第六章&第七章：线性方程组数值解法

2023年2月16日 21:19

CH5 & CH6 线性方程组的数值解法
列主元 Gauss 消去法
直接法和迭代法的不同应用场景
向量和矩阵范数的计算方法
利用迭代矩阵的范数判断 Jacobi 法和 G-S 法的收敛性
利用对角占优方程组（p166 不等式描述）判断 Jacobi 法和 G-S 法的收敛性
超松弛法：松弛因子的取值范围（0，2），超松弛（1，2）

一、列主元高斯消去法：
先讲一个约当法：先把第一个式子里的x1的参数化为1，从除去自己之外其他所有式子中消去x1,再把第二个式子里的x2的参数化为1，从除去自己之外其他所有式子中消去x2,其他式子同样操作，到最后一个，整个多项式就会化成答案，这就是约当消去法。
而列主元是只消去下面式子的一种算法，第一个式子中x1参数化为1后，将后面式子的x1都消去，第二个式子中x2参数化为1后，将后面式子的x2都消去，依次进行其他式子的消去，最后会得到一个梯形的多项式，现在从下往上进行求解即可

二。直接（消去法）和迭代法的不同应用场景；
迭代法算法简单，编程程序非常容易，但是对于方程组系数矩阵有一定要求，以保证迭代的收敛性。发散迭代无价值。
直接法，可以利用有限步的步骤直接得到最优解，当然四舍五入呀啥的误差不在其中。

三、向量和矩阵范数的计算方法：
1.向量范数：

（1）**2 – 范数（长度）**

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$$

（2）**1 – 范数**

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

（3）**∞ – 范数**

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

以上三种范数都是下列 p – 范数的特例：

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

2.矩阵的范数：只需要记住两个：||A||∞或者||A||1,其中第一个是每行取和，然后取其中最大的值，第二个是每一列取和，再取其中最大的值迭代公式：xk+1 = Gxk + d，其中

||G||如果小于1，即该公式对于任何初值x0收敛

四、对角占优方程组:如果一个n x n矩阵中对角线上的元素大于同行其他元素，那么就称之为对角占优矩阵

系数矩阵为对角占优阵的方程组被称为对角占优方程组

对角占优方程组的雅可比迭代式和高斯-赛德尔迭代公式均收敛

五、超松弛法（SOR方法）：（加速迭代过程）

松弛因子：取值零到二，是为了保证其收敛

超松弛因子：取一到二，是为了尽可能扩大后一次迭代值的作用

六、迭代公式的矩阵表示：

雅可比可以表示为：

$$x^{(k+1)} = (I - D^{-1}A)x^{(k)} + D^{-1}b$$

而高斯－塞德尔公式(7)的矩阵形式是

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)})$$

由此解出 $x^{(k+1)}$，则有

$$x^{(k+1)} = -(D+L)^{-1}Ux^{(k)} + (D+L)^{-1}b$$

其中系数矩阵可以分裂为：

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^T, \quad x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

设将系数矩阵 A 分裂为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & & & & \mathbf{0} \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \mathbf{0} & & 0 & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= L + D + U$$