2022年秋季专业基础课程

场 论

授课教师：彭淼 谭茂金

地球物理与信息技术学院

静电场

第5讲 真空中的静电场

第6讲 电介质的极化

第7讲 电介质中的静电场

本讲内容

1　电介质的极化现象

2　极化强度矢量

3　极化电荷

4　电位移矢量

5　电介质的本构关系

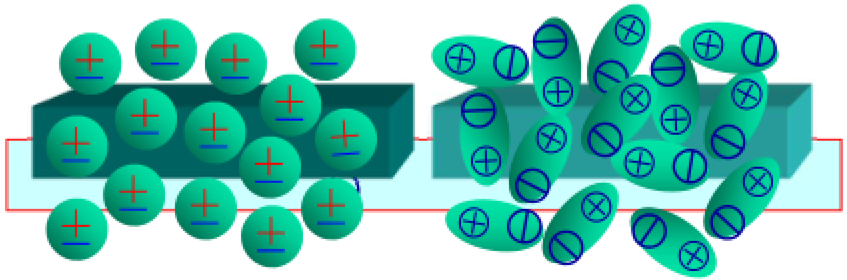
1 电介质的极化现象

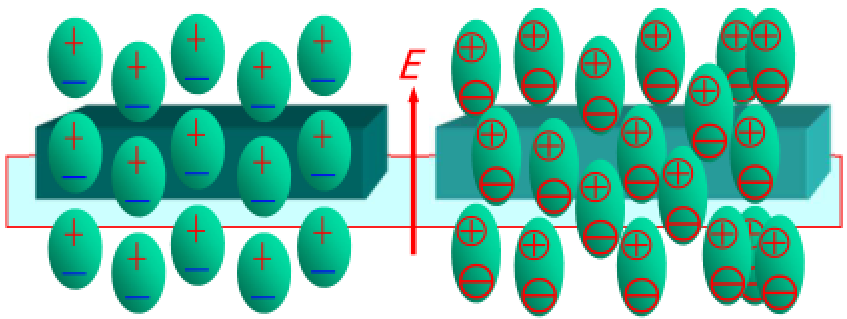
电介质的分子分为无极分子和有极分子。

电介质的极化：在电场作用下，介质中无极分子的束缚电荷发生位移，有极分子的固有电偶极矩的取向趋于电场方向。

位移极化：无极分子的极化

取向极化：有极分子的极化





1 电介质的极化现象

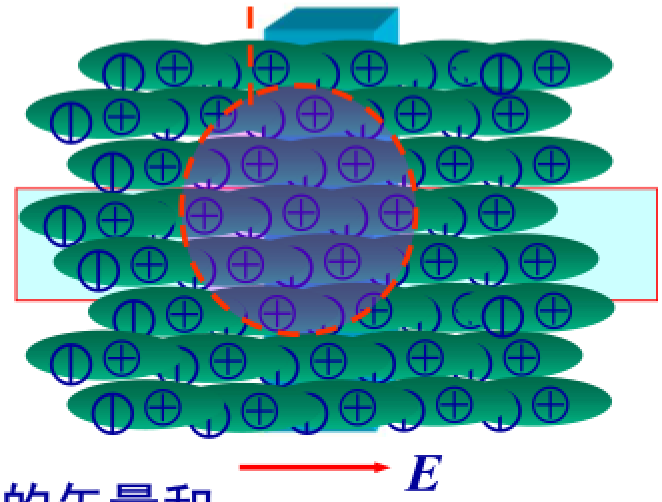
在介质中任意取一块很小体积考虑，设其中包含有n 个分子，n 是很大的数，用 $\boldsymbol{p}_i$表示任一个分子的偶极矩。

- 无极分子介质分子在无外电场时，其正负电荷中心重合，故 $\boldsymbol{p}_i = 0$；
- 有极分子介质分子在无外电场时，其正负电荷中心不重合，即 $\boldsymbol{p}_i \neq 0$，但由于分子偶极矩排列紊乱，所以各分子的偶极矩的矢量和 $\sum \boldsymbol{p}_i = 0$ 。
- 不论何种介质，在外电场中受到极化，极化的介质中 $\sum \boldsymbol{p}_i \neq 0$。
- 在同样的条件下，外电场愈强，$\sum \boldsymbol{p}_i$的数值愈大，即在ΔV 体积中，所有分子的偶极矩矢量和愈大。

2 极化强度矢量

- **极化强度矢量*P***是描述介质各点极化程度的物理量，定义为

$$\boldsymbol{p} = \frac{1}{n}\sum p_i$$



$$\boldsymbol{P} = \lim_{\Delta V \to \in} \frac{\sum \boldsymbol{p}_i}{\Delta V}$$

式中，$\boldsymbol{p}_i = q_i \boldsymbol{l}_i$为分子的电偶极矩；$\in$是一个极小体积。$\Delta V$是趋于宏观尺度的零，而不是微观尺度的零。

- ***P***的物理意义：单位体积内分子电偶极矩的矢量和。
- 极化强度与电场强度有关，其关系一般比较复杂。在线性、各向同性的电介质中，***P***与电场强度成正比，即

$$\boldsymbol{P} = \chi_e \varepsilon_0 \boldsymbol{E}$$

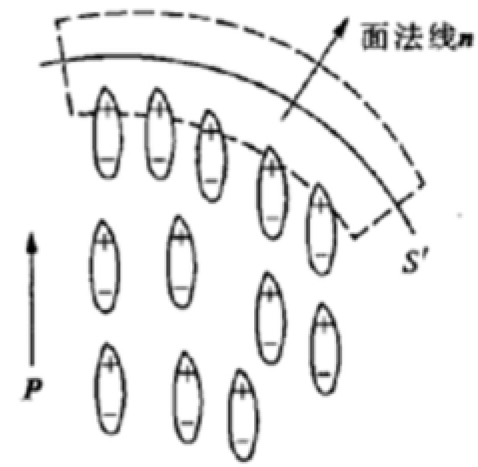
式中，χ_e为电介质的电极化率，$\chi_e > 0$。

2 极化强度矢量

某介质球体，半径为 a，如果它在外电场中均匀极化，极化强度为$\boldsymbol{P}$，那么球体的偶极矩为 $\frac{4}{3}\pi a^3\boldsymbol{P}$ 。

$\boldsymbol{S}$ 是介质体表面的一小部分，此介质体处于均匀极化状态，它的极化强度为 $\boldsymbol{P}$，图中画出了部分分子偶极子。

极化的介质体表面有面电荷，此面电荷密度与 $\boldsymbol{P}$ 、$\boldsymbol{n}$ 的交角有关。



- 当 $\boldsymbol{P}$与 $\boldsymbol{n}$ 同方向时，电荷的面密度最大；
- 当 $\boldsymbol{P}$与 $\boldsymbol{n}$ 垂直时，电荷面密度为零；
- 均匀极化的介质体，体内不出现(宏观的)体电荷；
- 不均匀极化的介质体，不仅表面上出现面电荷，体内还出现体电荷。

➢ 介质极化后而出现的电荷称为束缚电荷，用 σ_P、ρ_P分别表示其面密度和体密度。

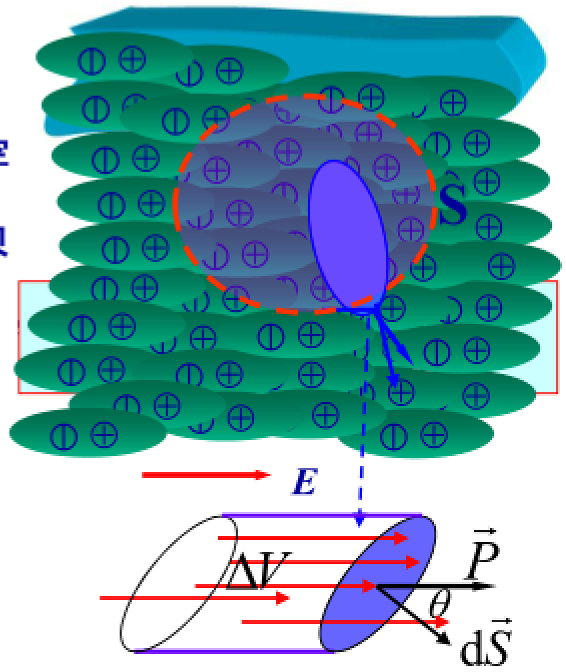
➢ 束缚电荷产生的电场称之为附加(感应)场，用 U'、E' 分别表示其电势和场强度。

3 极化电荷

由于极化，正负电荷发生位移，在电介质内部可能出现净余的极化电荷分布，同时在电介质的表面上有面分布的极化电荷。

3.1 极化电荷体密度

在电介质内任意作一闭合面S，只有电偶极矩穿过S 的分子对 S 内的极化电荷有贡献。由于负电荷位于斜柱体内的电偶极矩才穿过小面元dS因此dS 对极化电荷的贡献为



$$dq_P = nq_il_idScos\theta = \boldsymbol{P}dScos\theta = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{dS}$$

S所围的体积内的极化电荷q_P为

$$q_P = -\oint_S \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_V \nabla\cdot\boldsymbol{P}dV \quad \Rightarrow \quad \rho_P = -\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

3 极化电荷

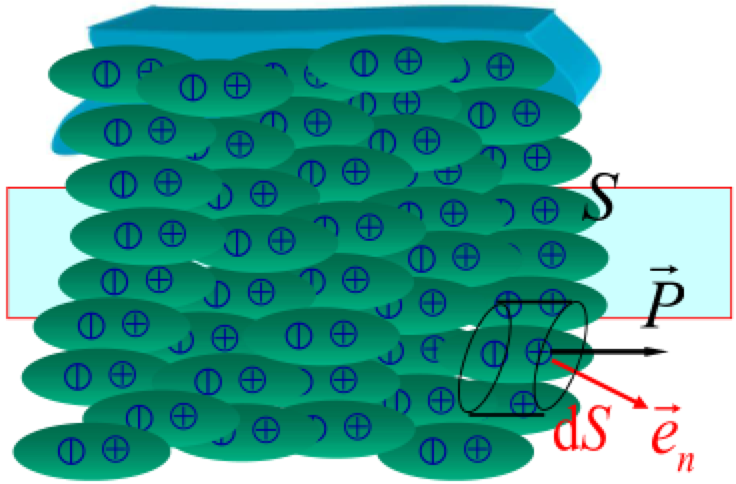
3.2 极化电荷面密度

紧贴电介质表面取如图所示的闭曲面，则穿过面积元$d\boldsymbol{S}$的极化电荷为

$$dq_P = nqldScos\theta = \boldsymbol{P}dScos\theta = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{dS}$$

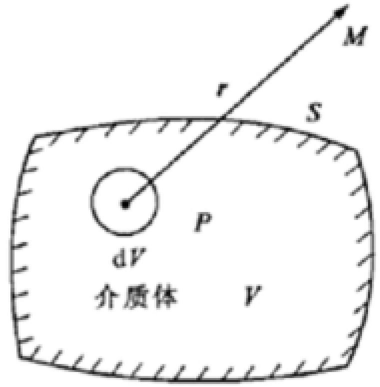
故得到电介质表面的极化电荷面密度为

$$\rho_{SP} = \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n$$



3 极化电荷

3.3 极化电荷与极化强度的关系推导



体积为V的介质体，表面积为S，极化后极化强度为 $\boldsymbol{P}$，根据电势的公式，得到某点M的附加电势 U'

$$U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\int_V \frac{\rho_P}{r}\mathrm{d}V + \oint_S \frac{\sigma_P}{r}\mathrm{d}S\right)$$

式中r为观察点与场源点之间的距离。

从电偶极子体分布的观点来计算附加电势。在介质体上任取一小块体积dV，这一小块介质体可以看作一个宏观的电偶极子，偶极矩为 Pdv 。根据偶极子电势的公式，得出它产生的附加电势为

$$\mathrm{d}U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{P}\mathrm{d}V\right)\bullet\vec{r}}{r^3}$$

那么整块介质极化后所出现的附加电势为

$$U' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\vec{P}\bullet\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V$$

3 极化电荷

因为 $\dfrac{\vec{r}}{r^3}=\nabla\dfrac{1}{r}$，而(2.3-3)式中的被积函数

$$\frac{\vec{P}\bullet\vec{r}}{r^3}=\vec{P}\bullet\nabla\frac{1}{r}=\nabla\bullet\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)-\frac{\nabla\bullet\vec{P}}{r}$$

因此M 的附加电势 U′可写为

$$U'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\int_V\nabla\bullet\left(\frac{\vec{P}}{r}\right)\mathrm{d}V+\int_V\frac{-\nabla\bullet\vec{P}}{r}\mathrm{d}V\right]$$

用高斯定理将第一项变换为面积分，得到

$$U'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\oint_S\frac{\vec{P}\bullet\vec{n}}{r}\mathrm{d}S+\int_V\frac{-\nabla\bullet\vec{P}}{r}\mathrm{d}V\right)$$

将上式与上页中 U′式对比，得束缚电荷密度与极化强度的关系为

$$\rho_P=-\nabla\bullet\vec{P}\quad,\quad\sigma_P=P_n$$

4 电位移矢量

介质的极化过程包括两个方面：

- 外加电场的作用使介质极化，产生极化电荷；
- 极化电荷反过来激发电场，两者相互制约，并达到平衡状态。无论是自由电荷，还是极化电荷，它们都激发电场，服从同样的库仑定律和高斯定理。

介质中的电场应该是外加电场和极化电荷产生的电场的叠加，应用高斯定理得到：

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\oint_V (\rho + \rho_P)dV \Longrightarrow \varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \rho + \rho_P$$

自由电荷和极化电荷共同激发的结果

4 电位移矢量

将极化电荷体密度表达式 $\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ 代入$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho + \rho_P$，有

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho - \nabla \cdot \boldsymbol{P}$$

引入电位移矢量（单位为C/m^2）

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

则有 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$

其积分形式为 $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_V \rho dV$

任意闭合曲面电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的通量等于该曲面包含自由电荷的代数和

小结：静电场是有源无旋场，电介质中的基本方程为

微分形式： $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$ $\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$

积分形式： $\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_V \rho dV$ $\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$

5 电介质的本构关系

极化强度$\boldsymbol{P}$与电场强度$\boldsymbol{E}$之间的关系由介质的性质决定。对于线性各向同性介质，$\boldsymbol{P}$和$\boldsymbol{E}$有简单的线性关系

$$\boldsymbol{P} = \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E}$$

在这种情况下

$$\boldsymbol{D} = (1+\chi_e)\varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}$$

其中$\varepsilon = (1+\chi_e)\varepsilon_0$称为介质的介电常数，$\varepsilon_r = 1+\chi_e$称为介质的相对介电常数（$\chi_e$无量纲，为电介质的极化率）。

* 介质有多种不同的分类方法，如：

- 均匀和非均匀介质
- 各向同性和各向异性介质
- 时变和时不变介质
- 线性和非线性介质
- 确定性和随机介质

谢谢！