《地球物理计算方法B》

第1章　插值方法

主讲人：高建军

- 插值法概念
- 各种插值方法
（**拉格朗日、牛顿、Hermite、分段、样条**）
- 插值余项
- 曲线拟合

1. 插值法概念

1. 1问题的提出

问题提出：实际问题中会遇到函数$f\ (x)$没有数学表达式，只有一组离散数据，例如只有某些点上的函数值和导数值，导致直接研究$f\ (x)$很困难，于是，构造一个简单函数$P(x)$来近似$f\ (x)$，通过处理$P(x)$来获得关于$f\ (x)$的结果。若要求函数$P(x)$取给定的离散数据，则称$P(x)$为$f\ (x)$的插值函数。

插值问题的数学描述：

已知：$y_i = f(x_i), x_i \in [a,b], i = 0,1,2,\cdots,n$。

求：$f(x)$在$x' \in [a,b]$处的函数值$f(x')$.

其中：$x_0, x_1, \cdots, x_n$称为**插值节点；**

$y_i = f(x_i)$ 称为**样本值；**

x' 称为**插值点。**

1. 插值法概念

1.2 解决办法

构造一个简单函数解析表达式，近似求解；

（1）构造一个简单函数$P(x)$来替代未知（或复杂）函数 $f(x)$;

（2）用$P(x')$的函数值作为$f(x')$的近似值；

$P(x)$为$f(x)$插值函数, 且满足 $P(x_i)=f(x_i) \quad (i=0,1,\cdots,n)$

插值概念

已知函数$y=f(x)$在$n+1$个互异点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的函数值分别为$y_0,y_1,\ldots,y_n$,
构造一个简单的函数$P(x)$, 且满足条件,

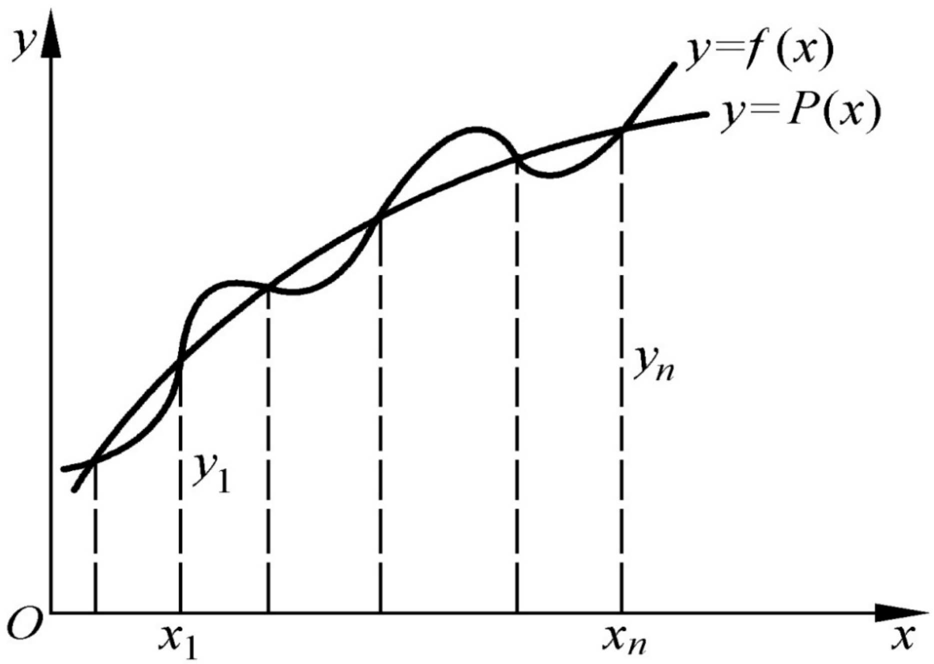
$$P(x_i)=y_i \ (i=0,1,\ldots,n) \qquad (1)$$

称这类问题为插值问题，称$P(x)$为函数$f(x)$的插值函数，
$f(x)$为被插值函数, 点$x_0,x_1,\ldots,x_n$为插值节点，称(1)式为插值条件。

1. 插值法概念

从几何上看，插值法就是找曲线$y = P(x)$，使其通过给定的$n+1$个点(x_i, y_i)，并用它近似已知曲线$y = f(x)$.

(注：$P(x)$需要过$f(x)$的$n+1$点).



插值的几何学解释

2. 插值方法

2.1泰勒（Taylor）插值

泰勒插值问题描述：

已知：x_0和该点的k阶导数值$y_0^{(k)}, k = 0,1,2,\ldots,n$，求$n$次插值多项式$P_n(x)$，使其满足$P_n(x_0)=y_0$，$P_n'(x_0)=y_0', \ldots, P_n^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}$.

泰勒插值方法：

利用$f(x)$在x_0的泰勒展开多项式，构建$P_n(x)$，

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

误差为$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$，$\xi$在$x_0$和$x$之间.

由$P_n(x)$的表达式可知，$P_n(x)$满足$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), k = 0,1,2,\ldots,n$.

2.1泰勒（Taylor）插值

例：已知$f(x)=\sqrt{x}$在x_0=100的一次和二次泰勒多项式，求$f(115)=\sqrt{115}$的近似值并估计误差。

解：由$f(x)=\sqrt{x}$知，$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x)=\dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}, f'''(x)=\dfrac{3}{8\sqrt[2]{x^5}}$

$$f(x_0=100)=10, f'(x_0)=\frac{1}{20}, f''(x)=\frac{-1}{4000},$$

将$f(x)$在x_0点的一次泰勒多项式记为$P_1(x)$,

$$P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=5+0.05x$$

将$P_1(x)$作为$f(x)$的近似表达式，当x=115时，

$f(115)=\sqrt{115}\approx P_1(115)$=10.75，误差估计为，

$$0<|R_1(x)|=\left|\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2\right|<\frac{f''(x_0)}{2}(115-100)^2=0.028125,$$

近似于10.75的误差大约等于$0.028125<\dfrac{1}{2}\times10^{-1}$，因而它有3位有效数字。

2.1泰勒（Taylor）插值

将$f(x)$在x_0点的二次泰勒多项式记为$P_2(x)$,

$$P_2(x)=P_1(x)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

将$P_2(x)$作为$f(x)$的近似表达式，当x=115时，

$f(115)=\sqrt{115}\approx P_2(115)=10.75-0.028125=10.721$，误差估计为，

$$0<|R_2(x)|=\left|\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)^3\right|<\frac{f'''(x_0)}{6}(115-100)^3=0.000703125<\frac{1}{2}\times10^{-2},$$

所以，有4位有效数字。

2.1泰勒（Taylor）插值

泰勒插值存在的问题：

1.需要提供函数$f(x)$的前**n+1阶导数值**，比较苛刻，即使存在n+1阶导数，计算的工作量也比较大；

2.要求步长h=$|x-x_0|$为较小量，若h较大，则计算的误差就很大。

注：泰勒插值实质是用一个已知点x_0的函数值及各阶导数值来插值出其他点的函数值.

2.2 Lagrange插值

问题提出:

已知:函数$y=f(x)$在n+1个点$x_0,x_1,x_2,..x_n$上的函数值$y_0,y_1,y_2,\ldots,y_n$求任意一点x' (“$'$” 读作prime)处的函数值$f(x')$。

注：函数$y=f(x)$可能是未知的，也可能是已知的，但它比较复杂，很难计算其函数值 $f(x')$.

2.2 Lagrange插值

解决方法：

构造一个n次代数多项式函数$P_n(x)$ 来替代未知（或复杂）函数 $y=f(x)$,然后用$P_n(x')$作为函数值 $f(x')$的近似值。

设，

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

构造$P_n(x)$，也即确定n+1个多项式的系数$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$.

2.2 Lagrange插值

构造$P_n(x)$：

当多项式函数$P_n(x)$也同时过已知的n+1个点时，我们可以认为多项式函数$P_n(x)$逼近于原来的函数$f(x)$。根据这个条件，可以写出非齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^{\ 2} + \cdots + a_n x_0^{\ n} = y_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^{\ 2} + \cdots + a_n x_1^{\ n} = y_1 \\ \cdots\cdots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^{\ 2} + \cdots + a_n x_n^{\ n} = y_n \end{cases} \longleftarrow P_n(x_i) = f(x_i)$$

2.2 Lagrange插值

系数矩阵的行列式D为范德蒙行列式：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^{\ 2} & \cdots & x_0^{\ n} \\ 1 & x_1 & x_1^{\ 2} & \cdots & x_1^{\ n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^{\ 2} & \cdots & x_n^{\ n} \end{vmatrix}=\prod_{n\ge i>j\ge 0}\left(x_i-x_j\right)$$

故当n+1个点的横坐标$x_0,x_1,x_2,..,x_n$互异时，方程组系数矩阵的行列式D不等于零，故方程组有唯一解(克莱姆法则),即有以下结论。

结论：当n+1个点的横坐标$x_0,x_1,x_2,..x_n$互异时，则总能够构造唯一的n次多项式函数$P_n(x)$，使得$P_n(x)$也过这n+1个点。

2.2 Lagrange插值

系数求解存在的问题：

●当n较大时，利用克莱姆法则解n+1阶线性方程组来求取未知系数a_i的计算量很大。

求系数的新构造方法：

（1） Lagrange插值方法

（2）牛顿插值方法

2.2 Lagrange插值

1、Lagrange线性插值：

已知函数$y=f(x)$的取值如下表所示：

x	x_0	x_1
y	y_0	y_1

求：构造一次多项式$P_1(x)$,使其在插值节点x_i上满足$P_1(x_i)=f(x_i)$。

2. 2 Lagrange插值

直线的两点式表达式： $\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0} \longrightarrow \dfrac{p_1(x)-y_0}{x-x_0}=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$

$$p_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

右端通分, 合并同类项

$$p_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)$$

称一次多项式 $l_0(x)$ 和 $l_1(x)$ 为插值基函数：

$$l_0(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1} \qquad l_1(x)=\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

其中，一次多项式插值系数： y_0, y_1。

2.2 Lagrange插值

例：已知 $\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$， 求 $y=\sqrt{115}$

解： $x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11$

$$P_1(x)=\frac{x-121}{100-121}\times 10+\frac{x-100}{121-100}\times 11$$

得：

$$f(115)\approx P_1(115)=10.71428571428572$$

2、Lagrange抛物线插值

已知函数$y=f(x)$的值如表所示，

x	x_0	x_1	x_2
y	y_0	y_1	y_2

求：构造二次多项式$P_2(x)$,使其在插值节点上满足$P_2(x_i)=f(x_i)$。

2.2 Lagrange插值

参考推导一次插值多项式$P_1(x)$的方式，给出二次插值多项式表达式：

$$P_2(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x)$$

该二次多项式由二次插值基函数$l_i(x)(i=0,1,2)$的线性组合而成，

如何求基函数$l_i(x)$？

它应该满足：$l_i(x) = \begin{cases} 1, (x = x_i) \\ 0, (x\text{在其它节点，即}x \neq x_i) \end{cases}$

2.2 Lagrange插值

据此构造基函数（会推导）：

$$l_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \qquad l_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$$

$$l_2(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

将插值基函数$l_i(x)$代入$P_2(x)$, 就构建出二次Lagrange抛物线插值函数：

$$P_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

2.2 Lagrange插值

例：已知$\sqrt{100}=10$,$\sqrt{121}=11$，$\sqrt{144}=12$, 求$y=\sqrt{115}$ 。

解：构造二次多项式函数$P_2(x)$,使得它过已知的（100,10）、（121,11）和（144,12）三个点，于是有二次Lagrange插值多项式：

$$P_2(x)=\frac{(x-121)(x-144)}{(100-121)(100-144)}\times 10+\frac{(x-100)(x-144)}{(121-100)(121-144)}\times 11+\frac{(x-100)(x-121)}{(144-100)(144-121)}\times 12$$

得：$f(115)\approx P_2(115)=10.72275550536420$

3、n次Lagrange 插值多项式

已知函数$y=f(x)$在n+1个点$x_0,x_1,\ldots,x_n$上的函数值$y_0,y_1,\ldots,y_n$，利用这些数据可以构造出代数插值多项式$P_n(x)$。为此仿照抛物线Lagrange插值多项式的方法，求出相应的n次多项式函数,

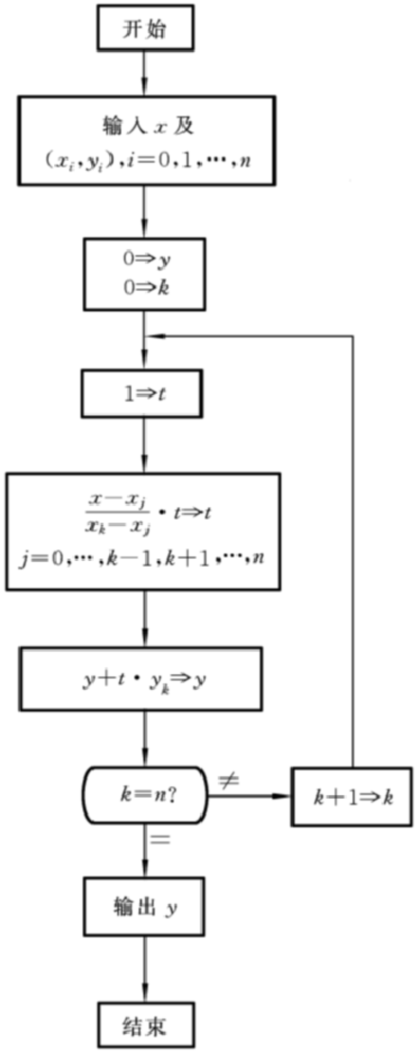
$$P_n(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+y_2l_2(x)+\cdots+y_nl_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_kl_k(x)$$

参考抛物线插值基函数的求法，x_i节点上n次插值基函数可写成，

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

2.2 Lagrange插值

Lagrange插值的算法流程图



2.2 Lagrange插值

总结：

拉格朗日插值公式特点：

1. 每一项中的分子是关于x的n次多项式，分母是一个常数；

2. 每一项的系数为y_k；

3. 每一项的分子和分母的形式非常相似。

2.3 插值余项

1、余项定理

$P_n(x)$近似$f(x)$，设产生的截断误差为：

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

则称$R_n(x)$为n次多项式$P_n(x)$的插值余项。

Lagrange余项定理（定理3）：

当函数$f(x)$足够光滑即满足以下条件，

1. $f(x)$在区间[a,b]上连续；

2. $f(x)$具有直至n+1阶导数，则总存在相应的点ξ，$\xi \in [a,b]$使得，

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中，$\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$

2.3 插值余项

由余项公式知，虽然$f^{(n+1)}(\xi)$ 存在，但ξ的值较难确定，

办法：

在区间[a,b]上估算出$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|$的上界M，即：

$$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le M$$

则可以得到截断误差的范围：

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

2.3 插值余项

注1：当n=1时，线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1),\ \xi\in[x_0,x_1]$$

注2：当 n=2 时，抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),\ \xi\in[x_0,x_2]$$

注3：插值余项$R_n(x)$中含有高阶导数$f^{(n+1)}(\xi)$,这就要求$f(x)$足够光滑，因此，拉格朗日插值只适应于近似光滑性好的函数。