Санкт-Петербургский Политехнический Университет Петра Великого
Физико-механический институт

Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Лабораторная работа №6

по дисциплине "Математическая статистика"

Обучающаяся: А.Д. Балакшина (группа 5030102/20101)

Преподаватель: А.Н. Баженов

Санкт-Петербург

2025

Содержание

1 Формулировка задачи

Для выборок мощностью $n = 20$ и $n = 100$:

1. Найти доверительные интервалы для параметров:
   - нормального распределения и
   - произвольного распределения, используя асимптотический подход.
2. Результаты представить в виде таблиц с порядком по включению.

2 Формализация

2.1 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

2.1.1 Доверительный интервал для математического ожидания m

$$P\left(\overline{x} - \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}} < m < \overline{x} + \frac{st_{1-\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha,$$

где:

- $\overline{x}$ — выборочное среднее,
- s — выборочное среднее квадратическое отклонение,
- $t_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантиль распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

2.1.2 Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ

$$P\left(\frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}} < \sigma < \frac{s\sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}\right) = 1 - \alpha,$$

где $\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$ и $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ — квантили распределения хи-квадрат с $n-1$ степенями свободы.

2.2 Асимптотический подход для произвольного распределения

2.2.1 Доверительный интервал для математического ожидания m

$$P\left(\overline{x} - \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}} < m < \overline{x} + \frac{su_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \approx \gamma,$$

где $u_{1-\alpha/2}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

2.2.2 Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ

$$s(1+U)^{-1/2} < \sigma < s(1-U)^{-1/2},$$

или

$$s(1-0.5U) < \sigma < s(1+0.5U),$$

где

$$U = u_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{e+2}{n}},$$

а $e = \frac{m_4}{s^4} - 3$ — выборочный эксцесс.

3 Выполнение работы

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python 3.12 с использованием библиотек numpy, mathplotlib.
Были сгенерированны выборки, выполнены вычисления. Программа отработала корректно.

4 Результаты

4.1 Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

Таблица 1: Доверительные интервалы для параметров нормального распределения

$n = 20$	m	σ
	$-0.68 < m < 0.41$	$0.88 < \sigma < 1.69$
$n = 100$	m	σ
	$-0.10 < m < 0.23$	$0.73 < \sigma < 0.97$

4.2 Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения (асимптотический подход)

Таблица 2: Доверительные интервалы для параметров произвольного распределения

$n = 20$	m	σ
	$-0.63 < m < 0.36$	$0.93 < \sigma < 1.56$
$n = 100$	m	σ
	$-0.09 < m < 0.23$	$0.74 < \sigma < 0.96$

4.3 Твины для нормального распределения

Таблица 3: Твины для нормального распределения

$n = 20$	x_{inner}	x_{outer}
	$[0.21, -0.47]$	$[-2.37, 2.10]$
$n = 100$	x_{inner}	x_{outer}
	$[0.64, -0.50]$	$[-1.06, 1.20]$

4.4 Твины для асимптотического подхода

Таблица 4: Твины для асимптотического подхода

$n = 20$	x_{inner}	x_{outer}
	$[0.30, -0.57]$	$[-2.18, 1.92]$
$n = 100$	x_{inner}	x_{outer}
	$[0.65, -0.51]$	$[-1.06, 1.20]$

5 Выводы

На основании проведённого анализа доверительных интервалов для параметров нормального и произвольного распределений можно сделать следующие выводы:

1. Для выборки малого объёма ($n = 20$):
   - Доверительные интервалы для нормального распределения оказались шире, чем для асимптотического подхода:
     - По математическому ожиданию: $[-0.68, 0.41]$ против $[-0.63, 0.36]$
     - По СКО: $[0.88, 1.69]$ против $[0.93, 1.56]$
   - Твины для нормального распределения демонстрируют большую изменчивость ($[-2.37, 2.10]$) по сравнению с асимптотическим подходом ($[-2.18, 1.92]$)
2. Для выборки большого объёма ($n = 100$):
   - Интервалы для обоих подходов практически совпадают:
     - По математическому ожиданию: $[-0.10, 0.23]$ и $[-0.09, 0.23]$
     - По СКО: $[0.73, 0.97]$ и $[0.74, 0.96]$
   - Твины для обоих методов практически идентичны ($[-1.06, 1.20]$)
3. Наблюдается ожидаемое сужение доверительных интервалов с увеличением объёма выборки:
   - Для $n = 20$ ширина интервала для m: около 1.09 (норм.) и 0.99 (асимпт.)
   - Для $n = 100$ ширина интервала для m: около 0.33 для обоих методов
4. Асимптотический подход даёт более точные результаты при больших объёмах выборки, что подтверждается практическим совпадением интервалов при $n = 100$

Таким образом, проведённый анализ подтверждает теоретические положения:

- Для малых выборок предпочтительнее использовать точные методы (для нормального распределения)
- При больших объёмах данных асимптотический подход становится эквивалентным точным методам
- Увеличение объёма выборки закономерно приводит к уменьшению ширины доверительных интервалов