



差分约束系统

南开中学信息学竞赛教练组



PART 03

差分约束系统

- 概念

概念

概念：

- 差分：两个未知数的差
例如： $a - b$, $x_3 - x_1$
- 约束：未知数需要满足不等式条件
例如： $x \geq 3$, $x^2 + y^2 \leq 4$
- 差分约束系统：一组未知数必须满足一组不等式的条件，且每个不等式都限制两个未知数的差值的范围。
- 例如：未知数 x_1, x_2, x_3, x_4 满足以下不等式

$$x_1 - x_2 \leq 2$$

$$x_1 - x_3 \geq 5$$

$$x_2 - x_4 \leq -2$$

$$x_3 - x_4 \leq 233$$

概念

概念：

- 问题1：是否有解？
- 问题2：假如有解，如何求出一组解？
 - 假如有解，所有变量可以同时加减一个常数，所以有无穷多组解。
- 怎么解决呢？



重庆南开中学

PART 03

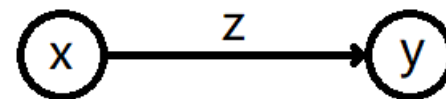
差分约束系统

- 概念
- 最短路？

最短路问题

最短路问题：

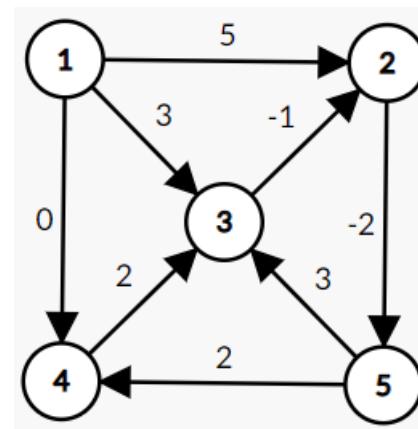
- 求最短路，实际上就是求一组 $dis[]$ 数值
- 观察一条有向边： $x \rightarrow y$ ，长度为 z
- 在计算最短路时：
 - 如果 $dis[y] > dis[x] + z$ 则更新 $dis[y]$
 - 最终 $dis[y] \leq dis[x] + z$
- 一条有向边 = 一个差分约束条件。



最短路问题

最短路问题：

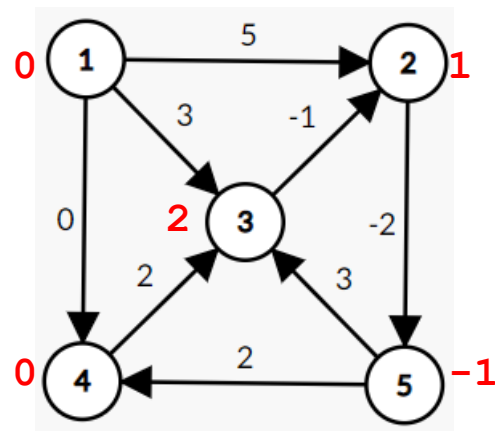
- 观察右边的有向图。
- 求最短路时，每条边就是一个约束条件：
 - $dis[2] \leq dis[1] + 5$
 - $dis[3] \leq dis[1] + 3$
 - $dis[4] \leq dis[1] + 0$
 - $dis[5] \leq dis[2] - 2$
 - $dis[2] \leq dis[3] - 1$
 - $dis[3] \leq dis[4] + 2$
 - $dis[3] \leq dis[5] + 3$
 - $dis[4] \leq dis[5] + 2$
- 有向图 = 差分约束系统



最短路问题

最短路问题：

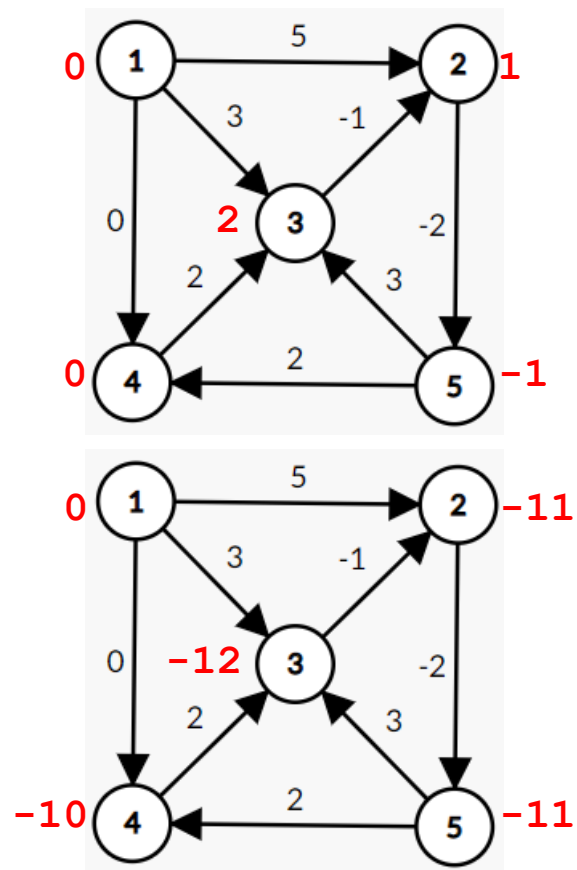
- 以节点1为起点，求最短路。
- 相当于令 $dis[1] = 0$ ，求差分约束系统的一组解。
 - 如果有最短路，则求出了一组解
 - 如果没有最短路（有负权回路），则无解



最短路问题

最短路问题：

- 在求最短路过程中
 - 用“边 $x \rightarrow y$ 长度 z ”更新dis数组时
 - 总是将 $\text{dis}[y]$ 设置为 $\text{dis}[x] + z$
 - 约束条件是 $\text{dis}[y] \leq \text{dis}[x] + z$
 - 即 $\text{dis}[y]$ 可以更小
- 例如右图，虽然不是最短路，但也满足差分约束限制
- 结论：最短路求出的是所有dis尽可能大的一组解。





重庆南开中学

PART 03

差分约束系统

- 概念
- 最短路？
- 例题

例题

例题 【NK0J2705 小K的农场】：

小K在MC里面建立很多很多的农场，总共 n 个，以至于他自己都忘记了每个农场中种植作物的具体数量了，他只记得一些含糊的信息（共 m 个），以下列三种形式描述：

- 农场 a 比农场 b 至少多种植了 c 个单位的作物，
- 农场 a 比农场 b 至多多种植了 c 个单位的作物，
- 农场 a 与农场 b 种植的作物数一样多。

但是，由于小K的记忆有些偏差，所以他想要知道存不存在一种情况，使得农场的种植作物数量与他记忆中的所有信息吻合。

输入第一行包括两个整数 n 和 m ，分别表示农场数目和小K记忆中的信息的数目。

接下来 m 行：

如果第一个数是1，接下来有三个整数 a, b, c ，表示农场 a 比农场 b 至少多种植了 c 个单位的作物

如果第一个数是2，接下来有三个整数 a, b, c ，表示农场 a 比农场 b 至多多种植了 c 个单位的作物

如果第一个数是3，接下来有两个整数 a, b ，表示农场 a 种植的数量与 b 一样多

样例输入：

```
3 3
3 1 2
1 1 3 1
2 2 3 2
```

样例输出：

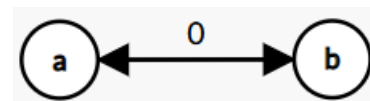
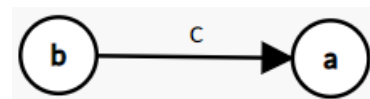
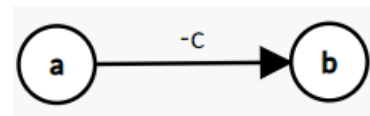
Yes

例题

例题 【NK0J2705 小K的农场】：

解析：

- 将题目的不等式转化为图上的有向边：
- a比b至少多种c $x_a - x_b \geq c \rightarrow x_b \leq x_a - c$
- a比b至多多种c $x_a - x_b \leq c \rightarrow x_a \leq x_b + c$
- a和b一样多 $x_a = x_b$
- 执行SPFA算法
 - 判断整个图是否存在负权回路
 - 初始所有dis都设为0，并将所有点放进队列
- 有负权回路，则原问题无解输出No，否则输出Yes。



例题

例题 【NK0J1385 笨笨种西瓜】：

笨笨种了一块西瓜地，但这块西瓜地的种植范围是一条直线的.....

笨笨在一番研究过后，得出了 m 个结论，这 m 个结论可以使他收获的西瓜最多。

笨笨的结论是这样的：

从西瓜地 B 处到 E 处至少要种植 T 个西瓜，这个范围的收获就可以最大化。

笨笨不想那么辛苦，所以他想种植的西瓜尽量少，而又满足每一个所得的结论。

基本上来说，笨笨的西瓜地就是一条壮观的线.....

第一行两个数 n, m ($0 < n \leq 5000, 0 \leq m \leq 3000$)，表示笨笨的西瓜地长 n ，笨笨得出 m 个结论。

接下来 m 行表示笨笨的 m 个结论，每行三个数 b, e, t ($1 \leq b \leq e \leq n, 0 \leq t \leq e - b + 1$)。

样例输入：

```
9 4
1 4 2
4 6 2
8 9 2
3 5 2
```

样例输出：

```
5
```

例题

例题 【NK0J1385 笨笨种西瓜】：

解析：

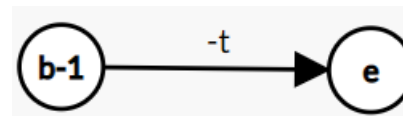
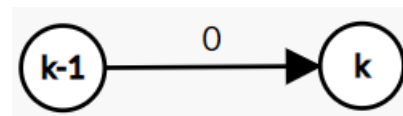
- 设从1到k种植了 x_k 个西瓜 $\rightarrow x_k - x_{k-1} \geq 0$
- 从b到e至少种植t个西瓜 $\rightarrow x_e - x_{b-1} \geq t$
- 执行SPFA算法
 - 起点： $x_0 = 0$
 - 目标： x_n 最小
- SPFA算出的是 x_n 最大的一组解，如何计算 x_n 最小的一组解？

例题

例题 【NK0J1385 笨笨种西瓜】：

解析：

- 方法1：添负号
- 求 x_k 的最小值 \rightarrow 求 $-x_k$ 的最大值
- 建图：
 - $x_k - x_{k-1} \geq 0 \rightarrow (-x_k) \leq (-x_{k-1}) + 0$
 - $x_e - x_{b-1} \geq t \rightarrow (-x_e) \leq (-x_{b-1}) - t$
- 求最短路，算出的 $\text{dis}[n]$ 就是 $-x_n$ 。

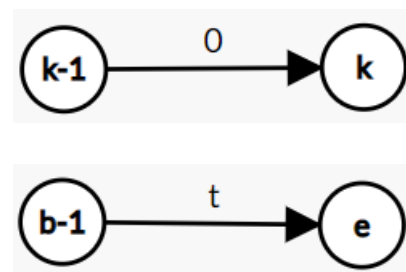


例题

例题 【NK0J1385 笨笨种西瓜】：

解析：

- 方法2：最长路
- 建图：
 - $x_k - x_{k-1} \geq 0 \rightarrow x_k \geq x_{k-1} + 0$
 - $x_e - x_{b-1} \geq t \rightarrow x_e \geq x_{b-1} + t$
- 求最长路，算出的 $\text{dis}[n]$ 就是 x_n 。





习题：

见考试

例题