数学作业纸

班级：计84　姓名：刘泽峥　编号：2018011446　科目：　　　　　　　　　第　　页

1、设 $z=\cos x+i\sin x\in\mathbb{C}$

$$\frac{dz}{dx}=-\sin x+i\cos x$$
$$=i^2\sin x+i\cos x$$
$$=iz$$

$\therefore$ $\frac{dz}{dx}=iz\Leftrightarrow\frac{dz}{z}=i\,dx$

$$\int\frac{dz}{z}=\int i\,dx\Leftrightarrow\ln z=ix+C$$

取 $x=0$ 有 $z=1$，即 $C=\ln z-ix=0$

$\therefore$ $\ln z=ix\Leftrightarrow z=e^{ix}$

$\therefore$ $\cos x+i\sin x=e^{ix}$

2、证明：①显然 $e^{jn\omega_0 t}$ $(n=0,\pm1,\pm2\cdots)$ 在 $[-\frac{\pi}{\omega_0},\frac{\pi}{\omega_0}]$ 上非零

② $n_1\neq n_2$ 时

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}}e^{jn_1\omega_0 t}\cdot e^{-jn_2\omega_0 t}\,dt$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}}e^{j(n_1-n_2)\omega_0 t}\,dt=\frac{1}{j(n_1-n_2)\omega_0}e^{j(n_1-n_2)\omega_0 t}\Big|_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}}$$

$$=\frac{1}{j(n_1-n_2)\omega_0}\left(e^{j(n_1-n_2)\pi}-e^{-j(n_1-n_2)\pi}\right)$$

$$=\frac{1}{j(n_1-n_2)\omega_0}\left((-1)^{(n_1-n_2)}-(-1)^{n_2-n_1}\right)$$

$$=0$$

③ $n_1=n_2=n$ 时

$$\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}}e^{jn\omega_0 t}e^{-jn\omega_0 t}\,dt=\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}}1\cdot dt=\frac{2\pi}{\omega_0}\neq0$$

由①②③知：$e^{jn\omega_0 t}$ $(n\in\mathbb{Z})$ 在 $[-\frac{\pi}{\omega_0},\frac{\pi}{\omega_0}]$ 上为正交函数集