复赛赛题的数学模型

关键条件

- 服务器的输出能力**有上限**，可以服务多个消费节点，一个消费节点也可以同时从多台服务器获取视频流
- 服务器分为若干档次，不同档次的输出能力上限与成本都不同
  - 例如，档次1的服务器输出能力为100，成本为100；档次2的服务器输出能力为150，成本为200
- 部署一台服务器还需要额外的部署成本，每个网络节点都对应一个部署成本
- 也就是说，部署一台服务器到某网络节点的成本 = 该服务器的成本 + 网络节点的部署成本
- 数据规模
  - 网络节点数量不超过10000，每个节点的链路数量不超过10000，消费节点数量不超过10000
  - 链路总带宽与单位带宽费用为$[0, 100]$的整数
  - 服务器档次数不超过10个
  - 服务器的成本为$[0, 5000]$的整数
  - 内容服务器输出能力、部署成本与消费节点的带宽需求为$[0, 10000]$的整数

问题

从网络中选择一部分节点，在其上部署内容服务器，满足所有消费节点的带宽需求，最小化总成本。

部署方案包括：

- 部署服务器的网络节点，以及在该节点部署的服务器档次
- 所有内容服务器与所有消费节点之间的网络路径以及路径上占用的带宽

数学模型

- 有向图记为$G = (V, E)$
- 对每条边$(i, j) \in E$，其容量（带宽）为$u_{i,j}$，单位流量的费用为$c_{i,j}$
- 所有档次集合记为$K = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$，其中$m \leq 10$
  - 档次k的服务器成本为p_k，输出容量为q_k
- 网络节点j的部署成本为o_j
- 每个节点有一个权值b_i表示供给/需求量，$b_i > 0$表示该节点是内容服务器节点，$b_i < 0$表示该节点是消费节点，$b_i = 0$表示该节点是转运节点
- 新增"超源点"S，将其与网络中所有节点相连（容量为正无穷，费用为0），定义所有流量都从S出发，在网络中流动，最终汇入消费节点；b_S是所有消费节点的需求量之和的相反数
- $x_{j,k}$表示是否在节点j部署档次为k的内容服务器（**决策变量**）
- $f_{i,j}$（其中$(i, j) \in E$）表示边(i, j)上的流量（**决策变量**）

问题可以表达为：

$$\text{minimize} \quad \sum_{k \in K} \sum_{j \in V} x_{j,k}(o_j + p_k) + \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} \cdot f_{i,j}$$

约束：

1. 每个节点的供给/需求约束（节点流出量之和与流入量之和的差等于b_i）

$$\sum_{j:\ (i,j)\in E} f_{i,j} - \sum_{j:\ (j,i)\in E} f_{j,i} = b_i,\ \forall i \in V \cup \{S\}$$

2. 边容量约束

$$0 \le f_{i,j} \le u_{i,j},\ \forall (i,j) \in E$$

3. 流量与选址的触发关系，以及服务器输出容量约束（即，如果在节点j部署了档次为k的服务器，那么边(S,j)上的流量不能超过服务器的输出容量q_k）

$$\begin{aligned}\sum_{k\in K} x_{j,k} > 0, \quad \textbf{when } f_{S,j} > 0 \\ \sum_{k\in K} x_{j,k} = 0, \quad \textbf{when } f_{S,j} \le 0\end{aligned}$$

上式是一个非线性函数（开关函数），可以用下面的约束转化成线性约束：

$$\sum_{k\in K} x_{j,k} \le f_{S,j} \le \cdot \sum_{k\in K} x_{j,k} \cdot q_k \quad \forall j \in V$$

当$\sum_{k\in K} x_{j,k} = 0$时，$0 \le f_{S,j} \le 0$（即$f_{S,j} = 0$）；当$\sum_{k\in K} x_{j,k} = 1$时，$1 \le f_{S,j} \le q_k$ (这里的q_k对应所部署档次的服务器成本)

4. 每个网络节点最多部署一台服务器

$$\sum_{k\in K} x_{j,k} \le 1, \quad \forall j \in V$$

5. 整数约束

$$\begin{aligned}x_{j,k} \in \{0,1\},\ \forall j \in V, \forall k \in K \\ f_{i,j} \in \mathbb{Z},\ \forall (i,j) \in E\end{aligned}$$