2022年秋季专业基础课程

场 论

授课教师：彭淼 谭茂金

地球物理与信息技术学院

静电场

第5讲 真空中的静电场

第6讲 电介质的极化

第7讲 电介质中的静电场

本讲内容

1 电介质中电场的基本规律

2 几个物理量及其关系

3 边界条件及量的连续性

4 完整方程组和边值问题

5 静电场的能量

1 电介质中电场的基本规律

- 电介质中的静电场就是指有电介质存在情况下的静电场。
- 介质中的静电场，场源除了自由电荷，还有由于介质极化而出现的束缚电荷。
- 介质对电场的影响，实质上是束缚电荷产生了附加场。

电场中加入一介质体，从场源来看，仅仅是空间增加了一些电荷，因此可将真空中静电场的第一定律推广到普遍情况的静电场中。

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho + \rho_P)$$

式中，ρ为自由电荷体密度；ρ_P为束缚电荷体密度。

再将$\rho_P = -\nabla \cdot \boldsymbol{P}$ 代人上式，得到

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}(\rho - \nabla \cdot \boldsymbol{P})$$

即

$$\nabla \cdot (\varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho$$

1 电介质中电场的基本规律

令$\boldsymbol{D}$为电位移(矢量)　　$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$

得到介质中静电场第一定律的微分式为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

相应的积分形式为

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_V \rho dV$$

此处引人电位移线， $\boldsymbol{D}$线

$\boldsymbol{D}$线性质：

- $\boldsymbol{D}$线的起止点只和自由电荷有关，它起于正的自由电荷(或无限远)；终止于负的自由电荷(或无限远)。
- 线始端密度等于该处正自由电荷密度；线终端密度等于负自由电荷密度。
- 在电场中任意作一个封闭面，线的净通量等于该面所包围的自由电荷的电量。

1 电介质中电场的基本规律

环流定律与电荷的分布、电荷的多少均无关。从电荷来看，有介质就等于空间增加了一些电荷。所以，在有介质存在时的静电场，其第二定律仍然是电场强度的旋度恒为零，电场强度的环流也恒为零，即

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = 0$$

$$\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$$

$\boldsymbol{E}$是全部电荷(包括自由电荷和束缚电荷)所产生的场的电场强度。

2 几个物理量及其关系

均匀介质即介质体中各点ε（或χ_e）相同，那么在均匀介质中

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \varepsilon \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho$$

而

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = (\rho + \rho_P)/\varepsilon_0$$

由以上两式得到介质中任一点全电荷密度、束缚电荷密度、自由电荷密度之间关系

全电荷密度 $\rho + \rho_P = \rho/\varepsilon_r$

束缚电荷密度 $\rho_P = -\dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\rho$

电荷关系总结：

- 某点的体束缚电荷与该点的自由电荷电性相反，全电荷体密度小于自由电荷体密度，二者电性相同。
- 在均匀介质体内，如果没有体自由电荷（$\rho = 0$）也就没有体束缚电荷（$\rho_P = 0$），极化强度的散度也为零（$\nabla \cdot \boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$）。
- 一般情况下，介质体内不带自由电荷。

2 几个物理量及其关系

* 均匀极化即介质中各点的极化强度相同，它是一个常矢量，即在均匀极化介质中，极化强度的散度为零。

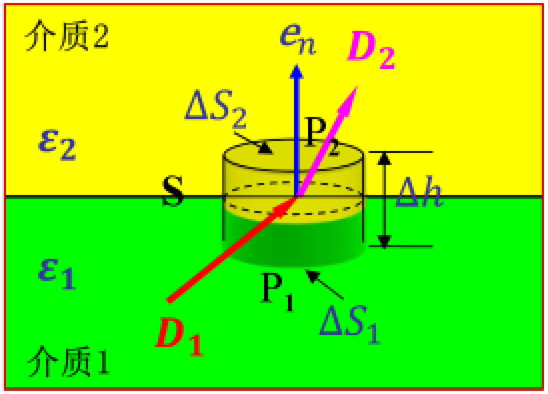
* 极化强度的散度为零的介质，不一定是均匀极化。

* 在均匀介质中，如果没有自由体电荷，即使是非均匀极化，它各点的极化强度的散度也是零。

3 边界条件及量的连续性

3.1 第一边界条件

在静电场中有两种介质，介电常数分别为ε_1和ε_2，S为其交界面，此面上既有面束缚电荷，又有面自由电荷。点 1 和点 2 是在交界面两边的紧邻点，点 1 在介质 1 中，点 2 在介质 2 中。将积分形式的通量定律用于交界面，得到第一边界条件为



$$\boldsymbol{D}_{2n} - \boldsymbol{D}_{1n} = \sigma$$

σ是自由电荷面密度.

侧面积相比上下底面可忽略

如果两种介质的交界面上不带自由面电荷，那么就有

$$\boldsymbol{D}_{2n} = \boldsymbol{D}_{1n}$$

如果 S 是导体与介质的交界面，这样的交界面上既有自由电荷，也有束缚电荷。又因为导体内部的电场强度为零，因此电位移也为零，即 $\boldsymbol{D}_{1n} = 0$，因此可得

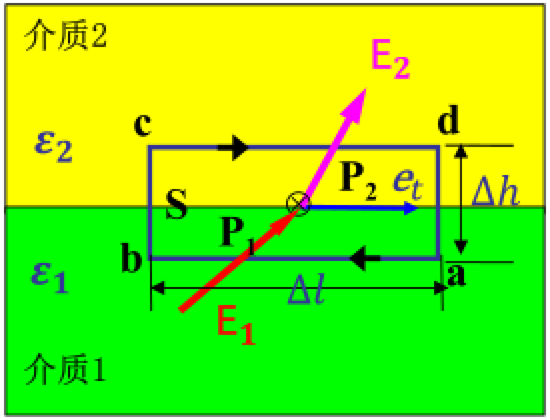
$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{2n} = \sigma$$

3 边界条件及量的连续性

3.2 第二边界条件

将积分形式的环流定律，得第二边界条件为

$$\boldsymbol{E}_{2t} = \boldsymbol{E}_{1t}$$



侧边长度相比上下边可忽略

通常情况下，两种介质的界面不带自由电荷，但有面束缚电荷。各量的连续性如下：

电位移法线分量是连续的： $\boldsymbol{D}_{2n} = \boldsymbol{D}_{1n}$

电场强度切线分量是连续的： $\boldsymbol{E}_{2t} = \boldsymbol{E}_{1t}$

电势是连续的： $U_2 = U_1$

电位移的切线分量、电场强度的法线分量、极化强度的法线分量和切线分量都是不连续的。

3 边界条件及量的连续性

3.3 束缚电荷

介质体的表面上，束缚电荷的面密度等于极化强度的法线分量。把该结果推广到两种介质体的交界面上，界面一般也就是极化强度的突变面.

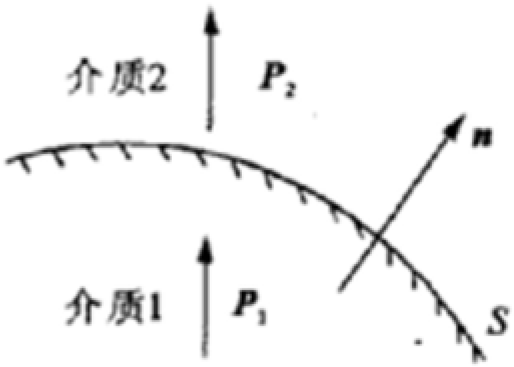
S为两种介质体的交界面，$\boldsymbol{P}_1$为第一种介质中的极化强度，$\boldsymbol{n}_1$为此介质面的法线；$\boldsymbol{P}_2$为第二种介质中极化强度， $\boldsymbol{n}_2$为此介质面的法线。交界面法线$\boldsymbol{n}$规定为从第一种介质指向第二种介质，那么$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}$同向， $\boldsymbol{n}_2$与$\boldsymbol{n}$反向。

第一种介质面上的束缚电荷面密度为

$$\sigma_{P_1} = P_{1n_1} = P_{1n}$$

第二种介质面上的束缚电荷面密度为

$$\sigma_{P_2} = P_{2n_2} = -P_{2n}$$



因此交界面上的束缚电荷的面密度为

$$\sigma_P = \sigma_{P_1} + \sigma_{P_2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_P = \boldsymbol{P}_{1n} - \boldsymbol{P}_{2n}$$

4 完整方程组和边值问题

4.1 完整方程组

$$\left.\begin{aligned} &\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho, \quad \boldsymbol{D}_{2n}-\boldsymbol{D}_{1n}=\sigma \\ &\boldsymbol{E}=-\nabla U, \quad \boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E} \end{aligned}\right\}$$

此方程组称为完整方程组，包括两个基本定律的微分形式、第一边界条件以及$\boldsymbol{D}$和$\boldsymbol{E}$的关系式。

* 静电场的正演问题：如果已知自由电荷的分布以及介质的介电常数，则由方程组可确定电场的分布。

* 静电场的反演问题：如果已知介质的介电常数以及电场的分布，即各点的电场强度$\boldsymbol{E}$（或U）为已知，则由方程组可确定自由电荷的分布。

4 完整方程组和边值问题

常见的情况是介质分区均匀，比如场中有几个介电常数不同的介质体，而每一介质体本身都是均匀的。

在均匀区域中，第一定律微分式可以写成

$$\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon$$

上式与第二定律微分式$\boldsymbol{E} = -\nabla U$合并，得到泊松方程

$$\nabla^2 U = -\rho/\varepsilon$$

如果区域内没有体自由电荷，那么电势满足拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = 0$$

4 完整方程组和边值问题

4.2 边值问题

如果在某体积为 V 的区域内，自由电荷ρ、σ的分布已知，介电常数也已知，设区域中介质分区均匀，区域界面为 S 。区域之外可能有电荷分布，但这些电荷分布是未知的。

显然区域中的电势满足泊松方程或拉普拉斯方程

$$\nabla^2 U = -\rho/\varepsilon \quad 或 \quad \nabla^2 U = 0$$

要确定区域内的电势，还应该知道边界值。边值问题可以分为两大类：

- 第一边值问题：在 S 面上的电势已知，即 $U\big|_S = f_1$
  f_1 为已知函数或常数,又称狄义赫利问题。
- 第二边值问题：在 S 面上的电势的法线微商为已知，即 $\left.\dfrac{\partial U}{\partial n}\right|_S = f_2$
  f_2 为已知函数或常数。又称诺依曼问题。

4 完整方程组和边值问题

此外，还有混合边值问题，即部分边界面上电势已知，而另一部分面上电势的法线微商为已知。

关于区域，可以是全空间、半空间，或静电屏蔽腔内的空间等，由具体情况来确定。

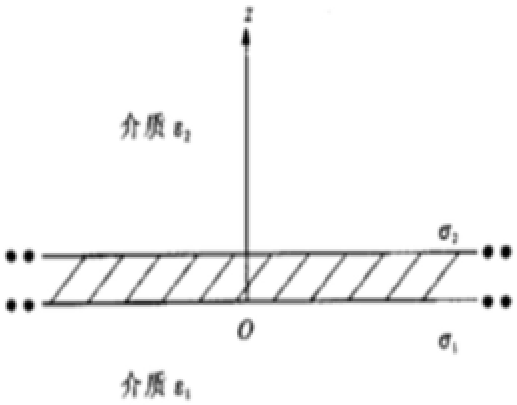
例如接地的静电屏蔽腔其面上的电势为零，如果腔内导体所带的电量已知，这是混合边值问题.

引力场、电场、磁场都有边值问题。如果所考虑的区域为上半空间，地平面上的引力电势法向微商已测出，此为引力场的一个第二边值问题。

无论是第一边值问题还是第二边值问题，其解答都是唯一的。

4 完整方程组和边值问题

例题1 无限大导体平板，上下表面的电荷密度均为σ_0，如果将板两边的上下空间分别充满均匀介质 2 和均匀介质 1 ，其介电常数分别为ε_2和ε_1 ，求各区域的电场。



解：充满介质后，由于介质极化，界面上出现束缚电荷，且自由电荷分布也有变化。 σ_2 ,σ_1分别为上下界面的全电荷密度；σ_{2f} ,σ_{1f} 分别为上下界面的自由电荷密度，由于导体板内电场强度为零，故有

$$\sigma_2 = \sigma_1$$

又因为 $\sigma_2 = \sigma_{2f}/\varepsilon_{2r}$， $\sigma_1 = \sigma_{1f}/\varepsilon_{1r}$ ，故有

$$\sigma_{2f} + \sigma_{1f} = \varepsilon_{2r}\sigma_2 + \varepsilon_{1r}\sigma_1 = 2\sigma_0$$

由以上两式得

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2\sigma_0/(\varepsilon_{1r} + \varepsilon_{2r})$$

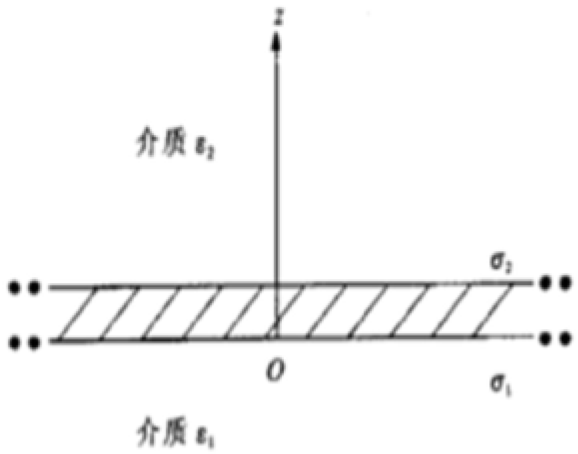
4 完整方程组和边值问题

由第一定律，得

$$\vec{D}_2 = \sigma_{2f}\vec{k} = \frac{2\sigma_0\varepsilon_{2r}}{\varepsilon_{1r}+\varepsilon_{2r}}\vec{k} = \frac{2\sigma_0\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{k}$$

从而得

$$\vec{E}_2 = \vec{D}_2/\varepsilon_2 = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\vec{k}, \quad \vec{E}_1 = -\vec{E}_2$$



如果板的厚度为$\triangle d$，坐标如图，则

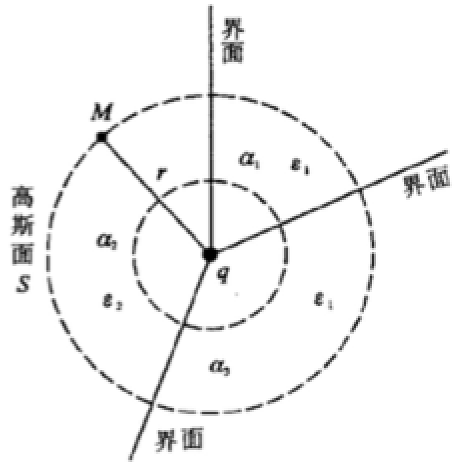
$$U_1 = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}|z|, \quad U_2 = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}|z-\Delta d|$$

如果板很薄，$|z-\Delta d| \approx |z|$，则

$$U_2 \approx U_1 = \frac{2\sigma_0}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}|z|$$

4 完整方程组和边值问题

例题2 共棱的三无限楔形(或称劈形)空间分别充满不同的均匀介质，其介电常数分别为ε_1、ε_2、ε_3。三个楔形的二面角分别为α_1、α_2、α_3。而 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\pi$，棱线即为各介质交界面的交线。今于棱上 O 点放置点电荷 q ，求各区域的 U、$\boldsymbol{E}$ 、$\boldsymbol{D}$。



解： 由于点电荷分布于棱线上，点电荷场在交界面上的场强与该面平行，故可以肯定各交界面上没有面束缚电荷。电荷 q 周围有束缚电荷 q_p，因此任一点 M 的电势为

$$U=U_0+U'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}+\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_p}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r}$$

其中，r 为 OM 的距离；$q'=q+q_p$，显然 q' 是未知的。

电场强度和电位移矢量为

$$\vec{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^3}\vec{r},\quad \vec{D}=\frac{\varepsilon_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q'}{r^3}\vec{r}\quad (i=1,2,3)$$

4 完整方程组和边值问题

下面用通量定律来确定 q'。

以 O 点为球心，r 为半径作一球面—高斯面 S，用虚线表示。S 面在各区域中的面积分别为$\frac{\alpha_1}{2\pi}4\pi r^2$、$\frac{\alpha_2}{2\pi}4\pi r^2$、$\frac{\alpha_3}{2\pi}4\pi r^2$。由通量定律得

$$\left(D_1\frac{\alpha_1}{2\pi}+D_2\frac{\alpha_2}{2\pi}+D_3\frac{\alpha_3}{2\pi}\right)4\pi r^2=q$$ （q为已知的自由电荷）

由此算出 $$q'=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3}q$$

因此最后结果为

$$U=\frac{q}{2(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3)r},\quad \vec{E}=\frac{q\vec{r}}{2(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3)r^3}$$

$$\vec{D_i}=\frac{\varepsilon_i q\vec{r}}{2(\alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3)r^3}\quad (i=1,2,3)$$

5 静电场的能量

5.1 能量公式

真空中点电荷群的能量。设 $P_1(\vec{r}_1)$、$P_2(\vec{r}_2)$、$P_3(\vec{r}_3)$为空间三个点，距离

$$P_1P_2 = r_{12} = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|, P_1P_3 = r_{13} = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_3\right|, P_2P_3 = r_{23} = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_3\right|.$$

① 将电荷 q_1 从无限远处移至 P_1 点，不需要做功；

② 将电荷 q_2 从无限远处移至 P_2 点，外力反抗电场力做功为 $q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0 r_{12})$；

③ 将 q_3 从无限远处移至 P_3 点，需做功为

$$\left[q_1q_3/(4\pi\varepsilon_0 r_{13})\right] + \left[q_2q_3/(4\pi\varepsilon_0 r_{23})\right]$$

这三个点电荷的能量等于将它们从无限远处移至 P_1、P_2、P_3 三点上所做功，即

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}} + \frac{q_1q_3}{r_{13}} + \frac{q_2q_3}{r_{23}}\right)$$

将上式写成

$$W_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{ij}} \quad (i \neq j)$$

5 静电场的能量

推广到 n 个点电荷的点电荷群的能量公式为

$$W_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_iq_j}{r_{ij}}\quad(i\neq j)$$

如果用U_i'表示在第 i 电荷位置上，除 q_i 以外的所有电荷产生的电势为

$$U_i'=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_{ij}}\quad(j\neq i)$$

则可把能量公式表示为

$$W_n=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_iU_i'$$

如果电荷不是点电荷，而是以体密度ρ分布于体积 V 内，把小体积元 ΔV_i 中的电荷$\rho\Delta V_i$ 看作点电荷，体电荷由这样的许多点电荷组成。根据上式求和，并取当 $\Delta V_i\rightarrow 0$ 时的极限，得

$$W_V=\lim_{\substack{\Delta V_i\to 0\\ n\to\infty}}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\rho\Delta V_i)U_i'=\frac{1}{2}\int_V U\rho\mathrm{d}V$$

同样，可得到分布于 S 面上，面密度为σ的面电荷的能量为

$$Ws=\frac{1}{2}\int_S\sigma UdS$$

5.2 能量密度

假设空间只有体电荷分布，电荷密度为ρ。由静电场通量定律有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho$$

根据数学公式 $\nabla \cdot (U\boldsymbol{D}) = U\nabla \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{D} \cdot \nabla U$，式中积分被积函数变为

$$\begin{aligned} U\rho = U\nabla \cdot \boldsymbol{D} &= \nabla \cdot (U\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{D} \cdot \nabla U \\ &= \nabla \cdot (U\boldsymbol{D}) + \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} \end{aligned}$$

所以上页W_V公式得能量

$$W = \frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (U\boldsymbol{D})\, dV + \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, dV$$

由高斯定理

$$\frac{1}{2}\int_V \nabla \cdot (U\boldsymbol{D})\, dV = \frac{1}{2}\oint_{S_K} UD_n dS$$

S_K 为包围体积 V 的球面面积，r 为其半径。

5 静电场的能量

如果相对来说 r 非常大，那么球面上的电势$U \approx c/r$；球面上的电位移的法线分量$D_n \approx c/r^2$ 其中 c 为常量，因此积分 $\oint_{S_K} UD_n dS \approx \frac{c^2}{r^3} \cdot 4\pi r^2 = c^2/r$ 。

显然当 $r \to \infty$时，

$$\oint_{S_K} UD_n dS \to 0$$

因此全部电场的能量为

$$W = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E}\, dV$$

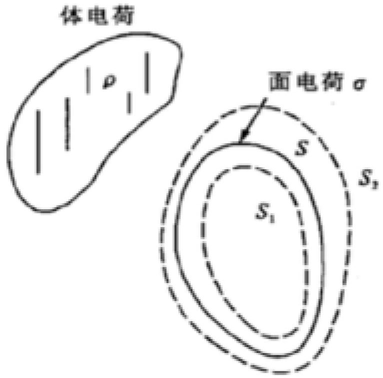
式中 V 为全部场空间的体积。

由上式被积函数可以看出场的能量密度为

$$\omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

5 静电场的能量

如图，如果既存在体电荷又存在面电荷，即在 S 面上有面密度为σ的电荷，在某些区域中有体电荷。



根据前页两式，场能为

$$W=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho U\,dV+\frac{1}{2}\int_{S}\sigma U\,dS$$

将右边体积分变为用场量来表示，由于在带电面 S 上不连续，故必须把面 S 排除在积分域 $\boldsymbol{D}$之外。S_1、S_2是从内外贴近 S 面的两个设想面，积分域就是 S_1 面以外和 S_2面以内的区域。S_2与 S_1之间的体积为ΔV, S_1面的法线方向$\boldsymbol{n}_1$与 S 面 $\boldsymbol{n}$的法线 同向，而 $S2$面的法线$\boldsymbol{n}_2$与$\boldsymbol{n}$反向。当 S_2由外无限地趋近 S 面，而 S_1 由内无限趋近 S 面时，$\Delta V\to 0$，场能式变换得

$$W=\frac{1}{2}\int_{V'}\rho U\,dV+\frac{1}{2}\int_{S}\sigma U\,dS$$

$$=\left(\frac{1}{2}\int_{V}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\,dV+\frac{1}{2}\oint_{S_K}UD_n dS+\frac{1}{2}\int_{S}U\boldsymbol{D}_2\cdot\boldsymbol{n}_2\,dS+\frac{1}{2}\int_{S}U\boldsymbol{D}_1\cdot\boldsymbol{n}_1\,dS\right)+\frac{1}{2}\int_{S}\sigma U\,dS$$

5 静电场的能量

因为

$$\frac{1}{2}\int_S U\vec{D}_2\cdot\vec{n}_2\,\mathrm{d}S+\frac{1}{2}\int_S U\vec{D}_1\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{2}\int_S -U\left(D_{2n}-D_{1n}\right)\mathrm{d}S=-\frac{1}{2}\int_S \sigma U\,\mathrm{d}S$$

又因为当 $S_K\to\infty$时， $\oint_{S_K} UD_n dS\to 0$，所以最后得到

$$W=\frac{1}{2}\int_V \vec{D}\cdot\vec{E}\mathrm{d}V$$

能量密度仍为

$$\omega=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2$$

结果表明：

当既有体电荷又有面电荷存在时，用场量表示的场能公式和能量密度公式仍与只有体电荷存在时的公式相同。

课堂测验：一、判断题6题；二、选择题2题

一、判断题（共6题，60分）

1、正电荷处的电场强度的散度为正，散度越大，从该处发散出来的电力线越多。

2、在真空中的静电场中，电势穿过任意边界都是连续的，即$U_1=U_2$。

3、真空中静电场内过某封闭曲面的通量的大小取决于此封闭面内的电荷量的大小。

4、均匀极化的介质体表面有面电荷，此面电荷密度与极化强度和面法线$\boldsymbol{n}$的交角有关。

5、外加电场的作用会使介质极化，产生束缚电荷，该电荷不会影响外加电场的分布。

6、在电场中任意作一个封闭面，电位移线的净通量等于该面所包围的束缚电荷的电量。

二、选择题（共2题，40分）

1、半径为a的球形体积内充满密度为$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})$的体电荷，若已知球外的电位移分布为

$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{e}_r D_r=\boldsymbol{e}_r\frac{a^5+2a^4}{r^2}$，则电荷密度为$\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r})$为：

A. 0　　**B.** $3a^2+4a$　　**C.** $-2a^2-4a$　　**D.** $(a^5+2a^4)/r^2$

2、无限大导体平板，上下表面的电荷密度均为σ_0，如果将板两边的上下空间分别充满均匀介质 2 和均匀介质 1，其介电常数分别为ε_2和ε_1，则导体板下界面的束缚电荷密度为：

A. 0　　**B.** $2\sigma_0(\varepsilon_0-\varepsilon_2)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$　　**C.** $2\sigma_0(\varepsilon_0-\varepsilon_1)/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$　　**D.** $2\sigma_0\varepsilon_1/(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$

谢谢！