

杂题选讲

Heart\_Blue

## 例题1

给出两个人的名字 $a, b$ ，找到一个最短的字符串 $s$ ，使得 $a, b$ 都是 $s$ 的子序列，同时，输出对应 $s$ 的个数。 $|a| \leq 30, |b| \leq 30$

最短怎么求？

## 例题1

求最长公共子序列？

$$dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i][j-1], \\ dp[i-1][j], \\ dp[i-1][j-1] + 1, \text{ if } a[i] == b[j] \end{cases}$$

## 例题1

如何直接求答案？

$$dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i][j-1] + 1, \\ dp[i-1][j] + 1, \\ dp[i-1][j-1] + 1, \text{ if } a[i] == b[j] \end{cases}$$

## 例题1

如何计数？

$$dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i][j-1] + 1, \\ dp[i-1][j] + 1, \\ dp[i-1][j-1] + 1, \text{ if } a[i] == b[j] \end{cases}$$

考虑  $cnt[i][j]$  表示当前用  $a$  的前  $i$  个字符， $b$  的前  $j$  个字符构造出来的合法串的数量

如果  $a[i] == b[j]$        $cnt[i-1][j-1]$

如果  $a[i] != b[j]$        $cnt[i][j-1] ? cnt[i-1][j] ?$

## 例题1

需要注意的细节

$dp[i][j]$   $i=0?$   $j=0?$

$cnt[i][j]$   $i=0?$   $j=0?$

## 例题2

给出一个字符串 $s$ ，求有多少种方法你从这个字符串中清除一些字符而得到一个回文串。

$|s| \leq 60$

什么是回文串？

abcba

## 例题2

区间dp

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i][j-1] + dp[i+1][j] - dp[i+1][j-1] \\ dp[i-1][j-1] + 1, \text{ if } s[i] == s[j] \end{cases}$$



## 例题3

如果一个字符串有连续 5 个辅音或者 3 个元音就是称这个字符串为"**BAD**", 否则称为"**GOOD**". 对于一个字符串, 其中有"?"存在, "?"可以当成元音也可以当成辅音. 所以对于有问号的字符串有可能是"**BAD**"也有可能是"**GOOD**". 此时称为这个字符串为"**MIXED**".

HELLOWORLD -> GOOD

AAA -> BAD

## 例题3

如何判断BAD?

贪心

## 例题3

如何判断 GOOD?

dp

dp[i][j][k]

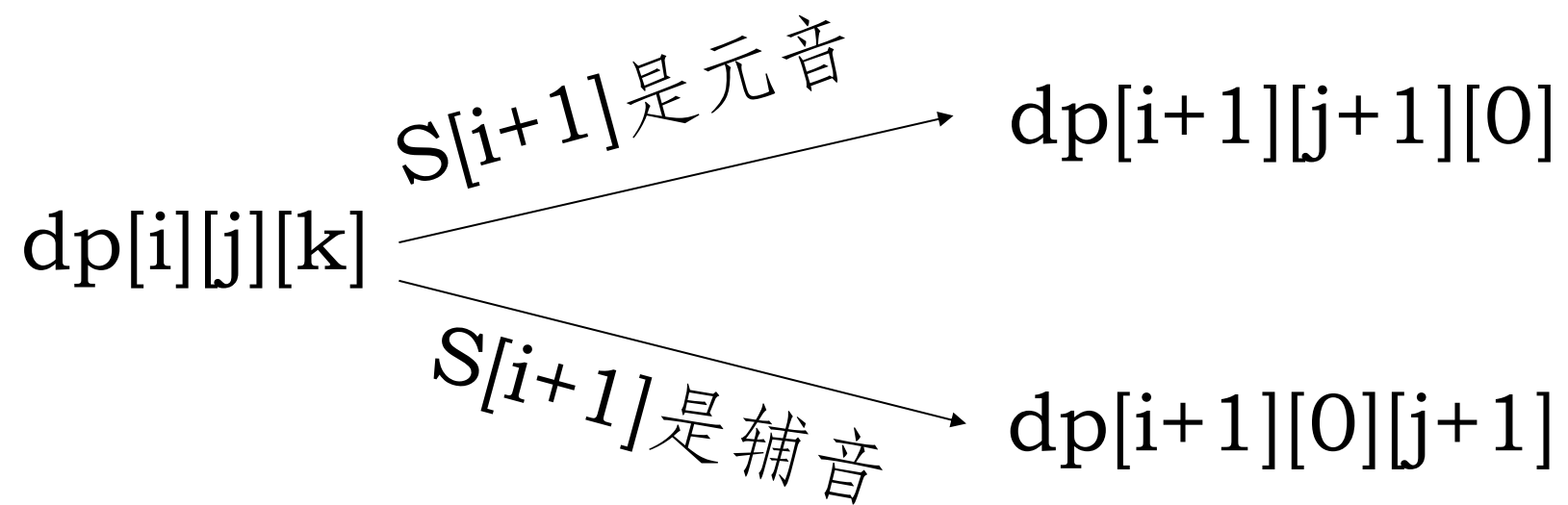
是否存在前i个字符，最末尾出现了连续j个元音，k个辅音

j,k不会同时大于0

$j \leq 3, k \leq 5$

## 例题3

如何转移？



## 例题4

如何判定为 good

$dp[n][j][k] \ (j < 3 \ \&\& \ k < 5)$

## 例题5

给定一个集合  $S$ ，其中含有不同的整数。再给定一个整数  $k$ 。判定所能得到的  $S$  的子集  $S'$  的最大元素个数。其中， $S'$  需要满足：其中的任意两数之和均不能被  $k$  整除。

例子：给定集合  $\{1, 7, 2, 4\}$  和数字 3。我们可以将 2 从集合中删去，得到子集  $\{1, 7, 4\}$ ，从而使得其中任意两数之和均不能被 3 整除。因而该情况的结果为 3。

## 例题5

考虑按余数分类

考虑两个不同的余数 $r_1, r_2$

$$r_1 + r_2 = k$$

$$r_1 = 0?$$

## 例题6

给定一棵 $n$ 个节点的子树，每个节点有一个点权。删除一条边以后得到两棵子树。子树的权值为子树中所有点的点权之和。问如何删边使得，两棵子树的权值之差最小。输出这个最小值即可



## 例题6

以1为根，来考虑每个节点为根的子树的权值之和

$$\text{sum}[u] = \sigma\{\text{sum}[v] \mid v \text{ 是 } u \text{ 的儿子}\} + \text{weight}[u]$$

删边以后另一侧子树的权值 = 总权值 -  $\text{sum}[u]$

两棵子树的权值之差 =  $|\text{总权值} - 2 * \text{sum}[u]|$

## 例题7

坐标轴上有 $n$ 个点，现在你有一批基站，每个基站的覆盖半径都是 $k$ ，问最少需要多少个基站才能覆盖所有的点。

## 例题7

贪心

贪心覆盖最左侧还未覆盖的点

## 例题7

一些延伸

假设 $n$ 是给定的，基站数量 $x$ 也是给定的，问最小的 $k$ ？

## 推荐一种二分的写法

```
int a[N] = { 0,0,0,0,0,0,.....,1,1,1,1,1,1 };
bool check(int x){ return a[x];}
int l = 1, r = n;
int res = -1;
while (l <= r){
    int mid = (l + r) / 2;
    if (check(mid)) res = mid, r = mid - 1;
    else l = mid + 1;
}

cout << res << endl;
```

## 例题8

背景：国际象棋马的走法(1,2)

给一个 $n*n$ 的象棋棋盘，我们定义Knight(a,b)一种新型的马的走法，如果 $(x_1, y_1)$ 能走到 $(x_2, y_2)$ ，必须满足

$(x_2 = x_1 \pm a \text{ 且 } y_2 = y_1 \pm b)$

或者 $(x_2 = x_1 \pm b \text{ 且 } y_2 = y_1 \pm a)$ 。

那么对于所有的Knight(a,b)( $1 \leq a < n, 1 \leq b < n$ )，从(1,1)到达(n,n)最少需要多少步，不可达输出-1

## 例题8

BFS

```
int dx[] = {a,a,    b,b, -a,-a, -b,-b};  
int dy[] = {b,-b,  a,-a,  b,-b,   a,-a};
```

## 例题9

给一个长度为 $n$ 的序列 $a$ ， $n$ 个数互不相同，求对于所有满足 $i < j$ 并且 $a_i > a_j$ 的二元组 $(i, j)$ 中， $a_i - a_j$ 的最小值。 $n \leq 10^5$



## 例题9

如何暴力？

直接枚举 $j$ ，找到所有合法的 $i$ ，求个最小值

## 例题9

高效一点？

`std::set lower_bound`

复杂度  $n \log n$

## 例题9

需要注意的地方

`std::set`有自己的`lower_bound`

```
std::set<int> s;
```

```
s.lower_bound(5); // O(logn)
```

```
lower_bound(s.begin(),s.end(),5); // O(n)
```

## 例题9

有 $n$ 个人，刚开始 $n$ 个人都属于 $n$ 个互不相同的社团。现在每次给出两个人，合并他们的社团。合并以后，从 $n$ 个人中选出两个人，使得两个人属于不同的社团，问有多少选择种方法。

## 例题9

如何合并？

并查集

## 例题9

如何求答案

考虑a,b,c三个社团

$$a*b+a*c+b*c$$

$$b*(a)+c*(a+b)$$

## 例题9

其他的方法

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc;$$

$$a+b+c = ?$$

## 例题10

给一个只有左右括号()的字符串 $s$ ， $q$ 次询问，每次给定一个 $L$ ，要求找到一个 $R$ ，使得 $S[L,R]$ 中，只删除一些右括号”)”以后，能够得到一个非空的合法括号串，并且 $R$ 最小。不存在输出-1。 $|s| \leq 10^6$ ， $q \leq 10^5$

合法的括号串：

- 1.空串是合法的括号串
- 2.如果串 $S$ 是合法的括号串，那么 $(S)$ 也是合法的括号串
- 3.如果串 $S$ 和 $T$ 都是合法的括号串，那么 $ST$ 也是合法的括号串。



## 例题10

如何暴力？

考虑一般如何判断一个括号串合法。

右括号可以舍去的情况？

## 例题10

注意到一些细节

不管从哪个位置开始枚举，每个左括号总是固定和某一个右括号匹配

为什么？

栈顶的左括号肯定是最优先被匹配的。

## 例题 11

JiangYu最近制作了一款简易的机器人，这款机器人虽然没有其它酷炫的功能，但它非常擅长移动。为了测试机器人的移动功能，JiangYu准备了一条长度为  $n$  个单位的机器人专用测试跑道。JiangYu可以对他的机器人进行以下两种指令：

- (1) 向左移动  $k$  个单位，若这样会移出跑道范围，则移动到跑道的最左端。具体来说，若机器人目前位置为  $d$ ，则执行该指令后机器人的位置会变为  $\max(d - k, 1)$ 。
- (2) 向右移动  $k$  个单位，若这样会移出跑道范围，则移动到跑道的最右端。具体来说，若机器人目前位置为  $d$ ，则执行该指令后机器人的位置会变为  $\min(d + k, n)$ 。

JiangYu好奇自己如果把机器人放置在初始位置  $x$ ，能否经过一系列指令使得机器人到达目标位置  $y$ 。由于JiangYu已经刷题过万，固然有足够的时间测试自己的机器人，因而指令的数量可以是任意有限次(包括0次)。

## 例题 11

如何暴力？

## 例题 11

考虑如果不到达边界，如何判断是否可达

## 例题12

给定两个长度为 $n$ 的序列 $a$ 和序列 $cost$ 。把 $a_i$ 增加1，需要消费 $cost_i$ 的代价，问最少需要多少的代价，才能让序列 $a$ 中的所有元素互不相同。

## 例题12

如何暴力

## 例题12

考虑所有 $a$ 相同的这些数，优先给哪些数加1

相当于留下了代价最大的，其他全部加1

找一堆数里面最大的，如何高效的处理

优先队列



# 题目来源

- 1.lightoj 1013
- 2.lightoj 1025
- 3.lightoj 1051
- 4.<https://www.hackerrank.com/challenges/non-divisible-subset/problem>
- 5.<https://www.hackerrank.com/challenges/cut-the-tree/problem>
- 6.<https://www.hackerrank.com/challenges/hackerland-radio-transmitters/problem>
- 7.<https://www.hackerrank.com/challenges/knightl-on-chessboard/problem>
- 8.<https://www.hackerrank.com/challenges/minimum-loss/problem>
- 9.<https://www.hackerrank.com/challenges/journey-to-the-moon/problem>
- 10.<https://www.codechef.com/COLE2020/problems/CLBRKT>
- 11.<https://codeforces.com/group/iyedFObHyp/contest/263834/problem/F>
- 12.<https://codeforces.com/group/iyedFObHyp/contest/263834/problem/H>