



南开中学信息学竞赛教练组







作业讲评

• 讲不讲?讲!

作业3592 - 人数统计

题目大意

输入n个整数,m次询问,每次问有多少值为k的数。数据范围 $n \leq 100000, m \leq 80000$ 。



- 课上讲过,用两次二分查找。
- 还可以用C++自带的二分查找函数
- lower_bound(...)
 - 找到第一个 $\geq x$ 的数据;
- upper_bound(...)
 - 找到第一个> x的数据;
 - 在整数类型时等价于lower_bound传入x+1;
 - 在double、string等类型时不能用lower_bound 代替。

作业3592 - 人数统计

题目大意

输入n个整数,m次询问,每次问有多少值为k的数。数据范围 $n \le 100000, m \le 80000$ 。



- 函数参数:
 - 前两个参数和sort相同,例如a+1和a+1+n;
 - 第三个参数传入需要二分查找的值x;
 - 如果需要,可以在第四个参数传入比较函数的名字,和sort的比较函数相同。
- 返回值:
 - 返回值不是数组下标i, 而是a+i;
 - 可以用返回值减去a得到数组下标i。
 - 注意,如果数组中没有符合条件的数,返回值不再数组之内,如a+1+n。



输入n个整数,m次询问,每次问有多少值为k的数。

数据范围 $n \leq 100000, m \leq 80000$ 。



解析

• 这道题怎么写?

```
int ans = upper_bound(a + 1, a + 1 + N, k) - lower_bound(a + 1, a + 1 + N, k);
//int ans = lower_bound(a + 1, a + 1 + N, k + 1) - lower_bound(a + 1, a + 1 + N, k);
printf("%d\n", ans);
```

• 可以将两次调用的返回值相减,得到的整数就是自己写二分查找时的两次数组下标之差。

作业3593 - 工资统计

题目大意

输入n个的能力,能力是互不相同的整数。如果按从小到大排序后,第i个人的工资是a[i]-i。m次询问,每次问工资为k的人数。数据范围 $n \leq 100000, m \leq 80000$ 。



- 输入之后先排序, 然后第i个数减i;
- 是否需要再排序呢?
- $(a[i+1]-i-1)-(a[i]-i)=a[i+1]-a[i]-1 \ge 0$
- 数组仍然有序,不需要再次排序。



作业3144 - 何老板的淘宝店3.0



有n个商品,m次询问,每次找出价格与x最接近的商品的价格。 数据范围*n*, *m* ≤ 300000



- 二分查找找到第一个 $\geq x$ 的商品的数组下标i;
- 如果a[i] = x,直接输出;
- 如果i > 1,且 $x a[i 1] \le a[i] x$,输出a[i 1],否 则输出a[i]。

作业5455 - 苹果采摘

题目大意

一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



- 方法1:
- 在前缀和上二分查找:
- 设前缀和数组s[0], s[1], ..., s[n], 其中s[0] = 0;
- 从第i个到第j个苹果的连续段,有s[j] s[i-1]个。
- 枚举j,在s数组上二分查找值为s[j]-m的数。
- 时间复杂度 $O(n \log n)$ 。

作业5455 - 苹果采摘

题目大意

一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



- 方法2:
- 从小到大枚举j,同时另一个变量i始终保持 $s[j] s[i] \leq m$;
- 当从*j* 1变成*j*时,一步一步挪动*i*,直到满足条件。





一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。

数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20



一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。

数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

手动模拟样例, n=8, m=5:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。



一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20



- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成3, i挪动到2。



一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成3, i挪动到2。
- j变成4, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。

作业5455 - 苹果采摘

题目大意

一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成3, i挪动到2。
- j变成4, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成5, i挪动到4。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。



一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成3, i挪动到2。
- j变成4, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成5, i挪动到4。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- • • • •



一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成3, i挪动到2。
- j变成4, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成5, i挪动到4。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- • • • •



一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



解析

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
s[]	0	3	5	9	10	15	17	18	20





- 初始化
- j变成2, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成3, i挪动到2。
- j变成4, i不变。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- j变成5, i挪动到4。此时s[j]-s[i]==m, 所以ans++。
- •

作业5455 - 苹果采摘

题目大意

一个长度为n的序列,统计有多少个连续段的和为m。数据范围 $n \leq 100000$ 。



- 方法2:
- 从小到大枚举j,同时另一个变量i始终保持 $s[j] s[i] \leq m$;
- 当从j-1变成j时,一步一步挪动i,直到满足条件。
- j从1到n的过程中,i也至多只会从0到n。
- 时间复杂度O(n)。

作业1934 - 外地人

题目大意

输入n条英文单词和方言单词的对应关系,然后进行m次查询,每次查询一个方言单词对应的英文单词。数据范围 $n,m \leq 100000$,单词长度不超过10。



- 将n条对应关系按方言单词的字典序排序, 然后二分查找。
- 如果按照以前说的"对数组下标排序"的方式,怎么写?



输入n条英文单词和方言单词的对应关系,然后进行m次查询,每次查询一个方言单词对应的英文单词。数据范围 $n,m \leq 100000$,单词长度不超过10。



- 将n条对应关系按方言单词的字典序排序, 然后二分查找。
- 如果按照以前说的"对数组下标排序"的方式,怎么写?

```
int N, M;
pair<string, string> dict[MAX_N];
int d[MAX_N];

bool cmp_by_dict(int x, int y) {
   return dict[x] < dict[y];
}</pre>
```

```
int main() {
    cin >> N >> M;
    for (int i = 1; i <= N; i ++) {
        cin >> dict[i].second >> dict[i].first;
        d[i] = i;
    }
    sort(d + 1, d + 1 + N, cmp_by_dict);
    for (int i = 1; i <= M; i ++) {
        (cin >> dict[0].first;
        int j = [ower_bound(d + 1, d + 1 + N, 0, cmp_by_dict) - d;
        if (dict[d[j]].first == dict[0].first) {
            cout << dict[d[j]].second << endl;
        } else {
            cout << "eh" << endl;
        }
    }
    return 0;</pre>
```

- ●对数组下标排序
- ●为了对下标lower_bound, 需要用到操作一下
- ●对下标lower_bound

作业1408 - 求方程的根

题目大意

输入正整数m, n, p, a, b, 求方程 $m^x + n^x - p^x = 0$ 的根。

数据范围 $m, n, p \le 1000, a, b \le 100$ 。



- 如果 $p \leq \max(m, n)$,则f(x)随x增大而增大,方程在a到b之间没有根;
- 如果 $p > \max(m, n)$,则方程在x > 0时有一个根,怎么计算?

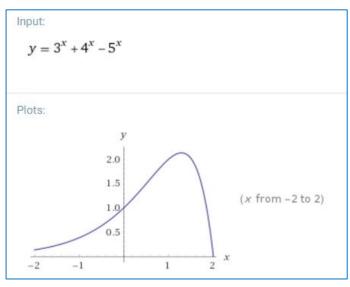


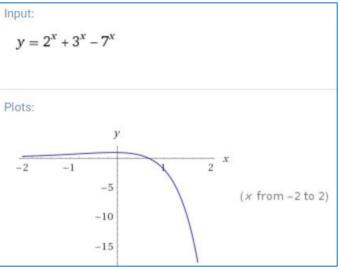


输入正整数m,n,p,a,b,求方程 $m^x+n^x-p^x=0$ 的根。数据范围 $m,n,p\leq 1000,\ a,b\leq 100$ 。



- 什么时候可以用二分法求根?
 - f(x)在范围[a,b]上是单调函数,且f(a)f(b) < 0
- f(x)不单调怎么办?



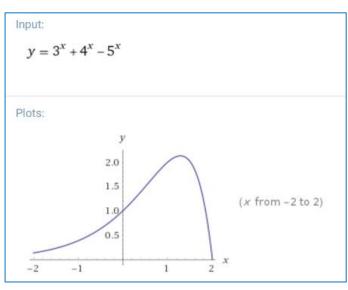


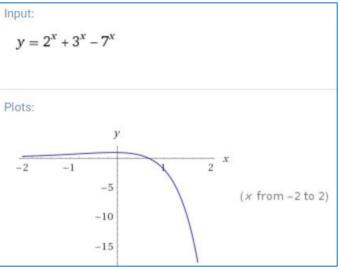


输入正整数m, n, p, a, b, 求方程 $m^x + n^x - p^x = 0$ 的根。数据范围 $m, n, p \le 1000$, $a, b \le 100$ 。



- 什么时候可以用二分法求根?
 - f(x)在范围[a,b]上是单调函数,且f(a)f(b) < 0
- f(x)不单调怎么办?
- 事实上f(x)有右边的两种情况:先增后减、单调递减。
 - 严格的说, 应该先找到[a,b]当中f(x)最大值的地方c;
 - 然后分别处理[a,c]和[c,b]。
- 但是这道题不需要拆分,因为f(x)只会有一个根。





作业1408 - 求方程的根

题目大意

输入正整数m,n,p,a,b,求方程 $m^x+n^x-p^x=0$ 的根。数据范围 $m,n,p\leq 1000,\ a,b\leq 100$ 。



- 二分法求根:
 - 设当前范围是[l,r], 且f(l)f(r) < 0
 - 设m = (l+r)/2, 如果f(l)f(m) < 0, 则根在[l,m]中, 赋值r = m;
 - 否则根在[m,r]中,赋值l=m;
 - 当r-l < Δ 的时候停止,其中 Δ 用来控制二分的精度,这道题设为 10^{-11} 或 10^{-12} 为宜。
 - 循环结束后,返回(l+r)/2值。



分治法

• 讲几个例题

例题1: 【NKOJ3590 循环赛日程表】

有n名选手,其中 $n=2^k$ 。设计一个满足以下要求的比赛日程表:

- 1. 每个选手必须与其他n-1个选手各赛一次;
- 2. 每个选手一天只能赛一次;
- 3. 循环赛一共进行n-1天。

按此要求,将比赛日程表设计成一个n行n-1列的二维表,其中第i行第j列表示和第i个选手在第j天比赛的选手。

数据范围: $1 \le k \le 8$



输入格式:

输入一个整数k。



输出格式:

一个n×n的数字矩阵,表示赛程表,每行数字以空格作为间隔。第1列从上到下分别是1到n,后面n-1列是比赛日程表。比赛日程表的安排方式很多,请找出字典序最小的方案。具体样式参见样例数据。

样例输入:

3

样例输出:

 $8\ 7\ 6\ 5\ 4\ 3\ 2\ 1$

例题1: 【NKOJ3590 循环赛日程表】



- 为什么题目要让 $n = 2^k$ 呢?
 - 肯定是要递归,调用 2^{k-1} 的函数得到 2^k 时的结果!





- 为什么题目要让 $n = 2^k$ 呢?
 - 肯定是要递归,调用 2^{k-1} 的函数得到 2^k 时的结果!
- 如何递归?找规律。

•
$$k = 0$$

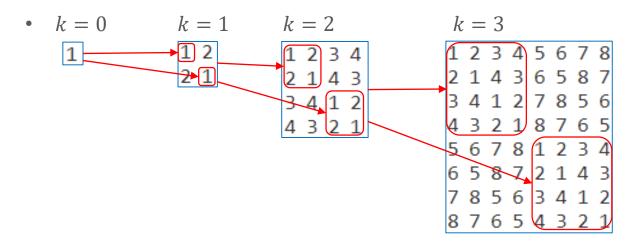
$$k = 1$$

$$k = 3$$





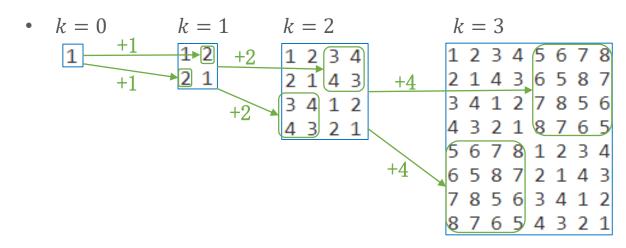
- 为什么题目要让 $n = 2^k$ 呢?
 - 肯定是要递归,调用 2^{k-1} 的函数得到 2^k 时的结果!
- 如何递归?找规律。







- 为什么题目要让 $n = 2^k$ 呢?
 - 肯定是要递归,调用 2^{k-1} 的函数得到 2^k 时的结果!
- 如何递归?找规律。



例题1: 【NKOJ3590 循环赛日程表】



- 分治算法:
- 开一个全局变量二维数组a[][]存储答案;
- 递归函数solve(k, x, y)的作用是,生成一个规模为 $2^k \times 2^k$ 的矩阵,矩阵的左上角在a[][]数组的第x行第y列。

例题1: 【NKOJ3590 循环赛日程表】



- 分治算法:
- 开一个全局变量二维数组a[][]存储答案;
- 递归函数solve(k, x, y)的作用是,生成一个规模为 $2^k \times 2^k$ 的矩阵,矩阵的左上 角在a[][]数组的第x行第y列。
- 函数实现:
 - 若k=0, 即生成1×1的矩阵。令a[x][y]=1, 返回。
 - 若k>0, 设 $m=2^{k-1}$, 先递归调用四次:

 - solve (k 1, x, y) solve (k 1, x, y + m)

 - solve (k 1, x + m, y) solve (k 1, x + m, y + m)
 - 然后将左下、右上区域每个数都+m。
- 主函数中调用solve(k, 1, 1)。







- 分治算法,写成程序:
- 可以用1 << x来计算 2^x ,其中x必须是非负整数
 - "<<"运算符优先级比"+"、"-"要低;
 - "<<"运算符优先级比"<"、">"等要高;
 - 右边的程序中 "1 << k 1" 计算 2^{k-1} 。







- 分治算法,写成程序:
- 可以用1 << x来计算 2^x ,其中x必须是非负整数
 - "<<"运算符优先级比"+"、"-"要低;
 - "<<"运算符优先级比"<"、">"等要高;
 - 右边的程序中 "1 << k 1" 计算 2^{k-1} 。
- 需要手动给左下和右上+m, 很多数据被多次处理。
- 有没有更"优雅"的写法?

```
int a[MAX N][MAX N];
void solve(int k, int x, int y) {
   if (k == 0) {
       a[x][y] = 1;
    } else {
       int m = 1 << k - 1;
       solve(k - 1, x, y);
       solve(k - 1, x, y + m);
       solve(k - 1, x + m, y);
       solve(k - 1, x + m, y + m);
       for (int i = 0; i < m; i ++) {
           for (int j = 0; j < m; j ++) {
               a[x + i][y + j + m] += m;
               a[x + i + m][y + j] += m;
```

例题1: 【NKOJ3590 循环赛日程表】



- 分治算法+:
- 开一个全局变量二维数组a[][]存储答案;
- 递归函数solve(k, x, y, v)的作用是,生成一个规模为 $2^k \times 2^k$ 的矩阵,矩阵的左上角在a[][]数组的第x行第y列,且a[x][y]=v。
- 函数实现:
 - 若k=0, 即生成1×1的矩阵。令a[x][y]=**v**, 返回。
 - 若k>0, 设 $m=2^{k-1}$, 先递归调用四次:
 - solve(k 1, x, y, \mathbf{v}) solve(k 1, x, y + m, \mathbf{v} + \mathbf{m})
 - solve (k 1, x + m, y, v + m) solve (k 1, x + m, y + m, v)
- 主函数中调用solve(k, 1, 1, **1**)。





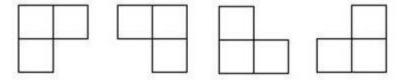


- 分治算法+,写成程序:
- 这样就避免了对一些区域的多次处理。

```
int a[MAX_N][MAX_N];
void solve(int k, int x, int y, int v) {
    if (k == 0) {
        a[x][y] = v;
    } else {
        int m = 1 << k - 1;
        solve(k - 1, x, y, v);
        solve(k - 1, x, y + m, v + m);
        solve(k - 1, x + m, y, v + m);
        solve(k - 1, x + m, y + m, v);
    }
}</pre>
```

例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】

在一个 $2^k \times 2^k (1 \le k \le 10)$ 个方格组成的棋盘中,恰有一个方格是黑色的,其他方格都是白色。你 的任务是要用图示的由三个方格构成的4种不同形态的L形骨牌覆盖所有的白色方格,且任何一个白 色方格不能同时被两次或多个次覆盖。





第一行一个整数k,表示棋盘的大小为 $2^k \times 2^k$ 。 第二行是两个整数,代表特殊方格所在行号和列号。



输出格式:

一个以空格为间隔的 $2^k \times 2^k$ 数字矩阵,表示一种可 行的覆盖方案。同一块骨牌用相同的数字表示,用 数字0表示黑色方格。按矩阵从左到右,从上到下的 顺序将数字由小到大输出, 详情见样例。

样例输入1:

样例输入2:

样例输入3:

样例输出1:

样例输出2:

1 1 2 2 0 1 3 2

4 3 3 5

4 4 5 5

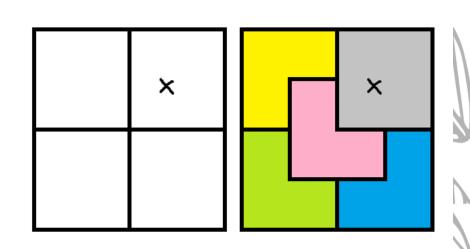
样例输出3:

(写不下, 去0J上看)

例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



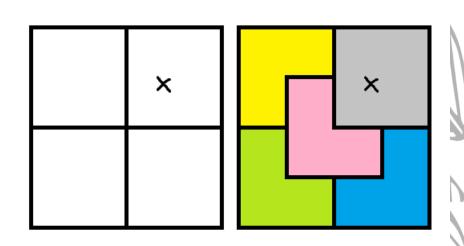
- 如何分治?
- 如右图所示,将 $2^k \times 2^k$ 的棋盘划分为四个区域。
- 不含黑格的三个区域组成规模为 2^k 的L形,
- k>1时可以划分为四个规模为 2^{k-1} 的L形,递归处理(L形);
- 含有黑格的一个区域, 递归处理(正方形)。



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



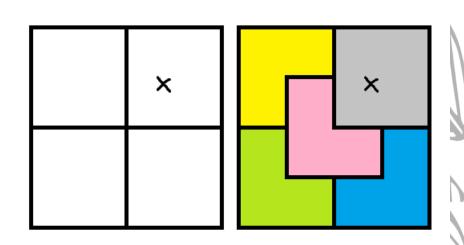
- 怎么写程序?
- 方法1:分开写正方形递归和L形递归函数。



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



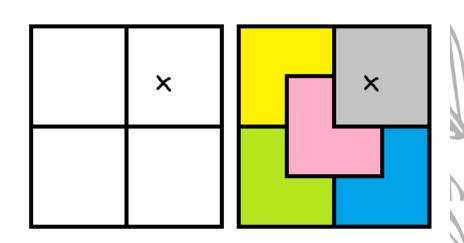
- 怎么写程序?
- 方法1:分开写正方形递归和L形递归函数。
- 正方形递归的参数:
 - 参数k,表示当前的问题规模;
 - 参数x,y,表示当前正方形区域左上角的坐标;



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



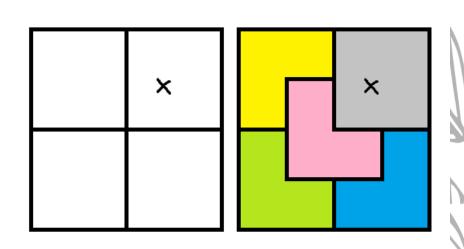
- 怎么写程序?
- 方法1:分开写正方形递归和L形递归函数。
- 正方形递归的参数:
 - 参数k,表示当前的问题规模;
 - 参数x,y,表示当前正方形区域左上角的坐标;
- 正方形递归的过程:
 - 确定黑格在4个区域中的哪一个;
 - 调用L形递归函数处理规模为k的L形;
 - 若k>1,调用正方形递归函数处理规模为k-1的正方形。



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



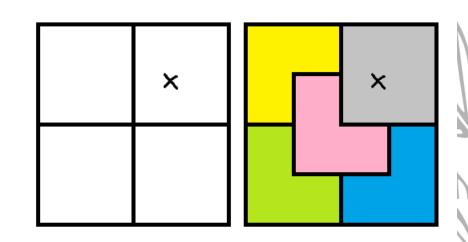
- 怎么写程序?
- 方法1:分开写正方形递归和L形递归函数。
- L形递归的参数:
 - 参数k,表示当前的问题规模;
 - 参数x,y,表示当前正方形区域左上角的坐标;
 - 参数dir,表示L形的方向;



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



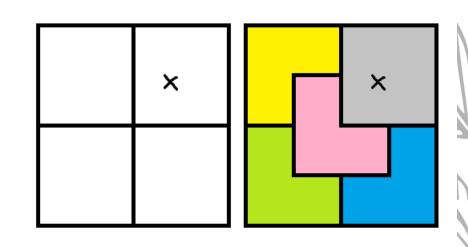
- 怎么写程序?
- 方法1:分开写正方形递归和L形递归函数。
- L形递归的参数:
 - 参数k,表示当前的问题规模;
 - 参数x,y,表示当前正方形区域左上角的坐标;
 - 参数dir,表示L形的方向;
- L形递归的过程:
 - 如果k=1,全局变量id增加1,填入数据;
 - 如果k>1,分别调用四次L形递归,处理每个L形,周围的 L形方向固定,中间的L形方向与当前一致。



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



- 怎么写程序?
- 方法1:分开写正方形递归和L形递归函数。
- 递归过程中,按访问顺序临时编号,
- 最后还要再处理编号,按从上到下、从左到右的顺序。
- 开一个int数组,记录每个临时编号的最终编号。
- 按从上到下、从左到右输出,遇到没有分配最终编号的临时编号,就分配个新编号。



例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



- 怎么写程序?
- 方法2: 写一个递归函数

例题2: 【NKOJ2307 棋盘覆盖问题】



- 怎么写程序?
- 方法2: 写一个递归函数
- 用同一个递归函数解决L形和正方形的问题
- L形需要参数dir表示方向,那么正方形时的dir规定为特殊的值。







- 怎么写程序?
- 方法2:写一个递归函数
- 用同一个递归函数解决L形和正方形的问题
- L形需要参数dir表示方向,那么正方形时的dir规定为特殊的值。

```
int K, N, X, Y, id;
int a[MAX N][MAX N];
int new_id[MAX_N * MAX_N];
void solve(int k, int x, int y, int dir) {
   int m = 1 << k - 1;
   int d = dir >= 0 ? dir : (X >= X + m) * 2 + (Y >= Y + m);
    if (k == 1) {
       ++ id;
       if (d != 0) a[x][y] = id;
       if (d != 1) a[x][y + 1] = id;
       if (d != 2) a[x + 1][y] = id;
       if (d != 3) a[x + 1][y + 1] = id;
    } else {
       if (d != 0) solve(k - 1, x, y, 3);
       if (d != 1) solve(k - 1, x, y + m, 2);
       if (d != 2) solve(k - 1, x + m, y, 1);
        if (d != 3) solve(k - 1, x + m, y + m, 0);
        solve(k - 1, x + m / 2, y + m / 2, d);
       if (dir < 0) {
           if (d == 0) solve(k - 1, x, y, -1);
           if (d == 1) solve(k - 1, x, y + m, -1);
           if (d == 2) solve(k - 1, x + m, y, -1);
           if (d == 3) solve(k - 1, x + m, y + m, -1);
```







解析

- 怎么写程序?
- 方法2: 写一个递归函数
- 用同一个递归函数解决L形和正方形的问题
- L形需要参数dir表示方向,那么正方形时的dir规定

为特殊的值。

```
int K, N, X, Y, id;
int a[MAX N][MAX N];
int new id[MAX N * MAX N];
void solve(int k, int x, int y, int dir) {
   int m = 1 << k - 1;
   int d = dir >= 0 ? dir : (X >= X + m) * 2 + (Y >= Y + m);
    if (k == 1) {
        ++ id;
       if (d != 0) a[x][y] = id;
       if (d != 1) a[x][y + 1] = id;
       if (d != 2) a[x + 1][y] = id;
       if (d != 3) a[x + 1][y + 1] = id;
    } else {
        if (d != 0) solve(k - 1, x, y, 3);
       if (d != 1) solve(k - 1, x, y + m, 2);
       if (d != 2) solve(k - 1, x + m, y, 1);
        if (d != 3) solve(k - 1, x + m, y + m, 0);
        solve(k - 1, x + m / 2, y + m / 2, d);
        if (dir < 0) {
            if (d == 0) solve(k - 1, x, y, -1);
           if (d == 1) solve(k - 1, x, y + m, -1);
           if (d == 2) solve(k - 1, x + m, y, -1);
            if (d == 3) solve(k - 1, x + m, y + m, -1);
```



