第三章、数值积分

2023年1月29日　15:15

为什么数值积分：有大量的函数无法找到原函数，以至于无法进行积分方面的运算。所以我们需要研究积分数值问题

机械求积的框架形式：

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

机械求积公式

求积系数　求积节点

代数精度的定义和判断方法：

- **将 $f(x)=1,\ x,\ x^2,\ \dots,\ x^m$ 依次代入，公式精确成立；**
- **将 $f(x)=x^{m+1}$ 代入，公式不精确成立。**

就可以得到，代数精度为m；

老早之前的求积公式

- **矩形公式**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(a)}$$ （左矩形公式，左点法）

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f(b)}$$ （右矩形公式，右点法）

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$ （中矩形公式，中点法

- **梯形公式**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]}$$

- **抛物线公式（Simpson公式）**

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

机械求积公式

求积系数　求积节点

一、插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \int_a^b L_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x \equiv \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 $A_i = \int_a^b l_i(x)\,\mathrm{d}x$

性质：插值型求积公式具有至少 n 次代数精度

定理：下面的求积公式具有至少 n 次代数精度的充要条件是该公式是插值型的

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

当机械求积公式具有尽可能高的代数精度时，它总是插值型的

插值型求积公式是机械求积公式中最好的求积公式

定义：如果求积公式 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ 满足

$$\lim_{h\to 0}\sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad h = \max_{1\le i\le n}\Delta x_i$$

则称该求积公式是 **收敛的**。

定义：对 $\forall \varepsilon > 0$，若存在 $\delta > 0$，使得当 $\left|\tilde{f}_i - f(x_i)\right| \le \delta$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ 时，有

$$\left|\sum_{i=0}^{n} A_i \tilde{f}_i - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)\right| \le \varepsilon$$

则称该求积公式是 **稳定的**。

定理：若 $A_i > 0$，$i = 0, 1, \dots, n$，则下面的求积公式是稳定的

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

Newton-Cotes求积公式不要求，偶也！！！

确定求积公式中的待定系数（可能是负数）：

1.第一步先计算前一半的数据。，通过下面式子进行计算：

$$A_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$$

2.通过对称性得到另一半数据，然后检验他的代数精度。

下面是例题：

1 阶精度.

题 4 构造下列形式的插值型求积公式，并指明该求积公式所具有的代数精度：

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f\left(\frac{1}{4}\right) + A_1 f\left(\frac{1}{2}\right) + A_2 f\left(\frac{3}{4}\right)$$

形如(4)的求积公式至少有n次代数精度的充要是它是插值型的。

解 按题设原式是插值型的，故有

$A_i = \int_a^b l_i(x)\,dx$

$l_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} \frac{x-x_j}{x_k-x_j}$

$$A_0 = \int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)}\,dx = \frac{2}{3}$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)}\,dx = -\frac{1}{3}$$

考虑到对称性，显然有 $A_2 = A_0$，于是有求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}\left[f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right)\right] - \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{2}\right)$$

由于原式含有 3 个节点，按定理 1 它至少有 2 阶精度．考虑到其对称性，可以猜到它可能有 3 阶精度．事实上，对 $f = x^3$ 原式左右两端相等．此外，容易验证原式对 $f = x^4$ 不准确，故所构造出的求积公式确实有 3 阶精度．

还有一种方法，先确定代数精度：也就是提前进行代数精度的判断，然后得到几个等式，求解多元不等式求出参数：不知道有啥区别，先搁这里搁着等会问

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)\,dx \approx h\left[\frac{8}{3}f(-h) - \frac{4}{3}f(0) + \frac{8}{3}f(h)\right]$$

易知它对于 $f = x^4$ 不准确，故所构造出的求积公式具有 3 阶精度.

题 3 试设计求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(1) + B_0 f'(0)$$

解 令对 $f = 1, x, x^2$ 准确，可列出方程

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1 \\ A_1 + B_0 = \dfrac{1}{2} \\ A_1 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

解之有

$$A_0 = \frac{2}{3},\quad A_1 = \frac{1}{3},\quad B_0 = \frac{1}{6}$$

于是有求积公式

$$\int_0^1 f(x)\,dx \approx \frac{2}{3}f(0) + \frac{1}{3}f(1) + \frac{1}{6}f'(0)$$

易知它对于 $f = x^3$ 不准确，故该求积公式仅有 2 阶精度.

题 4 试设计求积公式

$$\int_0^h f(x)\,dx \approx h\left[a_0 f(0) + a_1 f(1)\right] + h^2\left[b_0 f'(0) + b_1 f'(1)\right]$$

龙贝格加速算法

$$4^m - 1$$

① $T_1 = T_0^{(0)}$

② $T_2 = T_0^{(1)}$ ③ $S_1 = T_1^{(0)}$

④ $T_4 = T_0^{(2)}$ ⑤ $S_2 = T_1^{(1)}$ ⑥ $C_1 = T_2^{(0)}$

⑦ $T_8 = T_0^{(3)}$ ⑧ $S_4 = T_1^{(2)}$ ⑨ $C_2 = T_2^{(1)}$ ⑩ $R_1 = T_3^{(0)}$

Romberg 算法是收敛的

$$S(h) \equiv \frac{1}{3}\left(4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h)\right) = I[f] + \beta_1 h^4 + \beta_2 h^6 + \cdots = I[f] + O(h^4)$$

$$C(h) \equiv \frac{1}{15}\left(16S\left(\frac{h}{2}\right) - S(h)\right) = I[f] + \gamma_1 h^6 + \gamma_2 h^8 + \cdots = I[f] + O(h^6)$$

$$R(h) \equiv \frac{1}{63}\left(64C\left(\frac{h}{2}\right) - C(h)\right) = I[f] + O(h^8)$$

$$T_1 = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{2}T_1 + \frac{h_0}{2}\sum_{i=0}^{0} f(a+ih_0+0.5h_0) \qquad \boxed{h_0 = b-a}$$

$$T_4 = \frac{1}{2}T_2 + \frac{h_1}{2}\sum_{i=0}^{1} f(a+ih_1+0.5h_1) \qquad \boxed{h_1 = \frac{b-a}{2}}$$

$$T_8 = \frac{1}{2}T_4 + \frac{h_2}{2}\sum_{i=0}^{3} f(a+ih_2+0.5h_2) \qquad \boxed{h_2 = \frac{b-a}{4}}$$

最后的T3即为最终结果

还有个高斯公式，我们需要使用其高对称性，并且因为他的对称性，他对基数次方的精度完全准确（因为两边都会变成零）所以我们计算偶数次方的代数京精度即可

CH2 数值积分

问题的描述：为什么数值积分？

机械求积公式的框架形式。

代数精度的定义和判断方法

用矩形公式、梯形公式、抛物线公式、复化矩形公式、复化梯形公式、复化抛物线公式求数值积分。p95 题 9（不要求 Cotes 法）

确定求积公式中的待定系数（可能是负数），使求积公式的代数精度尽可能地高，并指明求积公式的代数精度。p81 题 4 p82 题 1

Romberg 加速：梯形法的递推化计算；梯形法二分前后两个积分值做线性组合，结果得到 Simpson 序列；Simpson 序列相邻两个元素做线性组合，结果得到 Cotes 序列；Cotes 序列相邻两个元素做线性组合，结果得到 Romberg 序列。