第四章、常微分方程

2023年1月29日　17:19

CH3 常微分方程
数值解形式：离散化后的数表
总结表：精度、显/隐式、单步/多步

会用改进欧拉法（预报与校正）和经典四阶 Runge-Kutta 法解题。格式、计算过程。p124 习题 3 用改进欧拉法和经典四阶 Runge-Kutta 法解。

一下题目求解的都是式子：y' = f(x,y)

一、欧拉法求解

首先，利用差商：（这里是向前差商）

$$y'(x_i) \approx \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$

代替原来的y'，然后求出近似值的式子结果

$$y(x_{i+1}) \approx y(x_i) + hf(x_i, y(x_i))$$
$$(i = 0,1,2,\dots,n-1)$$

取步长h = x；递推出剩余的式子

如果改用向后差商：

$$y'(x_{i+1}) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}$$
$$(i = 0,1,\cdots,n-1)$$

那就叫向后欧拉公式或者隐式欧拉公式，除此之外还有：

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})]$$
$$(i = 0,1,2,\dots,n-1)$$

中点欧拉公式；（两部欧拉公式）

二、改进欧拉公式：将欧拉法第一步的差商替代，先使用简单欧拉求出一个近似值，然后使用梯形格式的欧拉公式将其进行纠正一次，梯形公式如下：

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\right]$$
$$(i = 0,1,2,\dots,n-1)$$

最终可以得到一个三个式子的式子，第一步计算近似，第二部进行纠正，第三步进行计算：

$$\begin{cases} y_p = y_i + hf(x_i, y_i) \\ y_c = y_i + hf(x_{i+1}, y_p) \\ y_{i+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_c) \\ \quad (i = 0,1,2,\dots,n-1) \end{cases}$$

三、四阶龙格库塔法：

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + \dfrac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \\ K_1 = f(x_i, y_i) \\ K_2 = f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_1) \\ K_3 = f(x_i + \dfrac{h}{2}, y_i + \dfrac{h}{2}K_2) \\ K_4 = f(x_i + h, y_i + hK_3) \end{cases}$$

步骤类似，不说了，直接计算即可