Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной математики и информатики

ОТЧЕТ

ПО ПРЕДМЕТУ “ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ АЛГЕБРЫ”

НА ТЕМУ “Численное решение нелинейных уравнений”

студентки 2 курса 2 группы

Курец Любови Олеговны

Преподаватель

Горбачева Юлия Николаевна

1. Постановка задачи

Решить уравнение $f(x)=0$ согласно своему варианту с точностью $\varepsilon=10^{-7}$ методом простой итерации и методом Ньютона. Корень отделяем сначала графически, затем с помощью метода половинного деления до $\varepsilon=10^{-2}$. Если корней несколько, то необходимо найти ближайший к началу координат. Провести сравнительный анализ полученных результатов.

Содержание отчета:

- Графики, которые использовались для отделения корня.
- Таблица значений при использовании метода половинного деления

k	a_k	b_k	$f(a_k)$	$f(b_k)$	$\frac{a_k+b_k}{2}$	$f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)$	ε_k
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- Проверка сходимости метода простой итерации и метода Ньютона.
- Таблица значений на каждой итерации и достигнутая точность для каждого метода

k	Метод простой итерации		Метод Ньютона	
	x_k	ε_k	x_k	ε_k
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

- *f(x)= sqrt(1-x²)-exp(x)+0.1*

2. Теоретические сведения

Метод простых итераций для нелинейных:

Рассмотрим уравнение вида

$$f(x)=0, \qquad (1)$$

где f – некоторая заданная функция, x – неизвестная численная величина.

Пусть уравнение (1) каким-либо способом (о некоторых способах будет сказано позже) приведена к виду, пригодному для итераций:

$$x=\varphi(x).$$

Будем считать, что корень x_∞ отделен и указано некоторое начальное приближение x_0 (вообще говоря, произвольное значение из отрезка локализации корня). Тогда уточнение этого значения производят по правилу

$$x_{k+1}=\varphi(x_k),\ \ k=0,1,\ldots. \qquad (2)$$

Формула (2) задает вычислительный процесс метода простой итерации решения нелинейных уравнений.

Приемы приведения уравнений к виду, пригодному для итераций

Скорость сходимости метода итерации – это скорость сходимости геометрической прогрессии со знаменателем q (или $\varphi'(x_\infty)$). Таким образом, при приведении уравнения к виду $x=\varphi(x)$ следует действовать таким образом, чтобы $\varphi'(x_\infty)$ имело по возможности меньшее по абсолютной величине значение. Во всяком случае, для сходимости итерационного процесса, в окрестности точки x_∞ должно выполняться $|\varphi'(x)|<1$. Рассмотрим некоторые приемы.

1. Выразить x каким-либо образом из исходного уравнения.

Пусть, например, дано уравнение

$$x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4=0.$$

Тогда, в зависимости от промежутка локализации корня, может подойти один из следующих вариантов:

- $x=-\dfrac{1}{a_3}x^4-\dfrac{a_1}{a_3}x^3-\dfrac{a_2}{a_3}x^2-\dfrac{a_4}{a_3}$ (может подойти для дробных x);
- $x=-\dfrac{a_4}{x^3}-\dfrac{a_3}{x^2}-\dfrac{a_2}{x}-a_1$ (может подойти для больших x);
- $x=\sqrt[3]{\dfrac{-a_2x^2-a_3x-a_4}{x+a_1}}$;
- $x=\pm\sqrt[4]{-a_3x^3-a_2x^2-a_3x-a_4}$.

2. Умножить уравнение $f(x)=0$ на некоторую непрерывную и не обращающуюся в нуль функцию $\psi(x)$ и сложить с тождеством $x=x$. Получим

$$x=x+\psi(x)f(x),$$

т.е.

$$\varphi(x)=x+\psi(x)f(x).$$

Далее подбором $\psi(x)$ добиться, чтобы функция $\varphi(x)$ в окрестности корня удовлетворяла условию сжатия $|\varphi'(x)|\le q<1$ (при этом стараться получить q как можно меньше).

3. Рассмотрим частный случай предыдущего способа: $\psi(x)=C=\text{const}$. Тогда

$$\varphi(x)=x+Cf(x),$$
$$\varphi'(x)=1+Cf'(x).$$

Для выбора константы C получаем условие

$$-1<1+Cf'(x)<1$$

или

$$-2<Cf'(x)<0.$$

Сходимость метода простой итерации

Следующая теорема устанавливает достаточные условия сходимости итерационного процесса (2) (доказательство не приводится).

Теорема 1. *Пусть функция* $\varphi(x)$ *на отрезке* $\Delta=\{x: |x-x_0|\le\delta\}$ *имеет непрерывную производную и удовлетворяет условиям*

$$|\varphi'(x)|\le q<1,\ \ x\in\Delta, \tag{3}$$

$$|x_0-\varphi(x_0)|\le(1-q)\delta. \tag{4}$$

Тогда уравнение $x=\varphi(x)$ *имеет на отрезке* Δ *единственное решение, и последовательность (2) сходится к этому решению.*

Метод Ньютона:

Вычислительный процесс метода Ньютона

Рассмотрим уравнение вида

$$f(x)=0, \tag{1}$$

где f –заданная функция, x – неизвестная численная величина.

Предположим, что каким-либо способом получено приближение x_k к корню x_∞. Погрешность этого приближения обозначим через ε_k: $\varepsilon_k=x_\infty-x_k$. При известном x_k поиск корня равносилен поиску погрешности ε_k. Имеем:

$$f(x_k+\varepsilon_k)=0.$$

Рассмотрим разложение левой части уравнения в ряд Тейлора, взяв в разложении два первых слагаемых:

$$f(x_k)+\varepsilon_k f'(x_k)+O(\varepsilon_k^2)=0.$$

Если считать величину ε_k небольшой по модулю и отбросить остаточный член $O(\varepsilon_k^2)$, то получим приближенное равенство

$$f(x_k)+\varepsilon_k f'(x_k)\approx 0,$$

из которого найдем, вообще говоря, не само значение ε_k, а некоторое Δx_k, приближение значения ε_k ($\Delta x_k\approx\varepsilon_k$):

$$\Delta x_k=-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Прибавив эту поправку Δx_k к x_k, получим новое приближение:

$$x_{k+1}=x_k+\Delta x_k$$

Сходимость метода Ньютона

С формальной точки зрения метод Ньютона можно трактовать как метод простой итерации с выбором функции $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Поэтому формально все результаты метода простой итерации могут быть перенесены на этот случай. Например, формальное достаточное условие сходимости метода Ньютона может выглядеть следующим образом:

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}\right| < 1, \; x \in \Delta.$$

Мы, однако, проведем самостоятельное изложение основ метода Ньютона по той же схеме, которой пользовались для метода простой итерации.

Обозначим

$$h_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)},$$

$$S_0 = \{x\colon x_0 + 2h_0 \le x \le x_0\}, \textit{ если } h_0 < 0,$$

$$S_0 = \{x\colon x_0 \le x \le x_0 + 2h_0\}, \textit{ если } h_0 > 0,$$

$$M = \max_{x \in S_0} |f''(x)|.$$

Следующая теорема устанавливает достаточные условия сходимости итерационного процесса (2) (доказательство не приводится).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке S_0 и удовлетворяет условиям*

$$2|h_0|M \le |f'(x_0)|, \tag{3}$$

$$f(x_0)f'(x_0) \ne 0, \; f(x_0 + 2h_0)f'(x_0 + 2h_0) \ne 0. \tag{4}$$

Тогда уравнение $f(x)=0$ имеет на отрезке S_0 единственное решение, и последовательность (2) сходится к этому решению.

3. Листинг программы

Половинное деление:

```
double a, b, c, eps;
int k = 0;
a = 0; b = 0.5; eps = 0.01;

while (b - a > eps) {
		c = (a + b) / 2;
		if (f(b) * f(c) < 0)
			a = c;
		else
			b = c;

		cout << k << a << b << f(a) << f(b) << a + b / << f(a / 2 + b / 2)
			<< b - a << endl;
		k++;
	}
```

МПИ:

```
double f(double x)
{
	return x + 0.9 * (sqrt(1 - x * x) - exp(x) + 0.1);
}

double x1 = 0.085;
```

```
	double x2 = 0.093;
	double eps=0.0000007;
	int k = 0;
	cout << "K" << setw(10) << "X1" << setw(10) << "eps" << endl;
	while (abs(x2 - x1) > eps && k < 10)
	{
		if (k % 2 == 0) {
			x2 = f(x1);
			cout << k << setw(10) << x2 << setw(13) << abs(x2 - x1) << endl;
		}
		else {
			x1 = f(x2);
			cout << k << setw(10) << x1 << setw(13) << abs(x2 - x1) << endl;
		}
		k++;

	}
```

Метод Ньютона:

```
double f(double x)
{
	return x + 0.9 * (sqrt(1 - x * x) - exp(x) + 0.1);
}

double x1 = 0.084;
double x2 = 0;
double eps=0.0000007;
int k = 0;
cout << "k" << "x_1"  << "eps";
	while (abs(x2 - x1) > eps)
	{
		if (k % 2 == 0) {
			x2 = x1 - f(x1) / df(x1);
			cout << k  << x2 << abs(x2 - x1);
		}
		else {
			x1 = x2 - f(x2) / df(x2);
			cout << k  << x1 << abs(x2 - x1);
		}
		k++;

	}
```

4. Результат работы программы

Половинное деление:

k	a_k	b_k	f(a_k)	f(b_k)	(a_k+b_k)/2	f((a_k+b_k)/2)	Eps
0	0	0.5	0.1	-0.682696	0.25	-0.21578	0.5
1	0	0.25	0.1	-0.21578	0.125	-0.0409917	0.25
2	0	0.125	0.1	-0.0409917	0.0625	0.0335505	0.125
3	0.0625	0.125	0.0335505	-0.0409917	0.125	-0.00268937	0.0625
4	0.0625	0.09375	0.0335505	-0.00268937	0.109375	0.0156858	0.03125
5	0.078125	0.09375	0.0156858	-0.00268937	0.125	0.00656231	0.015625
6	0.0859375	0.09375	0.00656231	-0.00268937	0.132813	0.00195254	0.0078125

МПИ:

k	x_1	eps
0	0.0918975	0.0068975
1	0.0914619	0.000435577
2	0.0914921	3.01737e-05
3	0.09149	2.07862e-06
4	0.0914902	1.43248e-07

Метод Ньютона:

k	x_1	eps
0	0.0915405	0.00754045
1	0.0914902	5.03035e-05
2	0.0914901	2.2462e-09

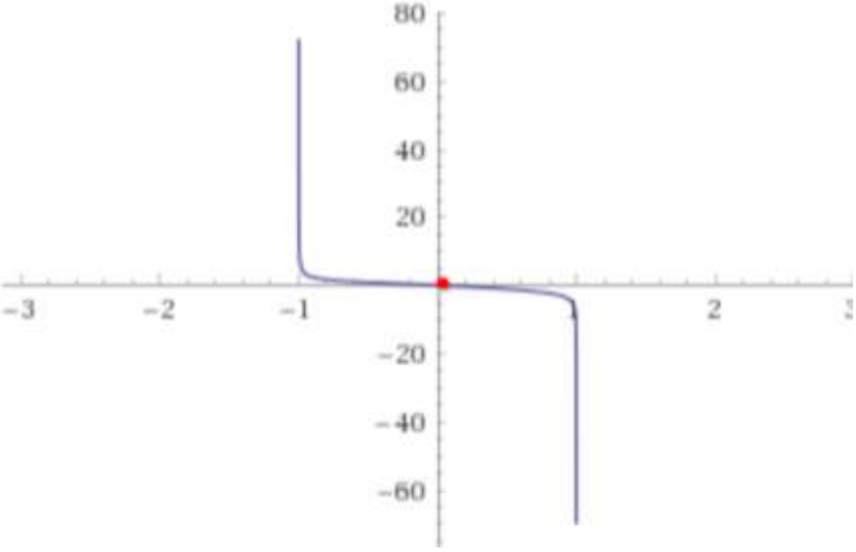
5. Вывод

Исходя из графика можно определить, что ближайший к нулю корень находится на отрезке [0,0.5].

В результате работы метода половинного деления определяются примерные границы, в которых находится корень уравнения.

Корни полученные в результате обоих методов совпадают, однако метод Ньютона дал результат раньше (всего за 2 итерации) с точностью 10^{-7}.

МПИ: Из графика видно, что функция монотонна на отрезке |x-0.0914|<=0.25



Метод Ньютона: x_0=(0+0.5)/2 и в итоге получаем, что условие сходимости выполнено 0.56<=1.54