第5章　　线性方程组的迭代法

§1 迭代公式的建立

§2 向量和矩阵的范数

§3 迭代过程的收敛性

引 言

前几章研究过的几个数学问题，无论是插值公式与求积公式的建立，还是常微分方程差分格式的构造，其基本思想都是将其转化为代数问题来处理，最后归结为解线性方程组。工程技术的科学计算中，线性方程组也会经常遇到。因此，线性方程组的解法在数值分析中占有极其重要的地位。

线性方程组的解法大致分为直接法和迭代法两大类。本章将先介绍迭代法，这类算法一个突出优点就是算法简单，因而编制程序比较容易。但是迭代法也有缺点,它要求方程组的系数矩阵具有某种特殊性质，以保证迭代过程的收敛性。发散的迭代过程是没有实用价值的。

5.1 迭代公式的建立

5.1.1 雅可比迭代公式

例1 求解方程组

$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 - 2x_3 = 7.2 \\ -x_1 + 10x_2 - 2x_3 = 8.3 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = 4.2 \end{cases} \qquad (1)$$

从（1）中分离出x_1，x_2和x_3：

$$\begin{cases} x_1 = 0.1x_2 + 0.2x_3 + 0.72 \\ x_2 = 0.1x_1 + 0.2x_3 + 0.83 \\ x_3 = 0.2x_1 + 0.2x_2 + 0.84 \end{cases} \qquad (2)$$

建立迭代公式，

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k)} + 0.2x_2^{(k)} + 0.84 \end{cases} \qquad (3)$$

5.1 迭代公式的建立

设初始值$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$，随着迭代次数k的不断增大，迭代值$x_1^{(k)}$，$x_2^{(k)}$和$x_3^{(k)}$会越来越逼近方程组（1）的真解$x_1^*=1.1$，$x_2^*=1.2$，$x_3^*=1.3$。

表 5-1

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000 00	0.000 00	0.000 00
1	0.720 00	0.830 00	0.840 00
2	0.971 00	1.070 00	1.150 00
3	1.057 00	1.157 10	1.248 20
4	1.085 35	1.185 34	1.282 82
5	1.095 10	1.195 10	1.294 14
6	1.098 34	1.198 34	1.295 04
7	1.099 44	1.199 81	1.299 34
8	1.099 81	1.199 41	1.299 78
9	1.099 94	1.199 94	1.299 92

5.1.1 雅可比迭代公式

解线性方程组迭代法的基本思想是将联立方程组的求解归结为重复计算一组彼此独立的线性表达式，这就使问题得到了简化。

考察一般形式的线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n$ （4）

从上式中分离出变量 x_i，将它改写成

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

即得到解方程组的雅可比迭代公式:

分量计算表达式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right), \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (5)$$

注：迭代终止条件： $\max\limits_{1\le i\le n}|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon$ 或 $k \ge N$

5.1.1 雅可比迭代公式

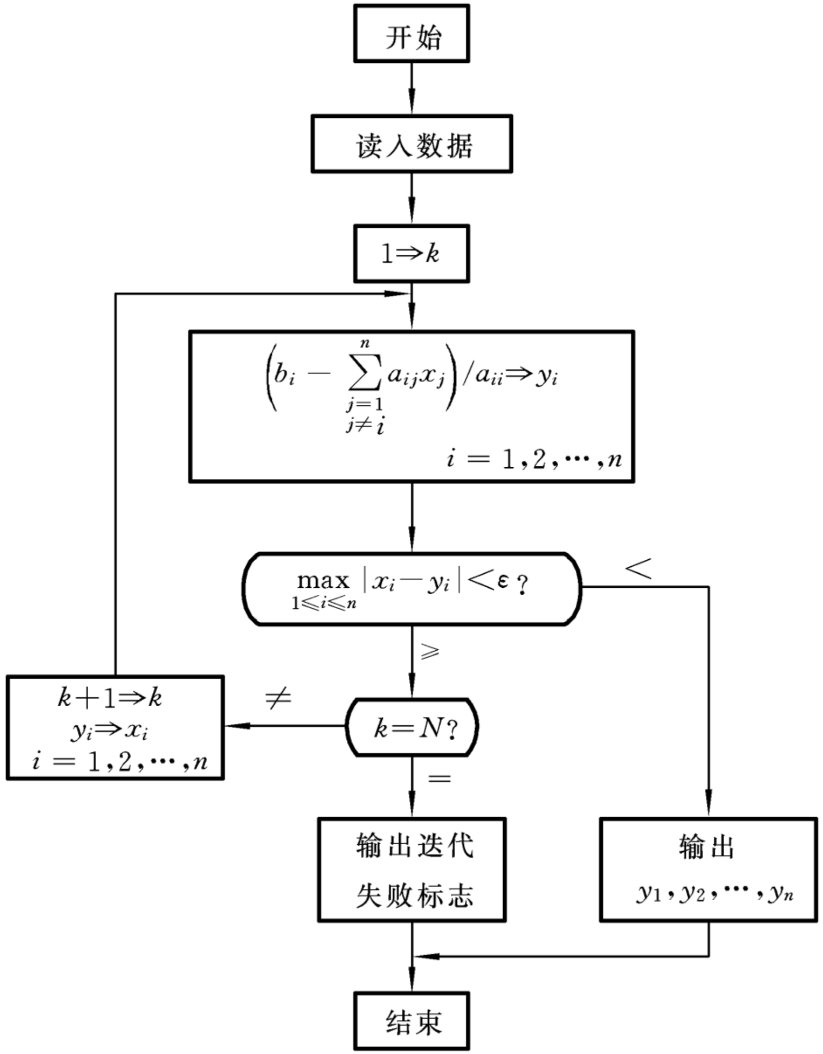

图5-1 雅可比迭代算法流程图

5.1.2 高斯-赛德尔迭代公式

考虑方程（2）式，用计算出的新值代替旧值得到新的迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = 0.1x_2^{(k)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.72 \\ x_2^{(k+1)} = 0.1x_1^{(k+1)} + 0.2x_3^{(k)} + 0.83 \\ x_3^{(k+1)} = 0.2x_1^{(k+1)} + 0.2x_2^{(k+1)} + 0.84 \end{cases} \tag{6}$$

设初始值$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$，得到公式（6）的计算结果：

表 5-2

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$
0	0.000 00	0.000 00	0.000 00
1	0.720 00	0.902 00	1.164 40
2	1.043 08	1.167 19	1.282 05
3	1.093 13	1.195 72	1.297 77
4	1.099 13	1.199 47	1.299 72
5	1.099 89	1.199 93	1.299 97
6	1.099 99	1.199 99	1.300 00

5.1.2 高斯-塞德尔迭代公式

在迭代的每一步设定计算顺序

$$x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_n$$

并且，在计算迭代值 $x_i^{(k+1)}$ 充分利用它前面的变量的新信息

$$x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \cdots, x_{i-1}^{(k+1)} \quad ,$$

这样设计出来的迭代公式

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right) \quad , \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad （7）$$

称为**高斯—塞德尔迭代公式**。迭代计算流程图见P160页的图5-2。

注：迭代终止条件：$\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \le \varepsilon$或$k \ge N$

5.1.3 超松弛法

松弛法实质是高斯—塞德尔迭代的一种加速方法。它将前一步的结果$x_i^{(k)}$与高斯—塞德尔迭代值 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 适当加权平均：

迭代 $$\tilde{x}_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}\right)$$

高斯-塞德尔迭代公式（**7**）

加速 $$x_i^{(k+1)}=\omega\tilde{x}_i^{(k+1)}+(1-\omega)x_i^{(k)}$$

两项合并得到： $$x_i^{(k+1)}=(1-\omega)x_i^{(k)}+\frac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}),\quad i=1,2,\ldots,n \qquad （9）$$

式中系数 ω 称为松弛因子。为保证迭代收敛，要求 $0<\omega<2$ 。

由于迭代值 $\tilde{x}_i^{(k+1)}$ 通常比 $x_i^{(k)}$ 精确，所以加大它的比重，取松弛因子 $1<\omega<2$ ， 这种方法称为超松弛法（**SOR**，**successive Over-relaxation**）。

5.1.4 迭代公式的矩阵表示

线性方程组（4）可用矩阵符号简记为，

$$\mathbf{A}x=\mathbf{b}$$

式中，

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & & & 0 \end{bmatrix}=\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U}$$

其中，D为对角矩阵，L和U为严格下三角矩阵和严格上三角矩阵。

5.1.4 迭代公式的矩阵表示

考察一般的线性方程组 $Ax=b$，设将系数矩阵 A 分裂为

$$\mathbf{A}=\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U}$$

其中 D 为对角阵，L 和 U 分别为严格下三角和严格上三角阵。

如果将所给方程 $(\mathbf{L}+\mathbf{D}+\mathbf{U})x=\mathbf{b}$ 改写为 $\mathbf{D}x=-(\mathbf{L}+\mathbf{U})x+\mathbf{b}$

据此建立的迭代公式

$$x^{(k+1)}=-\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})x^{(k)}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \qquad (11\text{-}1)$$

即为雅可比迭代公式。此外，L+U=A-D，(11-1)也可以表示为，

$$x^{(k+1)}=(\mathbf{I}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{A})x^{(k)}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b} \qquad (11\text{-}2)$$

如果改写为 $(\mathbf{D}+\mathbf{L})x=-\mathbf{U}x+\mathbf{b}$

据此建立的迭代公式 $x^{(k+1)}=-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{L}x^{(k+1)}-\mathbf{D}^{-1}\mathbf{U}x^{(k)}+\mathbf{D}^{-1}\mathbf{b}$ （12）

由此解出 $x^{(k+1)}$，则有

$$x^{(k+1)}=-(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}x^{(k)}+(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \qquad (13)$$

即为高斯—塞德尔迭代公式。

5.1.4 迭代公式的矩阵表示

由**5.1.3**节知**SOR**方法的计算表达式为,

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \frac{\omega}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \quad (9)$$
$$i = 1, 2, \dots, n$$

令**A=L+D+U**，则对应于公式（9）的矩阵形式为，

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)x^{(k)} + \omega\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{L}x^{(k+1)} - \mathbf{U}x^{(k)})$$

整理之后的超松弛法的矩阵形式为，

$$x^{(k+1)} = (\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}[(1-\omega)\mathbf{D} - \omega\mathbf{U}]x^{(k)} + \omega(\mathbf{D}+\omega\mathbf{L})^{-1}\mathbf{b} \quad (14)$$

综合公式（11-2）和（13），可以看到它们都可以用如下迭代形式表示，

$$x^{(k+1)} = \mathbf{G}x^{(k)} + \mathbf{b} \quad (15)$$

这类迭代公式的收敛性与矩阵**G**的性态有关，称**G**为公式（15）的迭代矩阵。

5.2 向量和矩阵的范数

5.2.1 向量范数

为了研究迭代过程的收敛性，需要对向量“大小”引入某种度 量。

任给向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，其范数记为$\|x\|$，它是一个实数，

且满足：

(1)对任意向量x，$\|x\|\geq 0$，当且仅当 $x=0$时，$\|x\|=0$ （非负性）

(2) 对任意实数λ 及任意向量x ，$\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ （齐次性）

(3) 对于任意向量x与y，有$\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$

其中性质(3)被称为向量范数的**三角不等式**。

5.2.1 向量范数

根据向量范数的定义，常用的范数有：

2-范数（向量长度）

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

1-范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

∞-范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

范数的通用表达式：

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

注：由定理1知，向量范数具有等价性。

例子：计算向量 $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$ 的常用范数。

注：向量序列 $\{x^{(k)}\}_1^\infty$ 收敛到向量 x^* 的充要条件是，对于任意给定的p，(0<p≤∞),有：

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_p \to 0, k \to \infty$$

5.2.2 矩阵的范数

对给定的 n 阶方阵 A ，我们将比值 $\|Ax\|/\|x\|(x \neq 0)$ 的上确界称为 A 的**范数**，记为$\|A\|$ 。

由定义知，对任意向量 x ，有$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$。

矩阵范数具有以下基本性质：

(1) 对任意方阵 A，$\|A\| \geq 0$，当且仅 $A=0$ 当时$\|A\|=0$ (正定性)

(2) 对任意实数 λ 和任意方阵 A，有$\|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|$ (齐次性)

(3) 对任意两个同阶方阵 A 和 B，有

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \qquad \text{(三角不等式)}$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

注：$\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \Rightarrow \|A\|\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{x \neq 0} \|A\boldsymbol{x}\| \geq \|A\boldsymbol{x}\|$

5.2.2 矩阵的范数

常用的矩阵范数：

(1) 1-范数（列范数）
$$\|A\|_1 = \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$$

(2) 2-范数（谱范数）
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

(3) 无穷范数（行范数）
$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$

(4) F-范数 (Frobenious 范数)
$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

5.2.2 矩阵的范数

例：设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$**，计算** $\|A\|_1, \|A\|_2, \|A\|_\infty, \|A\|_F$

板书

5.3 迭代收敛的充分条件

5.3.1 迭代收敛的充分条件

定理3 对给定的方阵 G，若 $\|G\|<1$，则矩阵 $I-G$ 为非奇异。

（板书证明）

设将方程组 $Ax=b$ 改写成 $x=Gx+d$ 的形式，据此建立迭代公式

$$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d \tag{23}$$

定理4 若迭代矩阵 G 满足 $\|G\|<1$，则迭代公式(23)对任意初值 $x^{(0)}$ 均收敛。

（板书证明）

5. 3. 2 对角占优方程

5. 3. 2 对角占优方程组

称 n 阶方阵 $A=\left(a_{ij}\right)_n$ 是对角占优的，如果其主对角线元素的绝对值大于同行其它元素绝对值之和：

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n}\left|a_{ij}\right|<\left|a_{ii}\right| \qquad i=1,2,\cdots,n$$

若线性方程组的系数矩阵为对角占优阵，则称这个线性方程组为对角占优方程组。

定理5 若A为对角占优矩阵，则它是非奇异的。

（证明见教材**P166**页）

定理6 对角占优方程组(10)的雅可比迭代公式(11)和高斯—塞德尔迭代公式(13)均收敛。

（证明见板书）

5.4 例题选讲

5.4.1 迭代公式的设计

例题1：考察矩阵分裂A=（D+U）+L，试给出求解方程组的迭代公式，并于高斯-赛德尔方法比较计算顺序。

（见板书）

注：

$$A = L + D + U$$

雅可比迭代：$x^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b$

高斯-塞德 迭尔迭代：$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$

迭代的一般形式：$x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + d$

收敛的充分必要条件：$\rho(G) < 1$，充分条件：$\|G\| < 1$ 。

5.4 例题选讲

5.4.2 迭代过程的收敛性

例题1：证明当-1/2<a<1/2时系数矩阵为A的方程组Ax=b，其雅可比迭代与高斯-赛德尔迭代均收敛。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$$

（见板书证明）

例题2：设矩阵A可分裂为A=I+L+U，其中I为单位矩阵，L，U分别为严格下三角阵与严格上三角阵，且成立 $\|\mathbf{L}\|+\|\mathbf{U}\|<\mathbf{I}$，证明，求解方程组Ax=b的雅可比迭代与高斯-塞德尔迭代均收敛。

（见板书证明）

5.4 例题选讲

例题3：设求解方程组Ax=b的雅可比迭代公式为

$$x^{(k+1)}=\mathbf{G}x^{(k)}+\mathbf{b}$$

求证当$\|G\|_\infty<1$时相应的高斯-塞德尔迭代也收敛。

（见板书证明）

例题4：设$a_{11}a_{22}\neq 0$，证明求解方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

的雅可比迭代与高斯-塞德尔迭代同时收敛或同时发散。

（见板书证明）

第五章 重点内容

（1）雅可比迭代法的分量计算表达式和矩阵计算表达式；

（2）高斯-塞德尔迭代法的分量计算表达式和矩阵计算表达式；

（3）超松弛迭代法的分量计算表达式和矩阵计算表达式；

（4）给定方程组能判定雅可比迭代和高斯-塞德尔迭代是否收敛；
（迭代矩阵G和系数矩阵A满足什么条件，迭代收敛）

（5）矩阵和向量常用范数的计算，如1-范数，2-范数，无穷-范数和F-范数；

作业题：P170-171：第2，3，5，7。