0629题目讨论

A 最大公约数

首先, 最大公约数必须是总和的因子。于是我们枚举因子 d, 然后考虑最多能切成多少段, 如果一段 $[l,r]$ 是 d 的倍数, 那么一定有 $d \mid s[r]-s[l-1]$, 其中 $s[i]$ 表示前缀和, 也就是 $a[1]+a[2]+\ldots+a[i]$ 。也就是考虑所有的前缀和, 如果假设切在 $i_1, i_2, \ldots, i_k$ 位置, 那么 $s\left[i_1\right], s\left[i_2\right], \ldots, s\left[i_k\right] \bmod d$ 都相同，所以只要统计一下所有相同 的组最多的有几个, 就能知道最多能切多少段了。后面只需要一个简单的后缀最大值就能求出答案。

B 排列

容易发现, 如果所有数的和都大于等于 0 , 那么一定是有解的。具体构造字典序最 小的方案, 就是每次选择一个使得当前和大于等于 0 最靠前的元素, 这样贪心即可。

具体实现的时候, 我们要在线地支持删除一个数, 询问大于等于某个数最靠前的位置。这个直接是 $O\left(n^2\right)$ 的, 但也有比较多的能做到 $O(n \log n)$ 的做法。比如可以对着权值开线段树, 那么每次要做的就是单点修改, 区间最小值的查询。也可以对着位置开线段树, 维护区间最小值, 那么我们也要做单点修改, 在线段树上二分找到最小的位置。

C 平方数

经典状压 dp, 我们发现, 对于二个数, 他至多一个大于等于 23 的质因子, 所以 我们把所有有一个质因子大于等于 23 的数字, 按这个因子分组, 那么每组数字最 多取一个, 同时我们用状压 dp 的方法记录一平 $2 \sim 19$ 这 8 个质因子的使用情况。 我们可以把剩下的数字, 每个数单独分成一组。

也就是用 $\mathrm{dp}[\mathrm{i}][\mathrm{j}][\mathrm{S}]$ 表示前 i 组数字, 选了 j 个, 前面 8 个质因子使用情况为 S 的方 案数, 然后要求每个组只能选一个, 这样的方案数, 直接计算即可。

D 树

对于询问 u, v, c, 求出 lca 后, 我们只要知道 u 到 lca 要几步、 v 到 lca 要几步以及 他们的最后一步能不能并成一步就可以啦!

分两种情况讨论:

$1.$ $c \leq \sqrt{n}$, 对于某个固定的 c, 我们把所有询问一起拿出来考虑, 对于每个点, 我们都可 以知道它往上 1 步能到哪个点, 2^1 步能到哪个点, $\ldots \ldots, 2^i$ 步能到哪个点, 然后倍增法算答案就行; 对于固定的 c, 复杂度是 $O(n \log (n))$, 因为 c 最多有 $\sqrt{n}$ 种取值, 这块的 复杂度是 $O(n \sqrt{n} \log (n))$;

$2.$ $c>\sqrt{n}$, 最多跳 $\sqrt{n}$ 步, 直接跳就行, 跳的时候用倍增处理往上最多能跳到哪里, 一次 询问的复杂度 $\sqrt{n} \log (n)$, 这块总的复杂度是 $O(m \sqrt{n} \log (n))$ 。