2022年秋季专业基础课程

场 论

授课教师：彭淼 谭茂金

地球物理与信息技术学院

引力场

第8讲 引力场的基本概念

第9讲 引力场的基本规律和方程


本讲内容

1 引力场的场和场源

2 场强度公式

3 引力场的势

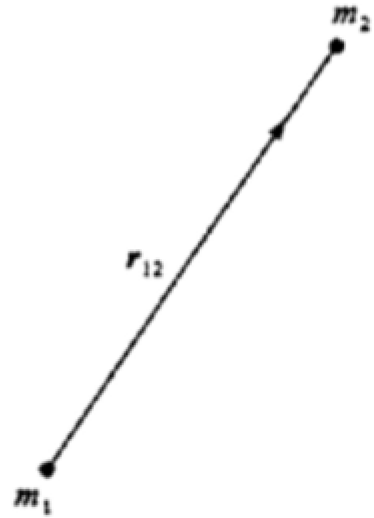
1 引力场的场和场源

1.1 万有引力定律

$$\overrightarrow{f_{12}} = -k\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\left(\frac{\overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}}\right)$$

或

$$\overrightarrow{f_{12}} = -k\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\overrightarrow{r_{12}}$$



其中：$\boldsymbol{m}_1$ 和 $\boldsymbol{m}_2$分别表示两个质点的质量，

$\boldsymbol{r}_{12}$表示 $\boldsymbol{m}_1$质点到 $\boldsymbol{m}_2$ 质点的矢径，

$\boldsymbol{f}_{12}$表示 $\boldsymbol{m}_2$ 质点所受的力，

k 为万有引力常数，国际单位制中，$k = 6.67\times10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$

负号说明 $\boldsymbol{f}_{12}$与 $\boldsymbol{r}_{12}$方向相反，即所受之力为引力。

1 引力场的场和场源

引力场与质量关系：

- 当有物体存在时，就有与它共存的引力，引力场的空间分布决定于物体的质量分布；

- 在引力场中放入某种质量分布的物体，那么该物体就受到力的作用，它所受的力与质量的大小和分布有关；

- 概括的说：

  （1） 质量产生引力场；

  （2） 质量在引力场中受力的作用。

1 引力场的场和场源

1.2 引力场场强度的定义

将质量为 $m0$ 的实验质点放在引力场中某点上，测出它所受的力为 $\boldsymbol{f}$，引入一个描述引力场性质的物理量—引力场场强度，用 $\boldsymbol{F}$ 表示，则：

$$\vec{F} = \frac{\vec{f}}{m_0}$$

场中某点场强度，其大小、方向与放在该点的单位试验质量所受力相等。说明：

(i) 试验质点是测量仪器的简化；

(ii) 试验质点是指它的几何尺寸相对来说很小；

(iii) 在我们所研究的引力场中并不要求试验质点的质量 $m0$ 小；

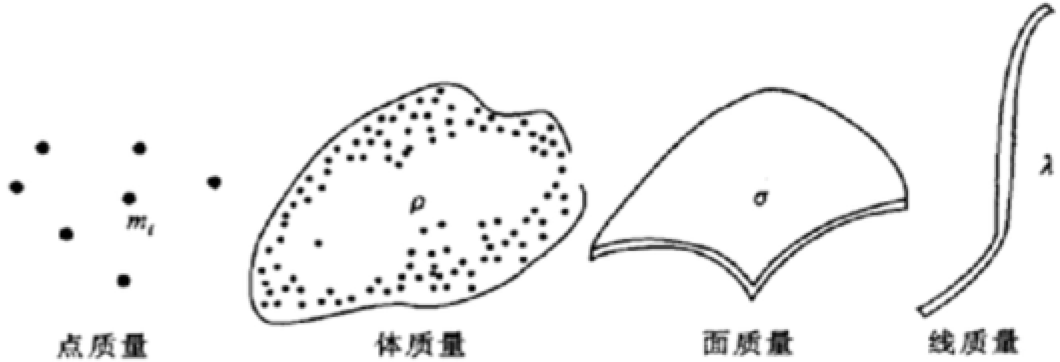
(iv) 场强度是从试验质量受力而引入的，场强度不是力；

(v) 引力场中各点的场强度一般是不同的，它是空间位置的矢量函数$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$。

1 引力场的场和场源

1.3 质量分布的类型

归结为四种类型：点质量、体质量、面质量和线质量。



体质量用体密度 ρ 表示其分布， ρ 用公式表示为$\rho = \lim\limits_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\Delta m}{\Delta V}\right)$ 同理可以定义面密度 σ 和线密度 λ 。一般来说，各点密度是不同的，但在均匀物质中，各点密度是相同的。

点质量、面质量、线质量实质上都是体质量。在一定的条件下，可以把某些分布看作点质量、面质量、线质量。它们不是几何的点、面、线。例如一张均匀的薄纸，可以看作是面质量．如果已知其密度为 σ，厚为d，就可算出其体密度$\rho = \sigma / d$。

1.4 正演问题和反演问题

一定的质量分布对应着一定的引力场分布，因此需要我们解决下列两个方面的问题。

（1） 正演问题

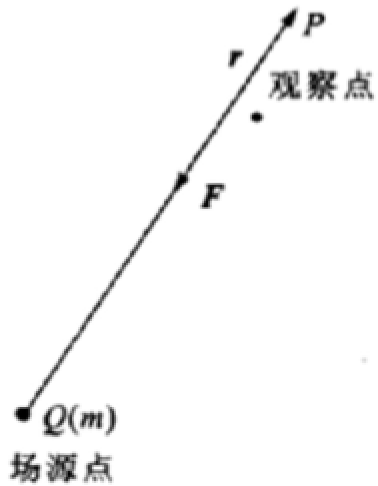
已知场源质量的分布，求出相应的场的分布；

(2) 反演问题

已知场的分布，求出场源质量的分布。

2 场强度公式

2.1 点质量场的场强度



$Q(\xi, \eta, \zeta)$点上放置一点质量 m，它在周围空间产生引力场，$P(x, y, z)$是引力场中某一观察点，放置一试验质量 $m0$，$\boldsymbol{r}$为从 Q 到 P 的矢径，则：

$$\vec{r}=(x-\xi)\vec{i}+(y-\eta)\vec{j}+(z-\zeta)\vec{k}$$

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

根据万有引力定律 $\vec{f}=km_0m\vec{r}/r^3$ 及场强度的定义 $\vec{F}=\vec{f}/m_0$

得出点质量场的场强度公式为：

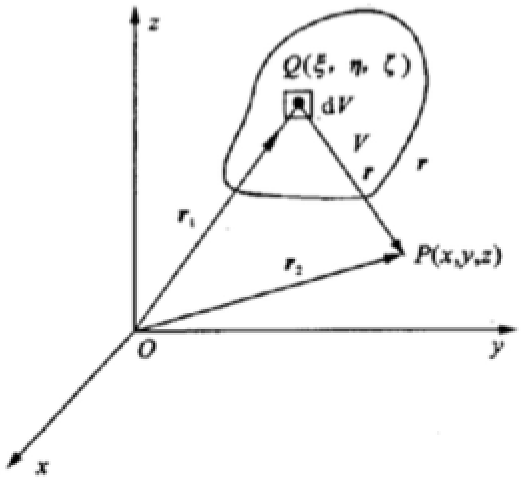
$$\vec{F}=-k\frac{m}{r^3}\vec{r}$$

场强度的方向指向场源点，即与矢径$\boldsymbol{r}$的方向相反。

2 场强度公式

2.2 体质量分布场的场强度

如果质量连续以体密度$\rho\ (\xi, \eta, \zeta)$ 分布在空间一体积 V 中，每个体积元中的质量 $\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$，得到 Q 点的质量为 $\mathrm{d}m$ 时产生的场在 $P\ (x\ ,y\ ,z\ )$ 场强度为



$$d\vec{F}=-k\frac{\mathrm{d}m}{r^3}\vec{r}=-k\frac{\rho\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V$$

根据场的叠加原理，得出整个体质量所产生的场在 P 点的场强度为

$$\vec{F}=-k\int_V\frac{\rho\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}V$$

式中 $\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1=(x-\xi)\vec{i}+(y-\eta)\vec{j}+(z-\zeta)\vec{k}$

$$r=|r|=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

2 场强度公式

上式可写为

$$\vec{F}=-k\int_{V}\frac{\rho\left[(x-\xi)\vec{i}+(y-\eta)\vec{j}+(z-\zeta)\vec{k}\right]}{r^{3}}\mathrm{d}V$$

场强度***F***沿直角坐标轴 *x*，*y*，*z* 的三个分量为

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= -k\int_v \frac{\rho(x-\xi)}{r^3}\mathrm{dV}\\
F_y &= -k\int_v \frac{\rho(y-\eta)}{r^3}\mathrm{dV}\\
F_z &= -k\int_v \frac{\rho(x-\zeta)}{r^3}\mathrm{dV}
\end{aligned}\right\}$$

2 场强度公式

2.3 面质量、线质量分布场的场强度

由同样方法，求得面质量场的场强度公式为

$$\vec{F} = -k\int_S \frac{\sigma\vec{r}}{r^3}dS$$

式中的 σ 为面密度. 线质量的场强公式

为

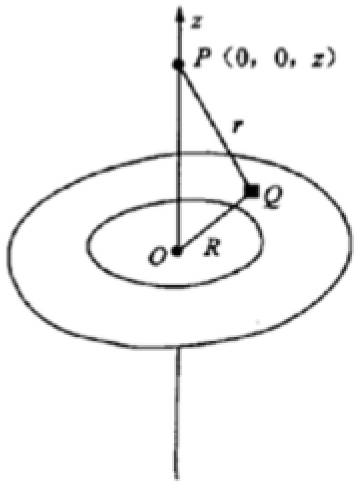
$$\vec{F} = -k\int_L \frac{\lambda\vec{r}}{r^3}\mathrm{d}l$$

式中 λ 为面密度.

2 场强度公式

例题1 圆环形均匀薄板的场

圆环形均匀薄板，已知其面密度为 σ，内外半径各为 b 和 a，求轴线上任一点 P 的引力场场强度。



解：取圆环的轴线为z轴，环之中心0为原点。P（0，0，z）为观测点，Q为场源点，$OQ = R$，$QP = r$. 本题的质量分布具有轴对称性，故P点的场强度应与z轴平行，即 $\boldsymbol{F} = F_Z\boldsymbol{k}$. 用场强度公式来计算

$$F_z = -k\int_S \frac{\sigma(z-\zeta)}{r^3}\mathrm{d}S$$

本题中σ为常量，$\zeta = 0$，$r = \left(z^2+R^2\right)^{1/2}$，$\mathrm{d}S = 2\pi R\mathrm{d}R$，

代入上式，得 $F_z = -2\pi k\sigma z\int_b^a \frac{R\mathrm{d}R}{\left(z^2+R^2\right)^{3/2}}$

积分后，得 $F = F_z = -2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(z^2+b^2\right)^{1/2}}\right]$

2 场强度公式

讨论：

(1) 式中 F 为负值，表明$\boldsymbol{F}$ 的方向与 z 轴方向相反。

(2) 式中，当 $b \to 0$时，均匀圆盘轴上点的场强度大小为

$$F = 2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{|z|}\right]$$

式中a 为圆盘的半径。

当 $z>0$ 时，且 $z \to +0, F\big|_{z\to+0} = -2\pi k\sigma,$

当 $z<0$ 时，且 $z \to -0, F\big|_{z\to-0} = +2\pi k\sigma,$

故有 $$F = 2\pi k\sigma z\left[\frac{1}{\left(z^2+a^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{|z|}\right]$$

上式说明，过质量面时，场强度不连续，其突变量正比于面质量密度。

2 场强度公式

(3)式中，当 $b=0$，$a\to\infty$ 时无限大均匀薄板的场强度大小为

$$F=-2\pi k\sigma\frac{z}{|z|}$$

无限大均匀薄板面之上下方都是均匀场，场强度方向垂直指向板面，其大小为

$$|F|=2\pi k\sigma$$

(4)式中，当 $b\neq 0$，$a\to\infty$得到有圆孔的均匀大薄板轴上点的场强度大小为

$$F=-2\pi k\sigma\frac{z}{\left(z^2+b^2\right)^{1/2}}$$

2 场强度公式

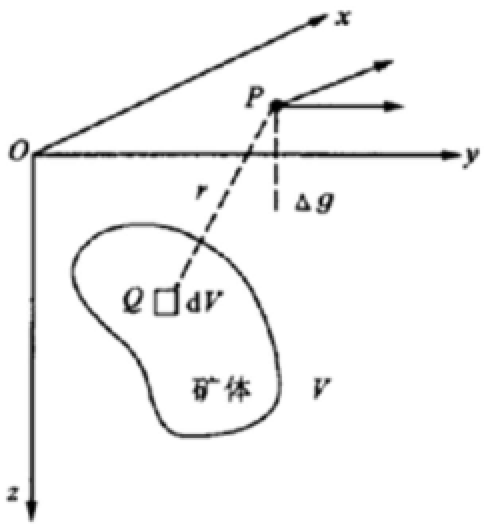
2.4 重力异常

地球内部的物质密度分布非常不均匀，因而实际观测重力值与理论上的正常重力值总是存在着偏差，这种在排除各种干扰因素影响之后，仅仅是由于物质密度分布不匀而引起的重力的变化称为重力异常。

$$\Delta g = g_{观测值} - g_{正常场} - g_{时变场}$$

重力异常公式　设矿体的剩余密度为 ρ'，矿体体积 V，xOy 平面为地平面，取 Oz 轴垂直向下。矿体剩余质量所产生的引力场场强度沿 z 轴的分量即为重力异常，以 Δg 表示：

$$\Delta g = -k\int_V \frac{\rho'(z-\zeta)}{r^3}\mathrm{dV}$$



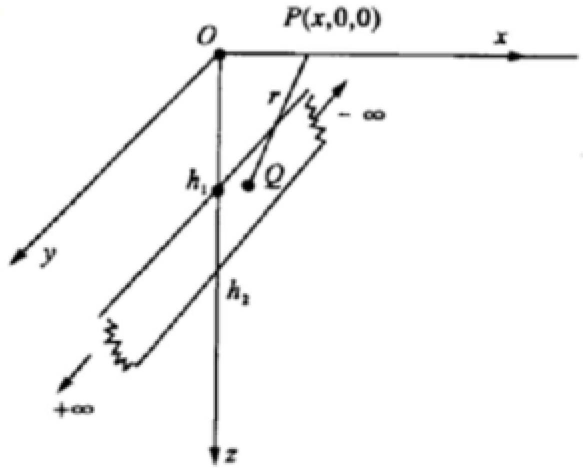
2 场强度公式

例题2 求水平走向无限长垂直带状矿体的Δg

已知水平走向的带状矿体两端无限延伸，矿带面与地面垂直，带的上下边缘离地面的深度分别为 h1 和 h2，剩余质量分布均匀，面密度为 σ'，求地面上任一点 P 的Δg .

解： 取z轴垂直向下，原点O在地面上，P点在Ox轴上。Q（0, η, ζ）为场源上任一点，Q点处面积元

$dS = d\eta d\zeta$, $r=\sqrt{(x-0)^2+\eta^2+\zeta^2}$,



$$\Delta g = -k\int_S \frac{\sigma'(z-\zeta)}{r^3}\mathrm{d}S$$

$$= -k\sigma'\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{h_1}^{h_2}\frac{\mathrm{d}\eta(-\zeta)\mathrm{d}\zeta}{\left[(x-0)^2+\eta^2+\zeta^2\right]^{3/2}}$$

积分后得

$$\Delta g = k\sigma'\ln\frac{x^2+h_2^2}{x^2+h_1^2}$$

3 引力场的势

3.1 势的定义

将试验质量 *m0* 从 *A* 点移到 *B* 点场力所作之功为

$$A=\int_L \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-km_0m\int_L \frac{\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}{r^3}=-km_0m\int_L \frac{\cos\beta dl}{r^3}$$

$$=km_0m\int_{r_A}^{r_B} d\left(\frac{1}{r}\right)=km_0m\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

$$\int_{P_0}^{P}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=U^*(P)-U^*(P_0)$$

$$=\left[U^*(P)-C\right]-\left[U^*(P_0)-C\right]$$

$$=U(P)-U(P_0)$$

取 P_0 点作为标准点，并令 $U(P_0)=0$ ，即令待定常数 $C=U^*(P_0)$ ，因此得到势的定义式为

$$U(P)=\int_{P_0}^{P}\vec{F}\cdot d\vec{l}$$

势是从场力做功出发而引入的物理量。

引力场中某任一点 *P* 的势等于将单位试验质量从标准点 *P0* 移到 *P* 点场力所作之功。因为标准点的选取有任意性，所以势具有相对性。且规定标准点上的势为零，在引力场中势处处连续。

3 引力场的势

标准点的选取要看具体情况，要选的标准点使势的表示式具有最简单的形式。对于质量分布在有限空间的场，常将标准点选在无限远处；对于质量分布相对来说不在有限区域内的引力场，其标准点不可能取在无限远处。例如，已知无限大均匀薄板的场为均匀场，设板的面密度为 σ，板面与 x 轴垂直，坐标原点在板面上，则此均匀场的场强度为

$$\vec{F} = F\vec{i} = -4\pi k\sigma\vec{i}$$ （ $\vec{i}$ 为沿 x 轴的单位矢量）

此均匀场的势为

$$U = \int_{P_0}^{P} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_0}^{P} F\mathrm{d}x = \int_{P_0}^{P} -4\pi k\sigma\mathrm{d}x$$

$$= -4\pi k\sigma\left(x - x_0\right)$$ （在x≥0区域中）

$P0$ 点坐标为（$x0$， $y0$， $z0$），P 为区域中一点，其坐标为（x， y， z）。显然如将标准点选在原点上，势的表示式最简单，即 $U = -4\pi k\sigma x$.

势为标量，但有正负，正值表示该点的势高于标准点的势，负值表示低于标准点的势。

3 引力场的势

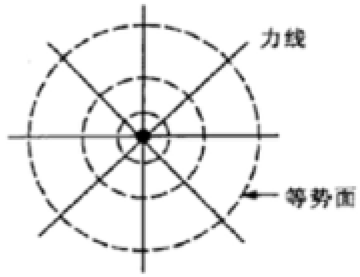
3.2 势的公式

从势的定义式可知，如果引力场各点的场强度已知，就可以计算出场中任一点的势。

点质量场的势：

点质量 m 产生的场的场强度为 $\vec{F}=-k\dfrac{m}{r^3}\vec{r}$ ，将此式代入势的定义式中，并取标准点在无限远处，得

$$U=\int_{\infty}^{P}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_{\infty}^{P}\frac{km}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_{\infty}^{P}k\frac{m}{r^2}\mathrm{d}r$$



得到点质量势的公式为

$$U=k\frac{m}{r}$$

点质量场的等势面方程为 $r=C$（常值），可知等势面是以场源点为中心的球面簇如图，与力线垂直，势增加最快的方向与场强度的方向相同。

3 引力场的势

以点质量势的公式为基础，再根据场的叠加原理，可以得其他质量分布场势的公式：

体质量场的势为：$U = k\int_V \frac{\rho}{r}\mathrm{d}V$

式中 ρ 为质量的体密度，d*V*为体积元。

面质量场的势为：$U = k\int_S \frac{\sigma}{r}\mathrm{dS}$

式中 σ 为质量的体密度，d*S*为面元。

线质量场的势为：$U = k\int_L \frac{\lambda}{r}\mathrm{d}l$

式中 λ 为质量的体密度，d *l*为线元。

以上各式中，势的标准点都取在无限远处，因此它们适用于质量分布在有限区域的引力场。

3 引力场的势

3.3 势与场强度的关系

在引力场中将单位试验质量沿某方向移动一小段距离 d*l*，场力所作之功为 $\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$，根据势的定义，可知此功等于势之差

$$\mathrm{d}U=\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=F\cos\beta \mathrm{d}l=F_l \mathrm{d}l$$

式中，β 为场强度 F 的方向与 d*l* 方向的交角；F_l 为场强度沿d*l* 方向的投影（分量）。由上式可得

$$F=\frac{\partial U}{\partial l}$$

上式说明：势沿某方向的变化率等于场强度沿该方向的分量。势沿各方向的变化率的大小是不同的，沿场强度的方向势的变化率最大，即沿场强度的方向势增加得最快。设 d*l*0 的方向与 F 的方向相同，那么

$$F=\frac{\partial U}{\partial l_0} \qquad (F\geqslant F_l)$$

3 引力场的势

3.4 梯度

定义：势增加最快的方向即为势的梯度的方向，势在此方向上的变化率 $\partial U/\partial l_0$ 即为梯度的大小。梯度是矢量，常用 ∇U 表示之。

梯度的定义式表示为

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial \vec{l}_0}\vec{n}_0$$

式中 $\vec{n}_0$ 为 $\mathrm{d}\vec{l}_0$ 方向的单位矢量。

显然某点引力场场强度等于该点势的梯度，即

$$\vec{F} = \nabla U$$

在直角坐标系中有

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

因此在直角坐标系中，势梯度的表示式为

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

3 引力场的势

在等势面 $U(x, y, z)=C$ 上，势无变化，沿等势面将单位试验质量移动一小段距离 dl，显然 $dU=0$，场力不作功。

故有

$$\mathrm{d}U=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\nabla U\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$$

其中 $\mathrm{d}\vec{l}$ 的三个分量为dx，dy，dz .

以上结果说明：

- 势梯度方向与等势面垂直，$\overrightarrow{n_0}$ 是等势面的法线方向；
- 场强度垂直等势面，力线与等势面正交。

谢谢！