组合数学入门

重庆南开信竞基础课程　Helang

重庆南开信竞基础课程

组合数学入门

本课关键字：

1.加法原理、乘法原理
2.排列、组合
3.插板法
4.二项式定理、二项式反演
5.斯特林数
6.卢卡斯定理
7.可重复组合
8.范德蒙恒等式
9.错位排列

1. 排列组合的基础知识

预备知识：加法原理

何老板在统计通过一道题目的算法，其中有$A[1]$种搜索算法，$A[2]$种DP算法，$A[3]$种暴力算法，$A[4]$种数学算法……$A[n]$种贪心算法。

通过这题总的算法数 $= A[1] + A[2] + \cdots + A[n]$

从A地出发去B地，只有长途客车和火车两种方式。每天有10班长途客车，5班火车。

那么，每天从A出发去B的方案数 $= 10+5 = 15$

预备知识：乘法原理

从A地出发去B地，可以骑马、骑自行车、开车、坐公交车。
从B地出发去C地，可以坐高铁、坐飞机、坐轮船

从A到C的总方法数为 $= 4 * 3 = 12$

乘法原理：
完成一件事情需要n个步骤，$a[i]$代表完成第i个步骤的方法数。
那么完成这件事总共有$a[1] * a[2] * \cdots * a[n]$种不同的方法。

排列Arrangement

从1到9这九个数字中选三个数字出来组成一个三位数(其中不能有重复的数字)，问有多少种方案?

解： 方案数$=9*8*7=504$ **排列问题!**

组合Combination

从学号为1到9这九同学中选三个同学出来打扫教室清洁，问有多少种方案?

解： 方案数$= (9*8*7)/(3*2*1) = 84$ **组合问题!**

排列问题

排列的定义：

从n个不同的元素中，取m个不重复的元素，按次序排列，称为从n个中取m个的排列。

方案数用A_n^m来表示！ （代码中写作$A[n][m]$）

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

例如：从n个**不同**的球中，取出m个，放入m个**不同**的盒子里，每盒1个。
方案总数为$A[n][m]$。

排列问题

问题1 何老板开餐厅：

何老板开了一家餐厅，提供8种不同的套餐。南开信竞队有3名同学每天中午都去该餐厅吃饭。

他们要求何老板安排套餐。每天三个人分到的套餐必须都不一样。并且如果出现了和之前某一天相同的分配方案，他们就会立即离开餐厅，不再光顾。

何老板想多赚钱，问，最多能让同学们连续吃多少天午餐？

答案为：$A_8^3 = 336$

排列问题

问题2 排队：

有6个同学，编号1到6。让这6个同学站成一队，要求5号一定要站在2号的前面，问总共有多少种不同的排队方案？

比如 3 5 1 6 2 4就是一种合法的方案

方法：

首先，不考虑5和2的位置限制，直接对6个同学进行全排列，有A_6^6种，即720种方案。

然后，考虑在这720种方案中，2和5的先后位置一定各占一半。即有一半的方案是2在5前，有一半是2在5后。

最后，答案为720/2=360种方案

排列问题

问题3 体操队形a：

体操队7个同学站成一排，组成表演队形。其中4个男生，3个女生。教练要求，3个女生必须站在一起。问，有多少种不同的队形？

3个女生必须站在一起，我们可以考虑把她们看成1个人，加上4名男生，总共当作有5个同学。

5名同学的排列方案为A_5^5

其中代表女生的那个同学本身内部也有多种排列方案，方案数为A_3^3

根据乘法原理，总的方案数为$A_5^5 * A_3^3 = 720$

排列问题

问题4 体操队形b：

体操队10个同学站成一排，组成表演队形。其中7个男生，3个女生。教练要求，女生必须站在男生之间，且女生互不相邻。问，有多少种不同的队形?

从限制条件来看，男生限制少，女生限制多。我们考虑先排男生。

男生：7名男生的排列方案为A_7^7

女生：女生不能相邻。我们考虑把女生安插在男生之间。
7名男生之间有6个空档，选择其中3个空档来安插女生。共A_6^3 种方案。

根据乘法原理，总的方案数为$A_7^7 * A_6^3 = 604800$

排列问题

问题5 站圈：

有6个同学编号1到6，要站成一圈，问有多少种不同方案？

一种站成一圈的排法，将6号同学和两边的人分开，可以得到1到5号的一个排列。

所以站成一圈，有$A_5^5=120$种方案。

排列数的性质

$$A_n^m = A_n^{m-1} * (n-m+1)$$

$$A_n^m = A_{n-1}^{m-1} * n$$

```
//打表法,计算A[i][j] mod k
long long A[1000][1000];
for(int i=1;i<=n;i++)A[i][0]=1;

for(int i=1;i<=n;i++)
   for(int j=1;j<=i;j++)
      A[i][j] = (A[i][j-1]*(i-j+1)) % k;
```

```
//打表法,计算A[i][j] mod k
long long A[1000][1000];
for(int i=1;i<=n;i++)A[i][0]=1;

for(int i=1;i<=n;i++)
   for(int j=1;j<=i;j++)
      A[i][j] = (A[i-1][j-1]*i) % k;
```

组合问题

组合的定义：

从n个不同的元素中，取m个不重复元素，组成一个集合，称为从n个中取m个的组合。

方案数用C_n^m来表示！（代码中写作$C[n][m]$）

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!*(m!)}$$

例如：从n个**不同**的球中，取出m个，放入m个**相同**的盒子里，每盒1个。方案总数为C[n][m]。

组合问题

问题1 打比赛：

何老板安排了一场信息学比赛，共有7道题，已知一个同学AC了其中4道题，我们想知道该同学通过了哪些题，问可能的方案有多少种？

方案数为：$C_7^4 = 35$

组合问题

问题2 排小球：

何老板有4个红色小球，3个白色小球，2个蓝色小球。要将这9个小球排成一排，问有多少种不同的方案？

1.安排红球：一排有9个空位，任选4个安排红球 方案数为：$C_9^4 = 126$

2.安排白球：现在剩5个空位，任选3个安排红球 方案数为：$C_5^3 = 10$

2.安排蓝球：现在剩2个空位，直接安排蓝球即可 方案数为：$C_2^2 = 1$

总方案数=126*10*1=1260

组合问题

问题3 人选：

a. 一班有10名同学，二班有8名同学。要在每个班级选出2名同学参加信息学竞赛，问有多少种选法？

根据乘法原理，方案数为：$C_{10}^2 * C_8^2 = 1260$

b. 某班有10名同学，其中有4名女生。要选出3名同学参加信息学竞赛，其中至少有一个女生，问有多少种选法？

根据乘法和加法原理，方案数为：

$C_4^1 * C_6^2 + C_4^2 * C_6^1 + C_4^3 * C_6^0 = 100$

组合问题

问题4 站圈：

有6个同学编号1到6，要选4人站成一圈，问有多少种不同方案？

在6人中任选4人出来的方案数为$C_6^4 = 15$

4人站圈的案数为$A_3^3 = 6$

总的方案数为$15 * 6 = 90$

组合问题

问题5 分糖果a：

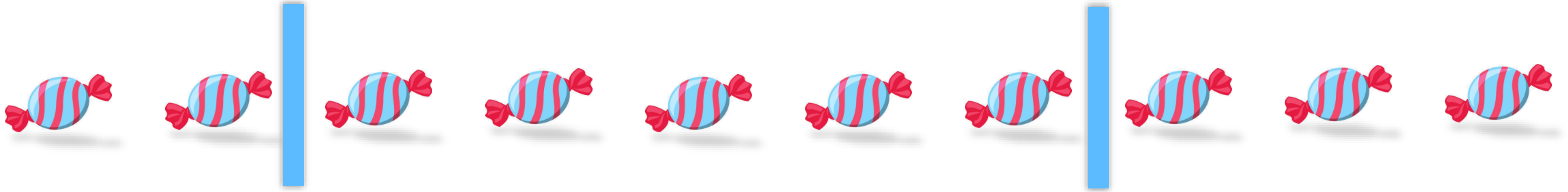
何老板有10颗相同的糖果，他要分给信竞队的3名同学，要求每个同学都至少分到一颗糖，问有多少种不同的分配方案？

将10颗糖果排成一排，糖果间有9个空隙。

我们在9个空隙中插入2块隔板就能把糖果分成三份。

总的方案数为$C_9^2 = 36$

上述方法称为“**隔板法**”。



组合问题

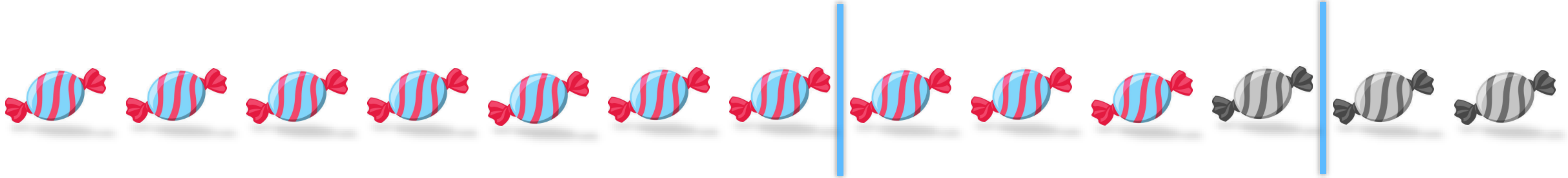
问题5 分糖果b：

何老板有10颗相同的糖果，他要分给信竞队的3名同学，可以有同学分0颗，问有多少种不同的分配方案？

多找来3颗糖，每人先分1颗糖，然后再考虑剩余10颗糖果的分法。

问题转换：为将13颗糖分配给3个同学，每人至少分一颗的方案数。

总的方案数为$C_{12}^{2} = 66$



组合问题

问题6 买糖果：

学校小卖部出售5种不同口味的糖果。何老板要买8颗糖，它希望每种口味的糖果都至少有一颗，问总共有多少种不同的购买方案？

此问题等价于有8个空格子，每个格子能放入一颗糖。现在要把格子要分成5份，每份放入一种糖果。

我们考虑把这8个格子摆成一排，格子间有7个空档。

我们在这7个空档中安插4块隔板，就能把糖果分成5份。

总的方案数为 $C_7^4 = 35$

组合数的性质

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$$

组合数的计算

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$$

```
//打表法,计算C[i][j] mod k
long long C[1000][1000];
for(int i=1;i<=n;i++)C[i][0]=1;

for(int i=1;i<=n;i++)
   for(int j=1;j<=i;j++)
      C[i][j] = (C[i-1][j]+C[i-1][j-1]) % k;
```

大组合数取模请参看后面的“Lucas定理”。

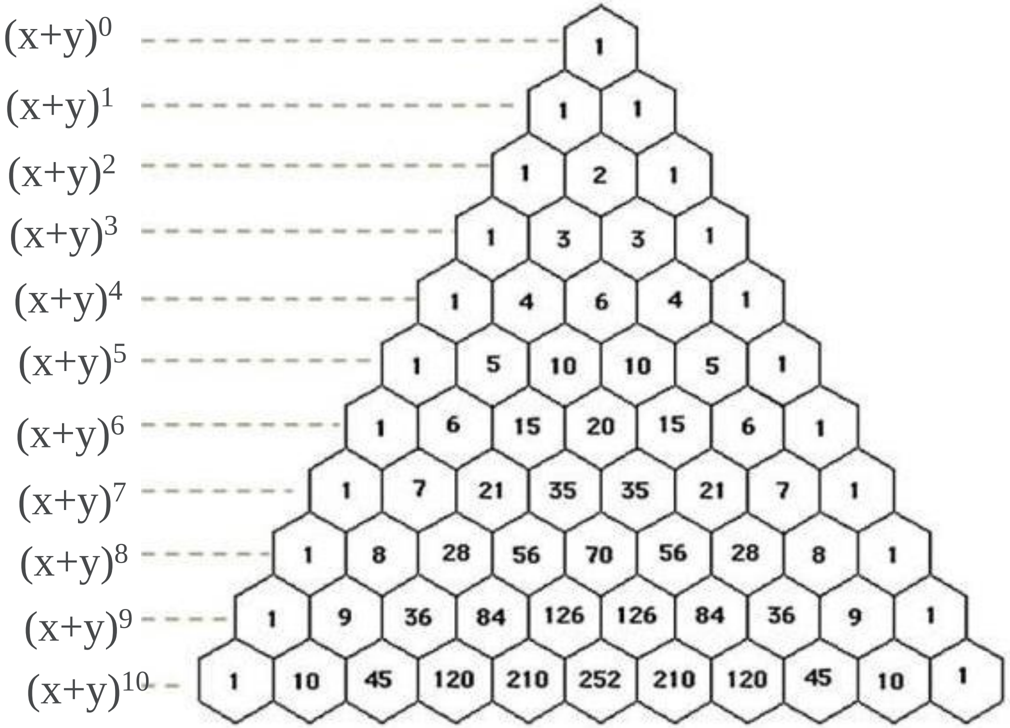
2. 二项式定理

二项式定理(牛顿二项式定理)

n是一个正整数。于是，对所有的x和y, 求 $(x+y)^n$ 展开后，每一项的系数

$$(x+y)^n = C_n^0*x^n*y^0+C_n^1*x^{n-1}*y^1+C_n^2*x^{n-2}*y^2+\ldots+C_n^{n-1}*x^1*y^{n-1}+C_n^n*x^0*y^n$$

即: $$(x+y)^n = \sum_{k=0..n} C_n^k * x^{n-k} * y^k$$



习题：NKOJ1327

3. 斯特林数

Stirling Numbers

第二类斯特林数

问题：何老板请客1 NKOJ4440

何老板在NK食堂订了m桌酒席，宴请信竞队的n名队员。由你来安排队员们就座。要求每桌至少坐1人。问总共有多少种安排方案?

第二类斯特林数$S_2[n][m]$表示把n个元素划分成m个非空集合的方案数。

$$S_2[n][m] = S_2[n-1][m-1] + m * S_2[n-1][m]$$

将第n个同学单独划入一个新的桌子中，即第n个同学独占一个桌子。前n-1个同学划分到m-1个桌子中。

前n-1个同学被分成了m个桌子。第n个同学加入到已经存在的m个桌子中，共m种选择。

第二类斯特林数 代码模板

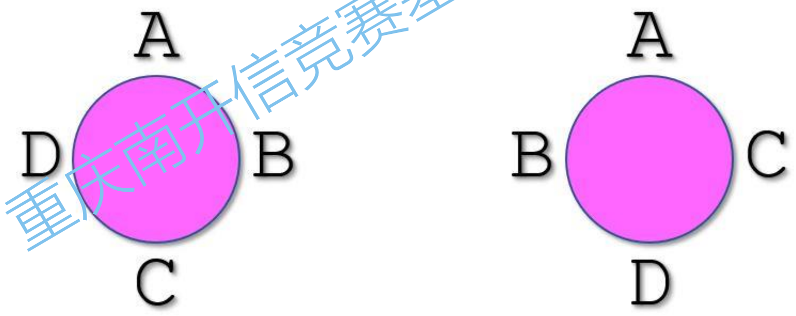
```
long long s2[maxn][maxn];    //存放要求的Stirling数
const long long mod=1e9+7;   //取模

void getStirling()
{
    for(i=1;i<=n;i++)s2[i][1]=1;
    for(int i=1;i<=n;i++)
        for(int j=2;j<=i&&j<=m;j++)
           s2[i][j]=(s2[i-1][j-1]+j*s2[i-1][j])%mod;
}
```

第一类斯特林数

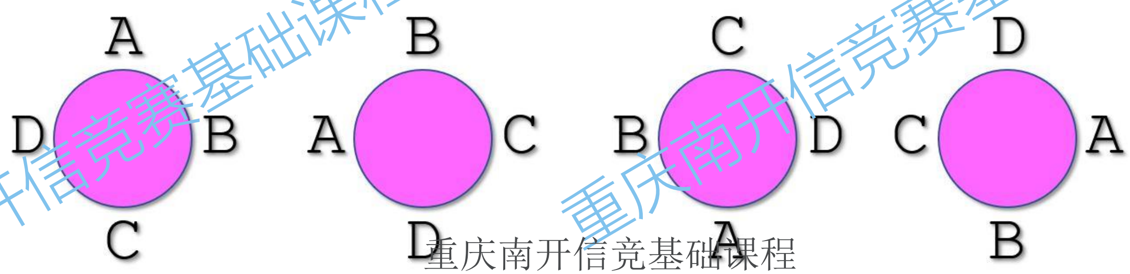
问题：何老板请客2 NKOJ4441

何老板在NK食堂订了m桌酒席，宴请信竞队的n名队员。酒桌为圆形。由你来安排队员们就座。要求每桌至少坐1人，最多坐n人。问总共有多少种不同的安排方案?

注意，同一桌队员就座的位置会影响方案数，比如A,B,C,D同桌，下面两种就座方案是不同的:



下面4种方案，我们认为它们是同一种方案:



第一类斯特林数

第一类斯特林数$S_1[n][m]$表示把n个元素划分成m个非空**循环排列**集合的方案数。

$$S_1[n][m] = S_1[n-1][m-1] + (n-1) * S_1[n-1][m]$$

将第n个同学单独划入一个新的桌子中，即第n个同学独占一个桌子。前n-1个同学划分到m-1个桌子中。

前n-1个同学被分成了m个桌子。把第n个同学安置到已经存在的n-1个同学种任意一个的左边即可。共n-1种方案。

第一类斯特林数 代码模板

```
long long s1[maxn][maxn];      //存放要求的Stirling数
const long long mod=1e9+7;     //取模

void getStirling()
{
        s1[0][0]=s1[1][1]=1;

        for(i=1;i<=n;i++)
          for(j=1;j<=m&&j<=i;j++)
            s1[i][j]=(s1[i-1][j-1]+(i-1)*s1[i-1][j])%mod;
}
```

BELL数

问题：何老板请客3

何老板在NK宴请信竞队的n名队员。要求每桌至少坐1人。问总共有多少种安排方案(注意没有规定有多少张桌子)?

BELL数B[n]表示把n个元素划分成若干个非空集合的方案数。

$$B[n] = S_2[n][1]+S_2[n][2]+S_2[n][3]+ \dots +S_2[n][N]$$

4. Lucas定理

组合数取模 Lucas定理

计算 $C_n^m \bmod p$　　　　0<=m<=n<=100000，p是质数

Lucas定理:

n、m是非负整数，p是**质数**，求C(n,m) mod p

$$C_n^m \% P = C_{n\%P}^{m\%P} * C_{n/p}^{m/p} \% P$$

例2.求C(22, 10) MOD 3

```
C(22,10)%3 = C(22%3,10%3)%3 * C(22/3,10/3)%3
           = C(1,1)%3 * c(7,3)%3
           = C(1,1)*C(1,0)*C(2,1)%3
           = 2
```

组合数取模 Lucas定理

Lucas定理： n、m是非负整数，p是**质数**

$$C_n^m \% P = C_{n\%P}^{m\%P} * C_{n/p}^{m/p} \% P$$

```
int Lucas(int n,int m,int p)
{
	if(n<m||n<0||m<0)return 0;
	if(m==0)return 1;
	if(n<p) return GetC(n,m,p);
	else return Lucas(n/p,m/p,p)*Lucas(n%p,m%p,p);
}
```

Lucas定理 代码模板1

```
const int maxn = 1e5 + 10;

ll fac[maxn];     //阶乘打表
void init(ll p)   //此处的p应该小于1e5，这样Lucas定理才适用
{
    fac[0] = 1;
    for(int i = 1; i <= p; i++)fac[i] = fac[i - 1] * i % p;
}

ll inv(ll x, ll p)              //x关于p的逆元，p为素数
{   return KSM(x, p - 2, p); }

ll getC(ll n, ll m, ll p)          //组合数C(n, m) % p
{
    if(m > n)return 0;
    return fac[n] * inv(fac[m] * fac[n - m], p) % p;
}

ll Lucas(ll n, ll m, ll p)
{
      if(n<m||n<0||m<0)return 0;
      if(m==0)return 1;
      if(n<p) return GetC(n,m,p);
      else return Lucas(n/p,m/p,p)*Lucas(n%p,m%p,p);
}
```

大组合数取模 Lucas定理

计算 $C_n^m \bmod p$

$0<=m<=n<=100000$

p是合数

需要用到“**扩展Lucas定理**”

5. 可重复组合

可重复组合

问题：扫地机器人

何老板的商店里有n种扫地机器人出售，编号1到n。何老板想选k个机器人出来打扫卫生，问有多少种不同的方案?

例如，$n=3,k=2$时，方案有6种，分别是$\{1,1\},\{2,2\},\{3,3\},\{1,2\},\{2,3\},\{1,3\}$

第1步:

设1号机器人选x_1个，2号机器人选x_2个，…，第i号机器人选x_i个 $(0<=xi<=k)$

有$x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n=k$，问题转换成求n元一次方程的**非负整数解**的个数。

第2步:

令$y_1=x_1+1$，$y_2=x_2+1$，…，$y_i=xi+1$，则有$y_1+y_2+y_3+\cdots+y_n=k+n$，$(1<=y_i<=k+1)$

问题转换成求n元一次方程的**正整数解**的个数。

第3步:

我们可以看作有**$k+n$个1排成一排**。

要将这$\mathrm{k}+n$个1分成n份，第一份之和就是y_1，第二份之和就是y_2，…，第i份之和就是y_i

即转换成将$k+n$个相同小球分成n份的方案数，插入$n-1$个插板即可 $ans=C_{\mathrm{k}+n-1}^{n-1}=C_{\mathrm{k}+n-1}^{k}$

结论，从n种元素从选出k个可重复元素的方案数为C_{k+n-1}^{k}

习题$NKOJ4801$

6.范德蒙恒等式

范德蒙恒等式

$$\sum_{i=0}^{k} C_n^i C_m^{k-i} = C_{n+m}^k$$

7.错位排列

错位排列

何老板安排4位信竞队的同学各自出了一道题。

现在要求每人做一道题，但不能做自己出的那道题，问共有多少种不同的任务分配方案？

$\text{Ans} = 9$

错位排列

有编号1到n的n个盒子，和编号1到n的n只小球。每个盒子只能装1只小球，要把所有小球都装入盒子，**规定i号小球不能放入i号盒子**，求方案数。

这样的问题叫"错位排列"，简称"错排"。也就是，对于n个元素，指定每个元素不能放入某个特定的位置，求方案数。

设D_n表示$\{1,2,3,..,n\}$的错排方案数，我们要推导D_n的表达式。

先手玩：

当$n=1$时，不存在错排，故$D_1=0$

当$n=2$时，只有一种方案(2,1)方案，故$D_2=1$

当$n=3$时，有两种方案(2,3,1)(3,1,2)，故$D_3=2$

$$\boldsymbol{D_n=?}$$

错位排列

设D_n表示$\{1,2,3,..,n\}$的错排方案数，要推导D_n的表达式。$D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$　　$\boldsymbol{D_n}=?$

第一步，放n号球：

将第n号球放入第k号盒子，共有$n-1$种方案(k可以是除n以外的$n-1$个数中的任意一个)。

第二步，放k号球：

方案1：将k号球放入n号盒子。

这就相当于把k和n位置的小球互换，剩下的操作就与k,n号球和k,n号盒子无关，那么剩下$n-2$个小球进行错排即可，方案数$D_{n\text{-}2}$

方案2：k号球不放入n号盒子。

这就相当于剩下的$n-1$个小球进行错排。即球k不能放入盒n,其余的$n-2$个球，球i不能放入盒i。根据错排的定义，要求每个球都不能呆在某一个特定盒子，所以，现在的问题就是算$n-1$个小球的错排，方案数$D_{n\text{-}1}$

结论：$\boldsymbol{D_n=(n-1)*(D_{n\text{-}2}+D_{n\text{-}1})}$

错位排列

设D_n表示$\{1,2,3,..,n\}$的错排方案数。$D_1=0$，$D_2=1$，$D_3=2$　**结论：**$\boldsymbol{D_n=(n-1)*(D_{n\text{-}2}+D_{n\text{-}1})}$

代码：

```
D[1]=0;
D[2]=1;
for(i=3;i<=n;i++)    //错排
{
        D[i]=(i-1)*(D[i-1]+D[i-2]) % mod;
}
```

习题：NKOJ3977 [Sdoi2016]排列计数