第三章、数值积分

2023年1月29日 15:15

为什么数值积分:有大量的函数无法找到原函数,以至于无法进行积分方面的运算。所以我们需要研究积分数值问题

机械求积的框架形式:

代数精度的定义和判断方法:

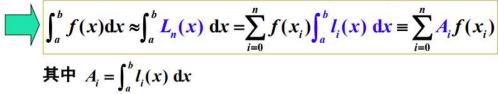
- 将 $f(x) = 1, x, x^2, ..., x^m$ 依次代入, 公式精确成立;
- 将 $f(x) = x^{m+1}$ 代入,公式不精确成立。

就可以得到,代数精度为m;

老早之前的求积公式

- 梯形公式 $\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{2} (b-a) [f(a) + f(b)]$
- 抛物线公式 $\left[\int_a^b f(x) dx \approx \frac{1}{6}(b-a) \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]\right]$

一、插值型求积公式



性质:插值型求积公式具有至少 n 次代数精度

定理: 下面的求积公式具有至少 n 次代数精度的充要条件是该公式是插值型的

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

当机械求积公式具有尽可能高的代数精度时, 它总是插值型的

插值型求积公式是机械求积公式中最好的求积公式

定义: 如果求积公式 $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$ 满足

$$\lim_{h \to 0} \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) = \int_a^b f(x) \, dx \qquad h = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$$

则称该求积公式是 收敛的。

定义: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 若存在 $\delta > 0$, 使得当 $\left| \tilde{f}_i - f(x_i) \right| \le \delta$ (i = 0, 1, ..., n) 时,有

$$\left| \sum_{i=0}^{n} A_i \tilde{f}_i - \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i) \right| \le \varepsilon$$

则称该求积公式是稳定的。

定理: 若 $A_i > 0$, i = 0, 1, ..., n, 则下面的求积公式是稳定的

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \approx \sum_{i=0}^n A_i f(x_i)$$

Newton-Cotes求积公式不要求, 偶也!!!

确定求积公式中的待定系数(可能是负数):

1.第一步先计算前一半的数据。,通过下面式子进行计算:

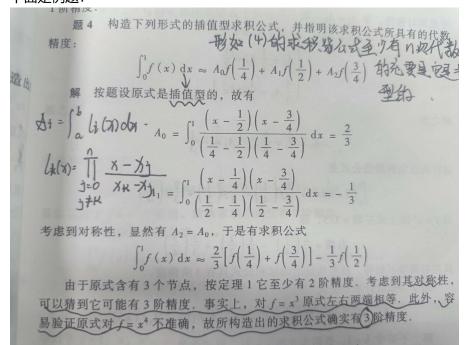
$$Ai = \int_{\alpha}^{b} li(x) dx$$

$$li(x) = \prod_{j=0}^{x-x_{j}} \frac{x-x_{j}}{x_{k}-x_{j}}$$

$$j \neq k$$

2.通过对称性得到另一半数据,然后检验他的代数精度。

下面是例题:



还有一种方法,先确定代数精度:也就是提前进行代数精度的判断,然后得到几个等式,求解多元不等式求出参数:不知道有啥区别,先搁这里搁着等会问

龙贝格加速算法

① $T_1 = T_0^{(0)}$ ② $S_1 = T_1^{(0)}$ ② $S_1 = T_1^{(0)}$ ② $S_1 = T_1^{(0)}$ ② $S_2 = T_1^{(1)}$ ② $S_2 = T_1^{(1)}$ ② $S_2 = T_1^{(1)}$ ② $S_3 = T_1^{(0)}$ ② $S_4 = T_1^{(0)}$ ③ $S_4 = T_1^{(0)}$ ② $S_4 = T_1^{(0)}$ ③ $S_4 = T_1^{(0)}$ ④ $S_4 = T_1^{(0)}$ ④ S

$$T_{1} = \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b) \right)$$

$$T_{2} = \frac{1}{2} T_{1} + \frac{h_{0}}{2} \sum_{i=0}^{0} f(a+ih_{0}+0.5h_{0}) \qquad h_{0} = b-a$$

$$T_{4} = \frac{1}{2} T_{2} + \frac{h_{1}}{2} \sum_{i=0}^{1} f(a+ih_{1}+0.5h_{1}) \qquad h_{1} = \frac{b-a}{2}$$

$$T_{8} = \frac{1}{2} T_{4} + \frac{h_{2}}{2} \sum_{i=0}^{3} f(a+ih_{2}+0.5h_{2}) \qquad h_{2} = \frac{b-a}{4}$$

最后的T3即为最终结果

还有个高斯公式,我们需要使用其高对称性,并且因为他的对称性,他对基数次方的精度完全准确(因为两边都会变成零)所以我们计算偶数次方的代数京精度即可

CH2 数值积分←

问题的描述: 为什么数值积分?↩

机械求积公式的框架形式。

代数精度的定义和判断方法

用矩形公式、梯形公式、抛物线公式、复化矩形公式、复化梯形公式、复化抛物线公式求数值积分。p95 题 9 (不要求 Cotes 法) ←

确定求积公式中的待定系数 (可能是负数), 使求积公式的代数精度尽可能地高, 并指明求积公式的代数精度。p81 题 4 p82 题 14

Romberg 加速:梯形法的递推化计算;梯形法二分前后两个积分值做线性组合,结果得到 Simpson 序列;Simpson 序列相邻两个元素做线性组合,结果得到 Cotes 序列;Cotes 序列相邻两个元素做线性组合,结果得到 Romberg 序列。