

二分答案

第2节

重庆南开信竞基础课程



例题3：洗衣服 NK0J3145

何老板洗完了 n 件衣服，其中第 i 件带了 A_i 单位的水。每一分钟，衣服里的水都会**自然蒸发一个单位**。当衣服里的水为0，则表示衣服干了。

何老板有一个烘干机可以烘干衣服，一次只能处理一件衣服。在烘干机上的衣服每**分钟减少 k 单位的水**（包括了自然蒸发）。

何老板想**使所有衣服变干**的时间最少。每一件衣服中的水都要为0。请你帮他计算出所需最小时间。

$$1 \leq N \leq 100,000$$

$$1 \leq A_i, k \leq 10000$$



洗衣服，问题分析：

假设花 x 时间内可以使所有衣服都变干，则必然满足下列两个条件：

1. 对于第 i 件衣服，设它占用烘干机的时间为 $y[i]$ ，
则必然存在： $y[i] \leq x$ ，并且 $a[i] \leq y[i] * k + x - y[i]$

其中 $a[i]$ 表示 i 号衣服初始含水量， k 表示机器单位时间烘干的水量

$y[i] * k$ 表示通过机器烘干的水量

$x - y[i]$ 表示自然蒸发的水量

2. 对于所有衣服占中机器时间 $y[i]$ 之总和，必须不大于 x 。

在符合上述两个条件的前提下，不断的缩小 x 的值，直到找到一个最小的 x ，则必是问题的解。二分答案 x 即可



【参考代码】 假设花 x 时间内可以使所有衣服都变干

```
for (i=1; i<=n; i++) MaxTime=max (MaxTime, a[i]); //计算 $x$ 的上限
```

```
Lt=0; Rt=MaxTime;
while (Lt<=Rt)
{
    x=(Lt+Rt)/2;
    if (Check(x)) {Ans=x; Rt=x-1;}
    else Lt=x+1;
}
printf ("%d\n", Ans);
```

```
bool Check(int x)
{
    tot=0;
    for (i=1; i<=n; i++)
    {
        tot=tot+ (a[i]-x)/(k-1);
        if ((a[i]-x)%(k-1)!=0) tot++;
    }
    if (tot>x) return false; else return true;
}
```

1. 对于第 i 件衣服，设它占用烘干机的时间为 $y[i]$ ，
则必然存在： $y[i] \leq x$ ，并且 $a[i] \leq y[i] * k + x - y[i]$
 $y[i] \geq (a[i] - x) / (k - 1)$;
2. 对于所有的 $y[i]$ 之和，必须不大于 x 。



例题4：贷款利率

- 何老板向银行借了 a 元钱，如果每个月还 c 元， b 月可还清。问月利率是多少？

(月利率 ≥ 0 ，但不超过100%)

($0 < a < 10^9$, $0 < b < 10^5$, $0 < c < a$)

- 输入数据：一行：三个整数 a, b, c
- 输出数据：一行：利率 $f\%$ (精确到小数点后3位)

设月利率为 x ，则第一个月还钱后还需要还 $a(1+x) - c$ 元。

重复 b 个月后可以得到一个方程，解出 x 即可。

如 $a=2000, b=4, c=510$ 时，

方程为：

$$(((2000(1+x) - 510)(1+x) - 510)(1+x) - 510)(1+x) - 510 = 0$$



- 换一个思路，用猜的方法。已知 x 在范围 $[0, 100]$ 内，如果每次猜一个值，都能知道猜大了或者猜小了，问题便可解决了。
- 如何知道猜大了或猜小了，还是猜对了？
- 把 x 代入方程，看结果：
 - 如果等于0，则猜中；
 - 如果小于0，则 x 太小；
 - 如果大于0，则 x 太大。
- 需要注意的是，这里的 x 是实数，而实数区间是可以无限二分的，这样一来，岂不是无法终止了？理论的确是如此。但是，因为题目要求保留三位小数，所以如果确定 x 的范围的前四位小数均相同，则 x 就可以确定下来了。



【二分答案，代码模板】

```
float Lt=答案可能的下限;  
float Rt=答案可能的上限;  
while (fabs (Rt-Lt) >= 0.0001)    //实数的讨论, fabs对实数求绝对值  
{  
    Mid= (Lt+Rt) /2;  
    if (Check( Mid ) >= 0) {ans=Mid; Rt=Mid;}    //自定义函数check()用于判定当前答案是否可行  
    else Lt=Mid;  
}
```

注意, Lt 和 Rt 是实数, 实数是很难有 $Lt == Rt$ 的情况, 所以, 我们认为只要 $f(Lt - Rt)$ 小于了某个规定的精度, 就认为它们相等。



结论：

一般而言，要让**最大值尽量小**，或者要让**最小值尽量大**，都可用二分答案解决！

二分答案，就是将最优解转换为判定性问题。先设定一个猜测范围，然后再这个范围内，通过二分查找一个答案，判定该答案是否符合要求，直到找到一个最小值。

