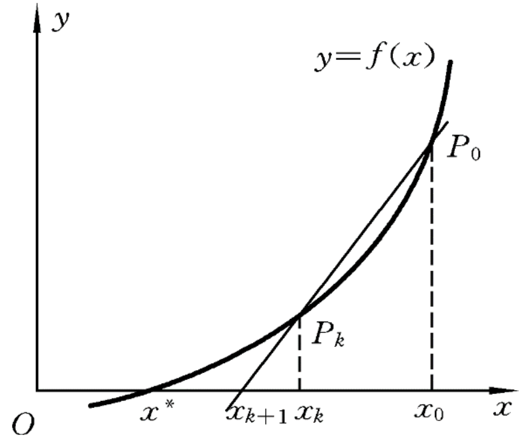
4.4 弦截法

牛顿法的缺点2：需要用到导数值$f'(x_k)$，如果 $f(x)$比较复杂，导数计算困难。

为了避免计算导数，可以用差商$\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}$替代牛顿公式[4.3.12]的导数，得到如下离散迭代形式：

$$[4.4.19]\ x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_0)}(x_k - x_0) \rightarrow \frac{x - x_k}{0 - f(x_k)} = \frac{x_k - x_0}{f(x_k) - f(x_0)}$$

弦截法的几何解释：$y = f(x)$与过$(x_0, f(x_0))$和$(x_k, f(x_k))$的直线在y=0时与x轴的交点。



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x_k, y_k)$$
$$(x_2, y_2) \rightarrow (x_0, y_0)$$

图4-10 弦截法的几何解释

4.3 牛顿法

弦截法的收敛性

弦截法的迭代函数为$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f(x)-f(x_0)}(x-x_0)$，对其求导得到，

$$\varphi'(x^*)=1+\frac{f'(x^*)}{f(x_0)}(x^*-x_0)=1-\frac{f'(x^*)}{\frac{f(x^*)-f(x_0)}{x^*-x_0}}$$

当x_0充分接近x^*时$0<|\varphi'(x^*)|<1$，由定理3知弦截法(19)为线性收敛。

为提高收敛速度，再改用差商$\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$替代牛顿公式[4. 3. 12]中$f'(x_k)$导数，导出下列迭代公式，

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1})$$

称为快速弦截法。由于用到x_k和x_{k-1}，也称为二步法。

4.5 例题选讲

例题4. 5. 1 压缩映像原理

压缩映像原理需要具备两个条件：1. 封闭性，$\forall x \in [a,b], \varphi(x) \in [a,b]$;

2. 压缩性， $|\varphi'(x)| \le L < 1$.

压缩映像的反命题：如果存在常数L>1，使对$\forall x \in [a,b]$都有$|\varphi'(x)| \ge L$成立，则迭代过程 $x_{k+1} = \varphi(x_k)$对任给初值$x_0 \in [a,b]$均发散。

例1. 应用迭代法求解方程 $x = (\cos x + \sin x)/4$ 并讨论迭代过程的收敛性。[详解见板书]

例2. 改写方程$x^2 = 2$ 为$x = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ ，运用压缩映像原理证明，这一迭代过程对于任给初值 $x_0 > 0$均收敛于$\sqrt{2}$. [详解见板书]

例3.基于迭代原理证明 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}} = 2$. [详解见板书]

例6.改写方程$2^x + x - 4 = 0$为$x = \ln(4-x)/\ln 2$ 的形式，据此能否用迭代法求所给方程在[1, 2]内的实根？[详解见板书]

4.5 例题选讲

例题4. 5. 2 迭代过程的收敛速度

例1. 证明，解方程$(x^2-a)^2=0$ 求$\sqrt{a}$ 的牛顿法$x_{k+1}=\frac{3}{4}x_k+\frac{a}{4x_k}$ 仅为线性收敛. [详解见板书]

例4. 试设计求$\sqrt{a}$的迭代公式$x_{k+1}=\lambda_0 x_k+\lambda_1\left(\frac{a}{x_k}\right)+\lambda_2\left(\frac{a^2}{x_k^3}\right)$使其收敛的阶尽可能地高. [详解见板书]

例题4. 5. 3 牛顿法的误差分析

例1. 设牛顿法的迭代序列$\{x_k\}$收敛到方程$f(x)=0$的某个单根x^*, 证明误差$e_k=x_k-x^*$的比率

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}$$

[详解见板书]

4.5 例题选讲

例题4. 5. 4　牛顿法的修正与改进

例1. 设x^*为方程$f(x)=0$的m($m\geq 2$)重根，证明这时牛顿法仅为线性收敛. [详解见板书]

例2. 设x^*为方程$f(x)=0$的m($m\geq 2$)重根，证明修正的牛顿法

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

为平方收敛。[详解见板书]

课下作业：习题四4中第4，5(问题1，2)，7，18，19.