

Dynamic Programming

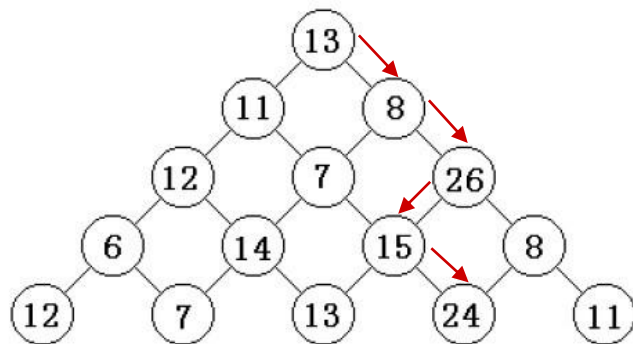
基础动态规划

第1课 概念、术语、基本模型

模型1：数塔

引例：数字金字塔 (USACO1.5.1 NK0J1796)

下面有一数字金字塔。写一个程序来查找从**最高点**到**底部**任意处结束的路径，使路径经过数字的和最大。每一步可以走到**左下方**的点也可以到达**右下方**的点。



在上面的样例中,从13 到 8 到 26 到 15 到 24 的路径产生了最大和

Input

第一个行包含 n ($1 \leq n \leq 1000$) ,表示行的数目。

后面每行为这个数字金字塔特定行包含的整数。

Output

单独的一行,包含那个可能得到的最大的和。

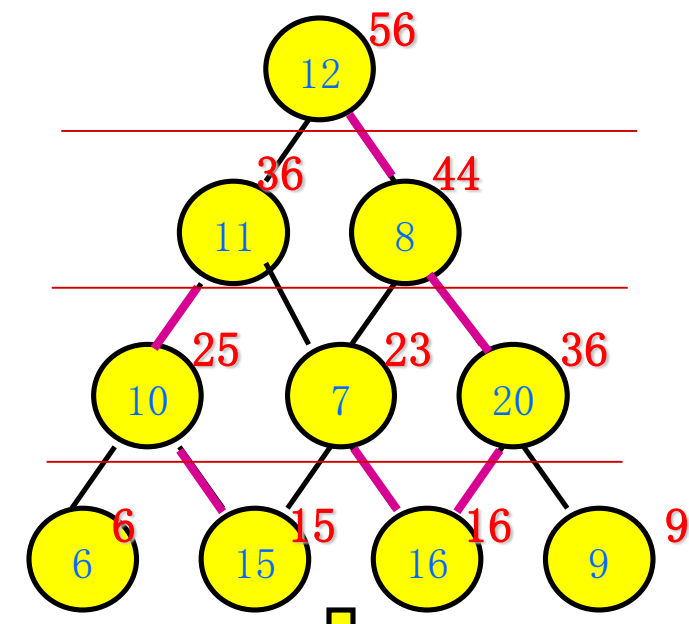
Sample Input

```
5
13
11 8
12 7 26
6 14 15 8
12 7 13 24 11
```

Sample Output

```
86
```

一个n (n<=1000) 层的数字三角形， 请找出从顶层至底层的一条路径， 使该路径所经过的数字的总和最大。



换个角度思考：
我们由下往上找一条数字总和最大的道路。

分析：层数n

路径数p

n=1

p=1

n=2

p=2

效率太低

n=3

p=4

不可取

n=4

p=8

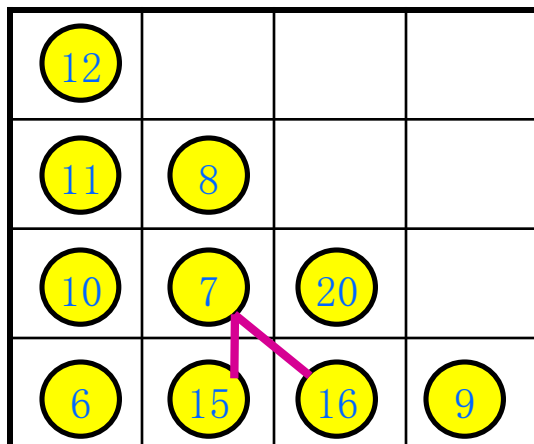
...

...

n=k

p=2^{k-1}

由分析得出：求从点t到底层的最大路径值f(t)，
f(t)=t号点的值+max(f(左下), f(右下))



```
int a[1001][1001],f[1001][1001];
```

a数组：a[x][y]存点(x,y)本身的数值

f数组：f[x][y]存从底层往上达到点(x,y)能得到的最大数字和

f[x][y]= a[x][y]+max{ f[x+1][y],f[x+1][y+1] }

数字金字塔 参考代码:

```
int f[1001][1001],a[1001][1001],n,x,y;
int main()
{    //输入数据
    scanf("%d",&n);
    for(x=1;x<=n;x++)
        for(y=1;y<=x;y++) scanf("%d",&a[x][y]);

    //初始化将f数组,全部置为0
    for(x=0;x<=1000;x++)
        for(y=0;y<=1000;y++) f[x][y]=0;

    //动规
    for(x=n;x>=1;x--)//从最底层开始向上一层一层讨论
        for(y=1;y<=x;y++)
            f[x][y]=a[x][y]+max(f[x+1][y],f[x+1][y+1]);

    //输出结果
    printf("%d\n",f[1][1]); //坐标为(1,1)的点位于最顶层
    return 0;
}
```

时间复杂度? $O(n^2)$

什么是“动态规划”？

20世纪50年代初美国数学家R.E.Bellman(理查德·贝尔曼)等人在研究**多阶段决策过程**(multistep decision process) 的优化问题时，提出了著名的**最优化原理**(principle of optimality)，把多阶段过程转化为一系列**单阶段问题**，**逐个求解**，创立了解决这类过程优化问题的新方法——**动态规划**(Dynamic Programming)。



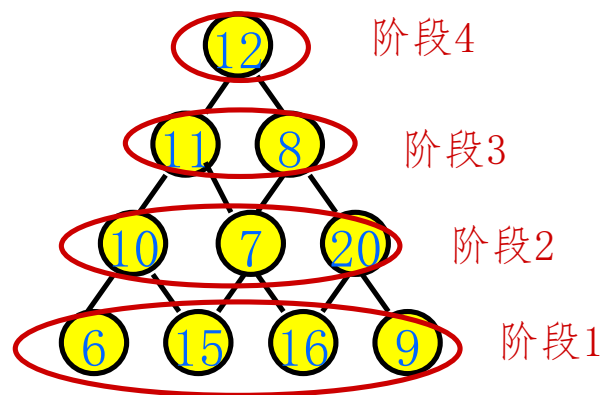
南加州大学教授
美国艺术与科学研究院研究员
美国国家工程院院士
美国国家科学院院士

“决策过程和控制系统理论方面做出突出贡献，特别是动态规划的发明和应用。”
还有图论最短路的“bellman-ford算法”

Richard Bellman 1920—1984

1957年出版了他的名著《Dynamic Programming》，这是该领域的第一本著作

数字金字塔的动规过程



解题总结:

1. 首先将问题分成了 n 个有次序的阶段（多阶段）；
2. 计算每个阶段中，从底层到每个点的最优值（逐个求解）。
3. 在计算底层到某个点的最优值时，是从前一个阶段的两个值中选取的最的一个（最优化原理）。
(第 i 阶段的点的最优值是从第 $i-1$ 阶段的点得到的, 与 $i+1, i+2 \dots$ 阶段无关)

动态规划的特点:

把求最底层到顶点的最优值这个大问题(主问题)分解成了: 求最底层到达每个点的最优值。

把一个大的问题分解成了若干个相似的小问题(也称为子问题)。按阶段逐个求解子问题的最优解, 最终得到主问题的最优解。

动态规划的优势

动态规划比穷举具有较少的计算次数

从数塔问题可以看出，层数为 k 时，

穷举算法求路径的条数 2^k-1

动态规划计算的次数为： $\frac{k(k+1)}{2}$

该题 k 最大为1000

模型2：最大连续和

例1：最大连续和 NK0J1043

有一条很长的面包，该面包被分成了 n 段 ($1 \leq n \leq 100,000$)，每段的味道可能不同。有的味道何老板很喜欢，有的味道何老板很讨厌，于是，何老板事先给每段面包的味道做了美味值打分。

美味值越大，表示何老板越喜欢。

现在何老板要切下连续一段面包，要求这些面包的美味值总和尽可能大。请你求出这个最大的美味和。

例如有一条长度为6的面包，每段的美味值分别是

{ -2, 11, -4, 13, -5, -2 }，

其美味值总和最大的一段为红色数字所示

{ -2, 11, -4, 13, -5, -2 }，

最大和为20。

例1：最大连续子序列(子串) NK0J1043

我们可以把问题抽象为下列数学模型：

给定K个整数的序列 $\{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$ ，求其中一段任意长度的连续序列，要求该序列的数字之和最大。

解法一，暴力枚举：

依次讨论从第i个数开始，能得到的最大连续和：

```
for(i=1; i<=n; i++)  
{  
    Sum=a[i];  
    for(j=i+1; j<=n; j++)  
    {  
        Sum=Sum+a[j];  
        if(Sum>ans) ans=Sum;  
    }  
}  
cout<<Sum;
```

时间复杂度 $O(n^2)$

$n \leq 100,000$ 会严重超时

例1：最大连续子序列(子串) NK0J1043

我们可以把问题抽象为下列数学模型：

给定K个整数的序列 $\{ A_1, A_2, \dots, A_n \}$ ，求其中一段任意长度的连续序列，要求该序列的数字之和最大。

$\{ -2, 11, -4, 13, -5, -2 \}$,

方法二，动态规划：

事先把这n个整数依次存到a数组中

确定要求解的**状态**： $f[i]$ 表示以第i个数字作为开头(包含 $a[i]$)的连续序列的最大和

按**阶段**讨论问题：从右到左依次讨论每个数字

做出最佳**决策**： 如果 $f[i+1] \leq 0$ ，那么 $f[i] = a[i]$ ；
如果 $f[i+1] > 0$ ，那么 $f[i] = f[i+1] + a[i]$ ；

最后得出**方程**： $f[i] = \begin{cases} f[i+1] + a[i]; & (f[i+1] > 0) \\ a[i]; & (f[i+1] \leq 0) \end{cases}$

边界条件： $1 \leq i \leq n$

例1：最大连续子序列(子串) 参考代码

$$\text{方程: } f[i] = \begin{cases} f[i+1] + a[i]; & (f[i+1] > 0) \\ a[i]; & (f[i+1] \leq 0) \end{cases}$$

```
f[n]=a[n]; //DP初始化
for(i=n-1; i>=1; i--) //依次讨论n个阶段
    if(f[i+1]>0) f[i]=a[i]+f[i+1];
    else f[i]=a[i];
```

时间复杂度 $O(n)$

相似题目：最佳游览(NK0J 1049)

例1：最大连续子序列(子串) NK0J1043

你也可以换个方向讨论：

按阶段讨论问题：从左到右依次讨论每个数字

确定要求解的状态：f[i]表示以第i个数字作为结尾的连续序列的最大和

做出最佳决策： 如果 $f[i-1] \leq 0$ ，那么 $f[i] = a[i]$ ；
如果 $f[i-1] > 0$ ，那么 $f[i] = f[i-1] + a[i]$ ；

最后得出方程： $f[i] = \begin{cases} f[i-1] + a[i]; & (f[i-1] > 0) \\ a[i]; & (f[i-1] \leq 0) \end{cases}$

边界条件： $1 \leq i \leq n$

模型3：最长上升子序列

例2：最长上升子序列

有N个整数构成的序列,请找出其中长度最长的上升子序列. 例如有N=8的序列 3, 18, 7, 14, 10, 55, 12, 23

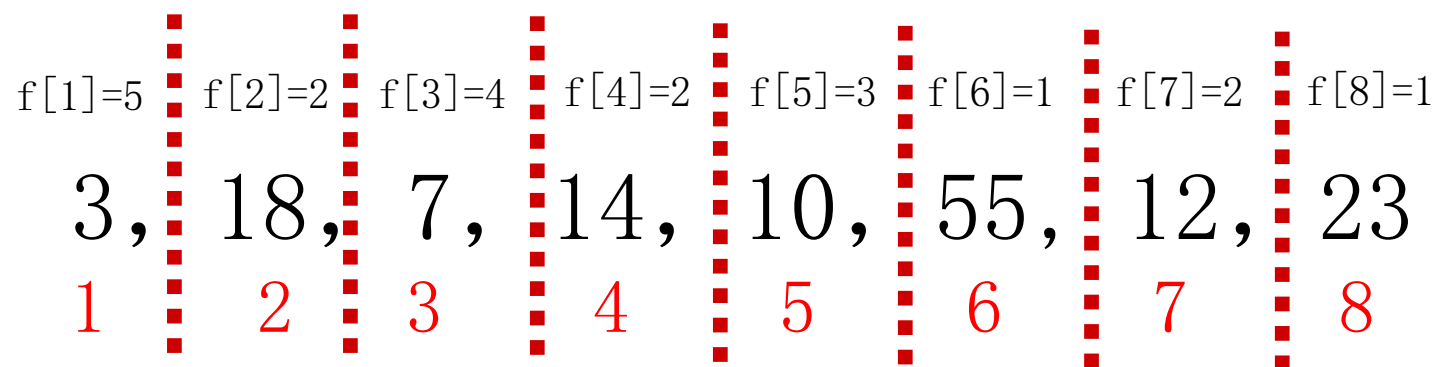
其上升子序列有:

18, 55

3, 18, 23

3, 7, 10, 12, 23

.....



要讨论的**状态**: $f[i]$ 表示从第*i*个数开始能够得到的最长上升序列的长度

按**阶段**讨论问题: 从右到左依次讨论每个数字

最佳**决策**: 第*i*个数与它右侧大于*i*的数中, $f[]$ 值最大那一个组合成上升序列

动规**方程**: $f[i]=1+\max\{f[j]\}$ **边界条件**: $i < j \leq n$, 且 $a[i] < a[j]$

例2：最长上升子序列 参考代码

$$f[i] = 1 + \max(f[j]);$$
$$i < j \leq n, \text{ 且 } a[i] < a[j]$$

```
for (i=1; i<=n; i++) f[i]=1;    //初始化DP

for (i=n; i>=1; i--)           //依次讨论每个阶段
    for (k=i+1; k<=n; k++)
        if (a[i]<a[k]) && (f[i]<1+f[k]) f[i]=1+f[k];
```

典型例题：拦截导弹 (NKOJ 1004)

合唱队形 (NKOJ 1042)

模型4：分组

例3：最小乘车费用 nkoj1001

Description

某条街上每一公里就有一汽车站，乘车费用如下表：

公里 1 ---2---- 3--- 4-----5--- 6 --- 7--- 8 --- 9-----10

费用 12-- 21-- 31-- 40-- 49-- 58-- 69-- 79-- 90-- 101

而在一辆车上一次最多只能坐10站。某人想行驶n公里，假设他可以任意次换车，请你帮他找到一种乘车方案使费用最小。 编一程序，算出所需最小费用；

Input

第一行为10个不超过100的整数，依次表示行驶1~10公里的费用，相邻两数间用空格隔开；

第二行为某人想要行驶的公里数（1~100公里）。

Output

输出文件仅一行包含一个整数，表示该测试点的最小费用

Sample Input

12 21 31 40 49 58 69 79 90 101

15

Sample Output

147

动规分析:

公里	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
费用	12	21	35	40	49	58	69	79	90	101

1. 阶段: 按每公里划分阶段

2. 状态: $f[i]$ 表示行驶 i 公里所需最小费用

3. 决策: $f[1]=a[1]=12$

$$f[2] = \min \begin{cases} f[1] + f[1] = 24 \\ a[2] = 21 \end{cases} = 21$$

$$f[3] = \min \begin{cases} f[1] + f[2] = 33 \\ a[3] = 35 \end{cases} = 33$$

$$f[4] = \min \begin{cases} f[1] + f[3] = 45 \\ f[2] + f[2] = 42 \\ a[4] = 40 \end{cases} = 40$$

$$f[5] = \min \begin{cases} f[1] + f[4] = 52 \\ f[2] + f[3] = 54 \\ a[5] = 49 \end{cases} = 49$$

$$f[6] = \min \begin{cases} f[1] + f[5] = 61 \\ f[2] + f[4] = 61 \\ f[3] + f[3] = 70 \\ a[6] = 58 \end{cases} = 58$$

$$f[i] = \min \begin{cases} f[1] + f[i-1] \\ f[2] + f[i-2] \\ f[3] + f[i-3] \\ \dots\dots\dots \\ f[i/2] + f[i-i/2] \\ a[i] \quad i \leq 10 \end{cases}$$

动规方程:

$$f[i] = \min \{ a[i], f[j] + f[i-j] \}$$

边界: $1 \leq i \leq 10, \quad 1 \leq j \leq i/2$

$$f[i] = \min \{ f[j] + f[i-j] \}$$

边界: $i > 10, \quad 1 \leq j \leq i/2$

再谈什么是动态规划

将待求解的问题分解为若干个子问题（阶段），按顺序求解子问题，前一子问题的解，为后一子问题的求解提供了有用的信息。

在求解任一子问题时，列出各种可能的局部解，通过决策保留最优的局部解，丢弃其他局部解。依次解决各子问题，最后一个子问题就是初始问题的解。

由于动态规划解决的问题多数有重叠子问题这个特点，为减少重复的计算，对每一个子问题只解一次，将其不同阶段的不同状态保存在一个数组中。

动态规划的四大关键字：

1. 阶段：将问题按时间或空间划分成若干个**相互联系**的阶段，以便**按次序**求解每个阶段的最优解。（数塔问题中，是按层划分的阶段）

2. 状态：把大的问题分解成若干个**相似的子问题**，每个子问题称为一个状态。

数塔问题中，把“**求从底层到达顶点的最优值**”这个大问题的分解成“**求从底层到达每个点的最优值**”，每一个点的最优值，对应了一个子问题。

从底层到点 (x, y) 的最优值这就是状态，我们用数组 $f[x][y]$ 来记录这个状态的值。
每个阶段通常包含若干个状态点。

第 i 阶段的某个状态是由前面阶段的哪个状态转移而来，需要做出**决策**。

3. 决策：每个阶段的状态都是由前面阶段的状态以某种方式“转化”而来，这种转化往往需要在多种方案中做出**最优的选择**，我们称之为决策。

数塔问题中，从底层到 (x, y) 的最优值是从底层到 $(x+1, y)$ 和底层到 $(x+1, y+1)$ 的这两个值中，选择最大者转化得到的。

4. 方程：当确定好解决问题的**阶段**、**状态**和**决策**后，将相邻两个阶段状态转移的规律数学化的表示出来，称为**状态转移方程**。

比如：数塔问题中的方程为： $f[x][y] = m[x][y] + \max(f[x+1][y], f[x+1][y+1])$


当前阶段的一个状态


决策

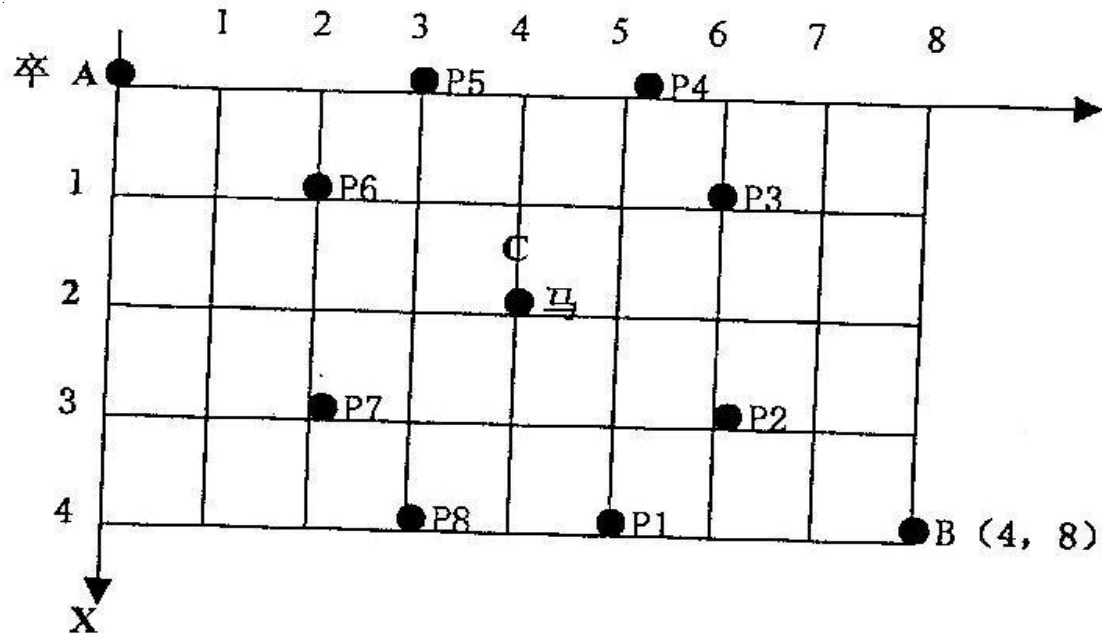
 
前一个阶段的状态

边界条件：给出的状态转移方程是一个递推式，需要一个递推的开始和终止的边界条件。

例4: 马拦过河卒 (NOIP2002 NK0J1050)

如图, A点有一个卒, 需要走到B点。卒行走规则: 可以**向下**、或者**向右**。同时在棋盘上有一个对方的马 (如上图的C点), 该马所在的点和所有跳跃一步可达的点称为马的控制点。例如上图C点上的马可以控制 9个点 (图中的P1, P2 ... P8和 C)。卒不能通过对方马的控制点。

棋盘用坐标表示, A点 (0, 0)、B点 (n,m) (n,m为不超过 17的整数), 同样马的位置坐标是题目给出的 (约定: $C \neq A$, 同时 $C \neq B$)。现在要求你计算出卒从 **A点能够到达 B点的路径的条数**。



申明数组 `int f[18][18];`

`f[x][y]`记录卒从起点走到坐标点(x,y)可行的路径总数。

初始化: `memset(f,0,sizeof(f));` `f[0][0]=1;`

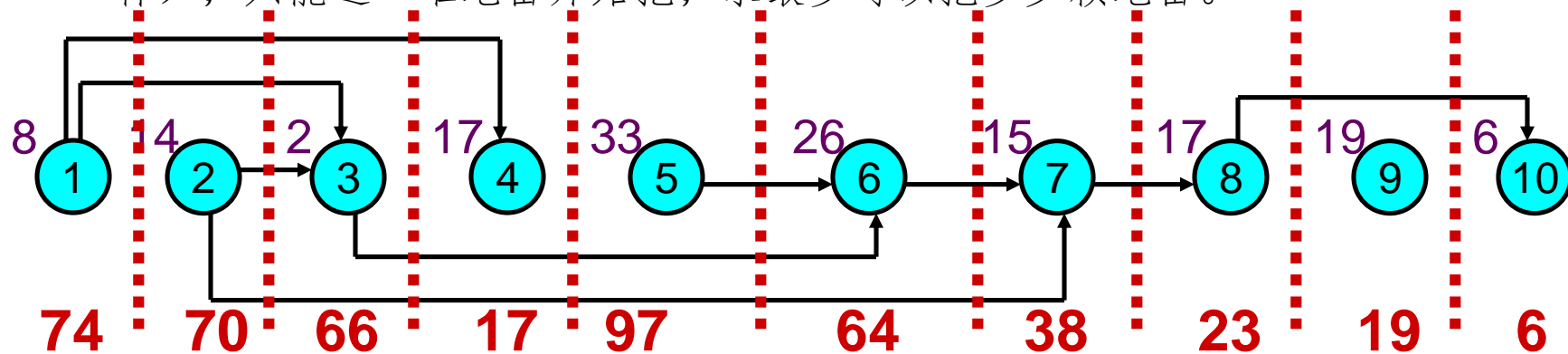
讨论: 若点(x,y)不可通过(被马控制), 那么`f[x][y]=0`。

注意边界, 讨论时, 坐标 (x,y), (x,y-1), (x-1,y) 不能越处棋盘的边界

若点(x,y)可通过, 那么`f[x][y]= f[x-1][y]+f[x][y-1]`

是动规? 不是! 缺乏动规三要素中的"决策", 只能算是"递推"

例5.挖地雷：公路上有n堆 (≤ 200) 地雷，从左往右编号1到n。假如n=10时，每堆地雷的情况如下图，图中的箭头表明了地雷间的联系，比如①有箭头指向③和④，表明从①开始，挖完后可继续挖③或④的地雷（存在多种方案时只能选其中一种），只能选一堆地雷开始挖，求最多可以挖多少颗地雷。



分析：

阶段：以每一堆雷划分一个阶段。

状态： $f[i]$ 表示从第i堆开始，最多能挖的地雷个数。

决策：当有多条路可走始，选择已挖出地雷最多的那一条。

```
int a[n],f[n];
```

```
f[x]=a[x]+max{ f[y] }  y为x直接连接到的下一堆地雷的编号
```

思考：上述解法是合理？

必须增加条件：箭头只能从编号小的指向编号大的！

动态规划需满足的基本原则：无后效性

第 i 个阶段的状态只能由前面阶段的状态转移得来，
与后面阶段无关。——状态无后效性

比如数塔问题中，状态 $f[x][y]$ ，中 x 代表了层数，也就是阶段。 $f[x][y]$ 是由 $f[x+1][y]$ 和 $f[x+1][y+1]$ 两个状态决策而来的，而这两个状态都是位于之前已经计算过第 $x+1$ 层。而第 $x-1, x-2, \dots, 1$ 这些层的情况是不会影响到已经算好的 $f[x][y]$ 。

换言之：一旦当前阶段的状态的值确定了以后，不会受后面阶段的状态的影响。

（若要受后面阶段的影响，则有后效性，不能用动规来解决）

动态规划适用的情况：

适用的情况能采用动态规划求解的问题的一般要具有3个性质：

(1) 最优化原理：如果问题的最优解所包含的子问题的解也是最优的，就称该问题具有最优子结构，即满足最优化原理。

(2) 无后效性：即某阶段状态一旦确定，就不受这个状态以后决策的影响。也就是说，某状态以后的过程不会影响以前的状态，只与当前状态有关。

(3) 有重叠子问题：即子问题之间是不独立的，一个子问题在下一阶段决策中可能被多次使用到。（该性质并不是动态规划适用的必要条件，但是如果没有这条性质，动态规划算法同其他算法相比就不具备优势）

今天你学到的动规模型有：

1.数塔

2最大连续和

3最长上升子序列

4分组

本课习题：

1796数字金字塔，

1043最大连续子序列

1001最小乘车费用

1042合唱队形

1049最佳游览