



# 三分查找

---

南开中学信息学竞赛教练组



PART

01

## 三分查找

---

- 比二分多一分

# 思考个问题

问题1：单峰整数序列

整数数组满足 $a[1] < a[2] < \dots < a[k-1] < a[k] > a[k+1] > \dots > a[n-1] > a[n]$ ，计算 $k$ 的值。

# 思考个问题

## 问题1：单峰整数序列

整数数组满足 $a[1] < a[2] < \dots < a[k-1] < a[k] > a[k+1] > \dots > a[n-1] > a[n]$ ，计算 $k$ 的值。

## 思考

- 方法1：逐个检查
  - 从1到 $n$ 枚举 $k$ ，检查 $a[k-1] < a[k]$ 且 $a[k] > a[k+1]$ ；
  - 时间复杂度 $O(n)$ 。

# 思考个问题

## 问题1：单峰整数序列

整数数组满足 $a[1] < a[2] < \dots < a[k-1] < a[k] > a[k+1] > \dots > a[n-1] > a[n]$ ，计算 $k$ 的值。

## 思考

- 方法1：逐个检查
  - 从1到 $n$ 枚举 $k$ ，检查 $a[k-1] < a[k]$ 且 $a[k] > a[k+1]$ ；
  - 时间复杂度 $O(n)$ 。
- 方法2：二分查找
  - 二分查找时，需要判断当前 $mid$ 和答案 $k$ 的关系；
  - 如果 $a[mid] < a[mid+1]$ 则 $k > mid$ ，否则 $k \leq mid$ 。
  - 时间复杂度 $O(\log n)$ 。
  - 本质上是在差分数组 $b[i] = a[i+1] - a[i]$ 上二分。

# 思考个问题

问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

# 思考个问题

## 问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

## 思考

- 方法1：求导+求根
  - .....
  - 纯数学方法，适合在草稿纸上进行；
  - 如果 $f(x)$ 比较复杂，求导和求根都非常困难。

# 思考个问题

## 问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

## 思考

- 方法1：求导+求根
  - .....
  - 纯数学方法，适合在草稿纸上进行；
  - 如果 $f(x)$ 比较复杂，求导和求根都非常困难。
- 方法2：爬山法
  - 从 $[L, R]$ 之间的任意一个位置 $x$ 开始，
  - 每次在 $x$ 附近随机一个位置 $x'$ ，看 $f(x')$ 是否比 $f(x)$ 更大
  - 如果 $f(x') > f(x)$ 则令 $x = x'$ ，
  - 反复执行，而且随着执行次数增加，逐渐减小 $x'$ 和 $x$ 距离的期望。
  - 虽然听起来不靠谱，但实际运行起来还可以。



# 思考个问题

## 问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

## 思考

- 方法3：三分查找
- 类似于二分查找，设当前查找范围是闭区间 $[l, r]$ 。
- 在开区间 $(l, r)$ 中选择两个值 $m_1, m_2 (l < m_1 < m_2 < r)$ ，计算它们的函数值。

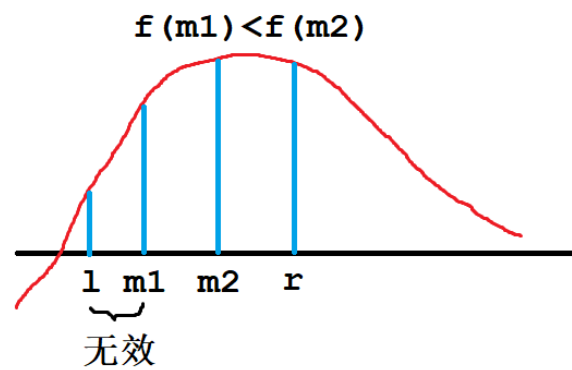
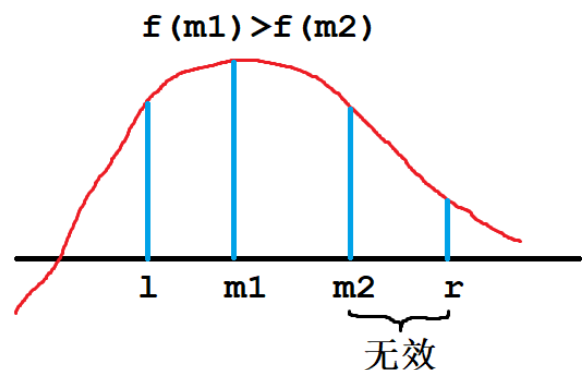
# 思考个问题

## 问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

## 思考

- 方法3：三分查找
- 类似于二分查找，设当前查找范围是闭区间 $[l, r]$ 。
- 在开区间 $(l, r)$ 中选择两个值 $m_1, m_2 (l < m_1 < m_2 < r)$ ，计算它们的函数值。
- 如果 $f(m_1) < f(m_2)$ ，则将查找范围缩小到闭区间 $[m_1, r]$ ；
- 否则将查找范围缩小到闭区间 $[l, m_2]$ 。



# 思考个问题

问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

思考

- 方法3：三分查找
- 每轮三分查找都使范围缩小，
- 区间长度从 $r - l$ 缩小到 $m_2 - l$ 或者 $r - m_1$ ；

# 思考个问题

## 问题2：单峰函数

当 $L \leq x \leq k$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增；当 $k \leq x \leq R$ 时函数 $f(x)$ 单调递减。计算 $k$ 的数值。

## 思考

- 方法3：三分查找
- 每轮三分查找都使范围缩小，
- 区间长度从 $r - l$ 缩小到 $m_2 - l$ 或者 $r - m_1$ ；
  - 因为 $\max(m_2 - l, r - m_1) > (r - l)/2$
  - 理想情况下每次将范围缩小到一半。
  - 但是如果 $m_1, m_2$ 相差太小，浮点数精度可能会出问题
- 所以一般选择三等分点： $m_1 = (2l + r)/3$ ， $m_2 = (l + 2r)/3$ 。

# 看个例题

## 例题：【NK0J3521 影子】

科学馆机房门口有条狭窄的走廊，走廊尽头是一堵墙。走廊的顶部有一盏吊灯。何老板发现，在吊灯与墙之间行走时，人的影子的长度会发生变化，他想知道，影子最长是多长？现在他告诉你吊灯的高度 $H$ 、何老板的身高 $h$ 、吊灯与墙的水平距离 $D$ ，请你帮他算出影子最长的长度值 $L$ （具体情形如下图所示）。

输入格式：

只包含一行，三个实数 $H, h, D$ 。

输出格式：

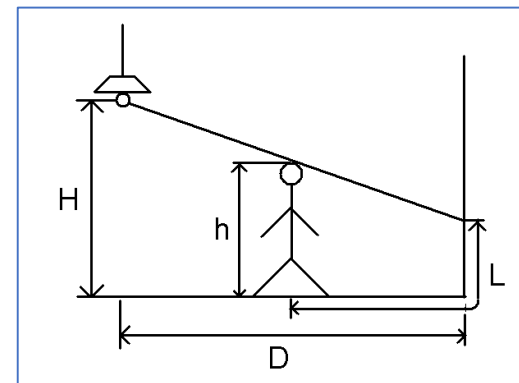
只包含一行，一个实数，表示答案，保留3个小数位。

样例输入：

4 3 2

样例输出：

3.172

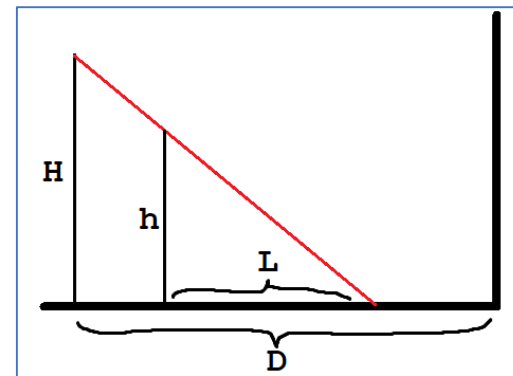


## 看个例题

例题：【NK0J3521 影子】

解析：

- 当影子还没到墙上时：
  - 显然影子恰好到墙角时最长，根据三角形相似关系算出  $L = \frac{Dh}{H}$ 。

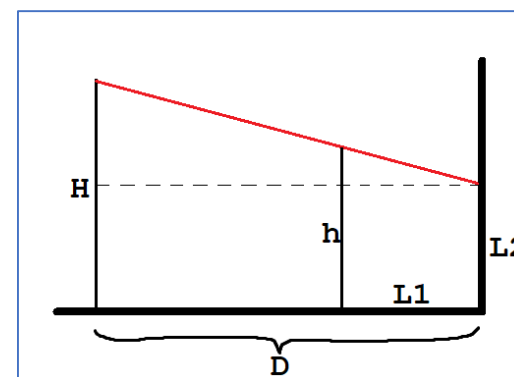
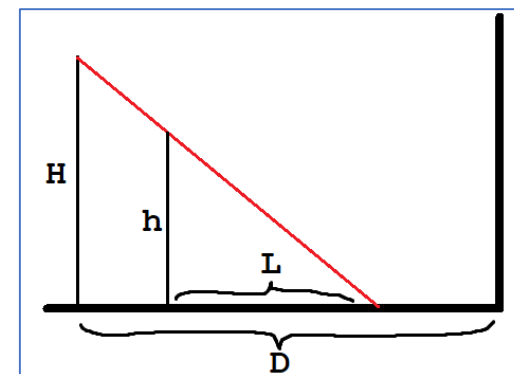


# 看个例题

例题：【NK0J3521 影子】

解析：

- 当影子还没到墙上时：
  - 显然影子恰好到墙角时最长，根据三角形相似关系算出  $L = \frac{Dh}{H}$ 。
- 当影子投到墙上的时候：
  - 三角形相似关系  $\frac{H-L_2}{D} = \frac{h-L_2}{L_1}$ ，所以  $L_1 = \frac{D(h-L_2)}{H-L_2}$
  - 所以  $L = L_2 + \frac{D(h-L_2)}{H-L_2}$ ，其中  $0 \leq L_2 \leq h$



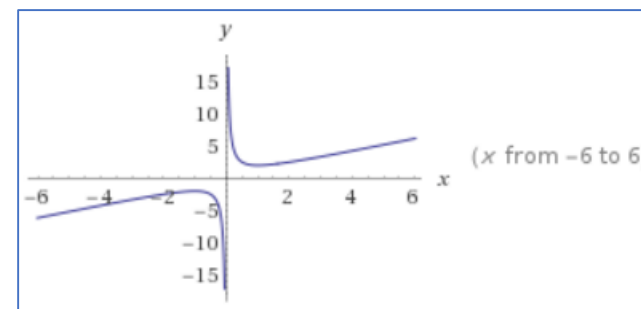
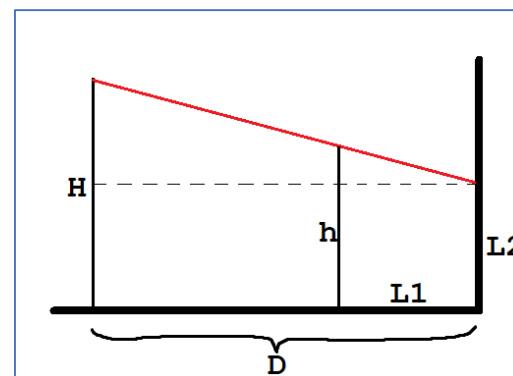
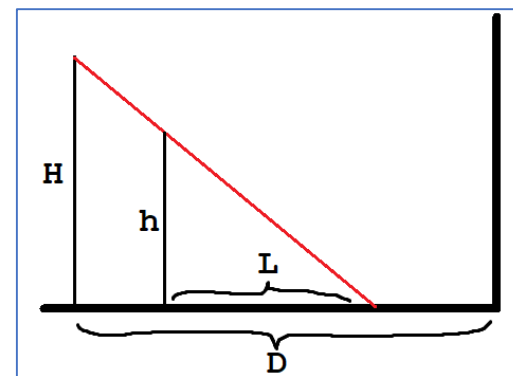
# 看个例题

例题：【NK0J3521 影子】

解析：

- 当影子投到墙上的时候：

- $L = L_2 + \frac{D(h-L_2)}{H-L_2}$ , 其中  $0 \leq L_2 \leq h$
- 简单的变形： $L = D + H - \left( (H - L_2) + \frac{(H-h)D}{H-L_2} \right)$
- 有个形如  $x + \frac{t}{x}$  的结构，其中  $t > 0$ ，它在  $x > 0$  时是个下凸函数。
- 总之，此时  $L$  是个单峰函数，可以三分查找极值。







## 三分查找习题

NK0J3521

影子

NK0J2723

PYC的送分题

NK0J2644

传送带

# 课后练习

