容斥原理

重庆南开信竞基础课程 Helang

重庆南开信竞基础课程

容斥原理

在计数时，必须注意无一重复，无一遗漏。为了使重叠部分不被重复计算，人们研究出一种新的计数方法，这种方法的基本思想是：先不考虑重叠的情况，把包含于某内容中的所有对象的数目先计算出来，然后再把计数时重复计算的数目排斥出去，使得计算的结果既无遗漏又无重复，这种计数的方法称为**容斥原理**。

——百度百科

例1

某班有9个学生有哥哥，7个学生有姐姐，既有哥哥又有姐姐的学生只有1个，那么全班有哥哥或有姐姐的学生共有多少个？

设集合

$A = \{a \mid a\text{有哥哥}\}$

$B = \{b \mid b\text{有姐姐}\}$

$|A| = 9$

$|B| = 7$

$|A \cap B| = 1$

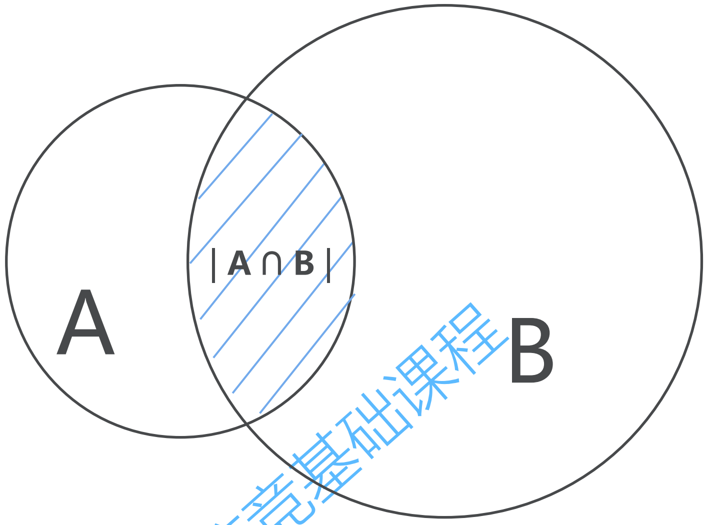
“∩”表示求两个集合的交集

“∪”表示求两个集合的并集

“| |”表示集合元素的个数

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 9 + 7 - 1 = 15$$

容斥原理



定理 $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

例2

一个学校只有三门课程：数学、物理、化学。
修这三门课的学生分别有170、130、120人；
同时修数学、物理两门课的学生45人；
同时修数学、化学的20人；
同时修物理、化学的22人。
同时修三门的3人。
问这学校共有多少学生？

解：设{A}— 修数学课的学生的集合
{B}— 修物理课的学生的集合
{C}— 修化学课的学生的集合

$|A| = 170$　　$|B| = 130$　　$|C| = 120$

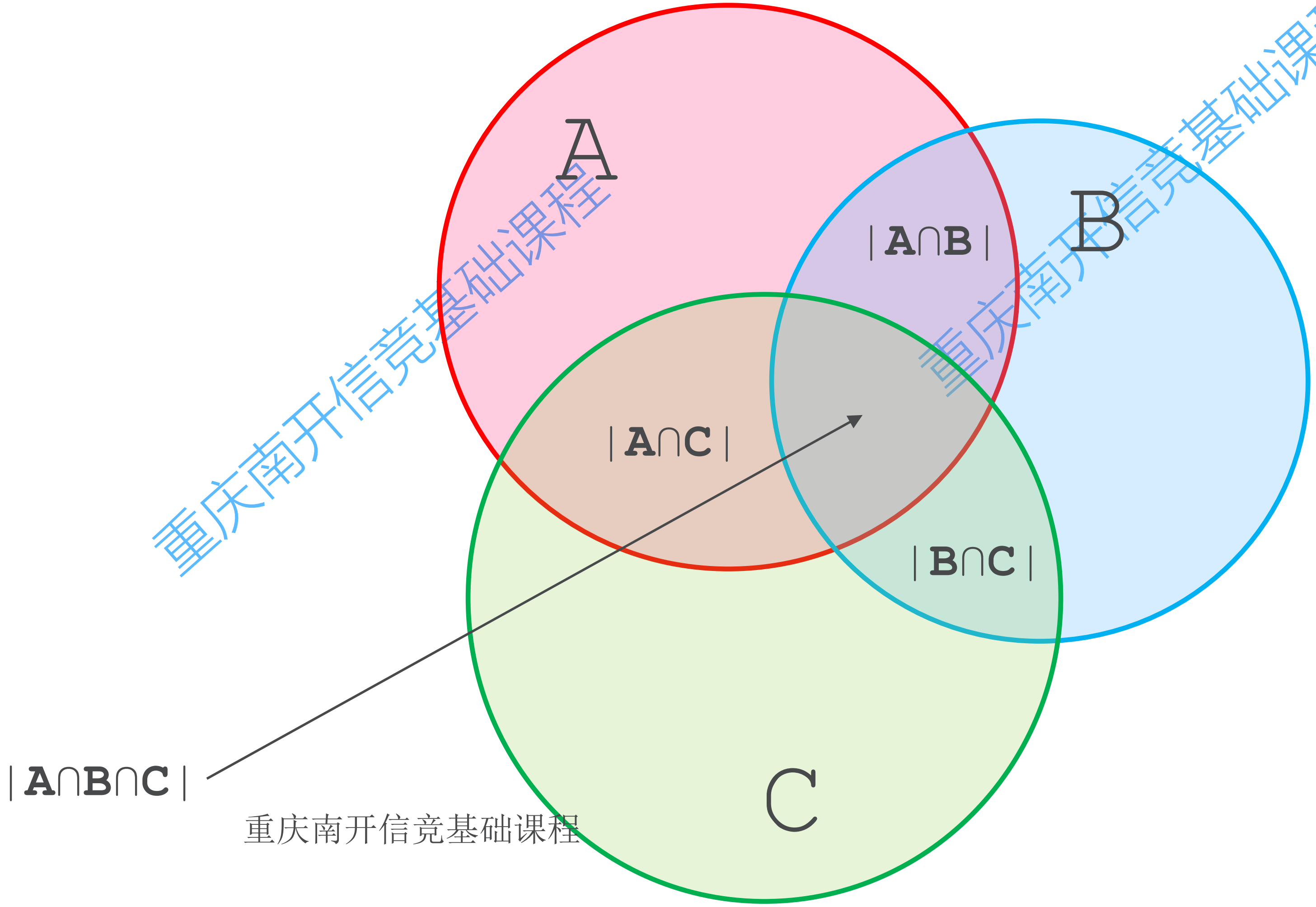
$|A \cap B| = 45$　　$|A \cap C| = 20$　　$|B \cap C| = 22$

$|A \cap B \cap C| = 3$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 336$$

三个集合的元素关系

$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$

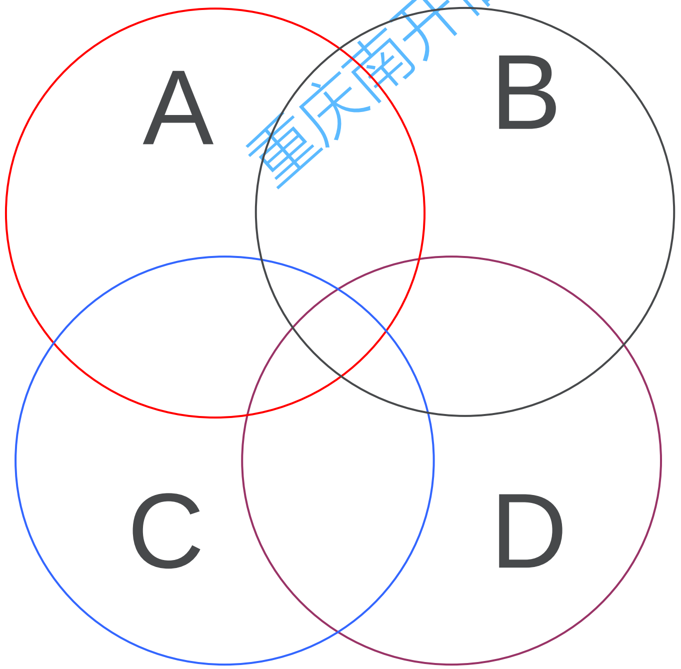


四个集合的元素关系

$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C\cup D| = {} & |A|+|B|+|C|+|D| && //C_4^1\\
& -|A\cap B|-|A\cap C|-|A\cap D|-|B\cap C|-|B\cap D|-|C\cap D| && //C_4^2\\
& +|A\cap B\cap C|+|A\cap B\cap D|+|B\cap C\cap D|+|A\cap C\cap D| && //C_4^3\\
& -|A\cap B\cap C\cap D| && //C_4^4
\end{aligned}
$$

规律是从一个集合，到两两相交，到三个相交，到四个相交，……

符号是交替改变的。



奇加偶减

规律

|AUBUCU……|

规律是从一个集合，到两两相交，到三个相交，到四个相交，…… **符号是交替改变的。**

例3 NKOJ4049

求从1到500的整数中能被3或5除尽的数的个数。

解：令{A}为从1到500的整数中被3除尽的数的集合，{B}为被5除尽的数的集合

$$|A|=\left\lfloor \frac{500}{3} \right\rfloor=166, |B|=\left\lfloor \frac{500}{5} \right\rfloor=100;$$

$$|A \cap B|=\left\lfloor \frac{500}{15} \right\rfloor=33$$

被3或5除尽的数的个数为 $|A \cup B|=|A|+|B|-|A \cap B|$

$$=166+100-33=233$$

例4 构造字符串

用a,b,c,d四个字母构成的长度为n的字符串，要求字符串中a,b,c至少出现一次，问总共有多少种满足条件的字符串？$n<=10^6$

解：令{A}、{B}、{C}分别为字符串中**不出现**a，b，c符号的集合。

由于n位字符串中每一位都可取a，b，c，d四种符号中的一个，故不允许出现a的n位字符串的个数应是3^n，同理，不允许出现b和c的n位字符串个数也是3^n种。

即$|A|=|B|=|C|=3^n$

同理可得$|A\cap B|=|A\cap C|=|B\cap C|=2^n$

同理可得$|A\cap B\cap C|=1$

设{S}为全集，即a,b,c,d组成的长度为n所有可能的字符串集合，$|S|=4^n$

则a，b，c至少出现一次的n位符号串集合即为：$|S|-|A\cup B\cup C|$

$$|S|-|A\cup B\cup C|$$
$$=|S|-(|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|)$$
$$=4^n-(3*3^n-3*2^n+1)$$

例5 NKOJ4050

求a,b,c,d,e,f六个字母的全排列，中不允许出现ace和df模样的排列数。

解：设{S}为全集，{A}为ace作为一个元素出现的排列集，{B}为df作为一个元素出现的排列集，$A \cap B$ 为同时出现ace、df的排列数。

|A|=4!　　|B|=5!　　|A∩B|=3!

出现ace或df的排列数为：|A∪B|=|A|+|B|-|A∩B|

Ans = |S|-|A∪B|= 6!-(5!+4!)+3!=582

例6：放石子 nkoj3495

在一个m*n的矩形网格里放k个相同的石子，问有多少种方法？每个格子最多放一个石子，所有石子都要放完，并且第一行、最后一行、第一列、最后一列都得有石子。2<=n，m<=20，k<=500

令{A}表示第1行不放石子的方案集合 |A|= $C_{(m-1)*n}^{k}$

令{B}表示第m行不放石子的方案集合 |B|= $C_{(m-1)*n}^{k}$

令{C}表示第1列不放石子的方案集合 |C|= $C_{m*(n-1)}^{k}$

令{D}表示第n列不放石子的方案集合 |D|= $C_{m*(n-1)}^{k}$

设全集为{S}，即|S|= C_{m*n}^{k} 答案为在S中而不在A、B、C、D中的所有方案

即为S-|AUBUCUD|

利用容斥原理，可知|AUBUCUD| =

|A| + |B| + |C| + |D| - |A∩B| - |B∩C| - |A∩C| - |A∩D| - |B∩D| - |C∩D| + |A∩B∩C| + |A∩B∩D| + |A∩C∩D| + |B∩C∩D| - |A∩B∩C∩D|

例7：找互质 nkoj4494

给一个整数n，请你在指定区间[a, b]中找出共有多少个数是与n互质的。

$1 <= a <= b <= 10^{15}$

$1 <= n <= 10^9$

采用前缀和思想：我们求出[1,b]中与n互质的数的数量Cnt1，
再求出[1,a-1]中与n互质的数的数量Cnt2
那么Cnt1-Cnt2就是所求答案。
现在的问题是，对于指定区间[1,x]，我们怎么求出与n互质的数的个数?
根据容斥原理：**与n互质的数= x - 与n不互质的数**

例7：找互质 nkoj4494

现在的问题是：对于制定区间[1,x]，求有多少个数与n不互质？

例如x = 12，n = 30的情况。根据唯一分解定理，任意与x不互质的数y，y中一定含有x的质因子。

30的质因数为2、3、5。

情况A：[1，12]中含有2的倍数的有：(2、4、6、8、10、12) = x/2 = 6个

情况B：[1，12]中含有3的倍数的有：(3、6、9、12) = x/3 = 4个

情况C：[1，12]中含有5的倍数的有：(5、10) = x/5 = 2个

[1,12]中总共有多少个数与30不互质呢？答案是A、B、C三个集合取并。即|A ∪ B ∪ C|

根据容斥原理：

|A ∪ B ∪ C|=|A| + |B| + |C| -|A ∩ B|-|A ∩ C|-|B ∩ C| + |A ∩ B ∩ C|

=x/2 + x/3 + x/5 - x/(2*3)- x/(2*5)- x/(3*5) + x/(2*3*5)

=12/2 + 12/3 + 12/5 - 12/(2*3) - 12/(2*5) - 12/(3*5) + 12/(2*3*5)

=9

例7: 建设城市

小奇正在玩一款名为《魔方王国》的游戏。在游戏中它需要建设n座不同的城市。

小奇有**m个相同的建设队**，它需要将这些建设队分配到每个城市中。每个城市**至少要分配1个建设队，至多分配k个建设队**。当然，每个城市分配的建设队数量必须是整数。

你需要求出有多少种不同的方案。两个方案被视为不同的，当且仅当存在至少一个城市分配到的建设队数量不同。

$n <= 10^9$, $m, k <= 10^7$

例7: 建设城市

游戏中需要建设n座不同的城市。有**m个相同的建设队**，需要将这些建设队分配到每个城市中。
每个城市**至少要分配1个建设队，至多分配k个建设队**。要求出有多少种不同的方案。

首先，不考虑每个城市最多k只队伍的限制。相当于m个小球分给n个盒子，每个盒子非空。根据隔板法，总的方案数C_{m-1}^{n-1}
这里先然包含有不合法的方案(有城市分配了超过k只队)，我们需要从中减除不合法的方案。考虑容斥。

第1步，计算至少有1个不合法城市的方案数：

$C_n^1 * C_{m-1*k-1}^{n-1}$

$Ans = C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 * C_{m-1*k-1}^{n-1}$

第2步，计算至少有2个不合法城市的方案数：

$C_n^2 * C_{m-2*k-1}^{n-1}$

$Ans = C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 * C_{m-1*k-1}^{n-1} + C_n^2 * C_{m-2*k-1}^{n-1}$

第3步，计算至少有3个不合法城市的方案数：

$C_n^3 * C_{m-3*k-1}^{n-1}$

$Ans = C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 * C_{m-1*k-1}^{n-1} + C_n^2 * C_{m-2*k-1}^{n-1} - C_n^3 * C_{m-3*k-1}^{n-1}$

……

$Ans = C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 * C_{m-1*k-1}^{n-1} + C_n^2 * C_{m-2*k-1}^{n-1} - C_n^3 * C_{m-3*k-1}^{n-1} + \cdots + (-1)^n C_n^n * C_{m-n*k-1}^{n-1}$

$$Ans = C_{m-1}^{n-1} - \sum_{i=1}^{n} (-1)^i * C_n^i * C_{m-i*k-1}^{n-1}$$

例9: 分特产 NKOJ 4488 Jsoi2011

JYY 有M种特产，第j种特产的数量为a[j]个。把这些特产分给N个同学，一共有多少种不同的分法？当然，JYY 不希望任何一个同学因为没有拿到特产而感到失落，所以每个同学都必须至少分得一个特产。

例如，JYY 带来了2 袋麻花和1 袋包子，分给A 和B 两位同学，那么共有4 种不同的

分配方法：

A：麻花，B：麻花、包子

A：麻花、麻花，B：包子

A：包子，B：麻花、麻花

A：麻花、包子，B：麻花

N，M 不超过1000，每一种特产的数量不超过1000

例8: 分特产 NKOJ 4488 Jsoi2011

此题求把M个特产的分配给n个人的方案数。我们先考虑只有1种特产，共m个，分给n个人的情况。
根据容斥原理：
每人都分到的方案数=至少0人没分到的方案数-至少1人没分到的方案数+至少2人没分到的方案数……

根据排列组合常用操作方式，我们可以倒过来考虑，有m个相同特产要分给n个不同同学，同学分到的可以为0个。
根据隔板法，上述操作方案数为**C(n+m-1,n-1)**

如果要求至少i个人没分到特产，怎么计算呢？
等价于从n个盒中选出i个，不放入球。 方案数为C(n,i)*C(n-i+m-1,n-i-1)
其中C(n,i)为n个中选i个出来的方案数。

对每一种特产单独考虑，对于j号特产，方案数为C(n-i+a[j]-1,n-i-1)
根据乘法原理，总方案数为

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \prod_{j=1}^{m} C_{A_j+n-i-1}^{n-i-1}$$

例8: 分特产 NKOJ 4488 Jsoi2011

```
Sum=0;
for (int i=0; i<=n; i++)
{
        if (i%2) k=-1; else k=1;        //容斥原理奇加偶减
        ans=1;
        for (j=1; j<=m; j++) ans=ans*c[n+a[j]-i-1][n-i-1]%p;
        Sum=(Sum + k*c[n][i]%p * ans%p)%p;
}
```

作业

NKOJ3495，2040，1502

思维：NKOJ 4487 4046 7700

容斥原理扩展：Min-Max容斥