第二章、插值方法

2023年1月28日 23:03

CH1 插值方法

为什么插值，什么是插值

多项式插值，存在唯一性（Lagrange 法与 Newton 法得到相同的多项式）

模型结构：基函数插值法（先确定基函数，再求解出系数），待定系数法

Lagrange 法：基函数 li 的性质、系数是函数值 yi

Newton 法（具有继承性）：基函数 w（x）、系数是差商（均差）表的对角线。

p56 题 17

插值余项公式 Rn(x)：通过插值余项公式，估计插值误差限；指导插值节点的选取

龙格（函数）现象：不是插值多项式次数越高越好

差商的性质：(1) 函数值的线性组合（对称性）(2) k 阶差商与 k 阶导数之间的关系（用于计算特殊的差商 和 余项公式的系数）

分段低次插值：分段函数、分段线性插值；基本思想是用分段低次多项式代替单个高次多项式；优点是公式简单、运算量小、稳定性好、收敛性；克服了龙格现象，但缺点是只连续不光滑（不可微）。

直线拟合的最小二乘法

为什么插值：这样可以将数据简单化，构造某个简单函数，然后通过处理p(x)作为f(x)的近似函数，研究问题。

什么是插值：通过离散的数据的点，得到一个近似函数。

多项式插值存在唯一性：比如拉格朗日和牛顿时一个结果；

模型结构：先确定基函数，在求解出系数的积函数插值法，和待定系数法

一、lagrange插值

1.基函数：（

性质：方程用来插值的每个离散点都是，那么对于每个点插入点都满足

）

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}=\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

2、插值完整式子：，其中系数是函数值yi

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k l_k(x)=\sum_{k=0}^{n}y_k\prod_{i=0,i\neq k}^{n}\frac{x-x_i}{x_k-x_i}$$

3.性质：

- 当 $f(x)$ 为一个次数 $\le n$ 的多项式时，有 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$
故
$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)\equiv 0$$
即 n 次插值多项式对于次数 $\le n$ 的多项式是**精确**的

- 若 $f(x)=x^k$，$k\le n$，则有
$$R_n(x)=x^k-\sum_{j=0}^{n}x_j^k l_j(x)=0$$
特别地，当 $k=0$ 时有 $\sum_{j=0}^{n}l_j(x)=1$

二、线性和抛物线插值

1、两种特殊情形:

- **两种特殊情形**
  - **线性插值多项式（一次插值多项式）：** $n=1$

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=y_0\frac{x-x_1}{x_0-x_1}+y_1\frac{x-x_0}{x_1-x_0}$$

  - **抛物线插值多项式（二次插值多项式）：** $n=2$

$$L_2(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_1)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

三、插值的误差估计:

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

特例:

- **线性插值（两点插值，即 $n=1$）**

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)$$

- **抛物线插值（三点插值，即 $n=2$）**

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi_x)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

三、牛顿插值

1、原因：解决添加节点问题。

2、基函数:

$$\omega_0(x)=1$$
$$\omega_1(x)=x-x_0$$
$$\omega_2(x)=(x-x_0)(x-x_1)$$
$$\cdots\cdots$$
$$\omega_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

3.完整式子：,其中系数ai是差商表（均差表）的对角线，就是其中的f(x0,x1,x2,……)

$$\boxed{p_n(x)=a_0\omega_0(x)+a_1\omega_1(x)+a_2\omega_2(x)+\cdots+a_n\omega_n(x)}$$

$$\Rightarrow f(x)=\underbrace{f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\ldots+f[x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})}_{N_n(x)}\underbrace{+f[x,x_0,\ldots,x_n](x-x_0)\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}_{R_n(x)}$$

11

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{(x_j-x_0)\cdots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\cdots(x_j-x_k)}$$
$$=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega_{k+1}'(x_j)}$$

4.用差分来简化牛顿插值·

$$\boxed{f[x_0,x_1,\cdots,x_m]=\frac{1}{m!}\frac{\Delta^m f_0}{h^m}}\quad m=1,2,3,\ldots$$

$$N_n(x)=a_0\omega_0(x)+a_1\omega_1(x)+a_2\omega_2(x)+\cdots+a_n\omega_n(x)$$

$$a_k=f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{\Delta^k f_0}{k!h^k}$$

牛顿向前插值公式

用**向前差分**表示的**等距**牛顿插值公式

设 $x=x_0+th$ 则

$$\begin{aligned}N_n(x)&=N_n(x_0+th)\\&=f_0+\frac{t}{1!}\Delta f_0+\frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0+\cdots+\frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0\end{aligned}$$

四、Hermite插值：好像没写啥。看看啊看看

1、原因：解决不仅要函数值相等，还要导数相等的问题

2、两点三次Hermite插值：

插值节点： x_0，x_1

插值条件： $p(x_i)=f(x_i)=y_i$，$p'(x_i)=f'(x_i)=m_i$，$i=0,1$

$$H_3(x)=y_0\alpha_0(x)+y_1\alpha_1(x)+m_0\beta_0(x)+m_1\beta_1(x)$$

$$\boxed{\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2}$$

同理可得

$$\boxed{\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2}$$

相类似地，可以推出

$$\boxed{\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2}$$

$$\boxed{\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2}$$

余项 $\boxed{R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi_x)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2}$ $\xi_x\in(x_0,x_1)$

五、分段低次插值：

1、原因：上面几个搞多了容易龙格现象。

2、常见：

分段线性插值，分段三次Hermite插值和三次样条插值

（1）、分段线性插值：就是把几个点搞着连起来，缺点是在节点上不可导

（2）、每一个小区间【Xk,Xk+1】的表达式为：

$$I_h(x)=y_k\left(1+2\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2+y_{k+1}\left(1+2\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$
$$+\ m_k(x-x_k)\left(\frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}}\right)^2+m_{k+1}(x-x_{k+1})\left(\frac{x-x_k}{x_{k+1}-x_k}\right)^2$$

$$x\in[x_k,x_{k+1}],\quad k=0,1,\ldots,n\text{-}1$$

（3）、三次样条插值：

定义： 设插值节点为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

若函数 $S(x) \in C^2[a,b]$，且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称其为**三次样条函数**

如果同时还满足

$$S(x_k) = f(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

则称 $S(x)$ 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**三次样条插值函数**

大致式子额如下：

$$s_k(x) = \frac{(x_{k+1}-x)^3}{6h_k}M_k + \frac{(x-x_k)^3}{6h_k}M_{k+1} + \left(y_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right)\frac{x_{k+1}-x}{h_k} + \left(y_{k+1} - \frac{M_{k+1}h_k^2}{6}\right)\frac{x-x_k}{h_k}$$

现在来求Mk：

$$\mu_k = \frac{h_{k-1}}{h_{k-1}+h_k}, \quad \lambda_k = \frac{h_k}{h_{k-1}+h_k}, \quad d_k = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$$

$$\boxed{\mu_k + \lambda_k = 1} \qquad k = 1, 2, \ldots, n\text{-}1$$

情况1：满足这个分段函数的一次导数，二次导数都是连续的

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & & \\ & \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

在端点处，和标准原函数的导数值，二阶导数值都一致

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

如果原函数是周期函数，那么三次样条函数也应该是周期函数

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

误差不管了

六、曲线拟合:

1、搞一大堆点找到一个函数使其最靠近这些点

2、常用的是直线拟合

$$\begin{cases} na + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) b = \sum_{k=1}^{n} y_k \\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) a + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) b = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \end{cases}$$

最后的结果为:

$$y = a + bx$$

还有一个最小二乘拟合

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \omega_i & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i & \cdots & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^2 & \cdots & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{n+1} & \cdots & \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{m} \omega_i f_i \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i f_i \\ \vdots \\ \sum_{i=0}^{m} \omega_i x_i^n f_i \end{bmatrix}$$

此时 $S^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x^k$ 为 $f(x)$ 的 n 次最小二乘拟合多项式

插值余项公式:其中的未知数伊欧西龙是和x相关的

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$

龙格:不是越高越好: