2022年秋季专业基础课程

场 论

授课教师：彭淼 谭茂金

地球物理与信息技术学院

稳定电流磁场

第10讲 稳定电流磁场的基本规律

第11讲 磁矢势和磁标势

第12讲 磁介质的磁化和基本规律

第13讲 磁介质中稳定电流磁场的求解

本讲内容

1　磁介质的磁化

2　磁介质中电流磁场基本规律

1 磁介质的磁化

1.1 磁介质的磁化

原子中的电子不断作绕核和自旋运动，相当于一个元电流，具有磁矩。没有外磁场时，这些磁矩取向是随机的，它们的矢量和为零，并不呈现宏观磁矩。当有外磁场时，这些磁矩都按一定方向排列，它们的矢量和不为零，而呈现宏观磁矩。这就是磁介质的磁化现象。

磁介质磁化的强弱，通常用磁化强度矢量M来描述.我们定义单位体积的磁矩为磁化强度矢量，即

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{m}_i}{\Delta V}$$

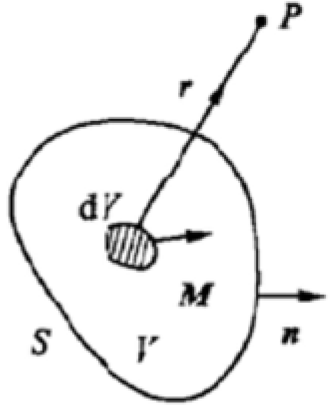
$\boldsymbol{M}$的单位是 A/m。

1 磁介质的磁化

1.2 磁化介质磁场的矢势

磁化介质可看成是无数元电流的体分布，体积为V的磁化介质在观察点P产生磁场的矢势为

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{M}\times\vec{r}}{r^3}dV$$



上式被积函数可以用下面矢量分析公式来转换

$$\nabla\times\left(\frac{\vec{M}}{\vec{r}}\right)=\frac{1}{r}\nabla\times\vec{M}+\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\times\vec{M}=\frac{\vec{r}\times\vec{M}}{r^3}+\frac{\nabla\times\vec{M}}{\vec{r}}$$

上式是对场源点求旋度和梯度。 因此

$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla\times\vec{M}}{r}dV-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)dV$$

上式右边第二个积分项可以变换成包围体积V的界面S的面积分，即

$$\int_V \nabla\times\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)dV=\oint_S \frac{\vec{n}\times\vec{M}}{r}dS$$

故得

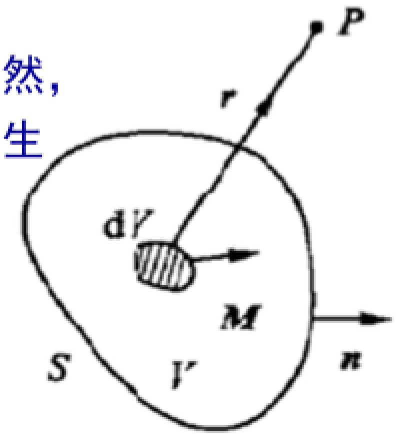
$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\nabla\times\vec{M}}{r}dV+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S \frac{\vec{M}\times\vec{n}}{r}dS$$

S是包围体积V的表面，$\boldsymbol{n}$是表面的外法线，这就是磁化介质产生磁场的矢势。

1 磁介质的磁化

1.3 磁化电流

将磁场的矢势公式与电流磁场矢势的积分式对比，显然，磁化介质产生磁场的矢势和电流体密度及电流面密度产生磁场的矢势相同，即



$$\vec{A}=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{j_m}dV}{r}+\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_S\frac{\vec{i_m}dS}{r}$$

这就是说，磁化介质可以用体电流密度 $\boldsymbol{j}_m$和面电流密度$\boldsymbol{i}_m$来代替，体电流密度和面电流密度与磁化强度$\boldsymbol{M}$的联系可表示为

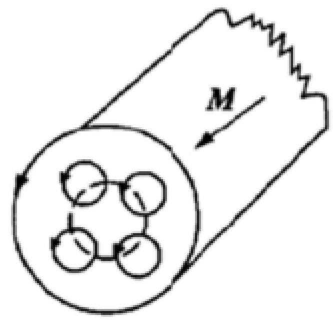
$$\vec{j_m}=\nabla\times\vec{M}$$

$$\vec{i_m}=\vec{M}\times\vec{n}$$

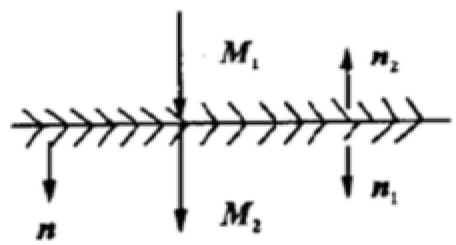
由于体电流密度$\boldsymbol{j}_m$和面电流密度$\boldsymbol{i}_m$是磁介质磁化后出现的与磁化强度$\boldsymbol{M}$联系着的宏观分子电流，故称之为磁化电流或宏观分子电流。

1 磁介质的磁化

从物理上分析磁化电流的出现。沿轴向磁化的磁化圆柱体，则圆柱体中的分子电流磁矩整齐排列。如果磁化是均匀的，内部每一点都有大小相等、方向相反的电流相互抵消，仅表面有宏观分子电流，这就是出现面磁化电流的原因。如果磁化是不均匀的，则由于每个分子电流不同，不能相互抵消，如图中虚线部分所示，故体内出现宏观分子电流，这就是出现体磁化电流的原因。



如图，假定有分区均匀的磁介质，磁介质1中的磁化强度为$\boldsymbol{M}_1$，磁介质2中的磁化强度为$\boldsymbol{M}_2$，则磁介质1和磁介质2的表面均出现磁化面电流，其面密度分别为$\boldsymbol{M}_1\times\boldsymbol{n}_1$和$\boldsymbol{M}_2\times\boldsymbol{n}_2$，故总磁化电流面密度为



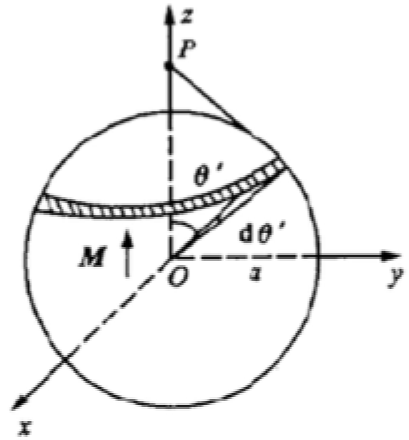
$$\overrightarrow{i_m}=\overrightarrow{M_1}\times\overrightarrow{n_1}+\overrightarrow{M_2}\times\overrightarrow{n_2}$$

由于$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}_2=-\boldsymbol{n}$，故得 $\boldsymbol{i}_m=(\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_2)\times\boldsymbol{n}$

由此可知，磁化电流体密度$\boldsymbol{j}_m$，决定于磁化强度$\boldsymbol{M}$的旋度，而磁化电流面密度$\boldsymbol{i}_m$则决定于突变面两侧磁化强度之差。

1 磁介质的磁化

例题1 均匀磁化球体的磁场。



解:半径为a的均匀磁化球体，设磁化强度$\boldsymbol{M}$沿z轴正方向，球心在坐标原点，由于$\boldsymbol{M}$是常数，故磁化电流体密度$\boldsymbol{j}_m = 0$，仅有磁化电流面密度$\boldsymbol{i}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$，其大小为$\boldsymbol{i}_m = \boldsymbol{M} sin\theta'$，在$\theta'$处取一宽度为$ad\theta'$的电流环，它在观察点$\boldsymbol{P}$产生的磁感应强度仅有$z$分量。

$$dB_z = \frac{\mu_0 a^3 M \sin^3\theta' d\theta'}{2\left(a^2 + z^2 - 2az\cos\theta'\right)^{3/2}}$$

故整个球面上的磁化面电流在观察点$\boldsymbol{P}$产生的磁感应强度为

$$B_z = \frac{\mu_0 M a^3}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^3\theta' d\theta'}{\left(a^2 + z^2 - 2az\cos\theta'\right)^{3/2}}$$

1 磁介质的磁化

为了求上面的积分，令$\mu=\cos\theta'$，则 $d\mu=-\sin\theta' d\theta', \sin^2\theta'=1-\mu^2$

变换积分变量得

$$B_z=\frac{\mu_0 Ma^3}{2}\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-\mu^2\right)d\mu}{\left(a^2+z^2-2az\mu\right)^{3/2}}$$

这个积分可以查表得到

$$-\frac{2\left(a^2+z^2-2az\mu\right)^{1/2}}{3z^3a^3}\left[a^2+z^2+az\mu+\frac{3a^2z^2\left(\mu^2-1\right)}{2\left(a^2+z^2-2az\mu\right)}\right]\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{2}{3z^3a^3}\left\{\left(a^2+z^2\right)\cdot\left[|z+a|-|z-a|\right]-az\left[|z+a|+|z-a|\right]\right\}$$

(1)P点在球外，即 $z>a$，因此 $|z-a|=z-a$，代入得积分值为 $4/\left(3z^3\right)$

$$B_z=\frac{2\mu_0 Ma^3}{3z^3}$$

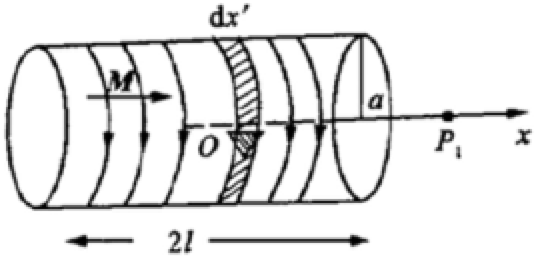
(2)P点在球内，即 $z<a$ ，因此 $|z-a|=a-z$，代入得积分值为 $4/(3a^3)$，得

$$B_z=\frac{2}{3}\mu_0 M$$

1 磁介质的磁化

例题2 均匀磁化柱体的磁场。

长度为$2l$、半径为a的均匀磁化圆柱体，$\boldsymbol{M}$沿柱轴方向，圆柱轴与x轴重合，中心在坐标原点0上，求圆柱体内部和外部轴上任一点的磁感应强度$\boldsymbol{M}$ 。



解：由于$\boldsymbol{M}$是常数，故磁化电流体密度$\boldsymbol{j}_m = 0$，仅有面磁化电流，其面密度为$\boldsymbol{i}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$，大小为$M$，方向为沿右手螺旋方向环绕柱体侧面。在$x'$处取一宽度为$dx'$的磁化电流环，电流强度为$Mdx'$，它在柱外轴上$P_1$点产生的磁感应强度仅有$x$分量，利用第十讲例题2的结果得到

$$dB_1 = \frac{\mu_0 a^2 M dx'}{2\left[a^2 + \left(x - x'\right)^2\right]^{3/2}}$$

1 磁介质的磁化

整个圆柱体的磁化面电流在柱外轴上P_1点产生的磁感应强度为

$$B_1=\int_{-l}^{+l}\frac{\mu_0 a^2 M dx'}{2\left[a^2+\left(x-x'\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 a^2 M}{2}\cdot\frac{\left(x-x'\right)}{a^2\left[\left(x-x'\right)^2+a^2\right]^{1/2}}\int_{-l}^{+l}$$

$$=\frac{\mu_0 M}{2}\left[\frac{l-x}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}}+\frac{l+x}{\sqrt{a^2+(l+x)^2}}\right]$$

在柱内轴上，P_2点的磁感应强度也仅有x分量，同求柱外轴上P_1点磁场的方法一样得到

$$B_2=\int_{-l}^{+l}\frac{\mu_0 a^2 M dx'}{2\left[a^2+\left(x'-x\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{\mu_0 a^2 M}{2}\cdot\frac{\left(x'-x\right)}{a^2\left[\left(x'-x\right)^2+a^2\right]^{1/2}}\int_{-l}^{+l}$$

$$=\frac{\mu_0 M}{2}\left[\frac{l-x}{\sqrt{a^2+(l-x)^2}}+\frac{l+x}{\sqrt{a^2+(l+x)^2}}\right]$$

1 磁介质的磁化

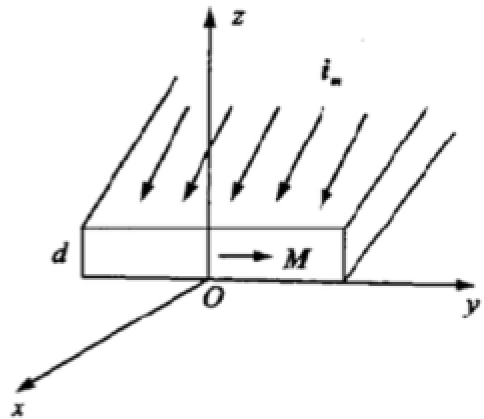
例题3 无限大均匀磁化薄板.

解：一无限大均匀磁化薄板，厚度为d，底面与xOy平面重合，磁化强度$\boldsymbol{M}$沿y轴的正方向。由于$\boldsymbol{M}$是常数，故磁化电流体密度$\boldsymbol{j}_m = 0$，仅有磁化面电流，其面密度为$\boldsymbol{i}_m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}$，顶面上磁化电流沿$x$轴正向，底面上磁化电流沿$x$轴负向。

利用第10讲例3得：电流面密度为$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 i}{2}\boldsymbol{e}_x$

顶面上磁化电流（$\boldsymbol{e}_x$方向）产生的磁感应强度为

$$\vec{B}_1 = \begin{cases} \frac{\mu_0 M}{2}\vec{e}_y & (z<d) \\ -\frac{\mu_0 M}{2}\vec{e}_y & (z>d) \end{cases}$$



式中，$\boldsymbol{e}_y$是y轴的单位矢量。

底面上磁化电流（$-\boldsymbol{e}_x$方向）产生的磁感应强度

$$\vec{B}_2 = \begin{cases} \frac{\mu_0 M}{2}\vec{e}_y & (z>0) \\ -\frac{\mu_0 M}{2}\vec{e}_y & (z<0) \end{cases}$$

因此，均匀磁化薄板内外磁感应强度为 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \begin{cases} \mu_0 M\vec{e}_y & (0<z<d) \\ 0 & (z<0, z>d) \end{cases}$

2 磁介质中电流磁场基本规律

磁介质可分为顺磁介质、反磁介质和铁磁介质。顺磁介质$\mu_r > 1$；反磁介质$\mu_r < 1$；而铁磁介质 $\mu_r \gg 1$，且不是常数，而是由许多复杂因素决定。

2.1 磁介质中磁感应强度的散度

当磁介质存在时，磁感应强度$\boldsymbol{B}$不仅由传导电流决定，并且还由磁化电流的分布所决定。两个电流产生的磁场的散度都为零，因此

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

若将上式对体积求积分，则

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = 0$$

根据高斯定理得

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{B}) dV = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

故得

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

式中，S是包围任意体积的表面。

这表明，在磁介质中通过任意闭合曲面的磁通量为零，即磁感应线是闭合的，是无头无尾的，因此，磁介质中的稳定电流磁场与真空中一样，均为无源场。

2 磁介质中电流磁场基本规律

2.2 磁介质中磁感应强度的旋度

当磁场中有磁介质存在时，在任意点处有两种电流存在，一种是传导电流，另一种是磁化电流，其体密度分别为 $\boldsymbol{j}_f$和$\boldsymbol{j}_m$，因此，总电流电流密度为

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_m$$

将它代入$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j}$ 中，得

$$\vec{j} = \vec{j}_f + \vec{j}_m$$

因此，磁感应强度的旋度，取决于传导电流密度$\boldsymbol{j}_f$和磁化电流密度$\boldsymbol{j}_m$ 。传导电流比较容易观测，而磁化电流则难以测量或求取，设法消去$\boldsymbol{j}_m$ ，就会使磁场简便得多。

因为$\boldsymbol{j}_m = \nabla \times \boldsymbol{M}$，故上式可以写成

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_f + \nabla \times \vec{M})$$

即

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{j}_f$$

2 磁介质中电流磁场基本规律

这个式子的右边仅出现传导电流密度，如果引入 $\vec{H}=\dfrac{\vec{B}}{\mu_0}-\vec{M}$

称为磁场强度矢量，则

$$\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f$$

即当有磁介质存在时，磁场强度***H***的旋度等于传导电流密度，称为磁介质中环路定理的微分形式。这样，在磁介质中***H***的旋度仅与传导电流密度有关，而***B***的旋度却与传导电流密度和磁化电流密度有关。可以看到，引入磁场强度***H***的概念之后，使磁介质中磁场的研究大大简化。

磁介质中环路定理的积分形式可以从对上式面积分得到，即

$$\int_S\left(\nabla\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}=\int_S\vec{j}_f\cdot d\vec{S}=\vec{I}_f$$

根据斯托克斯定理得

$$\oint_L\vec{H}\cdot d\vec{l}=\vec{I}_f$$

它表示磁介质中任意闭合回路***H***的环流等于回路所包围的传导电流。称为磁介质中环路定理的积分形式。

2 磁介质中电流磁场基本规律

2.3 *B*和*H*的关系

引入磁场强度$\boldsymbol{H}$使磁介质中磁场研究大为简化，但是代表磁场的物理量是$\boldsymbol{B}$而不是$\boldsymbol{H}$，即，在磁介质中的$\boldsymbol{B}$是真实物理量，$\boldsymbol{H}$是一个辅助物理量。

对于各向同性线性磁介质，磁化强度$\boldsymbol{M}$与磁场强度$\boldsymbol{H}$之间有线性关系

$$\vec{M} = \chi \vec{H}$$

χ称为磁化率。顺磁介质的磁化率是正的，也就是说磁化强度$\boldsymbol{M}$的方向和磁场强度$\boldsymbol{H}$的方向相同;反磁介质的磁化率是负的，也就是说磁化强度$\boldsymbol{M}$的方向和磁场强度$\boldsymbol{H}$的方向相反。顺磁介质和反磁介质的磁化率χ 一般都很小。

将上式代入$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0} - \boldsymbol{M}$中，得到

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 (1+\chi) \vec{H}$$

令

$$\mu_r = 1+\chi, \quad \mu = \mu_0 \mu_r$$

μ_r和μ分别为磁介质的相对磁导率和磁导率。μ_r是一个无量纲的纯数，顺磁介质$\mu_r > 1$，反磁介质$\mu_r < 1$。

将以上两式代入$\boldsymbol{B}$中，得

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

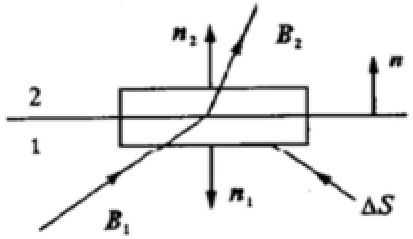
2 磁介质中电流磁场基本规律

2.4 磁介质分界面上$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的边值关系

在不同磁介质的分界面上，磁介质性质有突变，所以磁场也会有突变，场的微分方程失去意义。从场的积分方程可导出磁介质分界面上$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的边值关系。

(1) $\boldsymbol{B}$的法向分量

在磁介质的分界面上做一个扁平的小匣子，将对应$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$的积分形式$\oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=0$用到匣面上，当厚度趋于零时，对侧面积分趋于零，对上下底积分得



于是得到 $$\vec{B}_1\cdot\vec{n}_1\Delta S+\vec{B}_2\cdot\vec{n}_2\Delta S=0$$

由于 $$\vec{n}_1=-\vec{n},\vec{n}_2=\vec{n}$$

代入上式，得 $$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0$$

注意：式中的界面法线方向$\boldsymbol{n}$是从磁介质1指向磁介质2的。上式说明在磁介质分界面上，$\boldsymbol{B}$的法向分量是连续的。

2 磁介质中电流磁场基本规律

(2) ***H*的切向分量**

在磁介质的分界面上做一狭窄的长方形回路，设界面上有面传导电流存在，其面电流密度为$\boldsymbol{i}_f$。将积分形式$\oint_L Hdl = I_f$ 运用到回路上。另外，由于$\boldsymbol{i}_f$是回路包围的总电流，于是得到

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{t}_1 \Delta l + \vec{H}_2 \cdot \vec{t}_2 \Delta l = \vec{i}_f \cdot \vec{n}' \Delta l$$

由于 $\vec{t}_1 = -\vec{t}, \vec{t}_2 = \vec{t}$ ，并且 $\vec{t} = \vec{n}' \times \vec{n}$ ，$\boldsymbol{n}$是界面的切线方向单位矢量，方向从磁介质1指向磁介质2； $\boldsymbol{t}$是与界面相切的单位矢量， 并且 $\vec{t} \perp \vec{n}' \perp \vec{n}$ 形成右旋系统。

代入(6.2-11)式中， 得到 $\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) \cdot \vec{t} = \vec{i}_f \cdot \vec{n}'$

$$\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) \cdot \left(\vec{n}' \times \vec{n}\right) = \vec{i}_f \cdot \vec{n}'$$

根据矢量运算公式 $\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right)$，将上式变为

$$\vec{n}' \cdot \left[\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right)\right] = \vec{n}' \cdot \vec{i}_f$$

于是得

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{i}_f$$

该式表示在界面上有传导电流的情况下，磁场强度的切向分量是不连续的，如果界面上无面传导电流，则 $\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = 0$

在界面上没有传导电流情况下,磁场强度的***H***切向分量是连续的。

2 磁介质中电流磁场基本规律

2.5 稳定电流磁场的完整方程组

讨论稳定电流磁场的散度和旋度，并讨论**B**、**H**的关系和磁介质分界面上的边值关系后得到一组方程式

$$
\left.\begin{aligned}
&\nabla\cdot\vec{B}=0\\
&\nabla\times\vec{H}=\vec{j}_f\\
&\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)=0\\
&\vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)=\vec{i}_f\\
&\vec{B}=\mu\vec{H}
\end{aligned}\right\}
$$

上式是磁介质存在时稳定电流磁场的完整方程组,可以用于解决磁介质中的正演问题和反演问题。

下面，现在来证明正演问题的唯一性。

2 磁介质中电流磁场基本规律

设给定$\boldsymbol{j}_f$、$\boldsymbol{i}_f$ 和μ的分布及界面上$\boldsymbol{H}$的切向分量时，方程所决定的磁场有两组不同的解B' 和B''，显然下式成立：

$$\vec{B'}=\nabla\times\vec{A'},\vec{B''}=\nabla\times\vec{A''}$$

$$\vec{B'}=\mu\vec{H'},\vec{B''}=\mu\vec{H''}$$

$$\nabla\times\vec{H'}=\nabla\times\vec{H''}=\vec{j_f}$$

根据场的叠加原理，则可以构成一个新的场，即

$$\vec{B}=\vec{B'}-\vec{B''},\vec{H}=\vec{H'}-\vec{H''}$$

相应的矢势 $\vec{A}=\vec{A'}-\vec{A''}$

对于这样的场，应该有 $\nabla\times\vec{H}=0$

求这个场的能量，即

$$W_m=\frac{1}{2}\int_V\vec{B}\cdot\vec{H}dV=\frac{1}{2}\int_V\left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{H}dV$$

根据矢量分析公式 $\nabla\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{b}\cdot\left(\nabla\times\vec{a}\right)-\vec{a}\cdot\left(\nabla\times\vec{b}\right),$

2 磁介质中电流磁场基本规律

将上式变成 $$W_m = \frac{1}{2}\int_V \left[\nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)+\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)\right]dV$$

由于$\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$，并由高斯定理，将上式写成

$$W_m = \frac{1}{2}\int_V \nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right)dV = \frac{1}{2}\oint_S \left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}$$

于是得到 $$\frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}dV = \frac{1}{2}\oint_S \left(\vec{A}\times\vec{H}\right)\cdot d\vec{S}$$

即 $$\int_V \frac{1}{\mu}\left(\vec{B'}-\vec{B''}\right)\cdot\left(\vec{B'}-\vec{B''}\right)dV = \oint_S \left[\vec{n}\times\left(\vec{A'}-\vec{A''}\right)\right]\cdot\left(\vec{H'}-\vec{H''}\right)dS$$

如果已知界面上$\boldsymbol{H}$ 的切向分量的值，由于同一问题的边界值应该是一样的，有

$$\vec{n}\times\vec{H'} = \vec{n}\times\vec{H''}$$

于是得到 $$\int_V \frac{1}{\mu}\left|\vec{B'}-\vec{B''}\right|^2 dV = 0$$

由于μ总是正的，要使积分恒为零，则必须

$$\vec{B'} = \vec{B''}$$

可见，正演问题的解是唯一的。

谢谢！