《地球物理计算方法》

第3章　常微分方程的差分法

3.5 收敛性与稳定性

1、收敛性

1．定义：对于任何固定的$x_n = x_0 + nh$，当步长$h \to 0$时，有数值解$y_n \to$精确解$y(x_n)$，则称此方法收敛.

以欧拉公式为例(证明见板书）：

(1) (P97)对于初值问题（解存在且唯一）：

$$y' = f(x, y) \qquad y(x_0) = y_0$$

如果存在实数$L>0$，使得，

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \qquad \forall y_1, y_2 \in R$$

f关于L满足利普希茨条件，L为f的利普希茨常数。

3.5 收敛性与稳定性

欧拉格式的收敛性见板书，P112.

3.5 收敛性与稳定性

2、稳定性

定义：如果一种差分方法在某个节点x_n上的值y_n有大小为δ的扰动时，于其后的各节点x_m（m>n）上的值y_m产生的偏差都不大于δ则称这种方法是稳定的。

为简单起见，考察下列模型

$$y' = \lambda y \quad , \quad (\lambda < 0)$$

1、显式Euler格式的稳定性

设模型方程 $y' = \lambda y$

Euler公式：$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(\lambda y_n)$

$$= (1 + h\lambda) y_n$$

设节点值 y_n 上有大小为 ε_n 的扰动，此误差的传播使节点值

y_{n+1} 产生大小为 ε_{n+1}的扰动值。

3.5 收敛性与稳定性

若Euler格式的计算过程不再引入新的误差，则

$$y_{n+1}+\varepsilon_{n+1}=(1+h\lambda)(y_n+\varepsilon_n)$$

即

$$\varepsilon_{n+1}=(1+h\lambda)\varepsilon_n$$

误差方程

所以要使 $|\varepsilon_{n+1}|\le|\varepsilon_n|$ 需满足 $|1+h\lambda|\le 1$ **，即** $0<h\le-\frac{2}{\lambda}$

此时*Euler*方法是稳定的.这表明*Euler*方法是条件稳定的.

3.5 收敛性与稳定性

例　对下列初值问题，求欧拉方法的稳定性条件

$$\begin{cases} y' = -20y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解：　　因为 $\lambda = -20$ ，所以取步长为:

$$0 < h \le -\frac{2}{\lambda} = -\frac{2}{-20} = 0.1$$

0<h<=0.1时欧拉方法是条件稳定。

3.5 收敛性与稳定性

2、隐式Euler格式的稳定性

模型方程 $y' = \lambda y$ 的计算表达式为，

$$y_{n+1} = y_n + h(\lambda y_{n+1}), \quad y_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} y_n$$

设节点值 y_n 上有大小为 ε_n 的扰动，此误差的传播使节点值 y_{n+1} 产生大小为 ε_{n+1} 的扰动值，若计算过程不再引进新的误差，则

$$y_{n+1} + \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda}(y_n + \varepsilon_n) \quad \text{即} \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{1}{1-h\lambda} \varepsilon_n$$

3.5 收敛性与稳定性

由于$\lambda < 0$，则恒有 $\left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| \le 1$，故恒有 $\left|\varepsilon_{n+1}\right| \le \left|\varepsilon_{n}\right|$。

因此，隐式Euler格式是绝对稳定的（无条件稳定的）（对任何h>0）。

3.6 边值问题

- 数学物理方程的定解问题：

$$\begin{cases} \text{微分方程} \\ \text{定解条件} \end{cases}$$

- 微分方程的定解条件分为：

  初始条件：$u(t = t_0)=u_0$

  边界条件：$u(x=x_0)=u_0$

3.6 边值问题

考察如下边值问题

$$\begin{cases} y''+p(x)y'+q(x)y=r(x), \ a<x<b \\ y(a)=\alpha, y(b)=\beta \end{cases}$$

差商直接逼近导数， 取

$$y'(x) \approx \frac{y(x+h)-y(x-h)}{2h}$$

$$y''(x)=[y'(x)]' \approx \frac{y'(x+h)-y'(x)}{h} = \frac{\dfrac{y(x+h)-y(x)}{h} - \dfrac{y(x)-y(x-h)}{h}}{h}$$

$$= \frac{y(x+h)-2y(x)+y(x-h)}{h^2}$$

3.6 边值问题

设将求解区间[*a*, *b*]划分为*N*等分，步长$h=(b-a)/N$，节点$x_n=x_0+nh(n=0,1, \ldots, N)$，用差商代替导数，可将边值问题离散化，导出如下差分方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{y_{n+1}-2y_n+y_{n-1}}{h^2}+p_n\dfrac{y_{n+1}-y_{n-1}}{2h}+q_ny_n=r_n \\ y_0=\alpha, y_N=\beta, n=1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$$

3.6 边值问题

整理得到方程组，

$$
\begin{cases}
(-2+h^2q_1)y_1+(1+\dfrac{h}{2}p_1)y_2=h^2r_1-(1-\dfrac{h}{2}p_1)\alpha \\
(1-\dfrac{h}{2}p_n)y_{n-1}+(-2+h^2q_n)y_n+(1+\dfrac{h}{2}p_n)y_{n+1}=h^2r_n \\
\qquad\qquad\qquad\qquad n=2,3,\cdots,N-2 \\
(1-\dfrac{h}{2}p_{N-1})y_{N-2}+(-2+h^2q_{N-1})y_{N-1}=h^2r_{N-1}-(1+\dfrac{h}{2}p_{N-1})\beta
\end{cases}
$$

- 是隐格式，只能组成一个关于y_n的线性方程组；
- 该方程组是三对角型，可以采用追赶法求解。

例题选讲

例题选讲3.1：题1，P117页，板书。

例题选讲3.2：题1, 2, 3, 4, 5. P120页，板书1, 5。