第五章：方程求根的迭代法

2023年2月16日 20:12

CH4 方程求根的迭代法

运用压缩映像原理和局部收敛定理考察迭代法的收敛性 p143 题 7

Newton 迭代法求解 p137 例 5

弦截法的迭代格式

一、迭代过程的收敛性：

为什么说收敛：

果.

迭代法的求根过程分两步，第一步先提供根的某个猜测值，即所谓迭代初值，然后再将迭代初值逐步加工成满足精度要求的根.

譬如，求解初值问题 $y' = f(x,y)$，$y(x_0) = y_0$ 的梯形格式(参看上一章 3.2 节)

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \tag{1}$$

可以看作是关于 y_{n+1} 的函数方程，设按欧拉格式提供猜测值

第一个迭代函数！

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

用它代入式(1)的右端，得校正值

代入最右侧

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})]$$

如果 $y_{n+1}^{(1)}$ 仍不满足精度要求，再用它代入式(1)的右端，又得新的校正值 $y_{n+1}^{(2)}$. 如此继续下去，这里迭代公式为

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(k)})], \quad k = 0, 1, 2, \cdots \tag{2}$$

对于一般方程 $f(x) = 0$，为使用迭代法，需先将它改写成

$$x = \varphi(x) \tag{3}$$

例如上图中，第一次计算的值，我感觉不太准，再次带入到式子中，感觉还是不准就继续，循环无数次，如果那个求出的结果可以慢慢的趋近于某个值，就叫做收敛，要不然算死也算不出来，所以需要讨论这个点是否收敛，是否有必要进行迭代。

下面是两种方法判断需不需要进行迭代：

1、压缩映像原理：

推理：设x*是我们要求的精确解，则有：x*-xk+1 = f(x*) - f(xk) = f'(o)(x*-xk);

其中o为x*到Xk中间的一个点，那么，如果有：L属于零到一，使任意的f(x)都小于L，那么带入原式，得：

x*-xk+1 < (x*-xk),并且如果迭代个几次，会发现这两个的差距越来越大

结论：

定理 1 设 $\varphi(x)$在$[a,b]$上具有连续的一阶导数，且满足下列两项条件：

(1) 对于任意 $x\in[a,b]$，总有 $\varphi(x)\in[a,b]$；

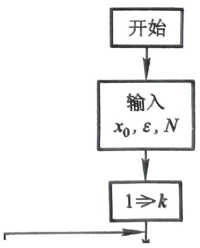
(2) 存在 $0\leqslant L<1$，使对于任意 $x\in[a,b]$成立

$$|\varphi'(x)|\leqslant L \tag{6}$$

则迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$对任意初值 $x_0\in[a,b]$均收敛于方程 $x=\varphi(x)$的根 x^*①，且有下列误差估计式

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{1}{1-L}|x_{k+1}-x_k| \tag{7}$$

$$|x^*-x_k|\leqslant\frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| \tag{8}$$



2.局部收敛原理：

和上面差不多，不过是某个一定区域内收敛，所以会有局部收敛：

定理：设 x_* 是 $\varphi(x)$ 的不动点，若 $\varphi'(x)$ 在 x_* 的某个邻域内连续，且

$$|\varphi'(x_*)|<1$$

则不动点迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 局部收敛

注意到当 $x\in[1,2]$时 $\Psi(x)\in[1,2]$，且成立

$$|\Psi'(x)|\leqslant\frac{1}{2\ln 2}<1$$

依据压缩映像原理，这里迭代公式 $x_{k+1}=\Psi(x_k)$对任意初值 $x_0\in[1,2]$均收敛.

题 7 为用迭代法求方程

$$x^3-x^2-1=0$$

在区间$[1.3,1.6]$内的一个实根，试考察下述几种设计方案：

(1) 将方程改写为 $x^2=\frac{1}{x-1}$，进而加工成 $x=\frac{1}{\sqrt{x-1}}$的形式；

(2) 将方程改写为 $x-1=\frac{1}{x^2}$，进而加工成 $x=1+\frac{1}{x^2}$的形式；

(3) 将方程改写为 $x^2=x^3-1$，进而加工成 $x=\sqrt{x^3-1}$的形式；

(4) 将方程改写为 $x^3=x^2+1$，进而加工成 $x=\sqrt[3]{x^2+1}$的形式.

解 先考察方案 1. 其迭代函数

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{x-1}},\quad \Phi'(x)=-\frac{1}{2\sqrt{(x-1)^3}}$$

当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$|\Phi'(x)|\geqslant\frac{1}{2\sqrt{(1.6-1)^3}}>1$$

因此,迭代公式 $x_{k+1}=\Phi(x_k)=\frac{1}{\sqrt{x_k-1}}$在区间$[1.3,1.6]$内发散.

再考察方案 2. 其迭代函数为

$$\Psi(x)=1+\frac{1}{x^2}$$

当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$|\Psi'(x)|\leqslant 2\times(1.3)^{-3}<1$$

此外成立

$$1.3<1+\frac{1}{1.6^2}\leqslant\Psi(x)\leqslant 1+\frac{1}{1.3^2}<1.6$$

因此，迭代公式 $x_{k+1}=\Psi(x_k)=1+\frac{1}{x_k^2}$对任给初值$x_0\in[1.3,1.6]$均收敛.

进一步考察方案 3. 其迭代函数

$$\Phi(x)=\sqrt{x^3-1},\quad \Phi'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$$

当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$|\Phi'(x)|\geqslant\frac{3\times1.3^2}{2\sqrt{1.6^3-1}}>1$$

因此，迭代公式 $x_{k+1}=\Phi(x_k)=\sqrt{x_k^3-1}$在区间$[1.3,1.6]$内发散.

最后考察方案 4. 其迭代函数

$$|\Psi(x)|=\sqrt[3]{x^2+1}$$

当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$|\Psi'(x)|\leqslant\frac{2\times1.6}{3\times\sqrt[3]{(1.3^2+1)^2}}<1$$

此外当 $x\in[1.3,1.6]$时，有

$$1.3<\sqrt[3]{1.3^2+1}\leqslant\Psi(x)\leqslant\sqrt[3]{1.6^2+1}<1.6$$

故迭代公式 $x_{k+1}=\Psi(x_k)=\sqrt[3]{x_k^2+1}$对任给初值 $x_0\in[1.3,1.6]$均收敛.

题 8 给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$存在且$0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$，试证明对于$0<\lambda<\frac{2}{M}$的任意值$\lambda$，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k)$均收敛于 $f(x)=0$

二、迭代方式：

1.牛顿迭代法：

● **迭代函数** $\boxed{\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}}$

- **牛顿的优点**

  至少二阶局部收敛，收敛速度较快，特别是当迭代点充分靠近精确解时。

  牛顿法是目前求解非线性方程 (组) 的主要方法

- **牛顿的缺点**

  - **对重根收敛速度较慢（线性收敛）**
  - **对初值的选取很敏感，要求初值相当接近真解**

    先用其它算法获取一个近似解，然后使用牛顿法

  - **每一次迭代都需要计算导数！**

简化牛顿法：使用第一次的f'(x0)代替每次的导数，好处是简单，坏处是只有线性收敛速度，收敛较慢，而且容易搞砸。

牛顿下山法：加一个下山因子λ（就是为了防止因为结果偏差较大，导致最后得到的数据反而差距更大，所以我们想要让他的函数值单调下降。（|f(xk+1)| < |f(xk)|）保证函数值稳定下降，同时加快收敛速度。

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

然后每次减半，直到满足下讲条件为止。

$f(x) = xe^x - 1$

$$\frac{xe^x - 1}{e^x + xe^x}$$

例 5 用牛顿法解方程 $xe^x - 1 = 0$

解 这里牛顿公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{1 + x_k}$$

取 $x = 0.5$，迭代结果如下：

$$x_1 = 0.571\ 02, \quad x_2 = 0.567\ 16, \quad x_3 = 0.567\ 14$$

所给方程 $xe^x - 1 = 0$ 实际上是方程 $x = e^{-x}$ 的变形，比较例 5 与例 3 的结果可以看出，牛顿法收敛得很快.

考察牛顿法的收敛速度．利用式(13)求导知

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

假定 x^* 是 $f(x) = 0$ 的单根，即 $f(x^*) = 0$，$f'(x^*) \neq 0$，则由上式知 $\varphi'(x^*) = 0$，因而据定理 3 可以断定：

定理 4 牛顿法(12)在 $f(x) = 0$ 的单根 x^* 附近为平方收敛.

2、弦截法（避免计算牛顿中的导数，并且尽可能，并且还保持较高收敛性（超线性收敛），用差商代替微商）需要提供两个迭代初始值

● 弦截法迭代格式：

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)}$$

$k = 1, 2, 3, \ldots$