

# 第一次仿真作业

刘泓尊 自 81 2018011446

## 1. 第一题

(1). 我们先来推导  $U(a)$  与  $R_1, R_2, R_3, U_{s1}, U_{s2}$  的关系式:

设通过  $R_1$  的电流为  $I_1$ (向上为正), 通过  $R_3$  的电流为  $I_2$ (向下为正), 则, 对于左侧网孔, 由  $KCL$  和  $KVL$  有:

$$-U_{s1} + I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 + U_{s2} = 0; \quad (1)$$

对于最外侧一圈回路, 由  $KVL$  有:

$$-U_{s1} + I_1 R_1 + I_2 R_3 = 0; \quad (2)$$

而由电压降关系:

$$0 + U_{s1} - I_1 R_1 = U(a); \quad (3)$$

由 (1)(2)(3) 式得:

$$U(a) = \frac{U_{s1} R_2 R_3 + U_{s2} R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}; \quad (4)$$

带入数据得:

$$U(a) = 3.6V$$

(2). 接下来我们来推导并计算  $U(a)$  和  $R_1, R_2, R_3$  的绝对灵敏度:

将 (4) 式分别对  $R_1, R_2, R_3$  求偏导得:

$$\frac{\partial U(a)}{\partial R_1} = \frac{R_2 R_3 [R_3 U_{s2} - (R_2 + R_3) U_{s1}]}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} \quad (5)$$

$$\frac{\partial U(a)}{\partial R_2} = \frac{R_1 R_3 [R_3 U_{s1} - (R_1 + R_3) U_{s2}]}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} \quad (6)$$

$$\frac{\partial U(a)}{\partial R_3} = \frac{R_1 R_2 (U_{s1} + R_1 U_{s2})}{(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)^2} \quad (7)$$

带入数据得:

$$\frac{\partial U(a)}{\partial R_1} = -0.03V/\Omega$$

$$\frac{\partial U(a)}{\partial R_2} = -0.33V/\Omega$$

$$\frac{\partial U(a)}{\partial R_3} = 0.48V/\Omega$$

(3).a. 采用如下图 1 电路求  $U(a)$  对  $R_1, R_2, R_3$  的绝对灵敏度:

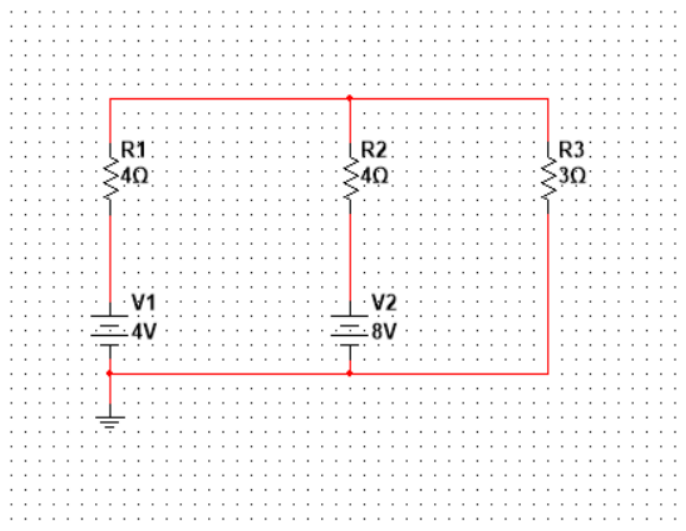


图 1: 灵敏度分析仿真电路

b. 绝对灵敏度的仿真结果如图 2:

设计1 灵敏度分析		
	Variable	Sensitivity
1	rr1	-29.99997 m
2	rr2	-329.99967 m
3	rr3	479.99952 m

图 2: 灵敏度分析仿真结果

可见理论计算结果和仿真结果在误差允许范围内相等，计算结论成立。

#### (4). 偏差分析.

1. 使用绝对灵敏度进行误差分析:

使用全微分对  $U(a)$  的偏差量  $\Delta U(a)$  进行线性近似, 得:

$$\Delta U(a) = \Delta R_1 \frac{\partial U(a)}{\partial R_1} + \Delta R_2 \frac{\partial U(a)}{\partial R_2} + \Delta R_3 \frac{\partial U(a)}{\partial R_3}; \quad (8)$$

a. 取  $R_1, R_2, R_3$  的偏差量  $\Delta R_1 = -0.4\Omega, \Delta R_2 = -0.4\Omega, \Delta R_3 = 0.3\Omega$ , 带入 (8) 式得:

$$\Delta U(a) = 0.288V$$

显然

$$|\Delta U(a)| < 10 * 3.6V = 0.36V$$

所以,  $U(a)$  的偏差不超过其工作点的 10%，可以确保电路正常工作。

b. 取  $R_1, R_2, R_3$  的偏差量  $\Delta R_1 = 0.4\Omega, \Delta R_2 = 0.4\Omega, \Delta R_3 = -0.3\Omega$ , 带入 (8) 式得:

$$\Delta U(a) = -0.288V$$

显然

$$|\Delta U(a)| < 10 * 3.6V = 0.36V$$

所以,  $U(a)$  的偏差不超过其工作点的 10%，可以确保电路正常工作。(事实上, 由于利用全微分进行线性近似, 所以 b 情况的结果与 a 必然互为相反数, 但是为了接下来与 (5) 中讨论建立对应关系, 所以将 b 的情况写在此处) 2. 使用相对灵敏度进行误差分析:

由 (4)(5)(6)(7) 式, 可得对应的相对灵敏度为:

$$\frac{dU(a)}{U(a)} = \frac{R_1 R_2 R_3 [R_3 U_{s2} - (R_2 + R_3) U_{s1}]}{(U_{s1} R_2 R_3 + U_{s2} R_1 R_3)(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)} \frac{dR_1}{R_1} \quad (9)$$

$$\frac{dU(a)}{U(a)} = \frac{R_1 R_2 R_3 [R_3 U_{s1} - (R_1 + R_3) U_{s2}]}{(U_{s1} R_2 R_3 + U_{s2} R_1 R_3)(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)} \frac{dR_2}{R_2} \quad (10)$$

$$\frac{dU(a)}{U(a)} = \frac{R_1 R_2 R_3 (R_2 U_{s1} + R_1 U_{s2})}{(U_{s1} R_2 R_3 + U_{s2} R_1 R_3)(R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3)} \frac{dR_3}{R_3} \quad (11)$$

带入数据得:

$$\frac{dU(a)}{U(a)} = -\frac{1}{30} \frac{dR_1}{R_1}, \quad \frac{dU(a)}{U(a)} = -\frac{11}{30} \frac{dR_2}{R_2}, \quad \frac{dU(a)}{U(a)} = \frac{2}{5} \frac{dR_3}{R_3} \quad (12)$$

- a. 若  $R_1, R_2$  产生 10% 的负偏差,  $R_3$  产生 10% 的正偏差, 带入上式得:  $\frac{dU(a)}{U(a)} = 8\%$ , 所以  $\left| \frac{dU(a)}{U(a)} \right| < 10\%$  所以电路可以正常工作。
- b. 若  $R_1, R_2$  产生 10% 的正偏差,  $R_3$  产生 10% 的负偏差, 带入上式得:  $\frac{dU(a)}{U(a)} = -8\%$ , 所以  $\left| \frac{dU(a)}{U(a)} \right| < 10\%$  所以电路可以正常工作。

(5). 将最大偏差所对应的阻值带入式 (4) 中, 可得:

a. 取  $R_1 = 3.6\Omega, R_2 = 3.6\Omega, R_3 = 3.3\Omega$ , 带入 (4) 中, 得:  $U(a)'_1 = 3.882V$

根据全微分进行的近似结果为  $U(a)_1 = 3.888V$

两者差距  $\delta = U(a)'_1 - U(a)_1 = -0.006V$

所以实际对应电压比 (4) 中近似电压 小 0.006V。

b. 取  $R_1 = 4.4\Omega, R_2 = 4.4\Omega, R_3 = 2.7\Omega$ , 带入 (4) 中, 得:  $U(a)'_2 = 3.306V$

根据全微分进行的近似结果为  $U(a)_2 = 3.312V$

两者差距  $\delta = U(a)'_2 - U(a)_2 = -0.006V$

所以实际对应电压比 (4) 中近似电压 小 0.006V。

综合以上讨论, 可以看到对应最大偏差阻值所产生的  $U(a)$  值均比近似计算电压 小 0.006V。

下面我们来尝试分析产生这一结果的原因：

首先，从物理的角度，由于  $\frac{\partial U(a)}{\partial R_1}$ ,  $\frac{\partial U(a)}{\partial R_2}$ ,  $\frac{\partial U(a)}{\partial R_3}$  均会随  $R_1, R_2, R_3$  的值变化而变化，所以三者产生误差时，仅使用在标准值处的全微分进行线性近似是不足以反映实际的。

或者说，使用全微分进行近似计算仅仅采用了  $R_1, R_2, R_3$  方向单独进行了近似，但是  $R_1, R_2, R_3$  三者共同变化时对于  $U(a)$  的影响并未考虑到，所以会产生误差。

其次，在数学上，由于全微分一阶近似的误差：

$$\left| \Delta U(a) - \left( \Delta R_1 \frac{\partial U(a)}{\partial R_1} + \Delta R_2 \frac{\partial U(a)}{\partial R_2} + \Delta R_3 \frac{\partial U(a)}{\partial R_3} \right) \right| = o\left(\sqrt{\Delta R_1^2 + \Delta R_2^2 + \Delta R_3^2}\right) \quad (13)$$

即近似计算与实际值之间相差了一个高阶无穷小。所以使用全微分进行近似估计的误差会无可避免地出现。

## 2. 第二题

用运算放大器实现电压跟随器。

仿真电路如下图 3：

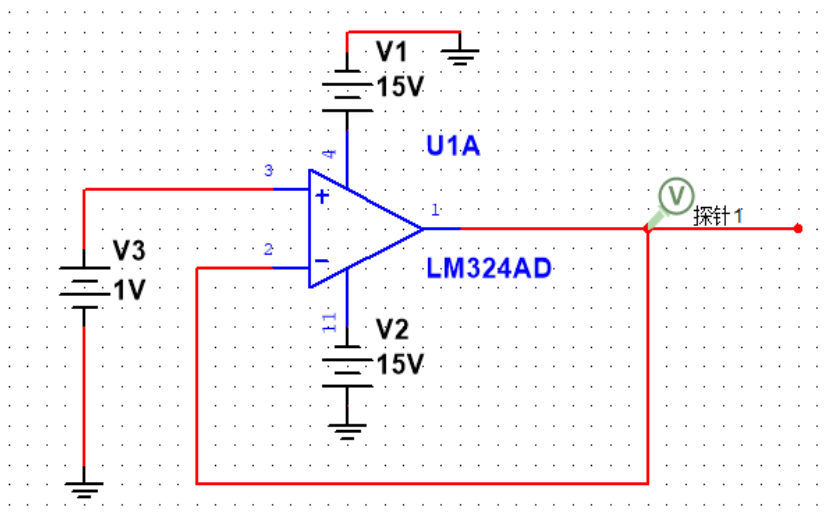


图 3: 电压跟随器仿真电路

参数扫描结果如下图 4(转折点处电压已用游标标出)：

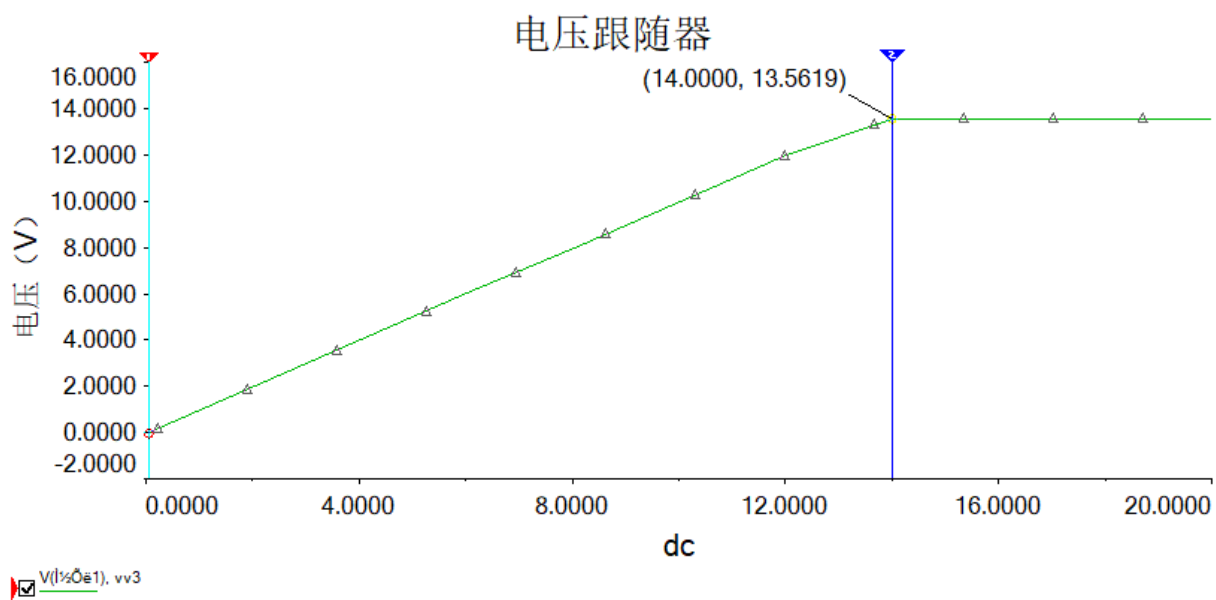


图 4: 电压跟随器输出信号随输入信号的变化波形图

### 3. 第三题

使用运算放大器实现  $3x + 2y - 0.5z$  的信号运算功能

仿真电路如下图 5:

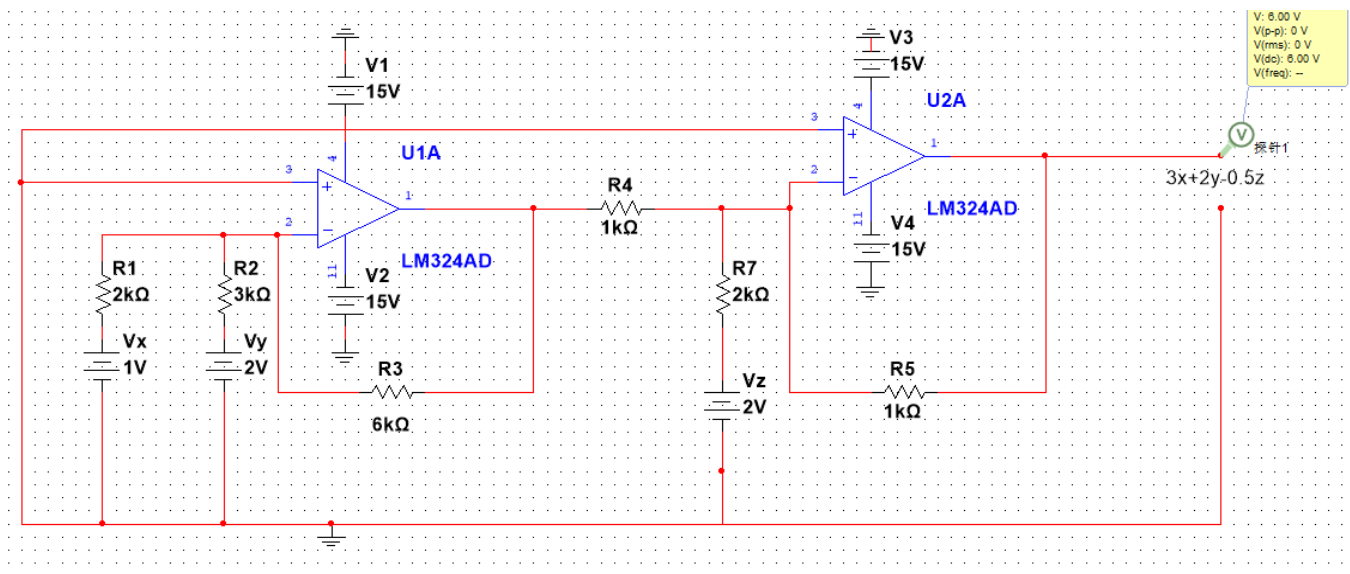


图 5:  $3x + 2y - 0.5z$  的仿真电路

(2) 分析输出和输入信号  $x, y, z$  的关系:

本电路由两个运算放大器和若干电阻构成。左侧运放处理  $x, y$  信号。

应用“虚短”和“虚断”，得

$$u_- = u_+ = 0, \quad i_+ = i_- = 0 \quad (14)$$

在左侧运放输入端应用  $KCL$ ，在  $R_1, R_2, R_3$  上应用  $KVL$  和欧姆定律得：

$$\frac{u_x - 0}{R_1} + \frac{u_y - 0}{R_2} = \frac{0 - u_1}{R_3} \quad (15)$$

对于右侧运放，类似于上述分析可得

$$\frac{u_z - 0}{R_7} + \frac{u_1 - 0}{R_4} = \frac{0 - u_{out}}{R_5} \quad (16)$$

带入数据得：

$$u_{out} = 3u_x + 2u_y - 0.5u_z \quad (17)$$

所以实现了  $3x + 2y - 0.5z$  的运算。

### (3) 表格与误差分析

	1			2			3			4		
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	x	y	z
	1	1	1	1	3	2	-2	2	0	3	3	2
理论输出	4.5			8			-2			14		
实际输出	4.5			8			-2			13.6		

表 1: 输出信号与输入信号的关系

可见当输入  $(x, y, z) = (3, 3, 2)V$  时，仿真输出和理论输出不同，原因是，

在此情况下，运放的供电电压不足以支持其正常工作。可以发现，当把两个运放的供电电压增大为  $20V$  时，输出结果为  $14V$ ，和理论结果相同。因此，可能的解决方案为 **增大运放的供电电压，使得运放可以正常工作。**

## 4. 第四题

使用仿真软件实现由运放构成的负电阻电路

仿真电路如下图 6:

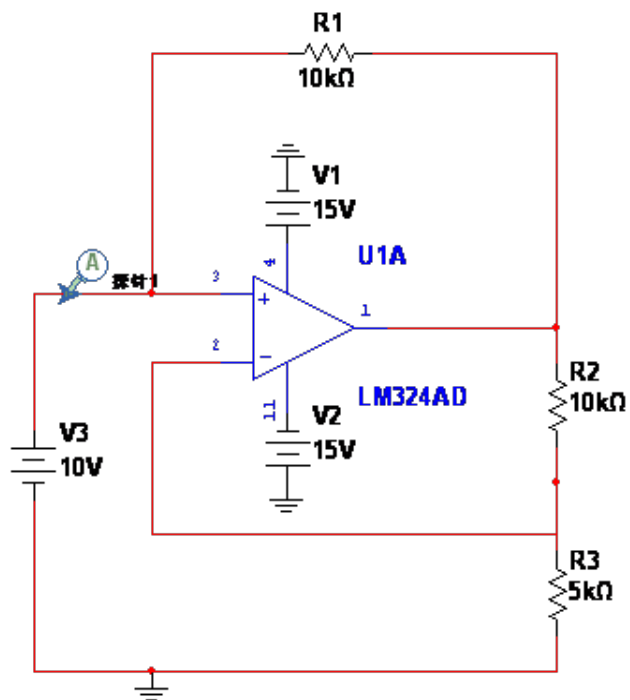


图 6: 负电阻电路仿真电路

参数扫描结果如下图 7:

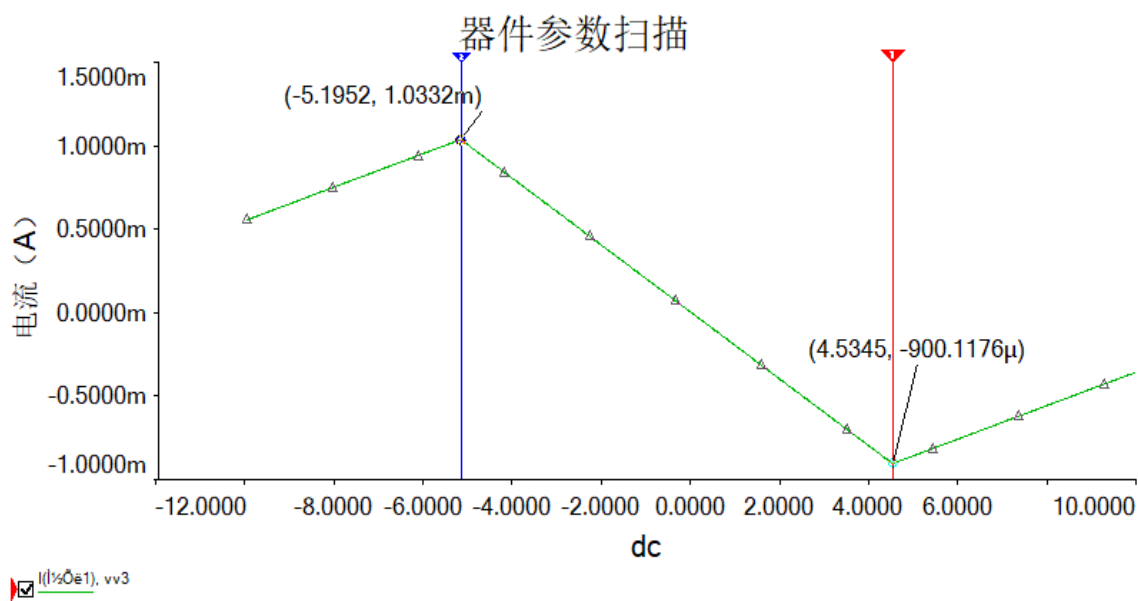


图 7: 输入电流  $i_1$  随输入电压  $u_1$  变化的波形图

仿真曲线显示:

在-10V 到-5.5V 段图像斜率  $k_1 = 0.1m\Omega > 0$

在-5.5V 到 4.5V 段图像斜率  $k_2 = -0.2m\Omega < 0$ , 可以视为“负电阻”。

在 4.5V 段到 10V 段图像斜率  $k_3 = 0.1m\Omega > 0$   
 转折点电流电压已在图中标出。

下面分析产生上述结果的原因：1. 当  $-U_{ds} < u_1 < U_{ds}$  时，运放工作在线性区，同时满足“虚短”和“虚断”特性。根据“虚短”特性，有

$$u_+ = u_- = u_1 \quad (18)$$

根据“虚断”特性，有

$$i_1 = \frac{u_+ - u_0}{R_1} \quad (19)$$

$$i_2 = \frac{u_- - u_0}{R_2} \quad (20)$$

根据欧姆定律，有

$$0 - u_- = i_2 R \quad (21)$$

由 (17)(18)(19)(20) 式，得等效电阻  $R'$  关系式为：

$$R' = -\frac{RR_1}{R_2} < 0 \quad (22)$$

代入数据得：  $R' = -5K\Omega$

斜率  $k_1 = \frac{1}{R'} = -0.2mS$ ，与仿真结果相符

该段电路等效于  $R' = -5K\Omega$  的“负电阻”。

2. 当  $u_1 > U_{ds}$  时，“虚断”依然成立，“虚短”不再成立。则此时，

$$U_0 = U_{sat} \quad (23)$$

由“虚断”特性：

$$i_1 = \frac{u_1 - U_0}{R_1} \quad (24)$$

即

$$i_1 = \frac{1}{R_1} u_1 - \frac{U_{sat}}{R_1} \quad (25)$$

斜率  $k_2 = \frac{1}{R_1} = 0.1mS$ ，与仿真结果相符。

该段曲线等效于如下图电路：

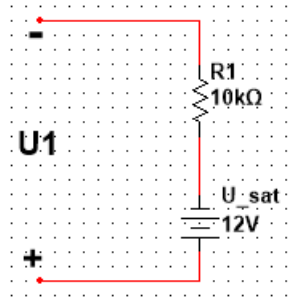


图 8:  $u_1 > U_{ds}$  时的等效电路



3. 当  $u_1 < -U_{ds}$  时，类似于 2 的分析方法，得  $i_1$  随  $U_1$  变化的关系式为：

$$i_1 = \frac{1}{R_1}u_1 + \frac{U_{sat}}{R_1} \quad (26)$$

斜率  $k_2 = \frac{1}{R_1} = 0.1mS$ ，与仿真结果相符。

该段曲线等效于如下图电路：

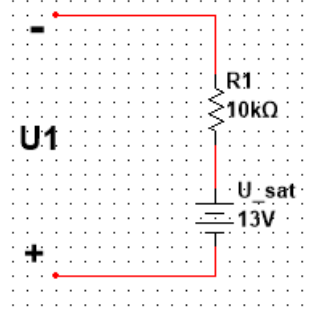


图 9:  $u_1 < U_{ds}$  时的等效电路

综合以上分析得到  $i_1$  随  $u_1$  的变化函数为：

$$i_1 = \begin{cases} -\frac{R_1}{R_2}u_1 & -U_{ds} \leq u_1 \leq U_{ds} \\ \frac{1}{R_1}u_1 - \frac{U_{sat}}{R_1} & u_1 > U_{ds} \\ \frac{1}{R_1}u_1 + \frac{U_{sat}}{R_1} & u_1 < -U_{ds} \end{cases}$$

下面对于图像转折点进行分析：显然，图像发生转折是由于运放的工作区间发生了变化，并且由于运放的输入输出特性曲线是连续的，所以  $i_1$  随  $u_1$  变化的曲线也是连续的。 $u_1 = U_{ds}$  时，带入对应电流关系式，得：

$$i_1 = -0.2mS \times (-5.19V) \approx 0.13mA \quad (27)$$

$u_1 = -U_{ds}$  时，带入对应电流关系式，得：

$$i_1 = -0.2mS \times (4.53V) \approx -0.9mA \quad (28)$$

与仿真结果接近。

**仿真结果与实际结果存在偏差的原因分析：**

首先，运放“虚断”特性是建立在运放是“理想”的情况下的，但是实际上尽管使用了  $k\Omega$  级别的电阻，将运放视为输入电阻“无穷大”依然是和实际存在误差的。“虚短”特性也是建立在开环放大倍数  $A$  为  $\infty$  的情况下的。所以理论和实际存在误差。其次，由于仿真软件进行扫描取点，得到的仿真曲线精度取决于取样密度，即每次取样的“增量”，这也会对仿真曲线产生一定的误差。