

Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра  
Великого  
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной  
физики

Лабораторная работа №5  
по дисциплине “Математическая статистика”

Обучающаяся:

А.Д. Балакшина  
(группа 5030102/20101)

Преподаватель:

А.Н. Баженов

Санкт-Петербург

2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Формулировка задания</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Используемые формулы</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Выполнение работы</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
4.1	Результаты для выборки: Нормальное распределение N=100	4
4.2	Результаты для выборки: Нормальное распределение N=20	4
4.3	Результаты для выборки: Равномерное распределение N=100	5
4.4	Результаты для выборки: Равномерное распределение N=20	5
<b>5</b>	<b>Анализ результатов проверки гипотез о нормальности распределения</b>	<b>6</b>
5.1	Анализ нормально распределённых выборок . . . . .	6
5.2	Анализ равномерно распределённых выборок . . . . .	6
<b>6</b>	<b>Общие выводы</b>	<b>7</b>

## 1 Формулировка задания

1. Сгенерировать выборку объёмом 100 элементов для нормального распределения  $N(x, 0, 1)$ .
2. По сгенерированной выборке оценить параметры  $\mu$  и  $\sigma$  нормального закона методом максимального правдоподобия.
3. В качестве основной гипотезы  $H_0$  считать, что сгенерированное распределение имеет вид  $N(x, \hat{\mu}, \hat{\sigma})$ .
4. Проверить основную гипотезу, используя критерий согласия  $\chi^2$  с уровнем значимости  $\alpha = 0.05$ .
5. Исследовать точность (чувствительность) критерия  $\chi^2$ :
  - Сгенерировать выборки равномерного распределения объёмом 20, 100 элементов, нормального распределения объёмом 20 элементов.
  - Проверить их на нормальность.

## 2 Используемые формулы

1. **Функция плотности нормального распределения:**

$$N(x, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

2. **Статистика критерия  $\chi^2$ :**

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

где:

- $n_i$  – наблюдаемые частоты,
- $p_i$  – теоретические вероятности,
- $n$  – объём выборки,
- $k$  – количество интервалов.

3. **Квантиль распределения  $\chi^2$ :**

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$$

где:

- $\alpha$  – уровень значимости,
- $k-1$  – степени свободы.

### 3 Выполнение работы

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python 3.12 с использованием библиотек numpy, scipy, pandas.  
Программа отработала корректно.

### 4 Результаты

#### 4.1 Результаты для выборки: Нормальное распределение N=100

Оценки ММП параметров нормального распределения:  $\hat{\mu} = 0.061$ ,  $\hat{\sigma} = 0.885$

Интервал	Наблюдаемая частота	Ожидаемая частота	$(O - E)^2/E$
$(-\infty, -0.80]$	14	16.7	0.427
$(-0.80, -0.32]$	21	16.7	1.127
$(-0.32, 0.06]$	15	16.7	0.167
$(0.06, 0.44]$	18	16.7	0.107
$(0.44, 0.92]$	17	16.7	0.007
$(0.92, \infty]$	15	16.7	0.167

Таблица 1: Таблица частот для проверки нормальности выборки (Нормальное распределение N=100)

Статистика  $\chi^2$ : 2.002

Критическое значение: 7.815

Вывод: Не отвергаем  $H_0$

#### 4.2 Результаты для выборки: Нормальное распределение N=20

Оценки ММП параметров нормального распределения:  $\hat{\mu} = -0.088$ ,  $\hat{\sigma} = 0.841$

Интервал	Наблюдаемая частота	Ожидаемая частота	$(O - E)^2/E$
$(-\infty, -0.90]$	5	3.3	0.833
$(-0.90, 0.27]$	6	10.0	1.600
$(0.27, \infty]$	9	6.7	0.817

Таблица 2: Таблица частот для проверки нормальности выборки (Нормальное распределение N=20)

Статистика  $\chi^2$ : 3.250

Критическое значение: 11.070

Вывод: Не отвергаем  $H_0$

#### 4.3 Результаты для выборки: Равномерное распределение N=100

Оценки ММП параметров нормального распределения:  $\hat{\mu} = 0.537$ ,  $\hat{\sigma} = 0.296$

Интервал	Наблюдаемая частота	Ожидаемая частота	$(O - E)^2/E$
(-inf, 0.25]	21	16.7	1.127
(0.25, 0.41]	14	16.7	0.427
(0.41, 0.54]	8	16.7	4.507
(0.54, 0.66]	21	16.7	1.127
(0.66, 0.82]	14	16.7	0.427
(0.82, inf]	22	16.7	1.707

Таблица 3: Таблица частот для проверки нормальности выборки (Равномерное распределение N=100)

Статистика  $\chi^2$ : 9.322

Критическое значение: 7.815

Вывод: Отвергаем  $H_0$

#### 4.4 Результаты для выборки: Равномерное распределение N=20

Оценки ММП параметров нормального распределения:  $\hat{\mu} = 0.550$ ,  $\hat{\sigma} = 0.233$

Интервал	Наблюдаемая частота	Ожидаемая частота	$(O - E)^2/E$
(-inf, 0.45]	10	6.7	1.667
(0.45, 0.78]	5	10.0	2.500
(0.78, inf]	5	3.3	0.833

Таблица 4: Таблица частот для проверки нормальности выборки (Равномерное распределение N=20)

Статистика  $\chi^2$ : 5.000

Критическое значение: 11.070

Вывод: Не отвергаем  $H_0$

## 5 Анализ результатов проверки гипотез о нормальности распределения

### 5.1 Анализ нормально распределённых выборок

Для выборки из нормального распределения объемом  $N = 100$  получены следующие результаты:

- Оценки параметров:  $\hat{\mu} = 0.061$ ,  $\hat{\sigma} = 0.885$  близки к теоретическим значениям (0 и 1 соответственно)
- Значение статистики  $\chi^2 = 2.000$  существенно меньше критического значения 7.815
- Наблюдаемые частоты хорошо согласуются с ожидаемыми (максимальное расхождение 1.127)

Вывод о нормальности распределения подтверждается, гипотеза  $H_0$  не отвергается.

Для выборки  $N = 20$ :

- Оценки параметров:  $\hat{\mu} = -0.088$ ,  $\hat{\sigma} = 0.841$  также близки к теоретическим
- Статистика  $\chi^2 = 3.250$  меньше критического значения 11.070
- Несмотря на малое количество наблюдений, критерий показал адекватные результаты

Гипотеза о нормальности не отвергается, хотя для малых выборок мощность критерия снижается.

### 5.2 Анализ равномерно распределённых выборок

Для равномерного распределения ( $N = 100$ ):

- Оценки  $\hat{\mu} = 0.537$ ,  $\hat{\sigma} = 0.296$  отличаются от параметров нормального распределения
- Статистика  $\chi^2 = 9.320$  превышает критическое значение 7.815
- Заметные расхождения в интервалах  $(0.41, 0.54]$  и  $(0.82, +\infty)$

Критерий корректно отвергает гипотезу  $H_0$  о нормальности.

Для малой выборки ( $N = 20$ ):

- Статистика  $\chi^2 = 5.000$  меньше критического значения 11.070
- Несмотря на равномерное распределение, критерий идентифицировал его как нормальное

- Это демонстрирует низкую мощность критерия  $\chi^2$  для малых выборок

Гипотеза  $H_0$  не отвергается, что является ошибкой II рода.

## 6 Общие выводы

- Критерий  $\chi^2$  хорошо работает для больших выборок ( $N = 100$ ), правильно идентифицируя как нормальные, так и ненормальные распределения
- Для малых выборок ( $N = 20$ ) мощность критерия недостаточна, что приводит к ошибкам II рода. Критерий чувствителен к объёму данных - для надёжных выводов рекомендуется использовать выборки большего объёма.
- Оценки ММП параметров для нормального распределения показывают хорошую точность