

耦合弹簧振子波动特性：实验报告

刘泓尊 2018011446 计 84

2020 年 4 月 22 日

目录

1 实验目的	2
2 实验原理	2
2.1 Normal Mode	2
2.2 弹簧振子简谐振动	2
2.3 耦合弹簧振子链及其波动特性	2
3 实验结果	3
3.1 测量单弹簧振子固有频率 f_0	3
3.2 测量耦合弹簧振子链的色散关系 ($f \sim k$)	3
3.3 横波简正模式观察	4
4 思考题	5
5 总结	5
A 原始数据附录	7
A.1 测量单弹簧振子固有频率 f_0	7
A.2 测量耦合弹簧振子链的色散关系 ($f \sim k$)	7
A.3 横波简正模式观察	7

1 实验目的

1. 通过模拟实验观察、测量并研究振动及波动现象，特性.
2. 进一步理解并掌握振动与波动学有关的基本概念和原理.
3. 提高利用物理学原理对实验对象的分析判断能力.
4. 学习并掌握图像分析、数据提取、函数拟合等处理实验数据的基本思路方法.

2 实验原理

2.1 Normal Mode

如果存在某个频率 ω ，使得系统中所有粒子在这一频率振动时，每个粒子间的相对相位保持不变，有振幅

$$u_n = A_n e^{i(\omega t + \delta_n)}$$

简正模有十分重要的应用，使用 Normal Mode 对应的频率干扰系统，将产生最大的影响，简正模在运动学、分子生物学、建筑学等领域有广泛的应用。如分子共振谱分析、建筑结构分析等。

2.2 弹簧振子简谐振动

Normal Modes: 存在某个根据胡克定律，两个轻质线性弹簧和一个质点构成的弹簧振子的动力学方程为

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = -2ku$$

上述运动方程的解为

$$u = A \cos(\omega t + \delta)$$

如果测量 50 个周期的时间为 T ，则弹簧振子的固有频率为

$$f_0 = \frac{f}{\sqrt{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}T}$$

2.3 耦合弹簧振子链及其波动特性

由弹簧振子首尾连接构成的一维无限长耦合振子链的每个振子的运动方程为

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = (-k(u_n - u_{n-1}) + k(u_{n+1} - u_n))/m = \omega_0^2(u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n), n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

解上述方程并利用欧拉公式可得

$$w = 2w_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

用频率 f 表示的色散关系为

$$f = 2f_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

但是对于有限长的耦合振子链，上述方程应该加以边界条件，即 $u_0 = u_{N+1} = 0$ 。耦合链在边界反射，进而形成驻波。根据边界条件可得波数

$$k_q = \frac{q\pi}{(N+1)a}, \quad q \in \mathbb{Z}$$

由于轻质弹簧的限制 $\lambda \geq 2a$ ，所以 $0 < k_q < \frac{\pi}{a}$ ，进而得到

$$q = 0, 1, \dots, N$$

即此耦合体系有 N 个简正模 (Normal Modes), 也就是离散系统本征简正模式 = 系统自由度个数 N 。第 n 个振子的振幅 u_n 为

$$u_n = \operatorname{Re} \left(B e^{-i(2\pi \frac{-na+L}{\lambda} - \frac{\pi}{2})} \right) = B \sin(2\pi \frac{n-L/a}{\lambda/a})$$

其中 $L = (N+1)a$ 为耦合振子链的长度, 系数 $B = B(t, \delta, L)$. 拟合公式后可以得到波数 $k = 2\pi/\lambda$

3 实验结果

3.1 测量单弹簧振子固有频率 f_0

速度设置为 normal, 初始振幅为最大, 初相位为 0. 用秒表测试 50 个周期的时间为 $T = 34.801s$, 带入 2.2 节的公式得到

$$f = \frac{50}{T} = 1.436Hz$$

计算得到固有频率

$$f_0 = \frac{f}{\sqrt{2}} = 1.016Hz$$

3.2 测量耦合弹簧振子链的色散关系 ($f \sim k$)

选择 10 个振子做纵波振动, 分别选择 $\omega' = 0.28\omega, 0.56\omega, 0.83\omega, 1.31\omega, 1.68\omega, 1.82\omega, 1.98\omega$ 共 7 组的振动频率, 选择合适的振幅。通过截屏保存最大振幅图像, 计算振幅。得到的 $n \sim u_n$ 关系, 进而利用 $k = \frac{\pi}{a\omega}$ 计算波数。下面我给出 $\omega' = 0.28\omega, 0.56\omega, 0.83\omega, 1.31\omega$ 的 4 组数据拟合曲线。

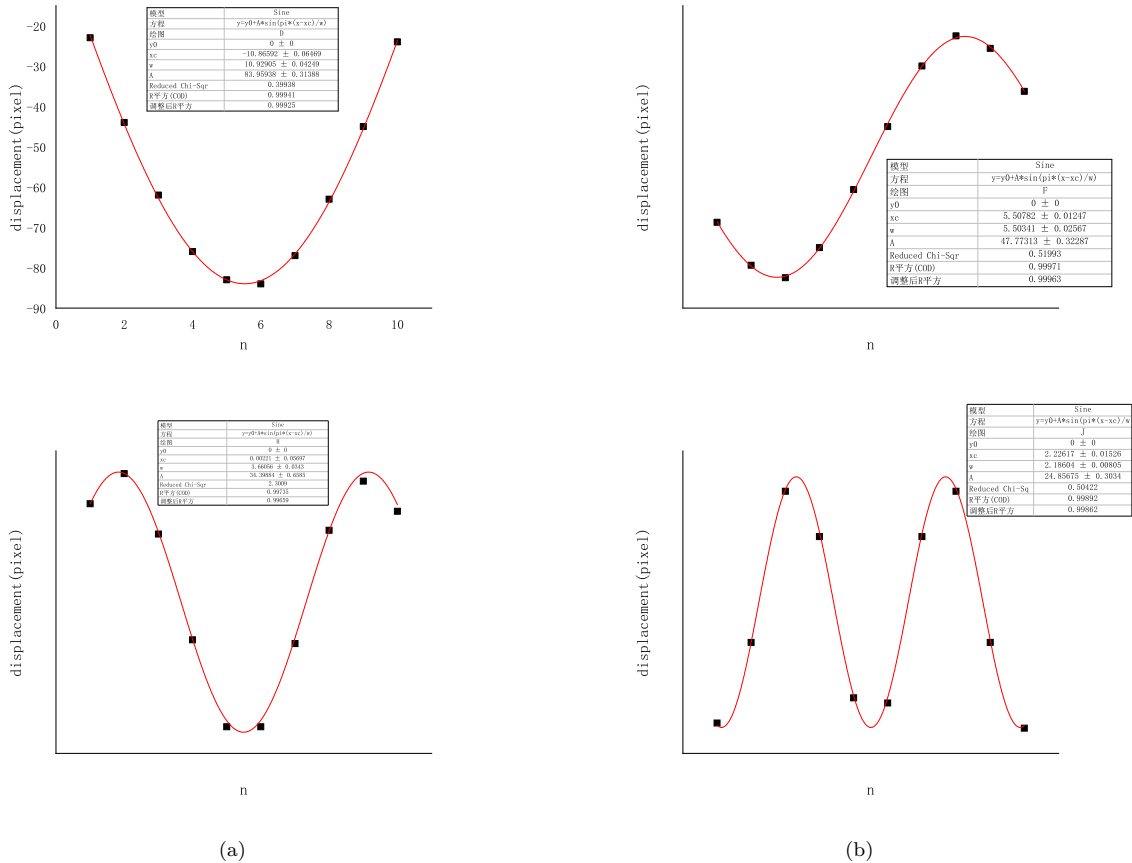


图 1: 其中 4 个频率的数据拟合曲线

采用 3.1 的方法，测量 50 个周期的时间，计算频率。频率 f 和从拟合曲线中得到的波数 k 如下：

ω'	$50T(s)$	$f(Hz)$	$w(a/\pi)$	$k = 1/w(\pi/a)$
0.28ω	175.240	0.285	10.929	0.091
0.56ω	87.720	0.570	5.508	0.182
0.83ω	59.170	0.845	3.661	0.274
1.31ω	37.510	1.333	2.190	0.456
1.68ω	29.240	1.710	1.570	0.637
1.82ω	26.990	1.852	1.379	0.725
1.98ω	24.810	2.015	1.004	0.908

拟合得到 $k \sim f$ 图像如下：

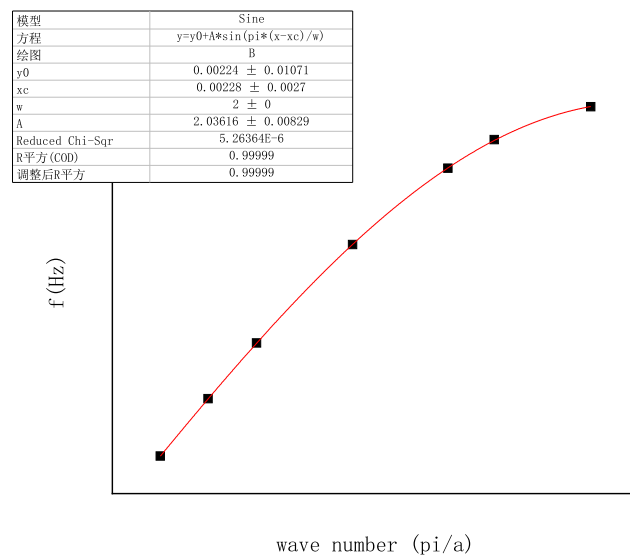


图 2: ($k \sim f$) 正弦拟合曲线

理论公式为

$$f = 2f_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

从拟合数据得到

$$A = 2f'_0 = 2.036, \omega = 2.00$$

进而得到拟合的 f'_0 :

$$f'_0 = \frac{A}{2} = 1.018$$

相对误差

$$\epsilon = \frac{|f_0 - f'_0|}{f_0} = \frac{1.018 - 1.016}{1.016} = 0.19\%$$

可以看到，拟合得到的参数和理论值符合的很好。

3.3 横波简正模式观察

“极性控制”选择竖直方向，选择 9 个振子。选择 $\omega' = 0.28\omega, 0.83\omega, 1.31\omega, 1.68\omega, 1.82\omega, 1.98\omega$ 共 6 组不同简正模式，设置振幅为最大，初相位为 0，观察简正模式对应的驻波现象。

观察发现，在 $n\lambda/2 = L$ (n 为整数) 的时候会产生驻波现象，此时振幅始终为 0 的点 (不一定是振子点) 会有 $n - 1$ 个，均匀分布在长度 L 上，形成 n 个波腹， $n - 1$ 个波节。

n 为偶数时，中间节点会保持不动，因为波节数 n 是偶数，整体波形进而呈现奇函数 (中心对称) 形状； n 为奇数时，整体波形是偶函数 (轴对称) 形状。

尽管 9 个振子在整体上形成横波的波形，但是每个振子依然是上下振动的，其水平方向位置并不会改变。每个振子的振幅在宏观上表现为弦的振动，弦振动剧烈的地方，振子振幅也大。

4 思考题

请分析离散介质 (如弹簧振子链) 和连续介质 (如琴弦或空气) 中波的传输特性

根据上述分析，离散介质 (如弹簧振子链) 的色散关系为

$$\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

波速

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0 \sin(\frac{ka}{2})}{k}$$

可以看到，离散介质的波速和波数 k (或者说与波长 λ 有关)。由色散关系的定义，离散介质的 ω 和 k 不成正比，所以是**有色散波**。

对于连续介质中的波 (如声波)，认为其 $a \rightarrow 0$ ，进而

$$\omega = \omega_0 ka$$

得到波速

$$u = \frac{\omega}{k} = \omega_0 a$$

波速与波数 k (波长 λ) 无关， ω 和 k 成正比，是**无色散波**。

我们知道，无色散波的群速度与相速度相同，而有色散波的情况则不同。一维弹簧振子链的**群速度**

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \omega_0 a \cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

和相速度表达式不同；而在 $ka \ll 1$ 的长波极限下， $v_g \rightarrow \omega_0 a$ ，这又和相速度相同了，这就是连续介质的情况。

总之，上述一切区别的根本在于 ω 与 k 的关系，即是否有**色散**。在分析时，连续介质可以看做离散介质 $ka \ll 1$ 的极限，离散介质的情形也可以看做某种简正模的“量子化”。

5 总结

本次实验我详细探究了 Normal Mode 的原理和表现，从仿真软件中观察了耦合弹簧振子的驻波现象，了解了 Normal Mode 在科研与生活中的广泛应用，进一步理解和复习了振动和波动的概念及原理，最终得到了和理论十分契合的结果。

更重要的是，我熟悉了观察现象、记录数据、函数拟合、图像分析这一完整的实验流程，学会了使用 Origin 进行数据拟合和图像处理的方法，这为我日后的学习与科研打下了很好的基础。此外，我通过查阅文献，深入学习了有关色散的知识，对物理课上的知识有了更深入的认识。

身处特殊时期，线上的实验方式虽然缺少真实感，但是仍保留了严谨性与实验的完整性，在此感谢学校为我们提供的诸多便利。老师的指导让我少走了很多弯路，十分感谢老师的悉心指导！

A 原始数据附录

A.1 测量单弹簧振子固有频率 f_0

速度设置为 normal, 初始振幅为最大, 初相位为 0. 用秒表测试 50 个周期的时间为

$$T = 34.801s$$

A.2 测量耦合弹簧振子链的色散关系 ($f \sim k$)

平衡位置像素点 (均取最左侧边缘点)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	88	165	243	320	397	475	552	629	707	784

不同波长的位移最大位置像素点

ω/ω_0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.28	65	121	181	244	314	391	475	566	662	760
0.56	62	122	195	284	384	487	588	677	750	810
0.83	114	199	261	310	364	442	541	648	739	808
1.31	64	157	265	333	378	455	565	651	699	759
1.68	110	147	235	343	381	461	576	621	686	805
1.82	73	186	232	314	418	456	558	641	685	800
1.98	93	159	254	307	410	460	564	618	714	779

最大位移处 ($\omega = 0.56\omega_0$) 的一张截图如下, 其他频率的截图在此不予列出。

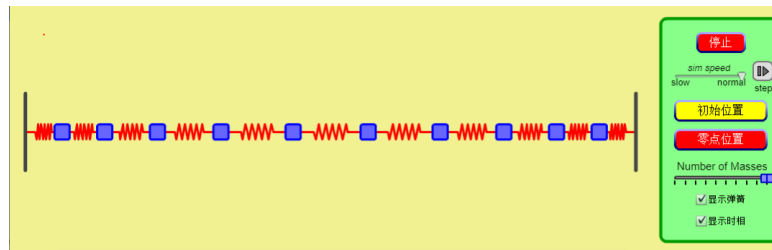


图 3: $\omega = 0.56\omega_0$ 的最大位移处截图

A.3 横波简正模式观察

过程中的截图 ($\omega = 1.18\omega_0$), 其他频率的截图在此不予列出。

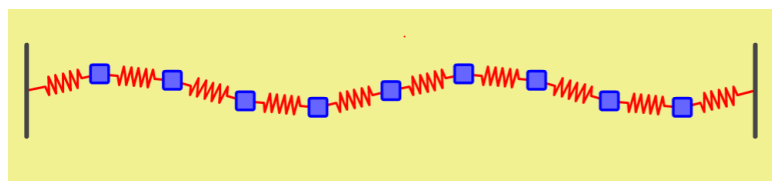


图 4: $\omega = 1.18\omega_0$ 的截图