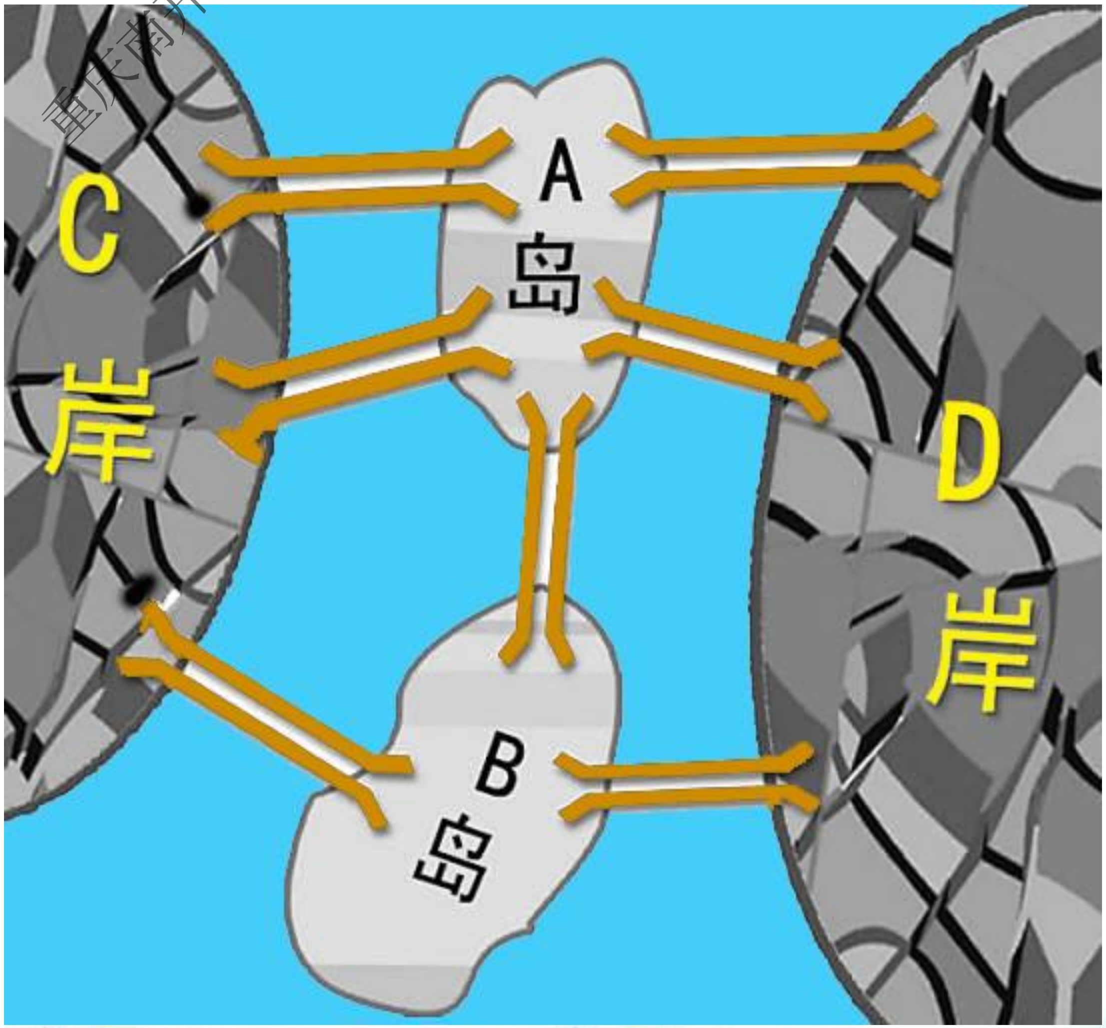
图论1

欧拉路与欧拉回路

问题1：什么是图论?

七桥问题

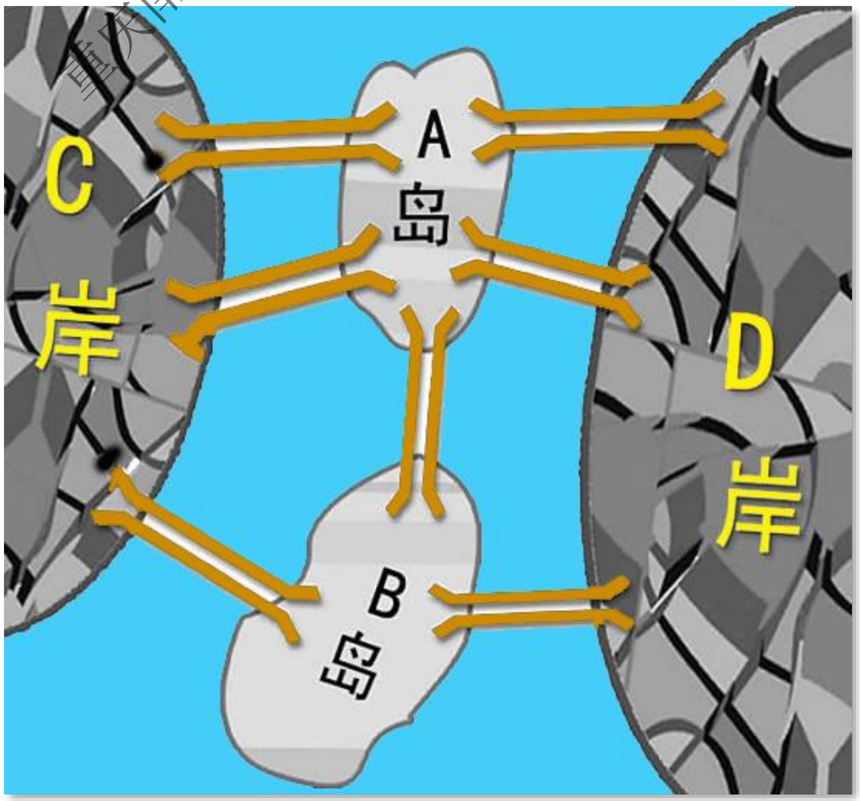


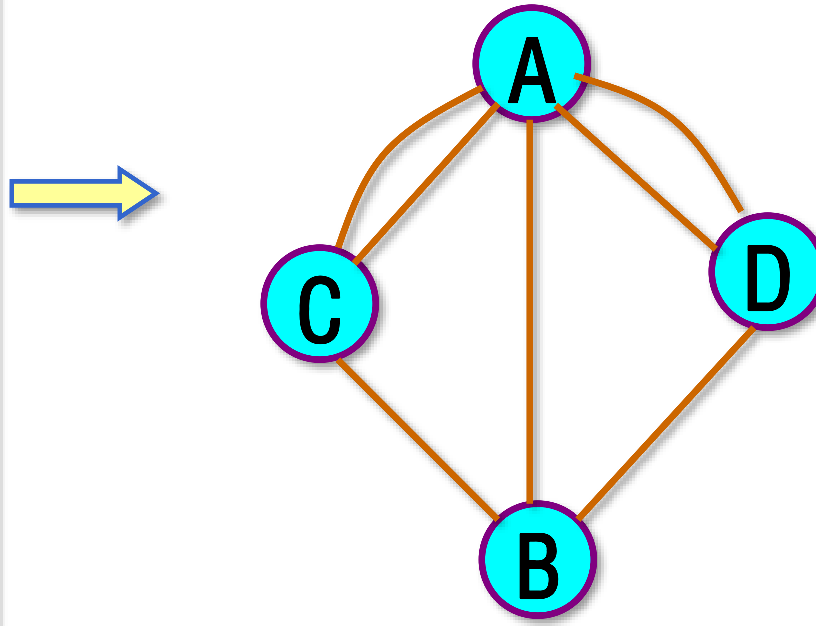
koenigsberg

1736年，欧拉：

是否可从某个地方出发，经过每座桥一次,回到原来出发的地方?

图的数学模型

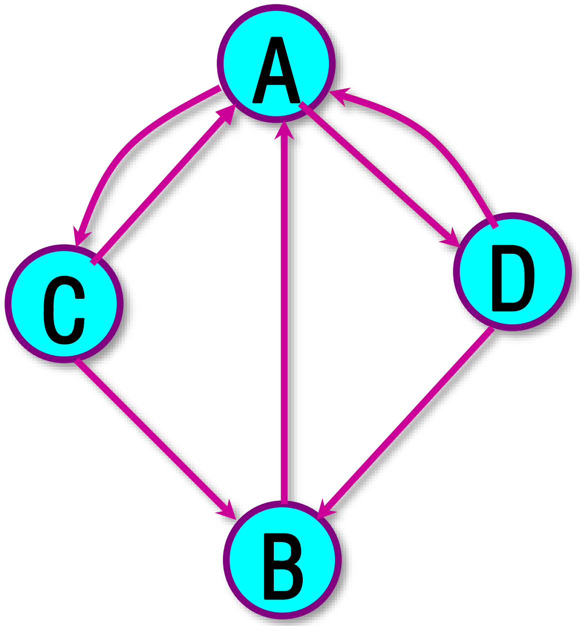




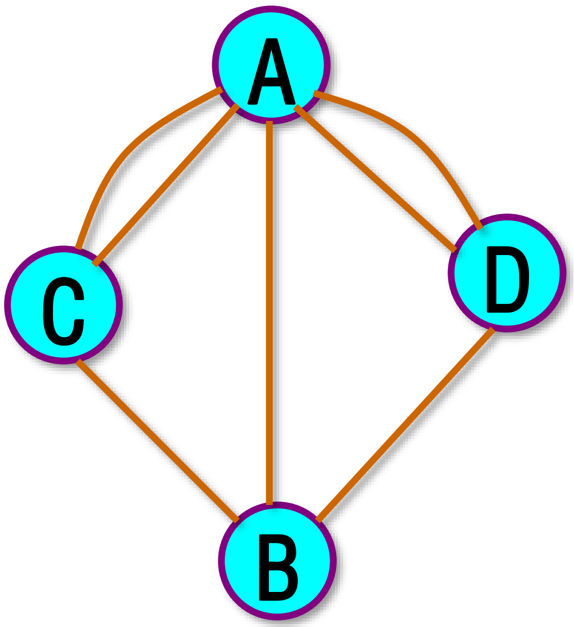
由顶点和边构成的集合，称为图

由顶点和边构成的集合，称为图

图中所有的边都是有向的(相当于单向行道)，该图称为有向图



图中所有的边都是无向的(相当于双向路)，该图称为无向图



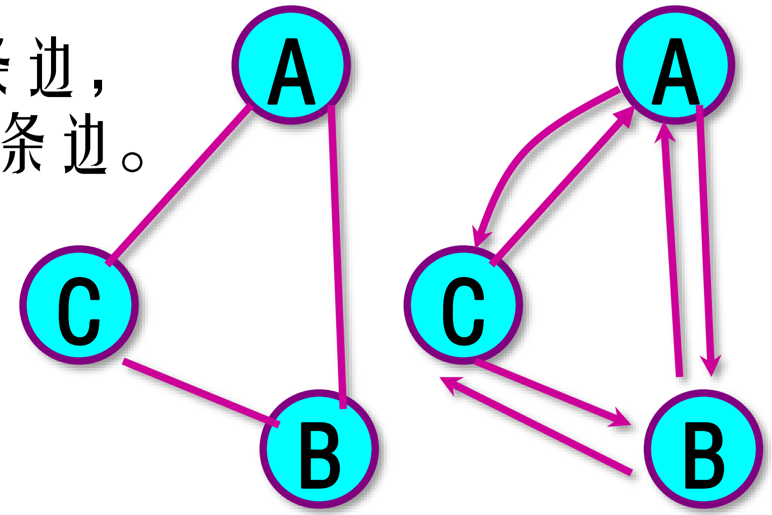
顶点的度，就是指和该顶点相连的边数

出度，有向图中，从某顶点出发的边数

入度，有向图中，在某顶点终止的边数

无向图中，任意两个顶点都存在一条边，则称为**无向完全图**。
有向图中，任意两个顶点都存在着两条方向相反的边，则称为**有向完全图**。

n阶(n个顶点)完全有向图含有 **n(n-1)** 条边，
n阶(n个顶点)完全无向图含有 **n(n-1)/2** 条边。

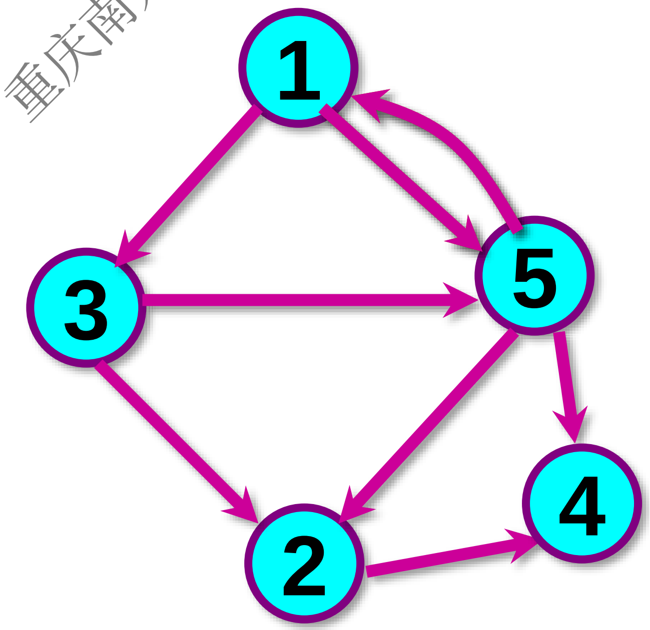


定理一：**无向图**中所有顶点的**度之和**等于**边数的2倍**，
有向图中所有顶点的**入度之和**等于所有顶点的**出度之和**。

定理二：任意一个**无向图**一定有**偶数个**（或0个）**奇点**。
（奇点就是奇数度的点）

问题2：怎样在程序中存储一个图?

图的存储方法1：邻接矩阵



bool Map[6][6];

	1	2	3	4	5
1	true	false	true	false	true
2	false	true	false	true	false
3	false	true	true	false	true
4	false	false	false	true	false
5	true	true	false	true	true

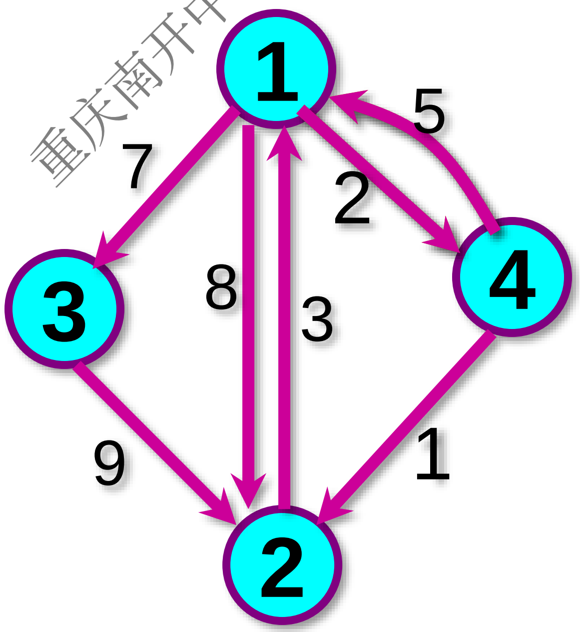
Map[x][y]==true的值就代表了从点x出发能直接到达点y

如上图中：Map[3][2]==true,表示从3号点出发能直接到2号点

若Map[x][y]==false,则表示从点x出发无法直接到达点y

如上图中Map[2][3]==false

图的存储方法1：有边权的图



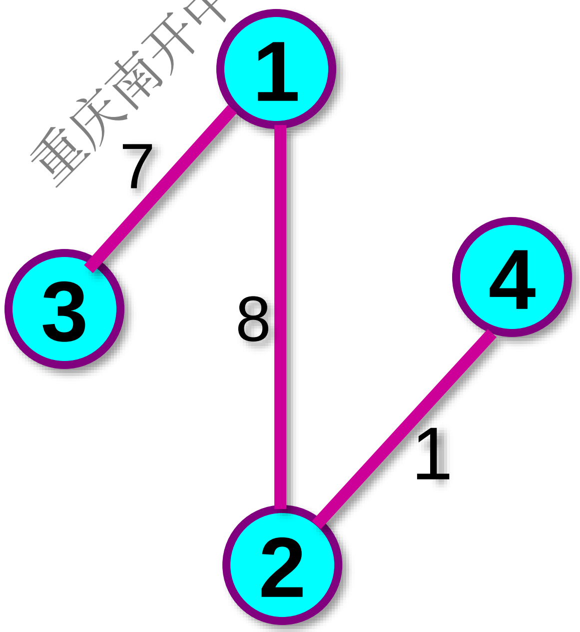
边上的数值代表这条边的长度

int Map[5][5];

	1	2	3	4
1	0	8	7	2
2	3	0	∞	∞
3	∞	9	0	∞
4	5	1	∞	0

Map[x][y]的值就代表了从点x出发到点y的这条边的长度，
如上图中：Map[3][2]==9,表示从3号点出发有一条长度为9的边指向2号点
若Map[x][y]=∞,则表示没有从x到y的边，
如上图中Map[2][3]==∞

图的存储方法1：无向图

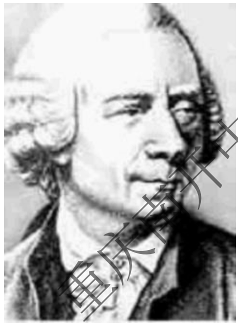


边上的数值代表这条边的长度

int Map[5][5];

	1	2	3	4
1	0	8	7	∞
2	8	0	∞	1
3	7	∞	0	∞
4	∞	1	∞	0

将每条无向边看成两条方向相反、权值相同的有向边即可！



七桥问题与欧拉回路

若恰通过图中每条边一次**回到起点**,则称该回路为**欧拉(Euler)回路。**
具有**欧拉回路**的图称为**欧拉图。**
定理1:
一个**无向图**是欧拉图，当且仅当该图所有顶点度数都是**偶数。**

一个**有向图**是欧拉图，当且仅当该图所有顶点度数都是**0**(入度与出度之和)。

若从起点到终点的路径恰通过图中每条边一次（**起点与终点是不同的点**），则该路径称为**欧拉路。**
定理2:
存在欧拉路的条件：图是连通的，且存在**2个奇点。**
如果存在2个奇点，则欧拉路一定是从一个奇点出发，以另一个奇点结束。

定理3：存在欧拉回路的条件：图是连通的，且不存在奇点。

怎样找出欧拉路或欧拉回路？Hierholzer 算法

1.**判断**：先判断该图包含欧拉路还是欧拉回路
2.**找起点**：若是欧拉路则以两个奇数度点中任意一个为起点。若是欧拉回路则以任意点为起点。
3.**遍历**：从起点开始遍历，将已走过的边删除，直到所有边都被删除。

```
//相当于深搜，当搜索完一次后，实际上所有边已被删除，回溯回来只是记录路径
void euler(int x)        //遍历，当前讨论到x号点
{
   int i;
   for(i=1;i<=n;i++)  //枚举跟x相连的点
     if(m[x][i]!=inf)        //如果x,i间存在边，则将其删除，相当于已走过
     {
         m[x][i]=inf;    //这里是无向图，将来回两条边删除
         m[i][x]=inf;
        euler(i);
     }
   step++;            //记录路径步数
   path[step]=x;      //记录当前这一步的节点编号
}
```

怎样判断该图是否连通？

怎样判断是否连通情况？

```
//相当于深搜，当搜索完一次后，实际上所有边已被删除，回溯回来只是记录路径
void euler(int x)      //遍历，当前讨论到x号点
{
   int i;
   for(i=1;i<=n;i++)  //枚举跟x相连的点
      if(m[x][i]!=inf)      //如果x,i间存在边，则将其删除，相当于已走过
      {
          m[x][i]=inf;    //这里是无向图，将来回两条边删除
          m[i][x]=inf;
          Cnt++;
         euler(i);
      }
   step++;             //记录路径步数
   path[step]=x;      //记录当前这一步的节点编号
}
```

```
if(Cnt!=m)cout<<"不连通！ ";//m为图中边的总数
```

汉米尔顿图：在连通图中，若存在一条路，经过图中每个**点**一次且仅一次，则称此图为哈米尔顿图；
汉米尔顿回路：一条沿图的n条边环行的路线，它经过每一个点一次且仅一次并且回到他的开始位置。

```
//找汉米尔顿路
void dfs(int x,int step)//当前讨论x号点，step记录走到当前点的步数
{
   int i;
   if(step>n){打印路径......}
   for(i=1;i<=n;i++)
          if ((m[x][i]!=inf&&(visit[i]==false))
          {
            path[step]=i; visit[i]=true;
            dfs(i,step+1);
            visit[i]=false;
          }
}
```

练习：1104,1106

旅行商问题（Traveling Saleman Problem）

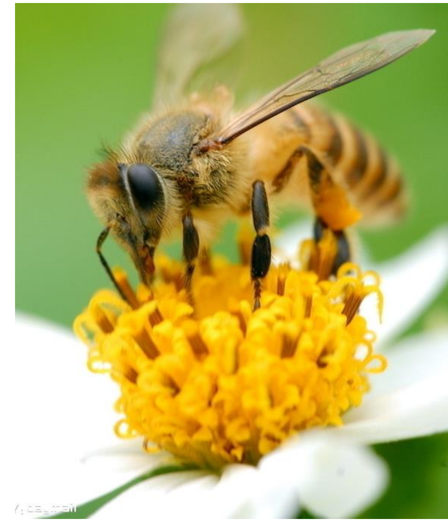
一个推销员要去n个城市推销产品。他要从其中某一个城市出发，经过每个城市一次，再回到他出发的城市，求最短的路线。也即求一个最短的哈密顿回路。

最明显的算法就是穷举法，即寻找一切组合并取其最短。这种算法的排列数为n!(其中n为节点个数)。

用动态规划技术，我们可以在$O(n^2*2^n)$时间内解决此问题。虽然这仍然是指数级的，但要比O(n!)快得多。

英国伦敦大学皇家霍洛韦学院等机构研究人员报告说，小蜜蜂显示出了轻而易举破解这个问题的能力。

他们利用人工控制的假花进行了实验，结果显示，不管怎样改变花的位置，蜜蜂在稍加探索后，很快就可以找到在不同花朵间飞行的最短路径。这是首次发现能解决这个问题的动物，研究报告发表在《The American Naturalist》杂志上。



奈杰尔·雷恩博士说，蜜蜂每天都要在蜂巢和花朵间飞来飞去，为了采蜜而在不同花朵间飞行是一件很耗精力的事情，因此实际上蜜蜂每天都在解决“旅行商问题”。