第1章 插值方法

1.7 分段插值方法

1、分段插值的提出

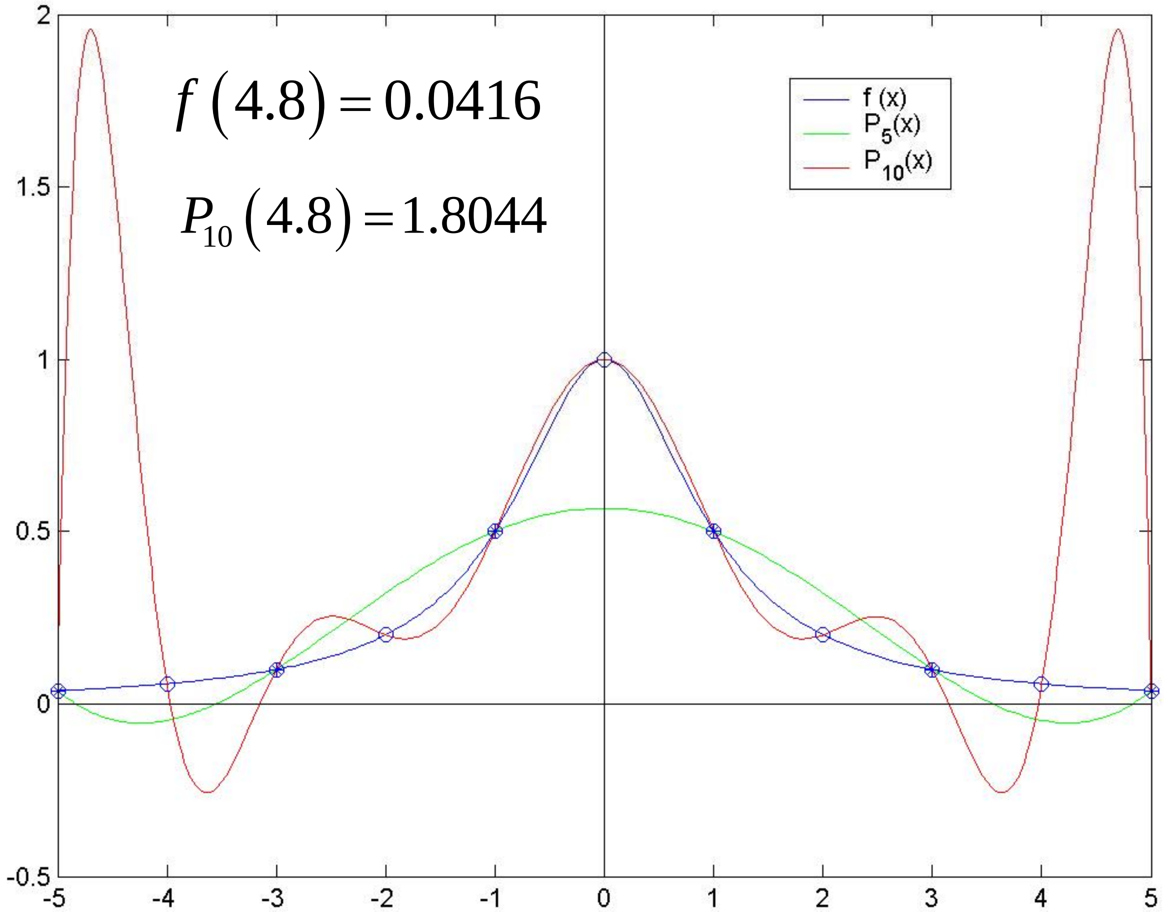
高次多项式插值的病态问题

由区间$[a,b]$上给出的节点做出的插值多项式 $P_n(x)$,

次数n随着已知节点个数的增加而升高，但是逼近$f(x)$的精度并不一定增加，导致插值效果不理想。

龙格示例： 考虑函数 $f(x)=1/(1+x^2)$，它在 $[-5,5]$上的各阶导数均存在. 等间距插值节点：

$$x_k = -5+10\frac{k}{n}, \quad (k=0,1,\cdots,n)$$



随着节点的增加，采用高次多项式插值，可以在某些区域较好的逼近原来的函数（如在[-2,2]区间）；但在高次多项式的两端出现了激烈震荡的现象，这就是所谓的龙格现象。

2、分段插值方法

插值震荡问题如何解决?

（1）特殊插值方法

（Chebyshev方法：选取适当的插值节点，减小震荡）

（2）分段插值

（把插值区间分成小区间，在小区间上用低次多项式插值）

分段插值方法分两步：

（1）将所考察的区间[a,b]进行划分，

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$\Delta: [x_i, x_{i+1}] \subset [a, b]$$

（2）将每个小区间上的插值多项式拼接在一起，作为整个区间[a,b]上的插值函数，如，

$$S_1(x) = \begin{cases} x+1 \ , & x \in [0,1] \\ 3x-1 \ , & x \in [1,2] \end{cases}$$

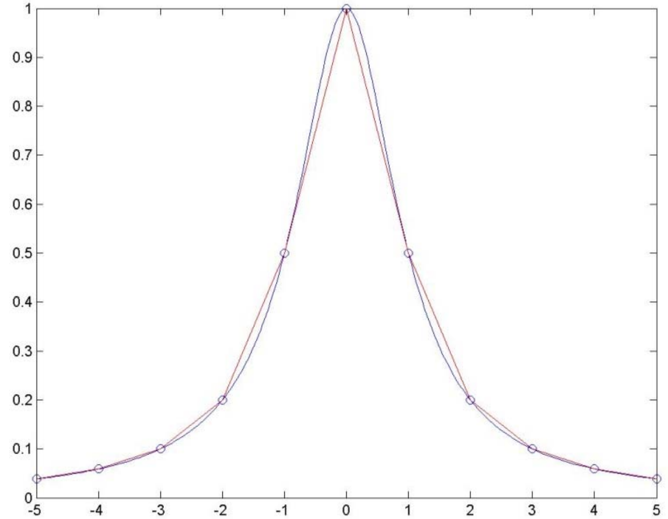
3、分段线性插值

当节点较多时，可以采用分段线性插值，公式如下：

$$S_i(x)=\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}y_i+\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}y_{i+1} \qquad x_i<x<x_{i+1}$$

再把所有区间上的插值函数联合起来。

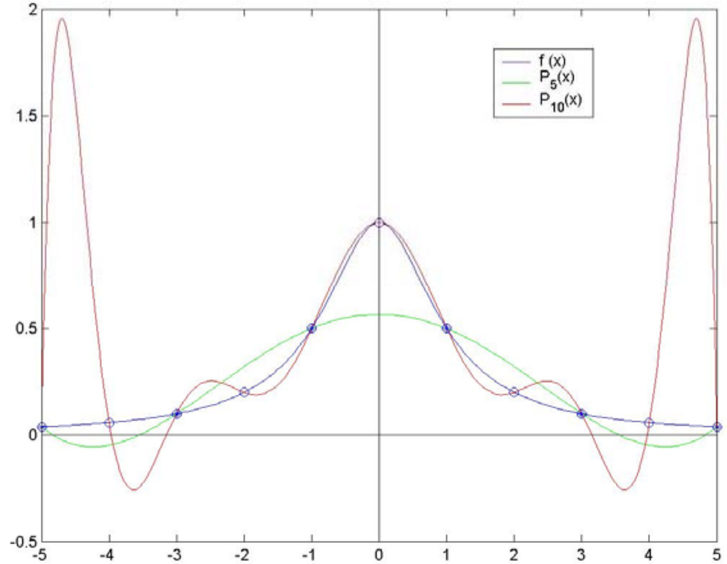
在几何上就是用折线替代曲线，如右图所示.

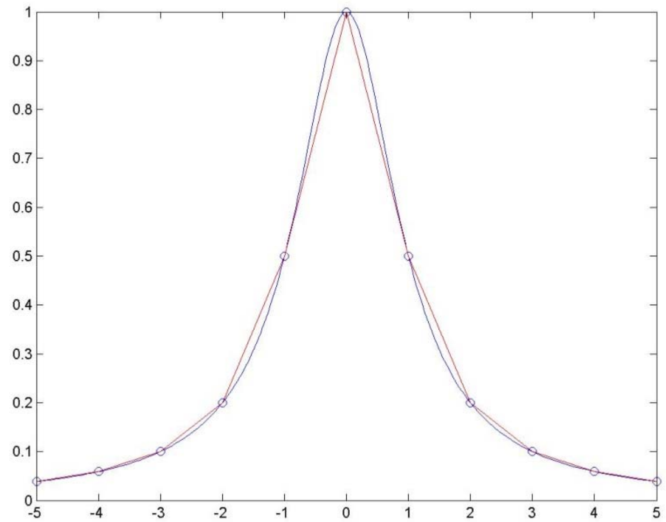


4、分段三次插值

分段三次插值的优点：

1、利用多项式插值方法简单的特点，又克服了高次插值多项式的缺陷；





2、可以克服分段线性插值精度不高，插值函数不光滑的缺陷。

4、分段三次插值-埃尔米特插值

构造一个分段三次插值函数$S(x)$，在每个节点处具有一阶连续导数。它满足下述条件：

(1) 各区间插值节点上

$$S(x_i) = y_i \qquad S'(x_i) = y_i' \qquad (i = 0, 1, 2, \cdots, n.)$$

(2) 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上，都是一个三次多项式：

$$S_i(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3$$

4、分段三次插值-埃尔米特插值

由埃尔米特插值公式，可直接写出分段三次埃尔米特插值函数$S(x)$的分段表达式，

$$S(x)=\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y_i+\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}+$$

$$(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y_i'+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}'\ ,x\in[x_i,x_{i+1}]$$

表达式与课本(P32)式31、式32对应。

4、分段三次插值–埃尔米特插值

注：分段三次Hermite插值的推导过程（P32页问题8）

已知：函数$y=f(x)$在分划Δ：$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$

的函数值和导数值分别为：

$$y_i=f(x_i),y_i'=f'(x_i),i=0,1,2,3,\dots,n$$

求：逼近$f(x)$的分段三次Hermite插值多项式$H(x)$.

解：考虑第i个区间$[x_{i-1},x_i]$,存在四个插值条件，

$$\begin{cases} y_{i-1}=f(x_{i-1}),y_{i-1}'=f'(x_{i-1}) \\ y_i=f(x_i),y_i'=f'(x_i) \end{cases}$$

构造一个三次多项式H(x)，并称之为三次Hermite插值多项式.

此时,在整个$[a,b]$区间上可以用分段三次Hermite插值多项式

来逼近$f(x)$.

设，
$$H(x)=\begin{cases}H_1(x), x\in[x_0,x_1]\\ H_2(x), x\in[x_1,x_2]\\ \vdots\\ H_n(x), x\in[x_{n-1},x_n]\end{cases},$$

其中，

$H_i(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上满足
$$\begin{cases}H_i(x_{i-1})=f(x_{i-1})=y_{i-1}\\ H_i(x_i)=f(x_i)=y_i\\ H_i'(x_{i-1})=f'(x_{i-1})=y_{i-1}'\\ H_i'(x_i)=f'(x_i)=y_i'\end{cases}$$

采用基函数法构造$H_i(x)$,设$H_i(x)=y_{i-1}\varphi_{i-1}(x)+y_i\varphi_i(x)+y_{i-1}'\psi_{i-1}(x)+y_i'\psi_i(x)$,
其中,$\varphi_{i-1}(x),\varphi_i(x),\psi_{i-1}(x)$和$\psi_i(x)$均为三次Hermite插值多项式。

对$H_i(x)$两边求关于x的导数，得到，

$$H_i'(x) = y_{i-1}\varphi_{i-1}'(x) + y_i\varphi_i'(x) + y_{i-1}'\psi_{i-1}'(x) + y_i'\psi_i'(x)$$

由$H_i(x)$满足的四个插值条件，可得四个插值基函数满足的条件，

$$\begin{cases} \varphi_{i-1}(x_{i-1}) = 1,\ \varphi_i(x_{i-1}) = 0,\ \psi_{i-1}(x_{i-1}) = 0,\ \psi_i(x_{i-1}) = 0 \\ \varphi_{i-1}(x_i) = 0,\quad \varphi_i(x_i) = 1,\quad \psi_{i-1}(x_i) = 0,\quad \psi_i(x_i) = 0 \\ \varphi_{i-1}'(x_{i-1}) = 0,\ \varphi_i'(x_{i-1}) = 0, \psi_{i-1}'(x_{i-1}) = 1,\ \psi_i'(x_{i-1}) = 0 \\ \varphi_{i-1}'(x_i) = 0,\quad \varphi_i'(x_i) = 0,\quad \psi_{i-1}'(x_i) = 0,\quad \psi_i'(x_i) = 1 \end{cases}$$

下面具体求解基函数$\varphi_{i-1}(x), \varphi_i(x), \psi_{i-1}(x)$和$\psi_i(x)$的表达式.

由上式的第1列可求得$\varphi_{i-1}(x)$满足条件，

$$\varphi_{i-1}(x_{i-1})=1,\quad \varphi_{i-1}(x_i)=0, \varphi_{i-1}'(x_{i-1}) = 0, \varphi_{i-1}'(x_i) = 0 \qquad [1]$$

由[1]式中的第2和第4个条件知，$\varphi_{i-1}(x)$的表达式应为，

$$\varphi_{i-1}(x)=(x-x_i)^2(ax+b) \qquad [2]$$

此时，$\varphi'_{i-1}(x)=2(x-x_i)(ax+b)+a(x-x_i)^2 \qquad [3]$

将[1]式中的条件1和3分别代入[2]式和[3]式得到，

$$\begin{cases} h_i^2(ax_{i-1}+b)=1 \\ -2h_i(ax_{i-1}+b)+ah_i^2=0 \end{cases}$$

解此线性方程组得到，

$a=\dfrac{2}{h_i^3}, b=\dfrac{1}{h_i^2}-\dfrac{2x_{i-1}}{h_i^3}$，将$a$和$b$代入[2]式得到，

$$\varphi_{i-1}(x)=(x-x_i)^2\left(\frac{2}{h_i^3}+\frac{1}{h_i^2}-\frac{2x_{i-1}}{h_i^3}\right)=\left(1+2\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2,$$

类似有，

$$\varphi_i(x)=(1-2\frac{x-x_{i-1}}{h_i})(\frac{x-x_i}{h_i})^2,$$

$$\psi_i(x)=\frac{1}{h_i^2}(x-x_i)(x-x_{i-1})^2,$$

$$\psi_{i-1}(x)=\frac{1}{h_i^2}(x-x_{i-1})(x-x_i)^2,$$

因此，得到，

$$H_i(x)=\frac{[h_i+2(x-x_{i-1})](x-x_i)^2}{h_i^3}y_{i-1}+\frac{[h_i-2(x-x_i)](x-x_{i-1})^2}{h_i^3}y_i+$$

$$\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2}{h_i^2}y_{i-1}^{'}+\frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})^2}{h_i^2}y_i^{'}$$

最终可得分段三次Hermite插值多项式为，

$$H(x)=\begin{cases} H_1(x), x\in[x_0,x_1] \\ H_2(x), x\in[x_1,x_2] \\ \vdots \\ H_n(x), x\in[x_{n-1},x_n] \end{cases}，其中，$$

$$H_i(x)=\frac{[h_i+2(x-x_{i-1})](x-x_i)^2}{h_i^3}y_{i-1}+\frac{[h_i-2(x-x_i)](x-x_{i-1})^2}{h_i^3}y_i+$$

$$\frac{(x-x_{i-1})(x-x_i)^2}{h_i^2}y_{i-1}^{'}+\frac{(x-x_i)(x-x_{i-1})^2}{h_i^2}y_i^{'}$$

这与教材P32页问题8和P28页问题6的解完全相同。

由余项公式可以导出，分段三次埃尔米特插值的截断误差有如下估计，

$$\left|R(x)\right| = \left|f(x) - S(x)\right| \le \frac{h^4}{384} \max_{a \le x \le b} \left|f^{(4)}(x)\right|$$

其中，$h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} (x_{i+1} - x_i)$

特点：

（1）分段三次埃尔米特插值函数是插值区间上的光滑函数，它与函数$f(x)$在节点处密合程度较好；

（2）显式算法，收敛性好，避免了龙格现象;

（3）插值函数具有局部性;

（4）缺点：需要给出所有插值节点的导数值。

第1章 插值方法

1.8 样条插值

1、样条插值的提出

分段插值：

- 用低次多项式插值有很好地收敛性（分段线性插值）；
- 插值函数光滑性不高，Hermite插值有改善，但要求各个节点的导数值。

办法：

1）不需要给出所有节点的导数值；

2）增加在区间的节点上的限制条件，即插值函数的二阶导数值相等，能够使节点上插值函数光滑。

2、样条函数的概念

样条函数的定义：

对于区间[a,b]上n+1个节点，分成对应的小区间

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

对应的小区间上按一定光滑性要求“装配”起来的k次多项式$S_k(x)$。

光滑性：每个内节点$x_1,\ldots,x_{n-1}$上具有直到k-1阶连续导数。

3、三次样条插值

对于区间[a,b]上n+1个节点样本点数据 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$

构造一个插值函数$S^3(x)$满足:

(1) $S^3(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$

(2) 在每个小区间$[x_i, x_{i+1}]$上，都是一个三次多项式:

$$S_i^3(x) = a_{i0} + a_{i1}x + a_{i2}x^2 + a_{i3}x^3$$

(3) $S^3(x), [S^3(x)]', [S^3(x)]''$在[a,b]上连续;

$$\begin{cases} S^3(x_i - 0) = S^3(x_i + 0) \\ [S^3(x_i - 0)]' = [S^3(x_i + 0)]' \\ [S^3(x_i - 0)]'' = [S^3(x_i + 0)]'' \\ i = 1, 2, \cdots, n-1. \end{cases}$$

$S^3(x)$是一个光滑的分段函数，这样的函数称为三次样条（Spline）插值函数。

3、三次样条插值

三次样条插值多项式$S^3(x)$的确定：

待定常数：

多项式确$S^3(x)$有n个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上的分段函数组成，

每个小区间上构造出一个三次多项式，

每个多项式有4个待定系数，

$$a_{i0},a_{i1},a_{i2},a_{i3},(i=0,1,2,\cdots,n-1)$$

共有 4n个系数。应该找到包含这些系数的4n个独立方程，并求解获得。

3、三次样条插值

已知条件：

- ➢$S^3(x)$满足插值条件：在所有的节点上可得出 (n+1)个条件方程：

$$S^3(x_i)=y_i,(i=0,1,2,\cdots,n)$$

- ➢$S^3(x)$满足光滑性条件，除两端点外，在所有的内节点上，又可得出3(n-1)个方程：

$$\begin{cases} S_i^3(x_i)=S_{i+1}^3(x_i) \\ [S_i^3(x_i)]'=[S_{i+1}^3(x_i)]' \\ [S_i^3(x_i)]''=[S_{i+1}^3(x_i)]'' \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

- ➢共有条件：4n-2个方程

3、三次样条插值

边界条件：

还差2个条件（方程）。通常的办法是在区间[a,b]的两个端点上各加一个条件，即称之为边界条件。常用的边界条件有以下三种：

（1）给定两端点处的**导数值,** $[S^3(x_0)]' = y_0', [S^3(x_n)]' = y_n'$ （转角边界条件）

（2）给定两端处的**二阶导数值,** $[S^3(x_0)]'' = y_0'', [S^3(x_n)]'' = y_n''$ （弯矩边界条件）

（3）如果f (*x*)是以b-a为周期的周期函数，则$S^3(x)$也应是具有同样周期的周期函数，在端点处需要满足:

（周期边界条件） $[S^3(a+0)]' = [S^3(b-0)]', [S^3(a+0)]'' = [S^3(b-0)]''$

3、三次样条插值

构造方法：

(1) 待定系数法计算量大，

(2) 根据样条函数特性采用1阶导数或2阶导数待定方法

- 用1阶导数表示的三次样条 $[S^3(x_i)]' = m_i, \quad (i = 0,1,\cdots,n)$
- 用2阶导数表示的三次样条 $[S^3(x_i)]'' = M_i \quad (i = 0,1,\cdots,n)$

4、用1阶导数表示的三次样条

设$[S^3(x_i)]' = m_i = f'(x_i), i = 0 \sim n$,在$[x_i, x_{i+1}]$上的插值条件为,

$$S^3(x_i) = y_i,\ [S^3(x_i)]' = m_i,\ S^3(x_{i+1}) = y_{i+1},\ [S^3(x_{i+1})]' = m_{i+1}$$

这是一个分段三次Hermite插值问题，它在$[x_i, x_{i+1}]$上具有确定的解:

$$S^3(x) = \varphi_0\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)y_i + \varphi_1\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)y_{i+1} + h_i\psi_0\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)m_i + h_i\psi_1\left(\frac{x - x_i}{h_i}\right)m_{i+1}$$

注：$S^3(x)$可以看作一种特殊的分段三次插值函数，利用P32问题8的表达式可得到$S^3(x)$表达式，其中$m_i = y_i', m_{i+1} = y_{i+1}'$。

m_i 怎么取？才能保证曲线的光滑，

根据三次样条函数的定义，要求在节点上的二阶导数相等，

即对该$S^3(x)$函数求二阶导数，

$$S^3(x)=\left(1+2\frac{x-x_i}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)^2 y_i+\left(1-2\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 y_{i+1}+$$

$$(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)^2 m_i+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 m_{i+1} \qquad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

$$[S^3(x)]''=\frac{6}{h_i^2}\left(2\frac{x-x_i}{h_i}-1\right)y_i+\frac{6}{h_i^2}\left(2\frac{x-x_i}{h_i}-1\right)y_{i+1}+$$

$$\frac{1}{h_i}\left(6\frac{x-x_{i+1}}{h_i}-4\right)m_i+\frac{1}{h_i}\left(6\frac{x-x_{i+1}}{h_i}-2\right)m_{i+1} \qquad x\in[x_i,x_{i+1}]$$

记$S_i^3(x)$为$S^3(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$上的分段样条插值函数，$S_{i-1}^3(x)$为$S^3(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的分段样条插值函数，

$$[S_i^3(x)]'' = \frac{6}{h_i^2}[2(\frac{x-x_i}{h_i})-1]y_i - \frac{6}{h_i^2}[2(\frac{x-x_i}{h_i})-1]y_{i+1} + \frac{1}{h_i}[6(\frac{x-x_i}{h_i})-4]m_i + \frac{1}{h_i}[6(\frac{x-x_i}{h_i})-2]m_{i+1}$$

$$[S_i^3(x_i)]'' = 6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2} - \frac{4m_i+2m_{i+1}}{h_i} \quad (36)$$

$$(h_i = x_{i+1}-x_i, h_{i-1} = x_i - x_{i-1})$$

$$[S_{i-1}^3(x)]'' = \frac{6}{h_{i-1}^2}[2(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}})-1]y_{i-1} - \frac{6}{h_{i-1}^2}[2(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}})-1]y_i + \frac{1}{h_{i-1}}[6(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}})-4]m_{i-1} + \frac{1}{h_{i-1}}[6(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}})-2]m_i$$

$$[S_{i-1}^3(x_i)]'' = 6\frac{y_{i-1}-y_i}{h_{i-1}^2} + \frac{2m_{i-1}+4m_i}{h_{i-1}} \quad (37)$$

为满足二阶导数连续，需满足下式，

$$[S^3(x_i+0)]''=[S^3(x_i-0)]''$$

而$[S^3(x_i+0)]''=[S_i^3(x_i+0)]''=[S_i^3(x_i)]''$，$[S^3(x_i-0)]''=[S_{i-1}^3(x_i-0)]''=[S_{i-1}^3(x_i)]''$

所以有：（36）式=（37）式，即

$$6\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}-\frac{4m_i+2m_{i+1}}{h_i}=-6\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{2m_{i-1}+4m_i}{h_{i-1}}$$

移项化简得，

$$\frac{m_{i-1}+2m_i}{h_{i-1}}+\frac{2m_i+m_{i+1}}{h_i}=3\left(\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}^2}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i^2}\right) \quad (38)$$

令，

$$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i},\ \beta_i=3\left[(1-\alpha_i)\frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}}+\alpha_i\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}\right] \quad (39)$$

则(38)式可以表示为，

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i,\quad i=1,2,\ldots,n-1 \quad (40)$$

边界条件:

- 二阶导数值相等的条件$i=1\sim n-1$，共有$n-1$个 方程;

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i$$

- 而未知 量$\boldsymbol{m}_{\mathbf{i}}$（$i=0\sim n$） 共有**n+1**个，这时需要增加边界条件。

给定：$m_0=y_0',\qquad m_n=y_n',$

得到如下的等式（见**P35**)：

$$
\begin{cases}
2m_1 + \alpha_1 m_2 = \beta_1 - (1-\alpha_1) y_0' \\
(1-\alpha_2)m_1 + 2m_2 + \alpha_2 m_3 = \beta_2 \\
\vdots \\
(1-\alpha_i)m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = \beta_i \\
\vdots \\
(1-\alpha_{n-1})m_{n-2} + 2m_{n-1} + \alpha_{n-1} m_n = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} y_0'
\end{cases}
$$

$$i = 1, \ldots, n-1 \qquad h_i = x_{i+1} - x_i \qquad \alpha_i = \frac{h_{i-1}}{h_i + h_{i-1}}$$

$$\beta_i = 3\left[(1-\alpha_i)\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}} + \alpha_i \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i-1}}\right]$$

或者写成下式，通过解方程求出m_i，最后带入样条函数即可。

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_1 & & & & \\ 1-\alpha_1 & 2 & \alpha_2 & & & \\ & 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\alpha_{n-2} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 - (1-\alpha_1) y_0' \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} - \alpha_{n-1} y_n' \end{pmatrix}$$

解出m_i，带入样条插值公式得到

$$S_i^3(x) = \varphi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) y_i + \varphi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) y_{i+1} + h_i \psi_0\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) m_i + h_i \psi_1\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right) m_{i+1}$$

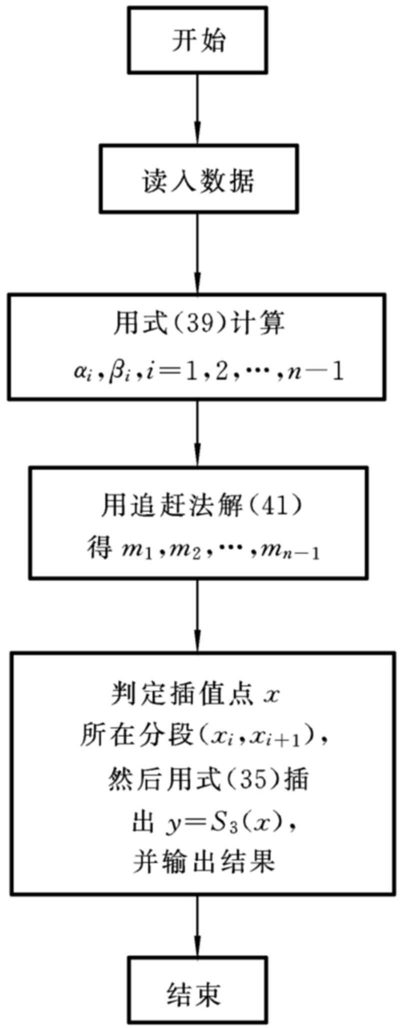
$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.)$$

算法实现过程：

用MATLAB函数interp1进行三次样条函数的插值

```
x=[-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5];
y=[1/26,1/17,0.1,0.2,0.5,1,0.5,
0.2,0.1,1/17,1/26];
xi=-5:0.01:5;
yi=interp1(x,y,xi,'spline');
plot(xi,yi,x,y,'o')
hold on
```

注：csape()函数为可输入边界条件的三次样条函数。



例：考虑函数 $f(x)=1/(1+x^2)$，它在$[-5,5]$上的各阶导数均存在.
利用三次样条插值的结果如P36。