《图论与代数结构》部分习题解析

刘泓尊　2018011446　计 84

liu-hz18@mails.tsinghua.edu.cn

Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University

2020 年 5 月 26 日

Chapter 1

1. 证明. 以工厂为节点，工厂之间有联系则建边，构成无向图。

a. 假设每座工厂都只与其他 3 座工厂有联系，则总度数为

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 9\times 3 = 27$$

由性质 1.1.1，图的度数和应为偶数，矛盾！

故，不可能每座工厂都只与其他三座工厂有业务联系。

b. 假设只有 4 座工厂与偶数个工厂有业务联系，剩余 5 个工厂与奇数个工厂有联系，则总度数为

$$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 4\times 2i + 5\times(2j+1) = 2(4i+5j)+1$$

上式为奇数，同样与性质 1.1.1 矛盾！

故，不可能只有 4 座工厂与偶数个工厂有联系. □

2. 证明. 假设 G 中存在至少 1 个孤立节点，则至多有 $n-1$ 个非孤立节点。由于 G 为简单图，不存在重边和自环，所以每个非孤立节点最多与 $n-2$ 个非孤立节点相连，总边数

$$m = \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} d(v) \le \frac{1}{2}\sum_{v\in V(G)} (n-2) \le \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

与题设条件

$$m > \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$

矛盾!

故，G 中不存在非孤立节点。 □

3. 证明. 根据定义，有向完全图满足条件

$$d^+(v_i) + d^-(v_i) = n-1,\quad v_i\in V(G)$$

故

$$
\begin{aligned}
left - right &= \sum_{v_i \in V(G)} \big((d^+(v_i))^2 - (d^-(v_i))^2\big) \\
&= \sum_{v_i \in V(G)} \big((d^+(v_i))^2 - (n-1-d^+(v_i))^2\big) \\
&= \sum_{v_i \in V(G)} \big(2(n-1)d^+(v_i) - (n-1)^2\big) \\
&= 2(n-1)\sum_{v_i \in V(G)} d^+(v_i) - n(n-1)^2 \\
&= 2(n-1)\frac{n(n-1)}{2} - n(n-1)^2 \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{1}
$$

即

$$
\sum_{v_i \in V(G)} (d^+(v_i))^2 = \sum_{v_i \in V(G)} (d^-(v_i))^2
$$

□

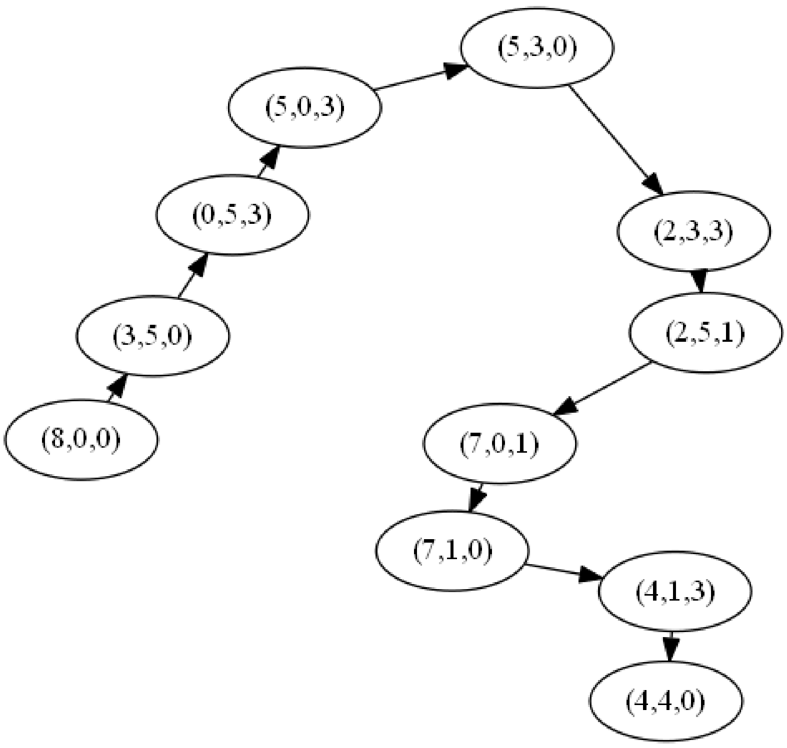
4. 设 $8L, 5L, 3L$ 的容器对应节点 (a, b, c), 其中 a, b, c 分别依次对应三种容器。

搜索思路:

对状态进行转移与搜索 (dfs)，当某一容器 m 非空且存在另一容器 n 不满时，就可以将水从 m 倒入 n 中，使得 m 空或者 n 满，以此作为一次状态转移；

对各状态进行 DFS 之后可以得到如下图所示的解。解的路径就是操作的具体过程。

- 附录 (Appendix) 给出了具体实现代码。



7. 同构。构造映射 $f : G_a \to G_b$ 如下:

v	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
$f(v)$	b	a	c	e	d	f

8.

邻接矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

设边的顺序为 $e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_4), e_3 = (v_3, v_1), e_4 = (v_2, v_5), e_5 = (v_6, v_3), e_6 = (v_6, v_4), e_7 = (v_5, v_3), e_8 = (v_3, v_4), e_9 = (v_6, v_1)$

关联矩阵：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

边列表：

$$A = (1, 1, 3, 2, 6, 6, 5, 3, 6)$$

$$B = (2, 4, 1, 5, 3, 4, 3, 4, 1)$$

正向表：

$$A = (1, 3, 4, 6, 6, 7, 10)$$

$$B = (2, 4, 5, 1, 4, 3, 3, 4, 1)$$

Chapter 2

Thinking. 完全二分图 $K_{m,n}$ 何时为欧拉图?

由于无向连通图 G 存在欧拉回路 (是欧拉图) 的充要条件是 G 中每个节点的度均为偶数。

而完全二分图两子集 X, Y 中，X 中节点度为 $|Y|$,Y 中节点度为 $|X|$, 故充要条件为：

$$m, n \text{ 均为偶数}$$

2. 证明. 假设 G 和 $\overline{G}$ 均不是连通图

设 G 存在连通支 G_1, G_2, 在 G 中任取节点 v_1, v_2:

• 若存在边 (v_1, v_2), 则在 G_2 中取点 v_3,v_3 与 v_1, v_2 均不连通，由补图的定义，$\overline{G}$ 中 v_3 与 v_1, v_2 连通，则 $\overline{G}$ 中 v_1 与 v_2 通过 v_3 连通。

• 若不存在边 (v_1, v_2), 则由补图的定义，$\overline{G}$ 中 v_1 与 v_2 通过 v_3 连通.

由 v_1, v_2 的任意性知，$\overline{G}$ 连通。与假设矛盾！

故 G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是连通图。 □

3. 证明. 图 G 有两条最长道路 L_1, L_2, 其长度均为 l, 假设两条道路不相交，即两者没有公共顶点

由于 G 为连通图，L_1, L_2 中分别存在点 v_1, v_2 使得存在 $v_1 \to v_2$ 的道路，设该道路为 L. v_1 分 L_1 为两部分，一部分 L_{1a} 长度 $\geq l/2$; 同理，v_2 分 L_2 为两部分，一部分 L_{2a} 长度 $\geq l/2$，则取道路 $L_{1a} \cup L_{2a} \cup L$，该道路长度 $\geq l/2 + l/2 + 1 = l + 1$, 与 L_1, L_2 是最长道路的假设矛盾！

故若连通图最长道路不唯一，它们必定相交。 □

4. 证明. 对顶点数 n 作归纳。

a.$n = 4$ 时，$m \geq 5$。

若 G 中存在度为 0 或 1 的节点，则剩余 3 个节点的子图的度 $\sum deg \geq 4$，与简单图的边数矛盾。故 G 中节点 $deg \geq 2$. 则 G 中回路只有两种形式:

1. 三角形回路　2. 四边形回路

• 若为三角形回路，则 G 中剩下的一个顶点至少与此三角形有 2 条边，这两条边与原三角形两边构成四边形回路，三角形剩下的一条边就是弦 $(Chord)$.

• 若为正方形回路，则至少还有一条边，该边就是弦。

b. 假设对节点数 $n-1$ 的图成立.

c. 对于节点数为 n 的图:

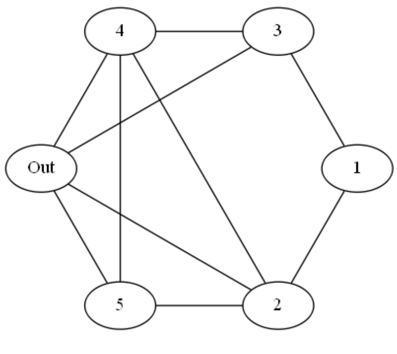
• 若 G 中存在度为 1 的节点 v，则将该节点及其所连边去除后，由归纳假设知命题成立.

• 若 G 中存在度为 2 的节点 v，设该节点所连点为 v_s, v_t, 则去除 v 及其所连边，并将 v_s, v_t 合并为一个节点，该图即为 $n-1$ 的图 G'，由归纳假设知 G' 存在带弦回路，还原为 G 后仍然是带弦回路。

• 否则，G 中所有节点 $deg \geq 3$，由例 2.1.3 结论可知，G 中必含带弦回路。 □

6. 解. 将图中房间设为顶点，同时增设外部节点 Out, 两节点之间边代表有门；构造新图 G 如下.

问题转化为 G 中是否存在欧拉道路，由于 G 中存在度为奇的两个点 v_3, v_5, 由推论 2.3.1 得 G 中存在欧拉道路，所以存在一条路经过每个门一次。 □



8. 证明. 假设 G 不存在 H 回路，则由推论 2.4.1，存在节点 v_i, v_j 使得 $d(v_i) + d(v_j) < n$.

考虑图 $G' = G - v_i, v_j$, 即图 G 删去节点 v_i, v_j 及其所连边的情况.

一方面，

$$m_{G'} = m - (d(v_i) + d(v_j)) > m - n \geq \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + 2 - n = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

另一方面，

$$m_{G'} < m_{K_{n-2}} = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)$$

上述两式矛盾，所以 G 中存在 H 回路。 □

12. 证明. 不能.

将正方体的 27 个节点建模为二分图 (或 2-染色)，具体做法为:

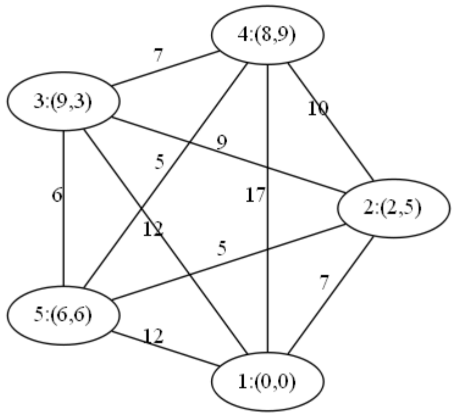
8 个顶点和 6 个面的中心点归为点集 X，12 条棱中点和体中心点归为点集 Y, 那么相邻节点之间必为一个 X, 一个 Y。

而一个角的顶点为 X，中心为 Y, 根据二分图的性质，从点集 X 走到点集 Y 中所经过路径长度必然为奇数；而遍历 27 个顶点仅一次只需要 26 步，是偶数，矛盾！

所以不能实现. □

14. 解. 将 4 个坐标点连同原点建图，以坐标为节点，坐标之间的曼哈顿距离为边权，构建完全图 K_5, 如下图所示

问题转化为求下图的最短哈密顿回路，即 TSP，采用分支与界法可以求得问题的解。



1. 将边权递增排序，初始界 $d_0 \leftarrow \infty$

e_{ij}	a_{25}	a_{45}	a_{35}	a_{12}	a_{34}	a_{23}	a_{24}	a_{13}	a_{15}	a_{14}
w_{ij}	5	5	6	7	7	9	10	12	12	17

2. 边权序列中依次选边进行 dfs, 直到选择 n 条边，判断是否构成 H 回路.

求解过程如下:

- $d(S_1) = d(a_{25}, a_{45}, a_{35}, a_{12}, a_{34})$, it's not a $Hamiltonian\quad Circle$. if a_{34} is replaced by $a_{23}, a_{24}, a_{13}, a_{15}, a_{14}$, it's still not a $Hamiltonian\quad Circle$. Likely, if a_{12} is replaced by $a_{34}, a_{23}, a_{24}, a_{13}, a_{15}$, it's still not a $Hamiltonian\quad Circle$.
- $d(S_2) = d(a_{25}, a_{45}, a_{12}, a_{34}, a_{23})$, it's not a $Hamiltonian\quad Circle$. Until

$d(S_3) = d(a_{25}, a_{45}, a_{12}, a_{34}, a_{13}) = 36$, it's a $Hamiltonian\quad Circle$, $d_0 \leftarrow 36$.

- $d(S_4) = d(a_{25}, a_{45}, a_{34}, ..., ...)$ are all not a $Hamiltonian\quad Circle$.
- $d(S_5) = d(a_{25}, a_{35}, a_{12}, a_{34}, a_{14}) = 42$, it's a $Hamiltonian\quad Circle$.

类似的，继续进行下去得到的解会比 36 大，所以 TSP 问题的解是

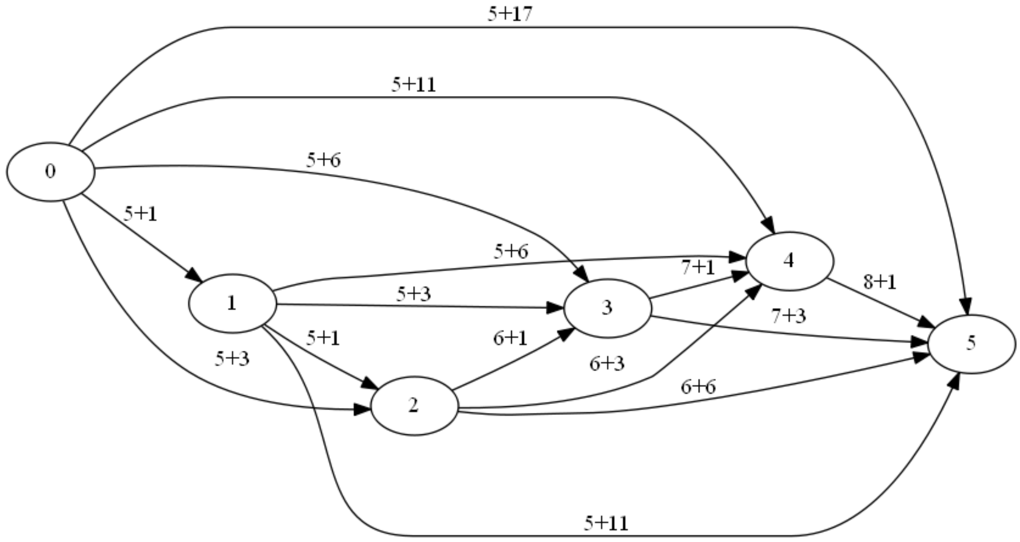
$$d(S_3) = d(a_{25}, a_{45}, a_{12}, a_{34}, a_{13}) = 36$$

即行进路线为:

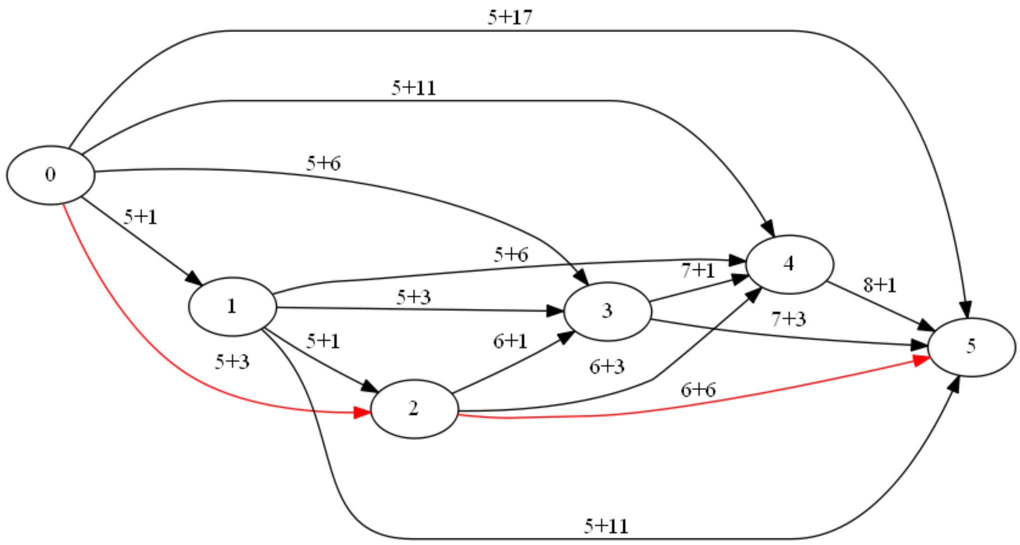
$$(0,0) \to (2,5) \to (6,6) \to (8,9) \to (9,3) \to (0,0)$$

最短路径长 36. □

15. 解. 可以将 5 年的 6 个时间点看做节点，节点之间的有向边代表 1 台设备从一年用到另一年的总花费，形成 DAG，最小花费即为该图从起点到终点的最短路径，使用最短路算法可以解决这个问题。1 台设备累计花费为费用数组的前缀和，即 $(1, 3, 6, 11, 17)$, 建图如下:



对上图使用最短路算法，得到的最短路如下:



所以最少开支的方案为:

第 1 年购买 1 台设备使用 2 年 (花费 $5+1+2=8$)，第 3 年购买 1 台设备使用 3 年 (花费 $6+1+2+3=12$)。总开支 20。 □

16. 解. 采用 $Edmonds$ 最小权匹配求解中国邮路。

1. 找到图中度为奇的节点 (图中红色节点)。
2. 对图中红色节点寻找在原图中的最短路，进行最小权匹配 (图中红色边为选中的边)。
3. 将最小权匹配中选择的边设置为重边 (图中绿色边)，得到欧拉图 G'.
4. G' 的一条欧拉回路就是解。

Conclusion: 中国邮路长度为 $d = 50$, 重复走的边为 $1-2, 2-3, 4-5$. □

17. 解. 工序的 PT 图如下图所示:

对上图使用拓扑排序算法，得到工序的拓扑序为:

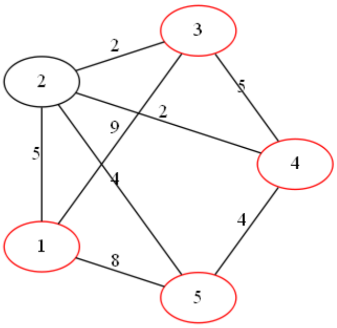


图 2: deg 为奇

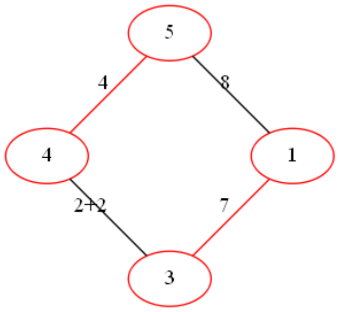


图 3: 最小权匹配

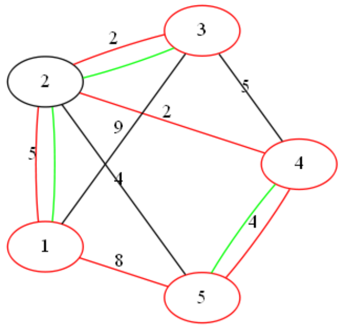
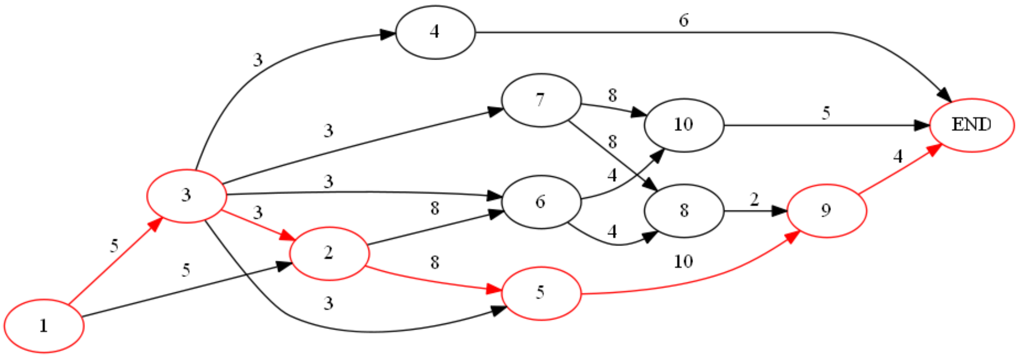


图 4: 中国邮路



TopoRank	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Vertex	1	3	7	4	2	6	10	8	5	9	END

关键路径如上图红色路径所示。
得到工序 3,5,10 的最早启动时间为

$$\pi(3) = 5, \pi(5) = 16, \pi(10) = 20$$

最晚启动时间为

$$\tau(3) = 5, \tau(5) = 16, \tau(10) = 25$$

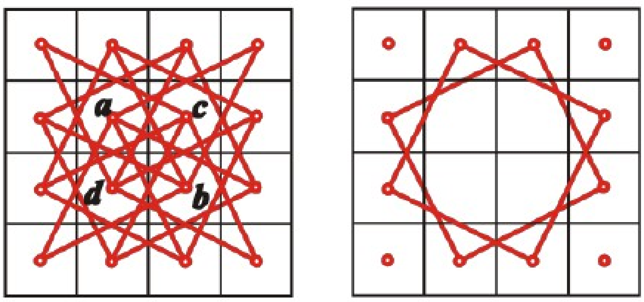
允许延误时间为

$$t_3 = 0, t_5 = 0, t_{10} = 5$$

□

Thinking. $\frac{1}{4}$ 国际象棋棋盘跳马问题?

证明. 原问题可转化为求解下图的哈密顿回路问题:



如图，删去 $S=\{a,b,c,d\}$ 四个点，得到 $G-S$. 因为

$$p(G-S)=6>|S|=4$$

故该图不存在哈密顿回路，所以跳马问题无解。 □

Chapter 3

1. 解. 设树有 n_1 个度为 1 的节点，总节点数为 n，$k\geq 3$ 时，由树的性质:

$$n_1+2n_2+3n_3+\cdots+kn_k=2(n-1)$$

$$n_1+n_2+n_3+\cdots+n_k=n$$

联立以上两式，解得:

$$n_1=2+n_3+\cdots(k-2)n_k=2+\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i,\quad k\geq 3$$

$k=2$ 时，该树只有 1 个树根和 2 个孩子，度为 1 的节点有 2 个。综上, 度为 1 的节点数:

$$n_1=\begin{cases}2 & k=2\\ 2+\sum_{i=3}^{k}(i-2)n_i & k\geq 3\end{cases}\tag{2}$$

□

4. 解. **a.** 原图的 *Laplacian* 矩阵为:

$$L(G)=\begin{pmatrix}3&-1&0&-1&-1\\-1&4&-1&0&-2\\0&-1&4&-2&-1\\-1&0&-2&4&-1\\-1&-2&-1&-1&5\end{pmatrix}$$

树的数目为:

$$det(L')=det\begin{pmatrix}3&-1&0&-1\\-1&4&-1&0\\0&-1&4&-2\\-1&0&-2&4\end{pmatrix}=101$$

b.$G/\{v_1,v_5\}$(缩点) 的 *Laplacian* 矩阵:

$$L(G/\{v_1,v_5\})=\begin{pmatrix}6&-3&-1&-2\\-3&4&-1&0\\-1&-1&4&-2\\-2&0&-2&4\end{pmatrix}$$

必含 (v_1,v_5) 的树的数目:

$$det(L')=det\begin{pmatrix}6&-3&-1\\-3&4&-1\\-1&-1&4\end{pmatrix}=44$$

c. $G-(v_1,v_5)$(删边) 的 *Laplacian* 矩阵:

$$L(G-(v_1,v_5))=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

不含 (v_4,v_5) 的树的数目:

$$det(L')=det\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}=60$$

□

5. 解. **a.** 原图的 *Laplacian* 矩阵为:

$$L(G)=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

以 v_1 为根的根树的数目为:

$$det(L')=det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=24$$

b.$G-(v_1,v_5)$(删边) 的 *Laplacian* 矩阵:

$$L(G-(v_1,v_5))=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

以 v_1 为根，不含 (v_1,v_5) 的根树的数目:

$$det(L')=det\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=8$$

c. $G-(v_2,v_3)$(删边) 的 *Laplacian* 矩阵:

$$L(G-(v_2,v_3))=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

不含 (v_2, v_3) 的树的数目:

$$det(L') = det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 15$$

必含 (v_2, v_3) 的，以 v_1 为根的根树的数目

$$24 - 15 = 9$$

□

8. 证明. 完全二分图 $K_{m,n}$ 的 *Laplacian* 矩阵:

$$L(G) = \begin{pmatrix} nI_m & -B \\ -B^T & mI_n \end{pmatrix}$$

其中 B 为 $(m \times n)$ 的全 1 矩阵。

树的数目为:

$$\begin{aligned} det(L_{m+n,m+n}) &= det\left(nI_m\right) \cdot det\left(mI_n - B^T \frac{1}{n} I_{n-1} B\right) \\ &= n^m \cdot det \begin{pmatrix} m - \frac{m}{n} & -\frac{m}{n} & \cdots & -\frac{m}{n} \\ -\frac{m}{n} & m - \frac{m}{n} & \cdots & -\frac{m}{n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{m}{n} & -\frac{m}{n} & \cdots & m - \frac{m}{n} \end{pmatrix} \\ &= n^m \cdot \frac{m^{n-1}}{n} \\ &= n^{m-1} m^{n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

□

10. 解. **1.**

$$B = (B_{11}, B_{12}) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$B_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

以 $\{e_3, e_4, e_6, e_7\}$ 为树边的基本回路矩阵:

$$C_f = (I, -B_{11}^T B_{12}^{-T}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2.

$$B=(B_{11},B_{12})=\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1&0&0&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1&0&0\\0&-1&0&-1&-1&0&0&0\\0&1&-1&0&0&0&0&-1\end{array}\right)$$

$$B_{12}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$$

以 $\{e_2,e_5,e_6,e_8\}$ 基本割集矩阵:

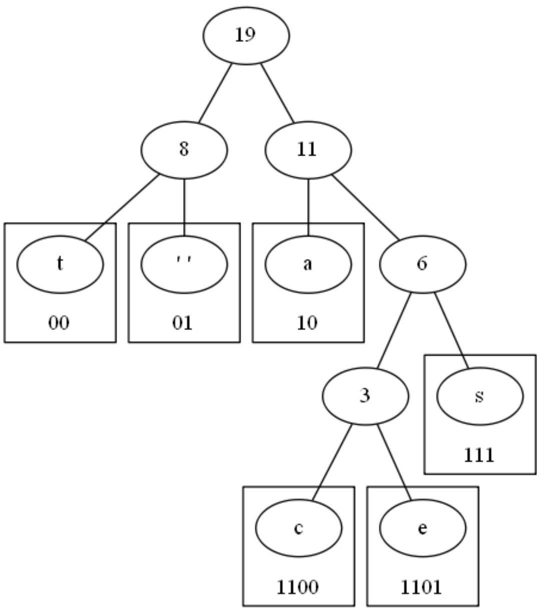
$$S_f=(B_{12}^{-1}B_{11},I)=\begin{pmatrix}0&1&0&1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0&1&0&0\\-1&-1&0&-1&0&0&1&0\\0&-1&1&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

□

14. 解. state act as a seat 的字频统计:

char	c	e	s	t	' '	a
count	1	2	3	4	4	5

$Huffman$ 树的构造及对应字符的编码如下:



二进制编码:

char	c	e	s	t	' '	a
code	1100	1101	111	00	01	10

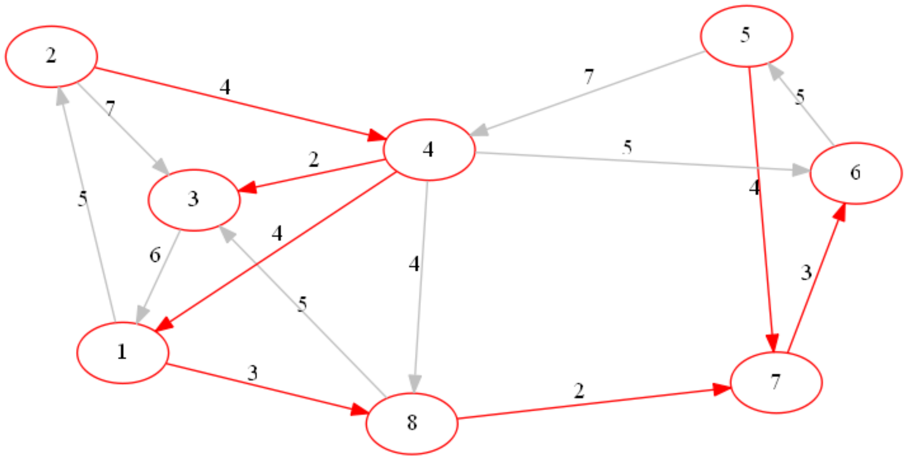
得到源字符串的 $Huffman$ 编码为:

1110010001101011011000001101110110011111011000

编码长度 $codelen=47$.

□

16. 解. 对原图使用 $Kruskal$ 算法，得到的最短树如下:(树边用红色标识)



最短树树边为 $(v_1, v_8), (v_2, v_4), (v_4, v_1), (v_4, v_3), (v_5, v_7), (v_7, v_6), (v_8, v_7)$，总权 22. □

Chapter 4

3. 证明. 假设 G 和 $\overline{G}$ 均为平面图，则

$$|E(G)| \leq 3n - 6$$

$$|E(\overline{G})| \leq 3n - 6$$

故

$$|E(G)| + |E(\overline{G})| = |E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2} \leq 6n - 12$$

解得

$$3 \leq n \leq 10$$

与 $n > 10$ 矛盾！
所以节点数大于 10 的简单图中，G 和 $\overline{G}$ 至少有一个是非平面图。 □

7. 证明. 假设存在这样的平面图 G 满足题设性质。
由于 G 为平面图，则其存在唯一的对偶图 G^*。根据题设，G^* 有 5 个节点，两两节点之间至少有一个边，即 G^* 存在 K_5 子图，故 G^* 不是平面图，故 G^* 不存在对偶图。
与 $(G^*)^* = G$ 矛盾！
故不存在 5 个域的平面图，每个域之间至少有一条公共边界。 □

9. 证明. 假设 G 的域可 2-着色。考虑 G 的对偶图 G^*。
由题设性质，$G*$ 没有自环，且 G^* 除了一个顶点外，其余顶点的度 $d(v_i^*)$ 均可被 d 整除，由假设可知 G^* 是二分图。
设 G^* 二分之后的节点集分为 (X, Y)。设节点集总度数分别为 $d(X), d(Y)$.
不妨设 X 中节点的度均可被 d 整除, 则 Y 中存在一个节点，其度数不被 d 整除.
即 $d(X) = kd$，$d \nmid d(Y)$。
根据二分图的性质，有 $d(X) = d(Y)$, 矛盾！
故 G 的域不可 2 着色。 □

11. 证明. 假设 G 可平面。

$$n = 15$$
$$m = \frac{1}{2}(8 \times 4 + 6 \times 6 + 8) = 38$$
$$d = m - n + 2 = 25$$

一方面，因为 G 中所有点度数为偶数，所以 G 存在欧拉回路，所以 G 的域可 2 着色。
另一方面，不难看到，$2m = 76 = 3 \cdot d + 1$，所以 G 中只有一个面为四边形，其余均为三角形。
即: 平面图 G 除一个域外，其余各域的边界数都可以被 3 整除, 且无割边。由第 9 题结论，G 的域不能 2 着色。矛盾!
所以 G 是非平面图。 □

13. 解. 因为图 G 中含三角形，所以色数 $\gamma(G) \geq 3$。由 Brooks 定理，$\gamma(G) \leq 4$。验证发现 $\gamma(G) = 3$.
利用公式

$$f(G,t) = f(\overline{G_{ij}}, t) + f(\overset{\circ}{G}_{ij}, t)$$

将 G 分解为 1 个 K_5, 3 个 K_4 和 1 个 K_3，进而可得:

$$f(G,t) = f(K_5,t) + 3f(K_4,t) + f(K_3,t) = t(t-1)(t-2)^3$$

□

Chapter 5

3. 证明. 假设 T 存在 2 个完美匹配: $M_2 = (X_1, Y_1, E_1)$ 和 $M_2 = (X_2, Y_2, E_2)$
一定有 $X_1 \cap X_2 \neq \varnothing, Y_1 \cap Y_2 \neq \varnothing$, 否则将 X, Y 对换即可得到相同的匹配。
从而，图 $G' = M_1 \cap M_2$ 中，每个节点的度数为 2，从而存在环路，与 T 是树矛盾!
所以 $2n$ 个节点的树 T 最多只存在 1 个完美匹配。 □

7. 证明. 可以做到。使用数学归纳法给出证明: 基础: $k = 1$ 时，$A = P_1$ 显然成立。
假设: $k - 1$ 时，满足 $A = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k-1}$
递推: k 时，设矩阵 A 为 m 行 n 列，建图 $G = (X, Y, E)$, 满足 $|X| = m, |Y| = n$，且节点度数 $d(x_i) = k, x_i \in X; \quad d(y_j) \leq j, y_j \in Y$。
由 $Hall$ 定理的推论: G 存在完全匹配 $M = (x_{i_1}, y_{i_1}), \cdots, (x_{i_m}, y_{i_m})$(不妨设 $m < n$, 否则，将 X, Y 互换即可)
取 $P_k = (a_{ij})_{m \times n}$, 其中 $a_{ij} = 1$ if $(x_i, y_j) \in M$ else 0.
显然 P_k 满足每行都有 1 个元素，每列最多有 1 个元素。
对于矩阵 $A - P_k$，满足每行都有 $k - 1$ 个元素，每列最多有 $k - 1$ 个元素, 由归纳假设，$A - P_k = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k-1}$
即 $A = P_1 + P_2 + \cdots + P_{k-1} + P_k$，满足题设。 □

8. 证明. 最佳匹配: 47 □

10. 解. 使用 $Ford - Fulkerson$ 算法, 满量的边将省略:
得到 2 组最小割切:

$$\{(s,a),(s,b),(s,c)\}$$
$$\{(d,t),(e,t),(e,f),(c,f),(b,f)\}$$

最大流: 29 □

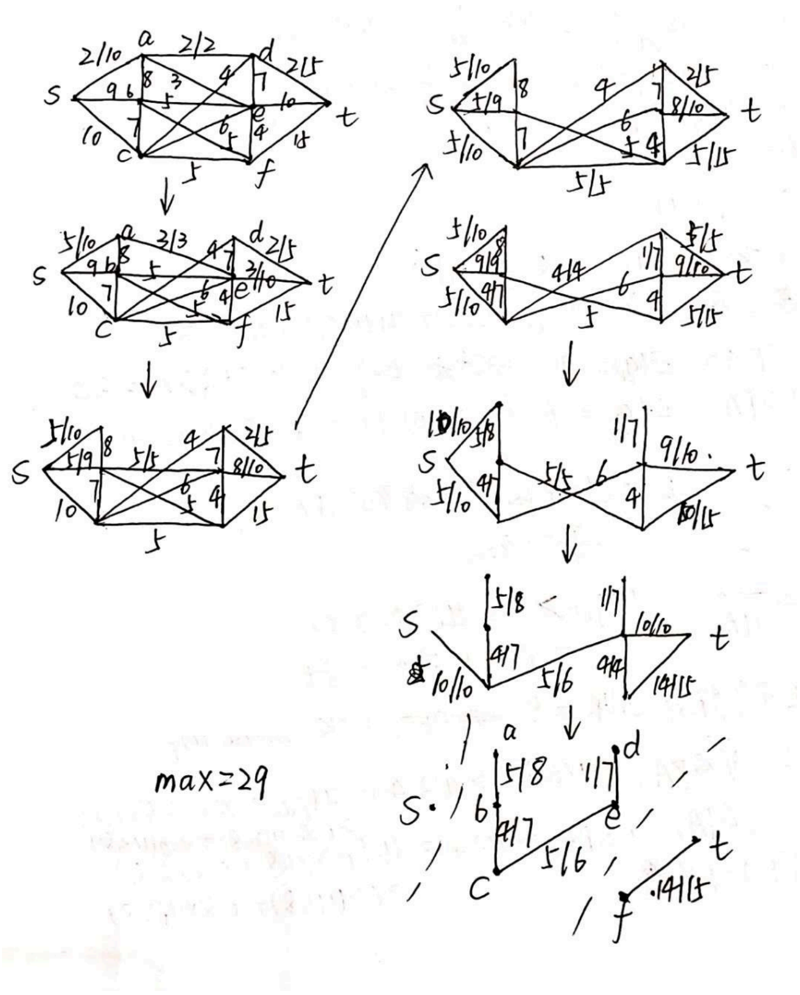


图 4:

Chapter 7

2. a. 证明. 因为 $f: A \to B, g: B \to C$ 为单射，所以对任意 $a_i \neq a_j, a_i, a_j \in A$，都有 $f(a_i) \neq f(a_j)$; 对任意 $b_i \neq b_j, b_i, b_j \in B$, 都有 $g(b_i) \neq g(b_j)$. 所以对任意 $a_i \neq a_j, a_i, a_j \in A$, 有 $f(a_i)(\in B) \neq f(a_j)(\in B)$, 进而

$$gf(a_i) = g(f(a_i)) \neq g(f(a_j)) = gf(a_j), a_i, a_j \in A$$

所以 gf 是单射. □

b. 证明. 因为 f, g 是满射，$f(A) = B, g(B) = C$. 所以

$$gf(A) = g(f(A)) = g(B) = C$$

所以 gf 是满射. □

c. 证明. 因为 f, g 是双射，所以 f, g 既单又满. 由 $(a), (b)$ 可以得到, gf 既单又满. 所以 gf 是双射. □

10. 证明. 设该二元关系 $\sim$ 为 R.

自反性: 对所有的 $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, 有 $(a + b) = (a + b)$，即 $(a, b)R(a, b)$. 满足自反性.

对称性: 对所有的 $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N}^2$, 如果有 $(a, b)R(c, d)$，即 $(a + b) = (c + d)$. 则有 $(c + d) = (a + b)$，即 $(c, d)R(a, b)$. 满足对称性.

传递性: 对所有的 $(a,b),(c,d),(e,f)\in\mathbb{N}^2$, 如果有 $(a,b)R(c,d)$, $(c,d)R(e,f)$, 则有 $(a+b)=(c+d)=(e+f)$, 所以有 $(a,b)R(e,f)$. 满足传递性.

综上, $\sim$ (或称 R) 是 $\mathbb{N}^2$ 上的等价关系. □

12. $(K,\cdot)$ 是可结合的，有单位元 e，每个元 x 有逆元 $x^{-1}=x$. 下面给出证明.

证明. 可以验证对 $\forall x,y,z\in K$, 有 $x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$. 所以 $(K,\cdot)$ 是可结合的。(比如: $a\cdot(b\cdot c)=a\cdot a=e=c\cdot c=(a\cdot b)\cdot c$, 因为只需枚举即可，这里就不罗列了.)

对 $\forall x\in K$，有 $x\cdot e=e\cdot x=x$, 所以有单位元 e.

对 $\forall x\in K$, $x\cdot x=e$, 所以每个元素 x 有逆元 x, 即 $x^{-1}=x, x\in K$

所以 $(K,\cdot)$ 可结合，有单位元，每个元素都是可逆元。实际上，还可以验证运算 $\cdot$ 满足交换律，所以 $(K,\cdot)$ 是 Abel 群. □

15. 证明. 构造双射 $f:S\to P$, 有

$$f(a)=3, f(b)=2, f(c)=1$$

下面证明 f 保持运算: 对 $\forall x\in\{a,b,c\}$ 有

$$f(x\cdot x)=f(x)=f(x)\cdot f(x)$$

对于 $x\neq y, x,y\in\{a,b,c\}$ 枚举说明:

$$f(a\cdot b)=f(b)=2=3\cdot 2=f(a)\cdot f(b)$$

$$f(a\cdot c)=f(c)=1=3\cdot 1=f(a)\cdot f(c)$$

$$f(b\cdot a)=f(b)=2=2\cdot 3=f(b)\cdot f(a)$$

$$f(b\cdot c)=f(c)=1=2\cdot 1=f(b)\cdot f(c)$$

$$f(c\cdot a)=f(c)=1=1\cdot 3=f(c)\cdot f(a)$$

$$f(c\cdot b)=f(b)=2=1\cdot 2=f(c)\cdot f(b)$$

所以 f 保持运算，$(S,\cdot)$ 和 $(P,\cdot)$ 同构. □

Chapter 8

2. 由定义可知运算 $\cdot$ 封闭. 只需证 $S\times S$ 上的运算 $\cdot$ 满足结合律.

证明. 对 $\forall(a_1,a_2),(b_1,b_2),(c_1,c_2)\in S\times S$, 有

$$(a_1,a_2)\cdot((b_1,b_2)\cdot(c_1,c_2))=(a_1,a_2)\cdot(b_1\cdot c_1,b_2\cdot c_2)=(a_1\cdot(b_1\cdot c_1),a_2\cdot(b_2\cdot c_2))$$

因为 S 上的运算 $\cdot$ 满足结合律，所以

$$(a_1\cdot(b_1\cdot c_1))=((a_1\cdot b_1)\cdot c_1)$$

$$(a_2\cdot(b_2\cdot c_2))=((a_2\cdot b_2)\cdot c_2)$$

所以 $(a_1\cdot(b_1\cdot c_1),a_2\cdot(b_2\cdot c_2))=(((a_1\cdot b_1)\cdot c_1),((a_2\cdot b_2)\cdot c_2))=((a_1\cdot b_1),(a_2\cdot b_2))\cdot(c_1,c_2)=((a_1,a_2)\cdot(b_1,b_2))\cdot(c_1,c_2)$

所以 $S \times S$ 上的运算 $\cdot$ 满足结合律, $(S \times S, \cdot)$ 是半群.

当 S 有单位元 e 时, $(e,e) \in S \times S$, 且 $\forall (a,b) \in S \times S$ 有

$$(a,b) \cdot (e,e) = (a \cdot e, b \cdot e) = (a,b) = (e \cdot a, e \cdot b) = (e,e) \cdot (a,b)$$

所以 $S \times S$ 有单位元 (e,e). □

4. 证明. 显然 $\times$ 运算封闭，且 $\mathbb{Z}$ 上的乘法满足结合律. 所以 $(\mathbb{Z}, \times)$ 是半群.

因为对 $\forall a \in \mathbb{Z}$, $1 \times a = a \times 1 = a$ 所以 $(\mathbb{Z}, \times)$ 上有单位元 1. 所以 $(\mathbb{Z}, \times)$ 是幺群.

$(\{O\}, \times)$ 满足 $\{O\} \subset \mathbb{Z}$ 且非空, 且 $0 \times 0 = 0 \in \{O\}$，满足封闭性. 所以 $(\{O\}, \times)$ 是子半群. 而 $e = 1 \notin \{O\}$, 所以不是子幺群. □

7. 证明. 因为 G 中任意元的逆元都是其自身，所以 $\forall a, b \in G$, $a^{-1} = a, b^{-1} = b$ 且 $ab \in G$
进而 $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$, $ab = (ab)^{-1}$
所以 $ab = ba$, 即 G 是交换群 □

8. 证明. 满足**结合律**: $\forall a = k_1 m, b = k_2 m, c = k_3 m \in G$, $(a+b)+c = (k_1+k_2+k_3)m = a+(b+c)$
有**单位元**: $\exists e = 0 \in G, \forall a = km \in G$, $s.t.\quad 0 + a = a + 0 = km = a$.
每个元素均为**可逆元**: $\forall a = km \in G, \exists (-a) = -km \in G, \quad s.t. \quad a+(-a) = (-a)+a = 0$
所以 $(G, +)$ 为群 □

11. 证明. 满足**结合律**: $\forall (a,b),(c,d),(f,g) \in G$, $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(f,g) = (ac, ad+b)\cdot(f,g) = (acf, acg+ad+b) = (a,b)\cdot(cf, cg+d) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$
有**单位元**: $\exists e = (1,0) \in G$, $(a,b)(1,0) = (1,0)(a,b) = (a,b)$
每个元素均为**可逆元**: $\forall (a,b) \in G$, $\exists (\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) \in G$, $(a,b)(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}) = (1,0) = e$, 所以 $\forall (a,b), a \neq 0$, a 有逆元.
所以 G 是群 □

12. 证明. **必要性**: 若 a 有可逆元 b, 则 $ab = e$, 进而 $aba = ea = a, ab^2a = abba = ba = e$.
充分性: 若 $aba = a, abba = e$, 则 $ab = ab(abba) = (aba)bba = abba = e$, $ba = (abba)ba = abb(aba) = abba = e$, 即 a 有可逆元 b

□

13. 证明. **封闭性**: $\forall a, b \in H_1, \exists a_0, b_0 \in H, s.t. a = x^{-1}a_0x, b = x^{-1}b_0x$
所以 $ab = x^{-1}a_0xx^{-1}b_0x = x^{-1}a_0b_0x$
因为 $a_0b_0 \in H$, 所以 $ab \in H_1$
单位元: $\forall a = x^{-1}a_0x \in H_1, \exists e = x^{-1}ex \in H_1, s.t. ae = ea = e$
逆元: $\forall a = x^{-1}a_0x \in H_1, \exists a^{-1} = x^{-1}a_0^{-1}x \in H_1$, $s.t. aa^{-1} = x^{-1}a_0xx^{-1}a_0^{-1}x = e$
所以 H_1 是 G 的子群。 □

15. 证明. 记 $K_4 = \{a, b, c, d\}$
对于 $\forall x \in \{a,b,c\}, G_x = \{x^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e, x\}$
对于 $e \in G, G_e = \{e^k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e\}$
即 K_4 中任一元素的幂都不能表示 K_4 中任一元素，所以 K_4 不是循环群 □

21. 解.

$$\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1\,3)(2\,4)$$

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\4 & 3 & 5 & 6 & 1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\6 & 5 & 3 & 4 & 2 & 1\end{pmatrix} = (1\,6)(2\,5)$$

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix} = (1\,5\,3\,2\,6\,4)$$

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\3 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2\end{pmatrix} = (1\,5)(2\,6)(3\,4)$$

□

27. 证明. 由 Lagrange 定理，$[S_4 : \langle\alpha\rangle] = |S_4|/|\langle\alpha\rangle| = 4!/4 = 6$ 所以陪集的集合元素有 6 个.

左陪集:

$$S_L = \{\langle\alpha\rangle, (1\,2)\langle\alpha\rangle, (1\,3)\langle\alpha\rangle, (2\,4)\langle\alpha\rangle, (1\,4)\langle\alpha\rangle, (2\,3)\langle\alpha\rangle\}$$

其中

$$\langle\alpha\rangle = \{e, (1\,3\,2\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,4\,2\,3)\}$$

$$(1\,2)\langle\alpha\rangle = \{(1\,2), (1\,3)(2\,4), (3\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

$$(1\,3)\langle\alpha\rangle = \{(1\,3), (2\,4\,3), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,2)\}$$

$$(2\,4)\langle\alpha\rangle = \{(2\,4), (1\,3\,4), (1\,4\,3\,2), (1\,2\,3)\}$$

$$(1\,4)\langle\alpha\rangle = \{(1\,4), (1\,3\,2), (1\,2\,4\,3), (2\,3\,4)\}$$

$$(2\,3)\langle\alpha\rangle = \{(2\,3), (1\,2\,4), (1\,3\,4\,2), (3\,4)\}$$

右陪集:

$$R_L = \{\langle\alpha\rangle, \langle\alpha\rangle(1\,2), \langle\alpha\rangle(1\,3), \langle\alpha\rangle(2\,4), \langle\alpha\rangle(1\,4), \langle\alpha\rangle(2\,3)\}$$

其中

$$\langle\alpha\rangle = \{e, (1\,3\,2\,4), (1\,2)(3\,4), (1\,4\,2\,3)\}$$

$$\langle\alpha\rangle(1\,2) = \{(1\,2), (1\,3)(2\,4), (3\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$

$$\langle\alpha\rangle(1\,3) = \{(1\,3), (1\,2\,4), (1\,4\,3\,2), (2\,3\,4)\}$$

$$\langle\alpha\rangle(2\,4) = \{(2\,4), (1\,3\,2), (1\,2\,3\,4), (1\,4\,3)\}$$

$$\langle\alpha\rangle(1\,4) = \{(1\,4), (2\,4\,3), (1\,3\,4\,2), (1\,2\,3)\}$$

$$\langle\alpha\rangle(2\,3) = \{(2\,3), (1\,3\,4), (1\,2\,4\,3), (1\,4\,2)\}$$

□

30. 证明. 因为 G 是有限群, B 是 G 的子群，所以 $\forall a, b \in B, ab^{-1} \in B$. 又因为 $B \subseteq A$, 所以 B 是 A 的子群，所以 $[A : B] = |A|/|B|$

由 Larange 定理：

$$[G : B] = \frac{|G|}{|B|} = \frac{|G|}{|A|} \cdot \frac{|A|}{|B|} = [G : A][A : B]$$

得证. □

33. 证明. 因为 $H \lhd G$, 所以对 $\forall g \in G, h \in H, ghg^{-1} \in H$.

因为 $H_1 \lhd G$, 所以对 $\forall g \in G, h_1 \in H_1, gh_1g^{-1} \in H_1$.

因为 $H_2 \lhd G$, 所以对 $\forall g \in G, h_2 \in H_2, gh_2g^{-1} \in H_2$.

对 $\forall k_1 \in H_1H, \exists h_1 \in H_1, h \in H$ 使得 $k_1 = h_1h$.

对 $\forall k_2 \in H_2H, \exists h_2 \in H_2, h \in H$ 使得 $k_2 = h_2h$.

$$k_2k_1k_2^{-1} = (h_2h)(h_1h)(h_2h)^{-1} = h_2hh_1hh^{-1}h_2^{-1} = h_2hh_1h_2^{-1} = ((h_2h)h_1(h_2h)^{-1})(h_2hh_2^{-1})$$

因为 $h_2h \in G$, 所以 $(h_2h)h_1(h_2h)^{-1} \in H_1$. 同理 $h_2hh_2^{-1} \in H$.

所以 $k_2k_1k_2^{-1} \in H_1H$.

所以 $H_1H \lhd H_2H$.

□

A Appendix

test.cpp

```cpp
bool state[9][6][4] = {0};//标记此状态是否到达过
stack<Node> S;
bool dfs(int a, int b, int c){//搜索+剪枝
    state[a][b][c] = 1; S.push(Node(a, b, c));//用栈保存搜索结果
    printf("%d,%d,%d\n", a, b, c);
    if(a == 4 && b == 4 && c == 0)return true;
    if(a > 0){//对可行分支进行搜索
        if(b < 5){
            int change = min(5-b, a);
            if(!state[a-change][b+change][c] && dfs(a - change, b + change, c))return true;
        }
        if(c < 3){
            int change = min(3-c, a);
            if(!state[a-change][b][c+change] && dfs(a - change, b, c + change))return true;
        }
    }
    if(b > 0){
        if(a < 8){
            int change = min(8-a, b);
            if(!state[a+change][b-change][c] && dfs(a + change, b - change, c))return true;
        }
        if(c < 3){
            int change = min(3-c, b);
            if(!state[a][b-change][c+change] && dfs(a, b - change, c + change))return true;
```

```
        }
    }
    if(c > 0){
        if(b < 5){
            int change = min(5-b, c);
            if(!state[a][b+change][c-change] && dfs(a, b + change, c - change))return true;
        }
        if(a < 8){
            int change = min(8-a, c);
            if(!state[a+change][b][c-change] && dfs(a + change, b, c - change))return true;
        }
    }
    S.pop();
    return false;
}
int main(){
    run(8, 0, 0);
    //在此处打印栈S的内容即可
    return 0;
}
```