Elementary Number Theory: Homework1

刘泓尊　2018011446　计 84

2020 年 3 月 29 日

Exercises 1.1

2. 证明: 如果 a 和 b 为正整数，则在所有形式为 $a-bk(k\in\mathbb{Z})$ 的正整数中有一个最小元.

证明. 令 $S=\{a-bk \mid a\in\mathbb{N}^+, b\in\mathbb{N}^+, a-bk\in\mathbb{N}^+\}$.
$\because a-b(-1)=a+b\in S$
$\therefore S\neq\Phi$
故 S 是非空的正整数集合, 由良序公理, S 有最小元. □

32. 证明强狄利克雷逼近定理

证明. 考虑 $\{j\alpha \mid 0\leq j\alpha<1, j=0,1,2,\cdots,n+1\}$ 将区间 $[0,1)$ 等分为长度为 $1/(n+1)$ 的区间 $\left[\frac{k-1}{n+1},\frac{k}{n+1}\right), k=1,2,\cdots,n+1$.
因此我们有 $n+2$ 个数, $n+1$ 个区间, 根据鸽巢原理, 必有一个区间包含至少两个数.
即 $\exists r,s\in\mathbb{Z},, s.t. |\{r\alpha\}-\{s\alpha\}|\leq 1/(n+1)$.
令 $a=s-r, b=[s\alpha]-[r\alpha]$.
$\because 0\leq r<s\leq n+1$
$\therefore 1\leq a\leq n$
$\therefore |a\alpha-b|=|(s-r)\alpha-([s\alpha]-[r\alpha])|=|(s\alpha-[s\alpha])-(r\alpha-[r\alpha])|=|\{s\alpha\}-\{r\alpha\}|<1/(n+1)$
故 $\exists a(\in[1,n]), b, \quad s.t. |a\alpha-b|\leq 1/(n+1)$ □

43. 证明存在无穷多个乌拉姆数

证明. 假设只存在有限个乌拉姆数, 所有乌拉姆数构成集合 U.
根据定义,$|U|\geq 2$
取其中最大的两个数 u_{n-1}, u_n, 则 u_n+u_{n-1} 是乌拉姆数, 因为 $u_i+u_j<u_n+u_{n-1}, \forall j<n, i<n, i\neq j$
假设不成立, 因此有无穷多个乌拉姆数. □

44. 证明 e 是无理数

证明. 假设 $e\in\mathbb{Q}$, 即 $e=a/b, a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$
令 $k\geq b$, $c=k!(e-1-1/1!-1/2!-1/3!-\cdots 1/k!)$
因为括号中分母都可整除 $k!$, 所以 $c\in\mathbb{Z}$

$\because e = 1 + 1/1! + 1/2! + \cdots$
$\therefore 0 < c = k!(1/(k+1)! + 1/(k+2)! + \cdots) = 1/(k+1) + 1/(k+1)(k+2) + \cdots < 1/(k+1) + 1/(k+1)^2 + \cdots = 1/k$
$\therefore 0 < c < 1/k, c \notin \mathbb{Z}$
矛盾! 故 e 是无理数. □

45. 证明实数集不可数.

证明. 使用 $Cantor's\ Diagonal\ Argument$ 给出证明:
假设实数集 $\mathbb{R}$ 是可数集, 则 $S = \{a \mid a \in \mathbb{R}, 0 < a < 1\} \subset \mathbb{R}$ 可数.
故存在双射 $f : \mathbb{Z}^+ \to (0,1)$, 设 $f(k) = a_k \in (0,1), k \in \mathbb{Z}^+$
因为 $a_k \in (0,1)$, 所以 a_k 可表示为 $0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots$, 其中 a_{ki} 是 a_k 的第 i 位小数.
对于实数 $c = c_1c_2c_3\cdots$, 若 $a_{kk} = 5$, 则 $c_k = 4$; 若 $a_{kk} \neq 5$, 则 $c_k = 5$. 那么 $c \neq a_k = f(k), \forall k \in \mathbb{Z}^+$, 所以 f 不是 $\mathbb{Z}^+ \to (0,1)$ 的双射.
所以实数集不可数. □

Exercises 1.3

15. 使用数学归纳法证明 $H_{2^n} \geq 1 + n/2$

证明. 基础: $n = 0$ 时, $H_{2^0} = H_1 = 1 \geq 1 = 1 + 0/2$
假设: 对于 n 有 $H_{2^n} \geq 1 + n/2$ 成立.
递推: $H_{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{2^n} 1/j + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} 1/j \geq H_{2^n} + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} 1/2^{n+1} \geq 1 + n/2 + 2^n \cdot 1/2^{n+1} = 1 + n/2 + 1/2 = 1 + (n+1)/2$.
所以 $H_{2^n} \geq 1 + n/2$. □

16. 使用数学归纳法证明 $H_{2^n} \leq 1 + n$

证明. 基础: $n = 0$ 时, $H_{2^0} = H_1 = 1 \leq 1 = 1 + 0$
假设: 对于 n 有 $H_{2^n} \leq 1 + n$ 成立.
递推: $H_{2^{n+1}} = \sum_{j=1}^{2^n} 1/j + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} 1/j \leq H_{2^n} + \sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} 1/2^n \leq 1 + n + 2^n \cdot 1/2^n = 1 + n + 1 = 1 + (n+1)$.
所以 $H_{2^n} \leq 1 + n$. □

Exercises 1.4

10. 证明: $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$, $f_0 = 0$

证明. 基础: $n = 0$ 时, $f_3 = 2 = f_2^2 + f_1^2 = 1 + 1$; $n = 2$ 时, $f_5 = 5 = f_3^2 + f_2^2 = 2^2 + 1^2$.
假设: $f_{2k-1} = f_k^2 + f_{k-1}^2, \forall k \leq n$
递推: $f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k-1} = 2f_{2k-1} + f_{2k-2} = 2f_{2k-1} + f_{2k-1} - f_{2k-3} = 3f_{2k-1} - f_{2k-3} = 3(f_k^2 + f_{k-1}^2) - (f_{k-1}^2 + f_{k-2}^2) = 3f_k^2 + 2f_{k-1}^2 - (f_k - f_{k-1})^2 = 2f_k^2 + f_{k-1}^2 + 2f_kf_{k-1} = 2f_k^2 + (f_{k+1} - f_k)^2 + 2f_k(f_{k+1} - f_k) = f_{k+1}^2 + f_k^2$
故 $f_{2n+1} = f_{n+1}^2 + f_n^2$ □

11. 证明: $f_{2n}=f_{n+1}^2-f_{n-1}^2$, $f_0=0$

证明. $n=1$ 时: $f_2=1=f_2^2-f_0^2=1-0=1$
由上题结论: $f_{2n+1}=f_{n+1}^2+f_n^2$
$n\geq 2$ 时, $f_{2n}=f_{2n-1}+f_{2n-2}=2f_{2n-1}-f_{2n-3}=2(f_n^2+f_{n-1}^2)-(f_{n-1}^2+f_{n-2}^2)=2f_n^2+f_{n-1}^2-f_{n-2}^2=2f_n^2+f_{n-1}^2-(f_n^2-f_{n-1})^2=f_n^2+2f_nf_{n-1}=(f_{n+1}-f_{n-1})^2+2(f_{n+1}-f_{n-1})f_{n-1}=f_{n+1}^2-f_{n-1}^2$
故 $f_{2n}=f_{n+1}^2-f_{n-1}^2$ □

12. 证明: $f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+2f_{n-3}+4f_{n-4}+8f_{n-5}+\cdots+2^{n-3}=2^{n-1}$

证明. 令 $S_n=f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+2f_{n-3}+4f_{n-4}+8f_{n-5}+\cdots+2^{n-3}f_1$
使用数学归纳法:
基础: $S_3=f_3+f_2+f_1=2+1+1=4=2^{3-1}$, $S_4=f_4+f_3+f_2+2f_1=3+2+1+2\times1=8=2^{4-1}$
假设: $S_k=2^{k-1},\forall k\leq n$
递推: $S_{n+1}=f_{n+1}+f_n+f_{n-1}+2f_{n-2}+4f_{n-3}+\cdots=(f_n+f_{n-1})+(f_{n-1}+f_{n-2})+(f_{n-2}+f_{n-3})+\cdots=(f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+2f_{n-3}+\cdots)+(f_{n-1}+f_{n-2}+f_{n-3}+2f_{n-4}+\cdots)+2^{n-2}f_1=S_n+S_{n-1}+2^{n-2}=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-2}=2^n$
根据归纳假设, $S_n=f_n+f_{n-1}+f_{n-2}+2f_{n-3}+4f_{n-4}+8f_{n-5}+\cdots+2^{n-3}=2^{n-1}$. □

34.$F=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, 证明 $n\in\mathbb{Z}$ 时, $F^n=\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}$

证明. $n=1$ 时:

$$F^1=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_2&f_1\\f_1&f_0\end{pmatrix}$$

假设: 结论对 n 成立.
递推:

$$F^{n+1}=FF^n=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{n+1}+f_n&f_n+f_{n-1}\\f_{n+1}&f_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_{n+2}&f_{n+1}\\f_{n+1}&f_n\end{pmatrix}$$

故 $F^n=\begin{pmatrix}f_{n+1}&f_n\\f_n&f_{n-1}\end{pmatrix}$ □

40. 若 $a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n)$, 其中 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, 则 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, 且 $a_1=a_2=1$, 从而得到 $f_n=a_n$, 即第 n 个裴波那契数.

证明. 易证 $\alpha^2=\alpha+1$, $\beta^2=\beta+1$.
$a_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha-\beta)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1=f_1$
$a_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^2-\beta^2)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left((\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2\right)=1=f_2$
$a_{n-2}+a_{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2}(\alpha+1)-\beta^{n-2}(\beta+1)\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{n-2}\alpha^2-\beta^{n-2}\beta^2\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^n-\beta^n\right)=a_n$
即 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$
所以 $f_n=a_n$ □

Exercises 1.5

53. 证明当 $n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\}$ 时, $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ 是奇数

证明. 根据二项式定理: $(2+\sqrt{3})^n+(2-\sqrt{3})^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j \sqrt{3}^{n-j} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} 2^j (-1)^{n-j} \sqrt{3}^{n-j} = 2(2^n + \binom{n}{2} 3 \cdot 2^{n-2} + \binom{n}{4} 3^2 \cdot 2^{n-4} + \cdots) = 2l, l \in \mathbb{Z}$

即 $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ 是偶数.

又 $(2-\sqrt{3}) < 1$, $\left[(2+\sqrt{3})^n\right] = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n - 1$

所以 $\left[(2+\sqrt{3})^n\right]$ 是奇数. $\square$