数学作业纸

班级：计84　姓名：刘泓尊　编号：2018011446　科目：　　　第　页

1. 解：$x(n)=\{1,2,3,4\}$

4点 DFT：
$X(0)=1+2+3+4=10$
$X(1)=1-2i-3+4i=2i-2$
$X(2)=1-2+3-4=-4$
$X(3)=1+2i-3-4i=-2i-2$

8点 DFT：
$X(0)=10$
$X(1)=1+(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)-3i+(-2\sqrt{2}i-2\sqrt{2})$
$=(1-\sqrt{2})-(3+3\sqrt{2})i$
$X(2)=2i-2$
$X(3)=1+(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)+3i+(2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)$
$=(1+\sqrt{2})+(3-3\sqrt{2})i$
$X(4)=-4$
$X(5)=1+(\sqrt{2}i-\sqrt{2})-3i+(2\sqrt{2}i+2\sqrt{2})$
$=(1+\sqrt{2})+(-3+3\sqrt{2})i$
$X(6)=-2i-2$
$X(7)=1-\sqrt{2}+(3+3\sqrt{2})i$

2. 解：$x(n)=\cos(\frac{2\pi}{N}mn)$

① 若 $m\neq k$ 且 $m+k\neq N$：$X(k)=0$

② 若 $m=k$ 且 $m+k\neq N$：$X(k)=\frac{1}{2}\lim\limits_{m-k\to 0}\dfrac{1-e^{j2\pi(m-k)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(m-k)}}=\frac{N}{2}$

③ 若 $m\neq k$ 且 $m+k=N$：$X(k)=\frac{1}{2}\lim\limits_{m+k\to N}\dfrac{1-e^{j2\pi(m+k)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(m+k)}}=\frac{N}{2}$

④ 若N为偶，$m=k=\frac{N}{2}$，$X(k)=N$.

~~若N为偶，$m=k=\frac{N}{2}$，$X(k)=N$~~

附：过程：$X(k)=\sum\limits_{n=0}^{N-1}\cos(\frac{2\pi}{N}mn)\,e^{-\frac{2j\pi}{N}kn}$

$=\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{n=0}^{N-1}e^{\frac{2j\pi(m-k)}{N}n}+\sum\limits_{n=0}^{N-1}e^{\frac{-2j\pi(m+k)}{N}n}\right)=\frac{1}{2}\left(\dfrac{1-e^{2j\pi(m-k)}}{1-e^{2j\pi(m-k)/N}}+\dfrac{1-e^{2j\pi(m+k)}}{1-e^{-2j\pi(m+k)/N}}\right)$

3. 证明：即证 $DFT[\tilde{x}(n)]=DFT[x(n)]$

令 $X=Ax$ $\quad \tilde{X}=B\tilde{x}$

$A_{k,mN+n}=W_N^{k(mN+n)}$

其中 $W_N^{kmN}=1$， 故 $A_{k,mN+n}=A_{kn}$

故 $A=[B,B,\cdots B]$

$X=Ax=[B,B,\cdots B]x=B[I_N,I_N\cdots I_N]x$

$=B\tilde{x}$

$=\tilde{X}$

得证.

4. 证明：

$$X(\frac{N}{2}+k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{n(\frac{N}{2}+k)}$$

$$G(k)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2m)W_{\frac{N}{2}}^{mk}$$

$$H(k)=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}x(2m+1)W_{\frac{N}{2}}^{mk}.$$

$G(k)-W_N^kH(k)$

$$=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[-x(2m+1)W_N^{(2m+1)k}+x(2m)W_N^{2mk}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(2m)W_N^{2mk}+x(2m+1)W_N^{(2m+1)k+\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\frac{N}{2}-1}\left[x(2m)W_N^{2mk+mN}+x(2m+1)W_N^{(2m+1)k+mN+\frac{N}{2}}\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{N-1}\left[x(n)W_N^{n(k+\frac{N}{2})}\right]$$

$=X(\frac{N}{2}+k)$

$\therefore X(\frac{N}{2}+k)=G(k)-W_N^kH(k) \quad k=0,1\cdots\frac{N}{2}-1$