数学作业纸

班级：计84　姓名刘泓尊　编号：2018011446　科目：　　　　第　页

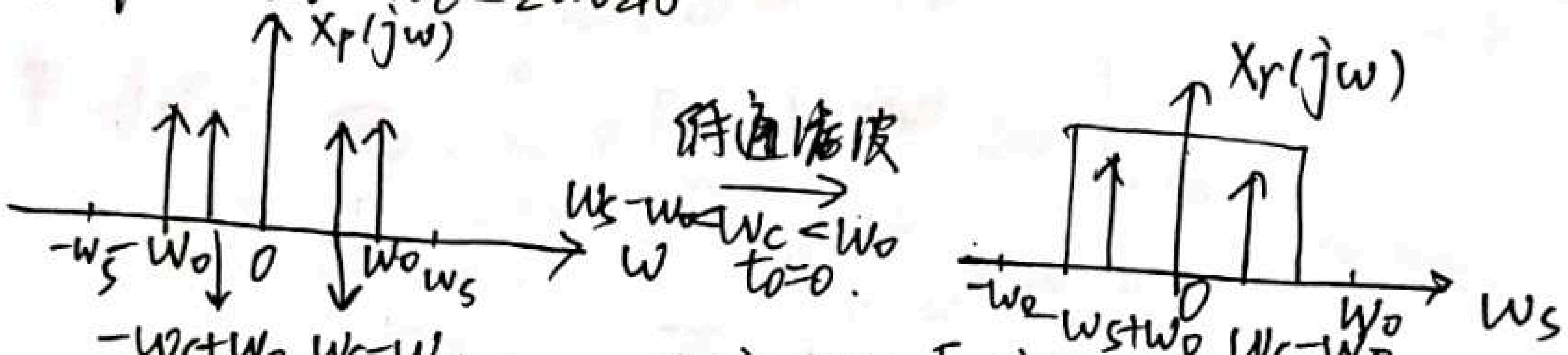
1. 解：$x(t)=\cos(\omega_0 t+\varphi)$

$$\mathcal{F}[x(t)]=\frac{1}{2}\left[\mathcal{F}[e^{j(\omega_0 t+\varphi)}]+\mathcal{F}[e^{-j(\omega_0 t+\varphi)}]\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}\cdot 2\pi\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\varphi}\cdot 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

$$=\pi\left[e^{j\varphi}\delta(\omega-\omega_0)+e^{-j\varphi}\delta(\omega+\omega_0)\right]$$

欠采样：$\omega_0<\omega_c<2\omega_0$时



$$X_r(j\omega)=\pi\left[e^{j\varphi}\delta(\omega-(\omega_0-\omega_s))+e^{-j\varphi}\delta(\omega+(\omega_0-\omega_s))\right]$$

$$x_r(t)=\pi\mathcal{F}^{-1}\left[e^{j\varphi}\delta[\omega+(\omega_s-\omega_0)]+e^{-j\varphi}\delta[\omega-(\omega_s-\omega_0)]\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j\varphi}e^{-j(\omega_s-\omega_0)t}+e^{-j\varphi}e^{j(\omega_s-\omega_0)t}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[e^{j[(\omega_0-\omega_s)t+\varphi]}+e^{-j[(\omega_0-\omega_s)t+\varphi]}\right]$$

$$=\cos[(\omega_0-\omega_s)t+\varphi]=\cos((\omega_s-\omega_0)t-\varphi)$$

∴ $x_r(t)=\cos((\omega_s-\omega_0)t-\varphi)$

∴ 从数学上，$x_r(t)$频率减为 $\omega_s-\omega_0>0$，相位相反

从图形上，由于低通滤波 滤过$\delta(-\omega_s+\omega_0)$，该分量相位为$e^{j\varphi}$，但频率却小于0。同理$\delta(\omega_s-\omega_0)$分量相位为$e^{-j\varphi}$，但频率却大于0。由于 $\omega_s-\omega_0<\omega_c<\omega_0$，所以频率减小。

所以，$x_r(t)$ 频率变小，而且相位相反。

1. 证明: 令 $g(t)=T\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(t-kT)$

则 $g(0)=T\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT)$.

$$\mathcal{F}[g(t)]=\mathcal{F}\left[T\cdot f(t)*\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT)\right]$$

$$\overset{w_0=\frac{2\pi}{T}}{=} T\cdot w_0F(w)\cdot\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_0)$$ (利用 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT)\leftrightarrow\frac{2\pi}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-\frac{2\pi}{T}n)$)

$$=2\pi F(w)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_0)$$

$$g(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{F}[g(t)]e^{jwt}dw\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}2\pi F(w)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_0)e^{jw\cdot 0}dw$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(w)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(w-nw_0)dw$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(nw_0)$$

$\therefore$ $T\cdot\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f(kT)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}F(nw_0)$, 证毕.

2. 解: (a) $DTFT[x(n)*x^*(-n)]$

$$=DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x^*(-n)]$$

$$=X(w)\cdot X^*(w).$$

(b) $DTFT[x(2n+1)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(2n+1)e^{-jnw}$

$$=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{-j\frac{m-1}{2}w}$$

$$=e^{\frac{jw}{2}}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)e^{-jm\frac{w}{2}}$$

$$=e^{j\frac{w}{2}}X(\frac{w}{2}).$$

(c) $DTFT[x(n)-x(n-2)]=DTFT[x(n)]-DTFT[x(n-2)]$

$$=X(w)-e^{-2jw}X(w)$$

(d) $DTFT[x(n)*x(n-1)]$

$$= DTFT[x(n)]\cdot DTFT[x(n-1)]$$

$$= X(w)\cdot X(w)\cdot e^{-jw}$$

$$= e^{-jw}X^2(w)$$

3.

$$DTFT[y(n)] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n)e^{-jnw}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} y(kL)e^{-jkLw}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)e^{-jkLw}$$

$$= X(Lw)$$

$\therefore Y(w) = X(Lw)$.