

## 关键条件

- 内容服务器的输出能力没有上限，可以服务多个消费节点
- 部署一台内容服务器需要费用成本，所有服务器的成本相同
- 一个消费节点可以同时从多台内容服务器获取视频流
- 网络节点数量不超过1000，每个节点的链路数量不超过20，消费节点数量不超过500
- 链路总带宽与单位带宽费用为 $[0, 100]$ 的整数，内容服务器部署成本与消费节点的带宽需求为 $[0, 5000]$ 的整数
- 部署方案中，网络路径上的占用带宽必须为整数

## 问题

从网络中选择一部分节点，在其上部署内容服务器，满足所有消费节点的带宽需求，最小化总成本。

部署方案包括：

- 内容服务器放置的节点
- 所有内容服务器与所有消费节点之间的网络路径以及路径上占用的带宽

## 数学模型

- 有向图记为 $G = (V, E)$
- 对每条边 $(i, j) \in E$ ，其容量（带宽）为 $u_{i,j}$ ，单位流量的费用为 $c_{i,j}$
- 每台内容服务器的费用均为 $p$
- 每个节点有一个权值 $b_i$ 表示供给/需求量， $b_i > 0$ 表示该节点是内容服务器节点， $b_i < 0$ 表示该节点是消费节点， $b_i = 0$ 表示该节点是转运节点（中间节点）；现设定除了消费节点的 $b_i < 0$ 外，其他所有节点均等于0
- 新增"超源点" $S$ ，将其与网络中所有节点相连（出边带宽为正无穷，入边带宽为0，出边入边费用均为0），定义所有流量都从 $S$ 出发，在网络中流动，最终汇入消费节点； $b_S$ 是所有消费节点的需求量之和的相反数
- $x_j$ 表示是否在节点 $j$ 放置内容服务器（决策变量）
- $f_{i,j}$ （其中 $(i, j) \in E$ ）表示边 $(i, j)$ 上的流量（决策变量）

问题可以表达为：

$$\text{minimize } p \cdot \sum_{j \in V} x_j + \sum_{(i,j) \in E} c_{i,j} \cdot f_{i,j}$$

约束于

1. 每个节点的供给/需求约束（节点流出量之和与流入量之和的差等于 $b_i$ ）

$$\sum_{j: (i,j) \in E} f_{i,j} - \sum_{j: (j,i) \in E} f_{j,i} = b_i, \quad \forall i \in V \cup \{S\}$$

2. 边容量约束

$$0 \leq f_{i,j} \leq u_{i,j}, \quad \forall (i, j) \in E$$

3. 流量与选址的触发关系

$$\begin{aligned}x_j &> 0, & \text{when } f_{s,j} > 0 \\x_j &= 0, & \text{when } f_{s,j} \leq 0\end{aligned}$$

上式是一个非线性函数（开关函数），可以用下面的方法转化成线性约束：

添加如下约束

$$x_j \leq f_{s,j} \leq u_{s,j} \cdot x_j$$

其中 $u_{s,j}$ 是常量，表示 $f_{s,j}$ 的上界，在本题中是2000（也就是我们上面所说的无穷大）。当 $x_j = 0$ 时， $0 \leq f_{s,j} \leq 0$ （即 $f_{s,j} = 0$ ）；当 $x_j = 1$ 时， $1 \leq f_{s,j} \leq u_{s,j}$

4. 整数约束

$$\begin{aligned}x_j &\in \{0, 1\}, \quad \forall j \in V \\f_{i,j} &\in \mathbb{Z}, \quad \forall (i, j) \in E\end{aligned}$$