

# 引力论之读书笔记

LIUCL78 AT qq.com

2023 年 3 月 7 日



# 第一部分

## 微分几何概要

# 第一章 准备知识

本章补充一些数学预备知识. 三维欧几里得空间  $E^3$  中的二维曲面论<sup>1</sup>是黎曼几何的先修课程, 可参考文献 [6]. 集合论、拓扑学<sup>2</sup>是微分流形的先修课, 可参考文献 [2].

除了上述需要先修内容外, 本章讲述多重线性映射. 具体安排是: 先复习线性空间的概念, 之后讲述线性函数、对偶空间、双线性映射、多重线性映射、张量积、外代数等内容; 我们尽量做到自足. 同时还介绍了张量的抽象指标记号.

## 1.1 几个概念

这小节只罗列一些后面章节会用到的概念, 不作具体讲解, 请参考相应书籍.

### 1.1.1 拓扑学概念

**定义 1.1** 设有两个集合  $M$  和  $N$ , 所谓从  $M$  到  $N$  的**映射** $\sigma$  是指一个法则, 它使  $M$  中每一个元素  $a$  都在  $N$  中存在唯一确定的元素  $b$  与之对应, 一般记为  $\sigma(a) = b$ .  $M$  称为  $\sigma$  的**定义域**,  $N$  称为  $\sigma$  的**陪域**, 集合  $\sigma(M) \subset N$  称为  $\sigma$  的**值域**.

元素  $b$  称为  $a$  在映射  $\sigma$  下的**像**; 而  $a$  称为  $b$  在映射  $\sigma$  下的**原像**, 原像可以不唯一.

若  $\forall a_1, a_2 \in M$  都有  $\sigma(a_1) \neq \sigma(a_2)$ , 则称映射  $\sigma$  是**单一的**, 或**单射**.

若  $\forall b \in N$  在  $M$  中都至少存在一个原像  $a$  与之对应, 则称映射  $\sigma$  是**满的**, 或**满射**.

既单一又满的映射  $\sigma$  称为**双射**或**一一映射**. 双射的逆是存在的, 一般记为  $\sigma^{-1}$ .

**定义 1.2** 非空集合  $X$  上的一子集族  $\mathcal{T}$ , 它满足如下条件:

- (1)  $X$  和  $\emptyset$  都在  $\mathcal{T}$  中;
- (2)  $\mathcal{T}$  的任意子族元素的并也在  $\mathcal{T}$  中;
- (3)  $\mathcal{T}$  任意两个子族元素的交也在  $\mathcal{T}$  中.

则称集合  $X$  指定了一个**拓扑** $\mathcal{T}$ ; 称  $X$  为**拓扑空间**, 记为  $(X, \mathcal{T})$ ;  $\mathcal{T}$  中的子集称为**开集**.

**定义 1.3** 设  $A$  是拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  的一个非空子集, 构建如下子集族  $\mathcal{T}_A \equiv \{U \cap A | U \in \mathcal{T}\}$ . 称  $\mathcal{T}_A$  是  $A$  上的**子空间拓扑**或从  $(X, \mathcal{T})$  得到的**诱导拓扑**.

<sup>1</sup>由于高维、抽象的黎曼几何很难有具体图像, 只有退化到二维曲面才有可想象的图像, 所以这部分十分重要, 不要跳过.

<sup>2</sup>同样建议不跳过.

**定义 1.4** 设  $(X, \mathcal{T})$  为拓扑空间,  $\forall x \in N \subset X$ , 如果存在开集  $U \in \mathcal{T}$  使得  $x \in U \subset N$ , 则称  $N$  为  $x$  的**邻域**. 如果  $N$  本身是开集, 则称为**开邻域**.

**定义 1.5** 设拓扑空间  $X$  中有任意两个不同的点  $x$  和  $y$ , 如果有不相交的 ( $U \cap V = \emptyset$ ) 邻域  $U$  和  $V$  分别包含它们, 即  $x \in U$  和  $y \in V$ , 则称  $X$  为 Hausdorff 空间.

**定义 1.6** 设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间, 存在映射  $f: X \rightarrow Y$ , 如果对于  $Y$  中的每个开子集  $V$ ,  $f^{-1}(V)$  是  $X$  中的一个开子集, 则称映射  $f$  为**连续的**.

**定义 1.7** 设  $X$  和  $Y$  是两个拓扑空间, 如果存在双射  $f: X \rightarrow Y$ , 并且  $f$  和  $f^{-1}$  是连续的, 则称映射  $f$  为**同胚**. 此处指整体同胚.

**定义 1.8** 设  $X$  为 Hausdorff 空间, 它的每一点  $x$  都有一个开邻域  $U$  同胚于  $\mathbb{R}^m$  中的一个开子集, 则称  $X$  为  $m$  维**拓扑流形**.

**定义 1.9** 给定拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  的一个子集  $U$ , 如果  $X - U$  是开集, 则称  $U$  为**闭集**.

**定义 1.10** 给定拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$ , 如果它除了  $X$  和空集  $\emptyset$  外没有既开又闭的子集, 则称  $X$  是**连通的**.

**定义 1.11** 给定度量空间  $(X, d)$ ,  $X$  中的序列  $\{x_n\}$  称为 Cauchy 序列是指:  $\forall \epsilon > 0$ , 存在正整数  $N$  使得  $d(x_n, x_m) < \epsilon$ ,  $\forall n, m > N$  成立. 如果  $X$  中的每个 Cauchy 序列都是收敛的 (极限点属于  $X$ ), 则称  $X$  是**度量完备的**, 简称**完备**.

**定义 1.12** 给定拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$ , 设  $\{U_\alpha\}, \alpha \in \mathbb{N}$  是  $X$  的一个子集族, 如果  $\{U_\alpha\}$  的成员之并等于  $X$ , 则称  $\{U_\alpha\}$  为  $X$  的**覆盖**. 如果  $\{U_\alpha\}$  每个成员都是开子集, 则称为**开覆盖**.

**定义 1.13** 如果拓扑空间  $(X, \mathcal{T})$  的任意开覆盖  $\{U_\alpha\}$  都有一个有限子族能覆盖住  $X$ , 则称  $X$  为**紧致的**.

**定义 1.14** 设有两个非空集合  $A$  和  $B$ , 所有有序偶对  $(a, b)$  (其中  $a \in A, b \in B$ ) 的集合定义为**笛卡尔积** (Cartesian product), 简称为**积**, 记为  $A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ .

需要注意  $a$  和  $b$  的顺序不能随意调换. 这个定义可以拓展到有限个集合情形.<sup>3</sup>

### 1.1.2 群论简介

这节给出一些群论的基本概念. 由于多个概念都会用到数域, 所以先介绍这个定义,

**定义 1.15** 设  $\mathbb{F}$  是由一些复数组成的集合, 其中包括 0 与 1, 如果  $\mathbb{F}$  中任意两个数 (可以是相同的两个数) 的和、差、积、商 (除数不为 0) 仍是  $\mathbb{F}$  中的数 (即对上述运算有封闭性), 则称  $\mathbb{F}$  为一个**数域**.

由  $1+1=2, 2+1=3, \dots$  可知自然数是  $\mathbb{F}$  中的元素; 再由  $0-1=-1, 0-2=-2, \dots$  全体整数也属于此集合; 还可继续作除法运算, 任意两个整数的商也属于  $\mathbb{F}$ , 所以全体有理

<sup>3</sup>这里只给出了最简单“积”的概念, 更详细描述见文献 [2] §1, §5, §15, §19. René Descartes 是法国哲学家、数学家, 根据法语发音其名翻译为勒内·笛卡尔. 其姓氏 Descartes (被认为是 Des Cartes) 在拉丁化后为 Cartesius (译为: 卡提修斯), Cartesian 是 Cartesius 的形容词; Cartesius 发音与“笛卡尔”相去甚远.

数都是  $\mathbb{F}$  的元素；所有有理数的和、差、积、商仍是有理数，可见有理数集合  $\mathbb{Q}$  是一个数域，同时任何其它数域必然包含有理数域作为其子集。

常见数域：有理数域  $\mathbb{Q}$ ，实数域  $\mathbb{R}$ ，复数域  $\mathbb{C}$ 。

**定义 1.16** 设  $G$  是一个非空集合，定义  $G$  上的一个二元运算 “ $*$ ”，称为**群乘法**，从集合  $G$  中任意两个元素  $a$  和  $b$ （两者可相等）得到的  $a * b$  恒在  $G$  中（即群乘法是**封闭的**）。再给出关于群乘法的三条性质，

**甲** 结合律，即  $\forall a, b, c \in G$ ，恒有  $(a * b) * c = a * (b * c)$ ；

**乙** 单位元，存在单位元  $e \in G$  使得  $\forall a \in G$ ，有  $a * e = e * a = a$ ；

**丙** 逆元，即  $\forall a \in G$ ，都存在一元素  $b \in G$  使得  $a * b = b * a = e$ ；记  $a^{-1} = b$ 。

如果集合  $G$  和群乘法只满足性质**甲**，那么称  $G$  为**半群**。如果集合  $G$  和群乘法只满足性质**甲**和**乙**，那么称  $G$  为**么半群**。如果集合  $G$  和群乘法满足性质**甲**、**乙**和**丙**，那么称  $G$  为**群**。通常情况下会省略群乘号 “ $*$ ”，即记成  $a * b \equiv ab$ 。

群元素的数目称为群的阶，记为  $g$ 。若  $g$  是有限的，则称为**有限群**；否则称为**无限群**。一般说来两个群元的乘积是不可交换的，即  $ab \neq ba$ ；如果对于任意两个群元都可以交换，称此群为 **Abel 群**或**交换群**。

**例 1.17** 设集合只有一个元素  $G = \{e\}$ ，规定群乘法为  $e * e = e$ ，显然这符合群定义各条性质，这是最简单的群，只有一个单位元。

**例 1.18** 将集合  $G$  取为数域  $\mathbb{F}$ ，规定群乘法为此数域的加法，则  $(\mathbb{F}, +)$  符合群定义各条性质，称之为数域  $\mathbb{F}$  的**加法群**；比如  $(\mathbb{R}, +)$  等等。

**例 1.19** 全体整数对加法构成群，记为  $(\mathbb{Z}, +)$ 。

**例 1.20** 将集合  $G$  取为扣除零元素之后数域  $\mathbb{F}/\{0\}$ ，规定群乘法为此数域的数的乘法，则  $(\mathbb{F}, \times)$  符合群定义各条性质，称之为数域  $\mathbb{F}$  的**乘法群**；比如  $(\mathbb{R}, \times)$  等等。

**定义 1.21** 群  $G$  的一个子集  $H$ ，在相同的群乘法构成群，则称  $H$  为  $G$  的**子群**。

**定义 1.22** 设  $H$  为  $G$  的子群，由固定的  $g \in G$  且  $g \notin H$  可以生成子群  $H$  的**左陪集**： $gH = \{gh | h \in H\}$ ；同样可以生成子群  $H$  的**右陪集**： $Hg = \{hg | h \in H\}$ 。

**定义 1.23** 设  $H$  为  $G$  的子群，若对于任意  $g \in G$  都有  $ghg^{-1} \in H$ ， $\forall h \in H$ ；则称  $H$  为  $G$  的**正规子群**或**不变子群**。

**定义 1.24** 若从群  $G$  到群  $F$  存在一个满映射  $\Phi: G \rightarrow F$  保持群乘法不变，即  $\forall g, h \in G$  都有  $\Phi(gh) = \Phi(g)\Phi(h)$ ；则称映射  $\Phi$  为群  $G$  到群  $F$  的**同态映射**。若  $\Phi$  为双射，则称之为**同构映射**，记为  $G \cong F$ 。

**例 1.25** 全体可逆、 $\mathbb{F}$  数值、 $n$  维矩阵构成一个集合，并取矩阵的乘法为群乘法，则此集合构成一个群，称为  $\mathbb{F}$  值**一般线性群**，记为  $GL(n, \mathbb{F})$ 。比如实一般线性群  $GL(n, \mathbb{R})$ ，复一般线性群  $GL(n, \mathbb{C})$ 。

**例 1.26** 给定数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $V$ ，空间  $V$  上全体可逆线性变换构成一个集合，取群

乘法为两个线性变换乘法, 则此集合构成群, 也称为**一般线性群**, 记作  $GL(n, V)$ . 因为选定基底后, 可逆线性变换与可逆矩阵有一一对应关系, 所以  $GL(n, \mathbb{F})$  同构于  $GL(n, V)$ .

**定义 1.27** 如果存在从群  $G$  到一般线性群  $GL(n)$  某子群  $H$  的同态映射  $\Phi: G \rightarrow H$ , 则称  $\Phi$  为群  $G$  的一个  $n$  维**线性表示**. 如果  $\Phi$  是同构映射, 则成为**忠实表示**.

**定义 1.28** 设  $\Omega$  是任一非空集合,  $\Omega$  到自身的所有双射组成的集合 (记为  $S(\Omega)$ ) 对映射乘法构成一个群, 称之为  $\Omega$  上的**全变换群**;  $S(\Omega)$  的任一子群称为  $\Omega$  上的**变换群**.

当  $\Omega$  是  $n$  元有限元素的集合时,  $\Omega$  到自身的双射称为一个 **$n$  元置换**;  $S(\Omega)$  上的全体变换群称为 **$n$  元对称群**, 记为  $S_n$ ;  $S_n$  的子群称为**置换群**.

**例 1.29** 本例给出置换群具体形式. 以  $n$  个不同客体互换位置的操作作为“数学对象”, 这些操作的集合构成群, 称为  $n$  阶**置换群**, 记为  $S_n$  群.  $n$  阶置换群群元一般记作  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$  其中  $1, 2, \cdots, n$  表示原来位置,  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  表示新的位置. 这个记号的意义是: 将第 1 位置中的客体放到第  $a_1$  位置, 将第 2 位置中的客体放到第  $a_2$  位置,  $\cdots$ , 将第  $n$  位置中的客体放到第  $a_n$  位置. 下面以三个个体  $A, B, C$  为例来说明这个操作该过程.

$$\boxed{A|B|C} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \boxed{C|A|B} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \boxed{B|C|A} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}} \boxed{A|B|C}$$

### 1.1.3 环体域模

**定义 1.30** 设  $R$  是非空集合, 在此集合上定义了两个代数运算 (对运算有封闭性), 一个叫做加法, 记作  $a + b$ , 另一个叫做乘法, 记作  $ab$ ; 并且这两个运算满足如下六条规则,

- (1) 加法结合律, 即  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- (2) 加法交换律, 即  $a + b = b + a$ ;
- (3) 在  $R$  中存在零元素  $0$ , 使得  $a + 0 = a$ ;
- (4) 对  $R$  中元素  $a$ , 存在  $d \in R$  使得  $a + d = 0$ ,  $d$  称为  $a$  的负元素, 记为  $-a$ ;
- (5) 乘法结合律, 即  $(ab)c = a(bc)$ ;
- (6) 乘法对加法有左、右分配律, 即  $a(b + c) = ab + ac$ ,  $(b + c)a = ba + ca$ ;

其中  $a, b, c$  是  $R$  中任意元素, 则称  $R$  是一个**环** (ring).

容易证明环  $R$  中的零元和负元是唯一的; 利用负元可以定义减法. 如果环  $R$  中有一个元素  $e$  对乘法具有如下性质:  $ea = ae = a, \forall a \in R$ ; 则称  $e$  是  $R$  中的**幺元**或单位元, 此时环  $R$  称为**幺环**或者有单位元的环; 可证单位元是唯一的, 通常会用“1”来代替  $e$ .

环  $R$  对其加法构成交换群, 对其乘法构成半群.

如果环  $R$  的乘法还有交换律, 即  $ab = ba$ , 则称其为**交换环**.

在幺环  $R$  中, 对于  $a \in R$ , 如果存在  $b \in R$ , 使得  $ab = ba = 1$ , 则称  $a$  是可逆的,  $b$  称为  $a$  的逆元, 逆元是唯一的, 一般记为  $a^{-1}$ .

如果环  $R$  中有元素  $b \neq 0$ , 存在元素  $a \neq 0$  使得  $ab = 0$  (或  $ba = 0$ ), 则称元素  $a$  为  $R$  的一个左 (或右) **零因子**, 两者都可简称为**零因子**. 元素  $0$  也可称为 (平凡) 零因子. 任何

两个非零元素之积不为零的环称为**无零因子环**.

无零因子的幺环称为**整环**；注意不是整数环.

**例 1.31** 一切数域都是环；且是有幺元的交换环.

**例 1.32** 整数集  $\mathbb{Z}$  对其自身的加法和乘法构成环，称为**整数环**. 此环不是数域.

如果环  $R$  的非零元素集合对乘法构成群，则称之为**体**.

如果环  $R$  的非零元素集合对乘法构成交换群，则称之为**域**. 可见域即为可交换的体.

生于爱尔兰都柏林的数学家、力学家哈密顿 (William Rowan Hamilton 1805~1865) 于 1843 年发明了**四元数** (quaternion),

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}, \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}. \quad (1.1-1)$$

其中符号  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  满足,

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1; \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = -\mathbf{j}\mathbf{i} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\mathbf{k} = -\mathbf{k}\mathbf{j} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\mathbf{i} = -\mathbf{i}\mathbf{k} = \mathbf{j}. \quad (1.1-2)$$

所有四元数组成的集合记为  $\mathbf{H}$ , 规定  $\mathbf{H}$  的加法和乘法与复数类似, 即

$$a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} + a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k} \stackrel{def}{=} (a + a') + (b + b')\mathbf{i} + (c + c')\mathbf{j} + (d + d')\mathbf{k}. \quad (1.1-3)$$

和

$$\begin{aligned} & (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(a' + b'\mathbf{i} + c'\mathbf{j} + d'\mathbf{k}) \stackrel{def}{=} aa' + ab'\mathbf{i} + ac'\mathbf{j} + ad'\mathbf{k} + ba'\mathbf{i} + bb'\mathbf{i}\mathbf{i} \\ & \quad + bc'\mathbf{i}\mathbf{j} + bd'\mathbf{i}\mathbf{k} + ca'\mathbf{j} + cb'\mathbf{j}\mathbf{i} + cc'\mathbf{j}\mathbf{j} + cd'\mathbf{j}\mathbf{k} + da'\mathbf{k} + db'\mathbf{k}\mathbf{i} + dc'\mathbf{k}\mathbf{j} + dd'\mathbf{k}\mathbf{k} \\ & = aa' - bb' - cc' - dd' + (ab' + ba' + cd' - dc')\mathbf{i} \\ & \quad + (ac' + ca' + bd' - db')\mathbf{j} + (ad' + da' + bc' - cb')\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (1.1-4)$$

很明显四元数对于乘法不具有对易性. 容易验证全体四元数  $\mathbf{H}$  是体, 但不是域. 由此可见定义1.15将取值范围限制在复数集合是合理的.

**定义 1.33** 设  $R$  是一交换环, 有一个非空的集合  $M$ , 如它满足下列条件,

- (1)  $M$  中有加法 “+”, 而对 “+” 而言,  $M$  是一交换群; 取此加法群的幺元为 0.
- (2)  $\forall a \in R, m \in M$ , 有二元运算 (通常称为乘法 “\*”) 存在, 使  $a * m \in M$ , 及  $1 * m = m$ , 其中 “1” 是环  $R$  乘法的幺元 (乘法符号 “\*” 经常忽略不写).
- (3) 交换环  $R$  的加法、乘法,  $M$  的加法及  $R$  与  $M$  之间的乘法都适合结合律及分配律, 即 (其中任取  $a, b \in R; m, n \in M$ )

$$(ab)m = a(bm), \quad (a + b)m = am + bm, \quad a(m + n) = am + an.$$

则称  $M$  为  $R$ -**模**, 或简称为**模**.



## 1.2 矢量空间

下面介绍矢量空间概念,

**定义 1.34** 设  $V$  是一个非空集合,  $\mathbb{F}$  是一数域. 在  $V$  的元素之间定义了一种代数运算, 叫做**加法**; 这就是说, 给出了一个法则, 对于  $V$  中任意两个元素  $\alpha$  和  $\beta$ , 在  $V$  中都有唯一的一个元素  $\gamma$  与它们对应, 称为  $\alpha$  与  $\beta$  的**和**, 记为  $\gamma = \alpha + \beta$ . 在数域  $\mathbb{F}$  与集合  $V$  之间还定义了一种运算, 叫做**数量乘法**; 这就是说, 对于数域  $\mathbb{F}$  中任意一个数  $k$  与  $V$  中任意一元素  $\alpha$ , 在  $V$  中都有唯一的一个元素  $\delta$  与它们对应, 称为  $k$  与  $\alpha$  的**数量乘积**, 记为  $\delta = k\alpha$ . 如果上面定义的加法和数量乘法满足如下规则, 那么  $V$  称为数域  $\mathbb{F}$  上的**线性空间**, 也叫**矢量空间**, 或**向量空间**.

加法满足如下四条规则:

**条件 (1)**  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ;

**条件 (2)**  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ;

**条件 (3)** 在  $V$  中有一个元素  $\mathbf{0}$ , 对于  $V$  中任意一个元素  $\alpha$  都有  $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$ , 具有这个性质的元素称为**零元素**, 也记为  $O$  或  $\mathbf{0}$ ; 很多时候不用黑体, 而用普通字体来表示, 即  $0$ ;

**条件 (4)** 对于  $V$  中每一个元素  $\alpha$ , 都有  $V$  中的元素  $\beta$ , 使得  $\alpha + \beta = \mathbf{0}$ ,  $\beta$  称为  $\alpha$  的**负元素**, 记作  $\beta = -\alpha$ ;

数量乘法满足如下两条规则:

**条件 (5)**  $1\alpha = \alpha, 1 \in \mathbb{F}$ ;

**条件 (6)**  $k(l\alpha) = (kl)\alpha$ ;

数量乘法和加法满足下面两条规则:

**条件 (7)**  $(k + l)\alpha = k\alpha + l\alpha$ ;

**条件 (8)**  $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ .

在上面规则中,  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k, l \in \mathbb{F}$ . 集合  $V$  中的元素称为**矢量**.

依定义,  $V$  中元素对于数量乘法和加法两种运算是**封闭的**, 即运算结果仍在  $V$  中. 数量乘法与矢量的次序无关, 即  $k\alpha \equiv \alpha k$ . 下面先给出实数域上的内积空间.

**定义 1.35** 设  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的矢量空间, 在  $V$  上定义一个二元运算, 有实数  $c$  与之对应, 称为**内积**, 记成  $c = \langle \alpha, \beta \rangle$ , 它需满足如下性质:

**条件 (9)**  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle$ ;

**条件 (10)**  $\langle \alpha, k\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle k$ ;

**条件 (11)**  $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$ ;

**条件 (12)**  $\langle \alpha, \alpha \rangle$  是非负实数, 当且仅当  $\alpha = \mathbf{0}$  时,  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ .

其中  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k \in \mathbb{R}$ . 这样的线性空间称为**欧几里得空间**.

再给出复数域上的内积空间.

**定义 1.36** 设  $V$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的矢量空间, 在  $V$  上定义一个二元运算, 有复数  $c$  与之对

应, 称为**内积**, 记成  $c = \langle \alpha, \beta \rangle$ , 它需满足如下性质:

**条件 (9')**  $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle^*$ ,  $c^*$  是  $c$  的复共轭;

**条件 (10')**  $\langle \alpha, k\beta \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle k$ ;

**条件 (11')**  $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle$ ;

**条件 (12')**  $\langle \alpha, \alpha \rangle$  是非负实数, 当且仅当  $\alpha = 0$  时,  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 0$ .

其中  $\forall \alpha, \beta, \gamma \in V, \forall k \in \mathbb{C}$ . 这样的线性空间称为**酉空间**或**么正空间**.

定义了内积的矢量空间称为**内积空间**. 内积空间专指正定空间; 以后还会介绍标量积可正可负的不定空间.

由酉空间定义容易得到  $\langle k\alpha, \beta \rangle = \langle \beta, k\alpha \rangle^* = \langle \beta, \alpha \rangle^* k^* = \langle \alpha, \beta \rangle k^*$ . 可见内积对于第一个位置矢量不是线性的, 此性质称为反线性或共轭线性; 第二个位置矢量是线性的.

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的矢量空间,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r \geq 1)$  是  $V$  中一组矢量,  $k_1, k_2, \dots, k_r$  是数域  $\mathbb{F}$  中的数, 那么矢量  $\alpha = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r$  称为矢量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  的线性组合. 也说成矢量  $\alpha$  可以由矢量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性表出.

**定义 1.37** 设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的矢量空间,  $V$  中矢量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r (r \geq 1)$  称为  $\mathbb{F}$ -**线性相关**, 是指在数域  $\mathbb{F}$  中存在  $r$  个不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_r$  使得  $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_r\alpha_r = 0$  成立. 如果是上式只有在  $k_1 = k_2 = \dots = k_r = 0$  时才成立, 那么  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  称为  $\mathbb{F}$ -**线性独立**, 也称为  $\mathbb{F}$ -**线性无关**.

很多时候会把前缀“ $\mathbb{F}$ -”去掉; 之后我们还会介绍  $C^r(M)$ -线性 (见第76页及82页), 此时前缀“ $C^r(M)$ ”是不能省略的. 如果线性空间  $V$  中有  $n$  个线性独立的矢量, 并且任何  $n+1$  个矢量组都是线性相关的, 那么就称空间  $V$  是  **$n$  维的**. 如果  $V$  中可以找到任意多个线性独立的矢量, 那么就称空间  $V$  是**无限维的**.  $n$  维空间  $V$  中任意  $n$  个线性无关的矢量称为这个空间的**基矢**或**基底**, 简称**基**.

### 1.2.1 例子

**例 1.38** 数域  $\mathbb{F}$  上的空间  $V$  只有一个零元, 这个空间是 0 维的.

**例 1.39** 数域  $\mathbb{F}$  可看作自身加法和乘法的 1 维线性空间.

很容易验证上两例符合定义1.34中的八个条件. 需要注意, 矢量空间涉及两个因素, 一个是数域  $\mathbb{F}$ , 一个是集合  $V$ , 两者不可或缺.

**例 1.40** 全体复数的集合  $V = \mathbb{C}$  可以看成实数域  $\mathbb{R}$  上的线性空间.

取实数域  $\mathbb{R}$ , 那么集合  $V = \mathbb{C}$  是一个 2 维线性空间, 基矢可以选为  $\epsilon_1 = 1, \epsilon_2 = \mathbf{i}$ ; <sup>4</sup> 这样任意一个复数均可表示成这两个基矢的线性组合  $z = x \cdot 1 + y\mathbf{i} = x\epsilon_1 + y\epsilon_2$ , 其中  $x$  和  $y$  是实数域  $\mathbb{R}$  中的常数. 这里用到的数量乘法是两个实数相乘. 复数乘法以及取复数共轭

<sup>4</sup>其中  $\mathbf{i}$  是一个符号, 称为虚数单位, 它代表  $\sqrt{-1}$ ; 自然有  $\mathbf{i}^2 = -1$ .

运算都不是定义1.34在实数域中的代数运算，需要另外再定义。 $V$  中两个矢量  $1$  和  $i$  在本例中是线性无关的。■

**例 1.41** 全体复数的集合  $V = \mathbb{C}$  同样可以看成复数域  $\mathbb{C}$  上的线性空间。

把全体复数的集合  $V$  建立在复数域  $\mathbb{C}$  上，这时候我们只需选取一个基矢  $\epsilon_1 = 1$  即可，因为任意一个复数均可以表示成基矢  $1$  乘以某个复数  $z = z \cdot 1 = z \cdot \epsilon_1$ 。复数乘法以及取复数共轭运算都可以看作是定义1.34在复数域中的运算，不需要额外给定的；比如取复共轭运算可以通过复数乘法来实现  $z^* = z \times z^*/z$ （对比上一例题，那里的复数乘法必须额外给定，而在这里，复数乘法就是定义1.34中的数量乘法）。 $V$  中两个矢量  $1$  和  $i$  在本例中是线性相关的。■

从上面两例可以看出同样的集合  $V$ ，对不同的数域来说，维数可能是不同的。所以建立线性空间，数域  $\mathbb{F}$  和集合  $V$  两者都不可缺少。

**例 1.42** 量子物理中沿  $x, y$  方向动量算符和绕  $z$  轴的角动量算符是否线性相关？

建立在复数域  $\mathbb{C}$  上的，沿  $x$  和  $y$  轴的动量算符  $\hat{P}_x$  和  $\hat{P}_y$ ；绕  $z$  轴的角动量算符是  $\hat{L}_\phi \equiv \hat{y}\hat{P}_x - \hat{x}\hat{P}_y$ 。写成这种形式时，几乎所有人都能看出三个矢量线性无关；因为算符  $\hat{y}$  和  $-\hat{x}$  是 Hilbert 空间（一种线性空间）中的量，不是数域  $\mathbb{C}$  中的量。很多时候，会把位置矢量算符  $\hat{x}, \hat{y}$  上的小尖帽省略，记成  $\hat{L}_\phi \equiv y\hat{P}_x - x\hat{P}_y$ ；这个时候，有可能会被误认为三者线性相关，但这是不正确的。即便系数变成了  $y$  和  $-x$ ，它们也是线性空间中的量，不是数域  $\mathbb{C}$  中的量。或者这样理解：依照定义1.37，因为其系数  $y$  和  $-x$  是变量，不是数域  $\mathbb{C}$  中常数，所以三个矢量  $\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{L}_\phi$  是线性无关的。另外一个与此类似的例子是 Killing 矢量场，见 §5.3.2。■

因线性空间的元素十分广泛，不可能所有类型元素都与数域  $\mathbb{F}$  有什么关联；可能存在某些类型线性空间（比如  $\mathbb{F}^n$ ）中的矢量与数域中的数有密切关系，也存在其它类型线性空间（比如一堆算符构成的空间或例1.38）中的元素与数域中的数几乎没有直接关联。为了使线性相关定义具有通用性，在考虑矢量间是否线性相关时不能让定义1.37中的  $\mathbb{F}$  值系数  $k_i$  随线性空间中矢量内部参量改变而变化，所以定义1.37中系数只能是  $\mathbb{F}$  值常数。这种抽象地解释显得不够明了，以多项式为例再次解释一遍更有教益；有多项式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{F} \quad (1.2-1)$$

上式中  $x$  是一个符号，可能是算符、矩阵，也可能是实数等等。一般线性代数书中都会介绍：把此式看成线性空间，那么它是  $n+1$  维的，可选  $\{1, x^1, \cdots, x^n\}$  为此空间基矢。比如我们把符号  $x$  选为矩阵，那么几乎没有人（也没有理由）认为基矢  $1$ （单位矩阵）和基矢  $x$  线性相关。如果我们把符号  $x$  选为  $\mathbb{F}$  值数，可能有人（也有理由）认为  $1$  和  $x$  线性相关；比如选择系数  $k_1 = -1, k_2 = x^{-1}$ ，那么  $k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot x = 0$ 。如果这种理解正确，那么多项式作为线性空间的维数是不定的，当  $x$  是矩阵时维数是  $n+1$ ，当  $x$  是数时维数是  $1$ ；这使线性空间失去了一般性、普适性、通用性，为保持线性空间的一般性、普适性、通用性，定义1.37中系数只能是  $\mathbb{F}$  值常数，不能是变数。

**例 1.43** 实数轴上全体  $r$  阶连续可微实函数  $C^r[a, b]$  是无穷维线性空间.

首先, 我们验证函数空间是个线性空间.  $\forall x \in [a, b]$ , 对于任意函数  $f, g \in C^r[a, b]$ , 给定加法为  $(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x)$ , 数量乘法为  $(\lambda \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot (g(x)), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ . 容易验证上述定义符合线性空间定义1.34; 其中零矢量是对任意实数  $x$  取值恒为零的函数.

我们从两个角度来理解空函数间  $C^r[a, b]$  维数是无穷大这件事情. 首先, 对于任意固定的  $x \in [a, b]$  来说, 函数空间  $C^r[a, b]$  是一维的; 我们只需选取此线性空间基矢为“1”, 那么任意函数  $f$  取值只是基矢“1”的  $f(x)$  倍 (注意  $x$  是固定不变的). 然而区间  $[a, b]$  是连续的, 这个区间有无穷多个值, 当  $x$  取值连续变化时, 函数空间  $C^r[a, b]$  便是无穷多个一维线性空间之和, 其维数自然是无穷大.

其次, 选取  $C^r[a, b]$  的一个子空间: 全体多项式. 多项式基矢可选为  $\{1, x, x^2, \dots\}$ , 很明显多项式基矢有无穷多个, 即基矢  $x^n$  的幂次  $n \rightarrow \infty$ ; 全体多项式构成的子空间维数是无穷大的. 既然子空间是无穷维的, 那么空间  $C^r[a, b]$  的维数不可能是有限的. ■

### 1.2.2 微分线性相关定义

给定线性偏微分方程组

$$\begin{cases} \sum_{ij} a_{ij}^{(1)}(x) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \sum_{ij} a_{ij}^{(n)}(x) \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_n(x) = 0 \end{cases} \quad (1.2-2)$$

其中  $x_i$  是自变量,  $y_j$  是未知量,  $a_{ij}^{(k)}(x)$  是线性系数,  $f_k(x)$  是非齐次项.

令  $Z_k \equiv \sum_{ij} a_{ij}^{(k)} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} + f_k$ , 给出两个定义,

**定义 1.44** 给定数域  $\mathbb{F}$ , 如果存在不全为零的系数  $c_k \in \mathbb{F}$ , 使得  $\sum_k c_k Z_k = 0$  成立, 则称偏微分方程组(1.2-2)是线性相关的. 否则线性独立.

这个定义是定义1.37在微分方程领域的翻版.

**定义 1.45** 若数域  $\mathbb{F}$  中存在不全为零的系数  $c_k, d_{kl}$  使得  $\sum_k c_k Z_k + \sum_{kl} d_{kl} \frac{\partial Z_k}{\partial x_l} = 0$  成立, 则称方程组(1.2-2)是微分线性相关的. 否则线性独立.

显然, 如果  $d_{kl} \equiv 0$ , 则定义 1.45就退化到定义1.44.

定义1.45的描述方式取自文献 [8]. 这个定义的本质是包含微分恒等式; 当方程包含微分恒等式时, 在定义1.44中要放弃未知量个数与方程个数相等这个事情; 需要在定义1.45下让两者相等. 对于存在微分恒等式的偏微分方程来说, 定义 1.45比定义 1.44更合适. 比如麦克斯韦方程组、爱因斯坦引力场方程组, 应力、应变形式的弹性力学平衡方程组, 单旋度散度方程组等等在定义 1.44意义下是超定的, 然而在定义1.45意义下是确定的.<sup>5</sup>

<sup>5</sup> “确定”是指 well-determined 或 proper-determined, 偶尔也有人将这个词儿翻译成“适定”. 这与另外一个词儿 well-posed 的翻译 (通常翻译成“适定”) 容易混淆.

上述定义在Courant, Hilbert [1, p.16]中有类似叙述；在更早的文献中也应该有类似描述，究竟谁是最早给出的定义，已很难查询。虽然柯朗给出了类似定义，但在他的书中仍旧称定义1.45下未知量个数与方程个数相等的方程为超定<sup>[1]p.16</sup>例子（与例3.12相同），只把定义1.44下两者相等的方程称为确定。这与我们的称呼并不相同。

**例 1.46** 设有方程组

$$\begin{cases} Z_1 \equiv x = 0 \\ Z_2 \equiv x^2 = 0 \end{cases} \quad (1.2-3)$$

讨论  $Z_1, Z_2$  的是否线性相关？

显然有关系式  $xZ_1 - Z_2 = x \cdot x - x^2 = 0$ ，但这不能说明两个方程线性相关；因为  $Z_1$  前的系数是变量  $x$ ，不是数域  $\mathbb{F}$  中的常数，所以  $Z_1, Z_2$  是线性无关的两个方程。 ■

## 1.3 线性映射

有了向量空间，就可以定义空间上的线性映射。

**定义 1.47** 设  $V, W$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间，如果映射  $f: V \rightarrow W$  具有如下线性性质

$$f(k\alpha + \beta) = k \cdot f(\alpha) + f(\beta); \quad \forall k \in \mathbb{F}; \quad \forall \alpha, \beta \in V. \quad (1.3-1)$$

则称映射  $f$  是从空间  $V$  到空间  $W$  的**线性映射**；如果  $W \equiv V$ ，则称  $f$  是**线性变换**；如果  $W \equiv \mathbb{F}$ ，则称  $f$  是**线性函数**。把  $V$  到  $W$  的全体线性映射组成的集合记为  $\text{Hom}(V, W)$ 。

**例 1.48** 由定义1.47可知  $f((k+1)\alpha) = f(k\alpha + \alpha) = k \cdot f(\alpha) + f(\alpha) = (k+1) \cdot f(\alpha)$ ；再令  $k=1$ ，有  $f(\alpha + \beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ 。可见定义1.47与一般文献上的定义等价。

线性空间中的元素是非常广泛的，在讨论线性空间基本性质时我们无需关心元素的具体信息，只需要关心它的代数性质即可。因元素的复杂性，线性函数  $f$  的具体形式很多时候无法确切表示，但我们只需记住函数  $f$  将  $V$  中元素映射为数域  $\mathbb{F}$  中的一个具体数值即可。

线性映射是代数学中非常重要的内容，详细可参阅文献 [9] 第九章（近 200 页）。下面我们着重讲述较为简单的线性函数。

### 1.3.1 线性函数

**例 1.49** 线性函数有如下几条简单的性质。

$$f(0) = f(0 \cdot \alpha) = 0 \cdot f(\alpha) = 0. \quad (1.3-2)$$

$$f(-\alpha) = f((-1) \cdot \alpha) = -f(\alpha). \quad (1.3-3)$$

从上可以看到，任何线性函数都将零矢量映射为数字零。

**定理 1.50** 设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维线性空间,  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  是  $V$  的一组基矢,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  是数域  $\mathbb{F}$  中的任意  $n$  个数. 则存在唯一的线性函数  $f$  使得  $f(\epsilon_i) = a_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**证明** .  $V$  中任意一个矢量  $X$  都可以表示成这个基矢的线性组合  $X = \sum_i x_i \epsilon_i$ , 其中  $x_i$  是矢量  $X$  在基矢  $\epsilon_i$  上的分量. 对于空间  $V$  上的任意线性函数  $g$ , 有

$$g(X) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i g(\epsilon_i), \quad g(\epsilon_i) \in \mathbb{F}. \quad (1.3-4)$$

很显然函数  $g(X)$  由  $\mathbb{F}$  值  $g(\epsilon_i), i = 1, 2, \dots, n$  唯一确定; 任何一个线性函数都可以表示成式(1.3-4)的形式; 表示成这个形式的函数一定是线性函数.

任意给定数域  $\mathbb{F}$  中的  $n$  个数  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , 仿照式(1.3-4)形式构造  $V$  上一个函数  $f$ ,

$$f\left(\sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n x_i a_i, \quad \text{其中 } \forall X = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i \in V. \quad (1.3-5)$$

容易验证函数  $f$  是线性的, 且将空间  $V$  中的矢量  $X$  映射为数域  $\mathbb{F}$  中的数值. 既然已经构造出函数  $f$ , 即说明了“存在性”. 由式(1.3-5)易得  $f(\epsilon_i) = a_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

用反证法来证明“唯一性”. 假设有不同于  $f$  的映射  $h(\epsilon_i) = a_i$ , 那么有  $h(\epsilon_i) = a_i = f(\epsilon_i) \Rightarrow (f-h)(\epsilon_i) = 0$ , 这是说  $(f-h)$  作用在每个基矢 (进而也就是  $V$  中每个矢量) 上都为零, 那么  $(f-h)$  必为零函数, 也就是式(1.3-5)中  $f$  是唯一的. ■

**命题 1.51** 设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $n$  维线性空间,  $f$  是定义其上的线性函数.  $f$  只将零矢量  $\alpha \in V$  映射为零值, 等价于, 线性函数  $f$  是单一的.

**证明** . 先证“ $\Rightarrow$ ”, 用反证法. 假设  $f$  不单一, 则存在  $V$  中非零且不等的矢量  $\alpha, \beta$ , 使得  $f(\alpha) = f(\beta)$  成立, 那么自然有  $f(\alpha - \beta) = 0$ , 但是已知  $\alpha \neq \beta$ ; 也就是  $f$  将非零矢量映射为零, 与已知条件矛盾, 必然是假设错误, 所以  $f$  是单一的.

再证“ $\Leftarrow$ ”. 不论  $f$  是否单一, 必有  $f(0) = 0$ . 因  $f$  单一, 故  $\forall \alpha \neq 0, f(\alpha) \neq f(0) = 0$ ; 由此可知  $f$  只将零向量映射为零值. ■

### 1.3.2 线性同构

**定义 1.52** 给定数域  $\mathbb{F}$ , 在其上建立两个线性空间  $V$  和  $V'$ , 若存在线性双射  $\sigma: V \rightarrow V'$ , 即  $\sigma$  满足式(1.3-1); 则称映射  $\sigma$  是从  $V$  到  $V'$  的**线性同构映射**, 记为  $V \cong V'$ .

线性同构  $\sigma$  有逆映射  $\sigma^{-1}: V' \rightarrow V$ , 这个逆映射同样是同构映射. 同构的两个空间  $V$  和  $V'$  具有相同的维数. 关于同构映射, 有如下基本定理

**定理 1.53** 数域  $\mathbb{F}$  上两个有限维矢量空间同构的充分必要条件是它们具有相同的维数.

**证明** . “ $\Rightarrow$ ” 部分证明过程很简单, 略. 可参考任一本线性代数教材.

“ $\Leftarrow$ ” 部分. 设数域  $\mathbb{F}$  上有两个线性空间  $V$  和  $V'$ , 它们的维数都是  $n$ . 在  $V$  和  $V'$  中各取一组基矢  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$  和  $\eta_1, \dots, \eta_n$ ; 我们建立一个关系  $\sigma: V \rightarrow V'$  如下

$$\sigma(\alpha) \equiv \sigma\left(\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n a_i \eta_i, \quad \forall \alpha \in V. \quad (1.3-6)$$

上式第二步已将  $\alpha$  在基矢上展开, 系数  $a_i$  是唯一确定的. 在空间  $V'$  中与  $\alpha$  对应的矢量是  $\sum_{i=1}^n a_i \eta_i$ , 基矢确定、系数确定, 这个矢量也是确定的, 同时也是唯一的 (在基矢  $\{\eta\}$  上). 这样定义的  $\sigma$  符合映射定义 1.1.

如果  $V$  矢量的系数  $a_i$  不同, 则在  $V'$  所对应的矢量也不同, 所以映射  $\sigma$  是单一的. 因  $\{\eta\}$  是基矢, 所以  $\sum_{i=1}^n a_i \eta_i$  已包含  $V'$  中所有矢量, 映射  $\sigma$  保证了  $V'$  中所有矢量都有原像 (即  $\sum_{i=1}^n a_i \epsilon_i$ ), 所以映射  $\sigma$  是满的. 这样映射  $\sigma$  是双射. 容易验证上述定义的映射  $\sigma$  是线性的. 所以映射  $\sigma$  是线性同构. ■

此定理的证明在任一本线性代数中都有陈述, 摘录于此的目的是: 式(1.3-6)构造映射的方式具有代表性, 后面诸多命题证明都会用到.

这个定理没有考虑线性空间的元素是什么, 也没有考虑空间运算的具体定义, 只涉及矢量空间的代数性质; 从这个观点来看同构的线性空间可以不加区分, 视为等同. 而维数是线性空间唯一本质特征. 由此定理立刻可以得到: 数域  $\mathbb{F}$  上的任意  $n$  维线性空间  $V$  皆线性同构于  $\mathbb{F}^n$ ; 因此, 原则上我们只需要研究  $\mathbb{F}^n$  即可.

**命题 1.54** 给定数域  $\mathbb{F}$  及两个  $n$  维线性空间  $V$  和  $V'$ , 有线性映射  $\sigma: V \rightarrow V'$ , 那么  $\sigma$  是单射当且仅当  $\sigma$  是满射.

**证明** . 可参阅任意线性代数教材, 比如文献 [9]<sup>§9.2</sup> 定理 3. 这个命题说明, 只要  $\sigma$  是单的或者满的, 那么它必是线性同构映射. ■

## 1.4 对偶空间

在数域  $\mathbb{F}$  上建立一个  $n$  维线性空间  $V$ ,  $V$  上全体线性函数组成的集合记为  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ . 我们用自然的方式定义  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  中的加法和数量乘法如下

$$(f + g)(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha) + g(\alpha); \quad \text{其中 } \forall \alpha \in V; \forall f, g \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}). \quad (1.4-1)$$

$$(kf)(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} k(f(\alpha)); \quad \text{其中 } \forall \alpha \in V; \forall k \in \mathbb{F}; \forall f \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F}). \quad (1.4-2)$$

这样定义的加法和数量乘法符合定义 1.34, 验证过程留给读者. 也就是说  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  是数域  $\mathbb{F}$  上的一个线性空间.

矢量组  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  是线性空间  $V$  的一组基矢. 空间  $V$  中任意矢量  $X$  可以表示成  $X = \sum_{i=1}^n x^i \epsilon_i$ , 其中  $x^i$  是矢量  $X$  在基底  $\{\epsilon\}$  上的第  $i$  个分量. 定义函数  $f^j: V \rightarrow \mathbb{F}$  为: 在固定基底  $\{\epsilon\}$  下取矢量  $X$  的第  $j$  个分量, 即

$$f^j(X) = f^j\left(\sum_{i=1}^n x^i \epsilon_i\right) = x^j. \quad (1.4-3)$$

容易验证这个函数是线性的. 此种函数共有  $n$  个,  $f^1, f^2, \dots, f^n$ ,<sup>6</sup> 它们作用到基矢上, 有

$$f^i(\epsilon_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4-4)$$

定理1.50保证了式(1.4-4)中  $n$  个线性函数的存在性、唯一性. 用反证法证明这  $n$  个线性函数在空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  是线性无关的. 假设存在数域  $\mathbb{F}$  中  $n$  个不全为零的数字  $c_1, c_2, \dots, c_n$  使得  $c_1 f^1 + c_2 f^2 + \dots + c_n f^n = 0$ , 我们依次将基矢  $\epsilon_j$  带入, 即可看到全部系数  $c_i = 0$ ; 因此  $f^i$  在线性函数在空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  中是线性无关的.

对于  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  中的任意线性函数  $f$ , 有  $f(X) = f(x^i \epsilon_i) = f(\epsilon_i) x^i = f(\epsilon_i) f^i(X)$ , 因矢量  $X$  的任意性, 所以有

$$f = f(\epsilon_i) f^i. \quad (1.4-5)$$

提醒一下,  $f(\epsilon_i)$  是  $\mathbb{F}$  中数值. 前面, 已经说明  $n$  个函数  $f^i$  在线性函数在空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  中是线性无关的, 式(1.4-5)又说明任意线性函数  $f$  皆可由  $f^i$  展开, 那么易得下面定理,

**定理 1.55** 函数空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  的维数等于矢量空间  $V$  的维数, 由式(1.4-4)定义的函数  $f^i$  可以作为函数空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  的基矢.

**定义 1.56** 函数空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  称为矢量空间  $V$  的**对偶空间**. 由式(1.4-4)定义的基函数  $f^i$  称为空间  $V$  基矢  $\epsilon_i$  的**对偶基矢**. 同时将  $V$  的对偶空间记为  $V^* \equiv \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$ .

**注 1.57** 前面为了不引起混淆, 将函数空间  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  的基矢记为  $f^i$ ; 在定义了对偶基矢后, 我们将其改为  $\epsilon^{*i}$ , 并用黑体表示; 这样更能体现对偶. 也就是式(1.4-4)改成如下形式

$$\langle \epsilon^{*i}, \epsilon_j \rangle \equiv \epsilon^{*i}(\epsilon_j) = \delta_j^i = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4-6)$$

上标中的星号“\*”代表对偶. 因有  $\epsilon^{*1}(\epsilon_2) = 0$  和  $\epsilon^{*1}(\epsilon_3) = 0$  等等, 故  $\epsilon^{*i}$  并非单射.

**注 1.58** 约定  $T_{\cdot j}^i$  就是一般的矩阵  $T$ , 指标在前代表行, 指标在后代表列, 不论指标在上还是在下, 只分前后 (或者左右). 行列指标中的点“.”表示预留的对齐空位.

<sup>6</sup>一般习惯用上标来标记  $\mathcal{L}(V, \mathbb{F})$  中的线性函数. 从现在起, 要区分上下标. 指标在上叫逆变 (或反变) 指标, 指标在下的叫协变 (或共变) 指标. 采用爱因斯坦**求和约定** (即省略求和号  $\sum$ , 使公式简洁些): 必须是一上一下两相同指标才表示求和, 即  $a^i b_i \equiv \sum_i a^i b_i$ . 如果存在两个相同上标 (或下标), 即  $a^i b^i$  (或  $a_j b_j$ ), 则是错误表示. 此后, 一律采用求和约定 (另有约定除外).



设  $n$  维线性空间  $V$  中有两组基矢  $\epsilon$  和  $\eta$ , 它们之间的变换关系是

$$(\eta_1, \dots, \eta_n) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \begin{pmatrix} a_{.1}^1 & \cdots & a_{.n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{.1}^n & \cdots & a_{.n}^n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \eta_i = \epsilon_j a_{.i}^j \Leftrightarrow \eta = \epsilon A. \quad (1.4-7)$$

上式最后我们已用上下指标来表示, 显然这个矩阵  $A$  是可逆的, 称为两组基矢间的过渡矩阵. 与这两组基矢相对应, 对偶空间  $V^*$  中也有两组对偶基, 分别是

$$\epsilon^{*i}(\epsilon_j) = \delta_j^i, \quad \eta^{*i}(\eta_j) = \delta_j^i. \quad (1.4-8)$$

则有如下定理

**定理 1.59** 如果矢量空间  $V$  的两组基矢间的过渡矩阵是  $A$ , 那么它的对偶空间  $V^*$  相应过渡基矢间的过渡矩阵是  $(A^T)^{-1}$ .

**证明** . 记  $A = \{a_{.j}^i\}$ ,  $B = \{b_k^i\}$  (见注解1.58). 假设对偶基矢间的变换关系是  $\eta^{*i} = \epsilon^{*k} b_k^i$ ,

$$\delta_{ij}^i = \eta^{*i}(\eta_j) = (\epsilon^{*k} b_k^i) (\epsilon_l a_{.j}^l) = b_k^i a_{.j}^l \epsilon^{*k}(\epsilon_l) = b_k^i a_{.j}^l \delta_l^k = b_k^i a_{.j}^k. \quad (1.4-9)$$

如果读者不习惯这种指标分上下的记号方式, 可以将指标都降下来. 即写成如下形式: 令  $\eta_j = \sum_l \epsilon_l a_{lj}$ ,  $\eta_i^* = \sum_k \epsilon_k^* b_{ki}$ ; 其中  $\eta, \epsilon$  是  $V$  的基矢,  $\eta^*, \epsilon^*$  是  $V^*$  的基矢.

$$\delta_{ij} = \eta_i^*(\eta_j) = \left( \sum_k \epsilon_k^* b_{ki} \right) \left( \sum_l \epsilon_l a_{lj} \right) = \sum_{kl} b_{ki} a_{lj} \epsilon_k^*(\epsilon_l) = \sum_{kl} b_{ki} a_{lj} \delta_{kl} = \sum_k b_{ki} a_{kj}.$$

可见过渡矩阵间的关系是  $B^T = A^{-1}$ .

也可以用  $\{\eta\}$  表示  $\{\epsilon\}$ ,  $\epsilon_j = \eta_i b_j^i$  和  $\epsilon^{*j} = \eta^{*i} a_{.i}^j$ . 用矩阵表示更显简洁:  $\eta = \epsilon A$ ,  $\eta^* = \epsilon^* B$ , 和  $\eta B^T = \epsilon$ ,  $\eta^* A^T = \epsilon^*$ .

这是对偶空间一个基本定理. ■

我们在数域  $\mathbb{F}$  上建立线性空间  $V$ , 然后再建立其对偶空间  $V^*$ . 取定  $V$  中的一个确定矢量  $x$ , 定义  $V^*$  上的一个函数  $x^{**}$  如下

$$x^{**}(f) \stackrel{\text{def}}{=} f(x), \quad \forall f \in V^*. \quad (1.4-10)$$

显然映射  $x^{**}$  对于自变量是线性的, 即

$$x^{**}(f+g) = (f+g)(x) = f(x) + g(x) = x^{**}(f) + x^{**}(g); \quad x^{**}(kf) = kf(x) = kx^{**}(f).$$

映射  $x^{**}$  对于自身的加法与数量乘法也是线性的,

$$(x+y)^{**}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = x^{**}(f) + y^{**}(f);$$

$$(kx)^{**}(f) = f(kx) = kf(x) = kx^{**}(f).$$

以上四式中  $k \in \mathbb{F}$ ,  $x, y \in V$ . 这样定义的加法和数乘可以构成一个线性空间, 记为  $V^{**}$ , 称为空间  $V$  的对偶空间的对偶空间.

**定理 1.60** 在数域  $\mathbb{F}$  上建立线性空间  $V$ , 然后再建立其对偶空间的对偶空间  $V^{**}$ , 那么  $V$  中确定矢量  $x$  到  $V^{**}$  中矢量的映射:  $x \rightarrow x^{**}$  是一个同构映射.

**证明** . 首先证明映射式(1.4-10)是单一的; 即证明, 如果线性空间  $V$  中两个任意不同的矢量  $x$  和  $y$ , 一定有  $x^{**} \neq y^{**}$ .  $x^{**}$  与  $y^{**}$  相等是指对于任意  $f \in V^*$  都有  $x^{**}(f) = y^{**}(f)$ ; 很显然这是不可能的, 比如取  $V^*$  的  $n$  个基矢  $\epsilon^{*i}$ ,  $i = 1, \dots, n$  作为测试函数来证明, 分别是  $x^{**}(\epsilon^{*i}) = x^i$  和  $y^{**}(\epsilon^{*i}) = y^i$ . 因前面已声明作为矢量  $x \neq y$ , 那么式子  $x^i = y^i$  不可能对所有的  $i = 1, 2, \dots, n$  成立. 因此映射  $x \rightarrow x^{**}$  和映射  $y \rightarrow y^{**}$  是不同的, 这也就说明了映射(1.4-10)是单一的. 虽然上面的证明用到了具体基矢, 但换成另外任意一套基矢证明过程也完全成立, 也就是说证明过程不依赖于某套具体基矢.

最终, 由命题1.54可知映射  $x \rightarrow x^{**}$  是同构映射. ■

上面我们建立空间  $V^{**}$  的方式, 与从本节开头建立对偶空间  $V^*$  的方式是相同的, 所以空间  $V^{**}$  的维数是:  $\dim(V^{**}) = \dim(V^*) = \dim(V)$ . 由定理1.53可知这三个空间是彼此线性同构的, 但是同构映射很难与特定基矢无关. 而从  $V$  到  $V^{**}$  的映射(1.4-10)不依赖于特定基矢, 在基矢变化时, 这种映射具有不变性, 我们称之为**自然同构**. 从而可以把  $x$  和  $x^{**}$  看成等同, 进而把  $V$  到  $V^{**}$  等同. 从这个角度, 我们也可以称  $V$  是  $V^*$  的对偶空间, 这说明只需做一次对偶即可, 再做对偶就得到了原空间. 这也是对偶空间名字的由来.

定理1.53中“充分性”部分的同构映射是与基矢相关的, 读者可以与此处的自然同构映射对比, 以加深理解两者异同.

## 1.5 双线性映射

在(单)线性函数的基础上, 我们介绍双线性映射概念.

**定义 1.61** 设  $V_1, V_2$  和  $W$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间, 如果映射  $f: V_1 \times V_2 \rightarrow W$  具有如下线性性质:  $\forall k \in \mathbb{F}; \forall \alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in V_1; \forall \beta, \beta_1, \beta_2 \in V_2$ ,

$$f(\alpha, k\beta_1 + \beta_2) = k \cdot f(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2);$$

$$f(k\alpha_1 + \alpha_2, \beta) = k \cdot f(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta).$$

则称映射  $f$  是从线性空间直积  $V_1 \times V_2$  到线性空间  $W$  的**双线性映射**; 如果  $W \equiv \mathbb{F}$ , 则称  $f$  是**双线性函数**. 记全体双线性映射的集合为  $\mathcal{L}(V_1, V_2; W)$ .

这个定义实际上是说将映射  $f(\alpha, \beta)$  中的一个变元固定时, 另一个变元是线性的.

用自然的方式定义  $\mathcal{L}(U, V; W)$  中的加法和数量乘法如下

$$(f + g)(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha, \beta) + g(\alpha, \beta); \quad \forall \alpha \in U, \beta \in V; \forall f, g \in \mathcal{L}(U, V; W). \quad (1.5-1a)$$

$$(kf)(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} k(f(\alpha, \beta)); \quad \forall \alpha \in U, \beta \in V; \forall k \in \mathbb{F}; \forall f \in \mathcal{L}(U, V; W). \quad (1.5-1b)$$

这样定义的加法和数量乘法使得  $\mathcal{L}(U, V; W)$  构成线性空间, 验证过程留给读者.

**例 1.62** 设线性空间  $V$  上有两个线性函数  $f(\alpha)$  和  $g(\beta)$ , 那么容易验证

$$h(\alpha, \beta) = f(\alpha)g(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V. \quad (1.5-2)$$

是空间  $V$  上的一个双线性函数.

**例 1.63** 设  $U = \mathbb{F}^{m \times l}, V = \mathbb{F}^{l \times n}, W = \mathbb{F}^{m \times n}$ , 即它们都是矩阵. 定义映射  $\Phi$  为矩阵乘法  $\Phi(A, B) = AB, \forall A \in U, B \in V$ , 则不难验证  $\Phi$  是一个双线性映射.

下面我们来看双线性映射的一般形式. 设数域  $\mathbb{F}$  上有线性空间  $U, V$  和  $W$ , 其中  $U$  和  $V$  的基矢分别是  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  和  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . 对于  $U$  中任意矢量  $X$  和  $V$  中任意矢量  $Y$ , 在它们各自基矢下展开系数分别为  $(x^1, \dots, x^m)$  和  $(y^1, \dots, y^n)$ . 那么容易得到双线性映射  $f: U \times V \rightarrow W$  的表达式

$$f(X, Y) = f(x^i \epsilon_i, y^j \eta_j) = x^i y^j f(\epsilon_i, \eta_j), \quad (1.5-3)$$

其中

$$f(\epsilon_i, \eta_j) = \begin{pmatrix} f(\epsilon_1, \eta_1) & \cdots & f(\epsilon_1, \eta_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\epsilon_m, \eta_1) & \cdots & f(\epsilon_m, \eta_n) \end{pmatrix}. \quad (1.5-4)$$

**定义 1.64** 式(1.5-4)称为双线性映射  $f(\cdot, \cdot)$  在基底  $\{\epsilon, \eta\}$  下的度量(或度规)矩阵.

式(1.5-3)和(1.5-4)是双线性映射的一般形式.

反之, 给定线性空间  $W$  中的  $mn$  个元素(即矢量, 为避免混淆暂且用“元素”称之), 将它们排成  $m \times n$  级矩阵  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{其中 } a_{ij} \in W. \quad (1.5-5)$$

对  $m$  维线性空间  $U$  中任意矢量  $X = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_m)(x^1, \dots, x^m)^T$  (已将其展开), 以及  $n$  维线性空间  $V$  中任意矢量  $Y = (\eta_1, \dots, \eta_n)(y^1, \dots, y^n)^T$ , 用

$$f(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} x^i y^j a_{ij} = X^T A Y \in W \quad (1.5-6)$$

来定义的映射  $f: U \times V \rightarrow W$  是双线性的(既然已经定义出来, 自然解决了双线性映射  $f$  的存在性问题); 容易验证上式在基底  $\{\epsilon, \eta\}$  下度量矩阵是  $A$ . 由此可得到如下定理(与定理1.50相对应; 唯一性证明也与之类似.),

**定理 1.65** 定义1.61中的双线性映射  $f$ , 在选定基底后, 与一个  $m \times n$  级矩阵(1.5-5)之间存在双射关系; 两者相互唯一确定.

下面开始着重讲述较为简单的双线性函数. 由定理1.65易得双线性函数空间  $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{F})$  的基矢

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \dots \quad (1.5-7)$$

也就是令  $m \times n$  元矩阵中某一个矩阵元为 1 其它矩阵元为 0; 这样的矩阵共有  $mn$  个, 也就是双线性函数是  $mn$  维的. 这可以叙述成如下定理,

**定理 1.66** 双线性函数空间  $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{F})$  的基矢是  $\delta_{is}\delta_{jt}$  (其中  $i, j$  取固定值,  $s, t$  变动; 这只是把式(1.5-7)用 Kronecker 记号来表示而已), 并且有  $\dim \mathcal{L}(U, V; \mathbb{F}) = \dim U \cdot \dim V$ .

### 1.5.1 同域双线性函数

鉴于双线性函数的重要性, 我们单列一节来讲述. 将定义1.61中的  $V_1$  和  $V_2$  取成相同的线性空间, 即  $V_1 = V = V_2$ , 且映射值域  $W$  取为数域  $\mathbb{F}$ , 则双线性映射变成单空间  $V$  上的双线性函数.

**例 1.67** 欧氏空间内积1.35是双线性函数.

同一个双线性函数在不同的基底下矩阵是不同的, 设  $n$  维线性空间  $V$  中有两组基矢  $\epsilon$  和  $\eta$ , 它们之间的变换关系是

$$(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) C. \quad (1.5-8)$$

其中  $C$  是  $\mathbb{F}$  值可逆矩阵.  $V$  中矢量  $\alpha, \beta$  在两组基底下分别为

$$\alpha = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) X = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) X_1 \Rightarrow X = C X_1,$$

$$\beta = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) Y = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) Y_1 \Rightarrow Y = C Y_1.$$

双线性函数  $f(\alpha, \beta)$  在基底  $\epsilon$  和  $\eta$  下的度量矩阵分别为  $A$  和  $B$ , 则有

$$f(\alpha, \beta) = f(X_1^i \eta_i, Y_1^j \eta_j) = X_1^i Y_1^j f(\eta_i, \eta_j) = X_1^T B Y_1,$$

$$f(\alpha, \beta) = f(X^i \epsilon_i, Y^j \epsilon_j) = X^i Y^j f(\epsilon_i, \epsilon_j) = X^T A Y = X_1^T C^T A C Y_1.$$

从而得到双线性函数在不同基底下度量矩阵关系为: 合同关系, 即

$$B = C^T A C \Leftrightarrow f(\eta, \eta) = C^T f(\epsilon, \epsilon) C. \quad (1.5-9)$$

**定义 1.68** 设  $f$  是空间  $V \times V$  上的一个双线性函数, 如果从 “ $\forall \alpha \in V$  且  $f(\alpha, \beta) = 0$ ” 必然推出  $\beta = 0$ , 那么称双线性函数  $f$  是非退化的.

我们来看一下非退化意味着什么？选定空间  $V$  的基底为  $\epsilon$ ，矢量  $\alpha, \beta$  在此基底下有  $\alpha = \epsilon X, \beta = \epsilon Y$ ，双线性函数  $f$  在此基底下的度量矩阵为  $A$ ，那么有  $f(\alpha, \beta) = X^T A Y$ 。从上面定义可知，要求  $X^T A Y = 0$  对于任意  $X$  成立；那么必然可以得到  $A Y = 0$ 。当  $A$  是退化矩阵时，方程  $A Y = 0$  中的  $Y$  有非零解；当  $A$  是非退化矩阵时，方程  $A Y = 0$  中的  $Y$  只有零解。这说明双线性函数非退化的充要条件是其度量矩阵为非退化矩阵；因不同基矢下度量矩阵关系是合同变换（见式(1.5-9)），所以此度量矩阵在任意基底都是非退化的。因此定义1.68可表述成如下命题，

**命题 1.69**  $n$  维线性空间  $V$  上双线性函数  $f(\cdot, \cdot)$  非退化的充要条件是它在任意基底下的度量方矩阵(1.5-4)为非退化。

**定理 1.70** 给定数域  $\mathbb{F}$  和其上的  $n$  维线性空间  $V$ ，设  $f(\alpha, \beta)$  是  $V$  上的非退化双线性函数，对  $V$  中一个元素  $\alpha$ ，定义其对偶空间  $V^*$  中的一个元素  $\alpha^*$ ：

$$\alpha^*(\beta) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha, \beta), \quad \forall \beta \in V. \quad (1.5-10)$$

那么，从  $V$  到  $V^*$  的映射  $\alpha \rightarrow \alpha^*$  是一个同构映射。

**证明**。因为  $f$  是双线性函数，所以  $\alpha^* \equiv f(\alpha, \cdot)$  相当于对偶空间  $V^*$  中的一个元素。先来证  $\alpha^*$  是线性的，令  $\alpha, \beta, \gamma \in V, k \in \mathbb{F}$ ，

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^*(\gamma) &= f(\alpha + \beta, \gamma) = f(\alpha, \gamma) + f(\beta, \gamma) = \alpha^*(\gamma) + \beta^*(\gamma), \\ (k\alpha)^*(\gamma) &= f(k\alpha, \gamma) = kf(\alpha, \gamma) = k \cdot \alpha^*(\gamma). \end{aligned}$$

这说明映射  $\alpha^*$  是线性的。

用反证法证明单性。假设  $V$  中有两个不同元素  $\alpha$  和  $\alpha'$  对应对偶空间  $V^*$  中同一元素，即  $f(\alpha, \cdot) = f(\alpha', \cdot)$ ；此式等价于  $\forall \beta \in V$  有  $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta) \Rightarrow f(\alpha - \alpha', \beta) = 0$ ；因  $f$  是非退化双线性函数，所以必有  $\alpha = \alpha'$ ；与假设矛盾，所以映射  $\alpha \rightarrow \alpha^*$  必然单一。

由命题1.54可知这个映射也是满的，进而是同构映射。证明过程不依赖于某一套具体基矢，这个同构是自然同构。 ■

**注 1.71** 定理1.60指明了对偶空间的对偶空间  $V^{**}$  与  $V$  是自然同构的。如果在  $V$  中定义了非退化双线性函数，由定理1.70可知对偶空间  $V^*$  与  $V$  之间也存在自然同构。

### 1.5.2 对称双线性函数

一般的方矩阵并不好处理，然而处理对称方矩阵却容易得多；可引入如下定义，

**定义 1.72** 设  $f(\alpha, \beta)$  是线性空间  $V$  上的一个双线性函数，如果  $\forall \alpha, \beta \in V$  都有  $f(\alpha, \beta) = f(\beta, \alpha)$  则称  $f$  是**对称双线性函数**。

**例 1.73** 欧氏内积1.35是非退化、对称双线性函数。注意么正内积1.36不是对称的。

显然对称双线性函数  $f(X, Y)$  在任意基底  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  下, 都有  $f(\epsilon_i, \epsilon_j) = f(\epsilon_j, \epsilon_i)$ , 故其度量矩阵也是对称的. 反之, 如果双线性函数  $f(X, Y)$  在某一基底下的度量矩阵  $A$  是对称的; 由于不同基底下的矩阵关系为合同关系 (见式(1.5-9)), 所以在其它任意基底下的矩阵仍是对称的, 即  $B^T = (C^T A C)^T = C^T A C = B$ .

**定理 1.74** 设  $f(\alpha, \beta)$  是  $n$  维线性空间  $V$  上的一个对称双线性函数, 那么在线性空间  $V$  中存在一组基  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  使得度量矩阵  $f(\epsilon_i, \epsilon_j)$  为对角矩阵.

**证明** . 这里并不要求此双线性函数  $f$  是正定的. 我们用类似施密特正交化方法来证明.

我们只需找到一组基矢  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  使得: 当  $i \neq j$  时,  $f(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0$  即可.

如果  $f$  是零函数, 那么度量矩阵必然是对称的, 矩阵元都是零.

下面假设  $f$  不是零函数情形. 那么必然存在矢量  $\epsilon_1$ , 使得  $f(\epsilon_1, \epsilon_1) \neq 0$ ; 用反证法证明. 假设  $\forall \alpha \in V$  都有  $f(\alpha, \alpha) = 0$ ; 那么  $\forall \alpha, \beta \in V$  有 (注意应用对称性)

$$f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(f(\alpha + \beta, \alpha + \beta) - f(\alpha, \alpha) - f(\beta, \beta)) = 0. \quad (1.5-11)$$

上式说明  $f$  是零函数, 存在矛盾; 所以必然有这样的  $\epsilon_1$  存在. 现在对空间  $V$  的维数  $n$  作归纳法. 假设维数小于  $n$  的矢量空间定理成立, 我们来证明对  $n$  维矢量空间定理也正确. 我们将  $n$  维空间  $V$  的矢量  $\epsilon_1$  扩充成一组基矢  $\epsilon_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , 且令

$$\epsilon'_i = \eta_i - \epsilon_1 \frac{f(\epsilon_1, \eta_i)}{f(\epsilon_1, \epsilon_1)}, \quad \text{其中 } i = 2, 3, \dots, n. \quad (1.5-12)$$

那么容易得到

$$f(\epsilon_1, \epsilon'_i) = f\left(\epsilon_1, \eta_i - \epsilon_1 \frac{f(\epsilon_1, \eta_i)}{f(\epsilon_1, \epsilon_1)}\right) = f(\epsilon_1, \eta_i) - f(\epsilon_1, \epsilon_1) \frac{f(\epsilon_1, \eta_i)}{f(\epsilon_1, \epsilon_1)} = 0. \quad (1.5-13)$$

容易看出  $\epsilon_1, \epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n$  是线性无关的 (证明过程留给读者), 可以看成空间  $V$  的一组基矢. 我们考察由  $\epsilon_1$  生成的空间  $L(\epsilon_1)$  和由  $\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n$  生成的空间  $L(\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$ , 显然线性空间  $V$  可分解为  $L(\epsilon_1)$  和  $L(\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$  的直和. 显然  $\forall \alpha \in L(\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$  都有  $f(\epsilon_1, \alpha) = 0$ . 我们已经假设在  $n-1$  维空间  $L(\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$  中存在一组基矢  $\epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  使得

$$\text{当 } i \neq j \text{ 时, } f(\epsilon_i, \epsilon_j) = 0, \quad i, j = 2, 3, \dots, n. \quad (1.5-14)$$

因为  $V = L(\epsilon_1) \oplus L(\epsilon'_2, \dots, \epsilon'_n)$ , 所以  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  便满足定理要求. ■

设线性空间  $V$  基矢  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  满足上面定理要求, 令  $d_i = f(\epsilon_i, \epsilon_i)$ , 那么对于  $V$  中任意矢量  $\alpha = x^i \epsilon_i$  和  $\beta = y^j \epsilon_j$  有

$$f(\alpha, \beta) = f(x^i \epsilon_i, y^j \epsilon_j) = x^i y^j f(\epsilon_i, \epsilon_j) = \sum_{i=1}^n d_i x^i y^i. \quad (1.5-15)$$

**推论 1.75** 设  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维线性空间, 那么存在基矢  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ , 使得对于  $V$  中任意矢量  $\alpha = x^i \epsilon_i$  和  $\beta = y^j \epsilon_j$  在对称双线性函数  $f$  作用下有

$$f(\alpha, \beta) = x^1 y^1 + \dots + x^p y^p - x^{p+1} y^{p+1} - \dots - x^r y^r, \quad 0 \leq p \leq r \leq n. \quad (1.5-16)$$

也就是使双线性函数  $f$  的度量矩阵  $f(\epsilon_i, \epsilon_j)$  的对角元要么是  $+1$  要么是  $-1$  要么是  $0$ , 且非对角元全为零. 对角元上的  $\pm 1$  和  $0$  称为对称双线性函数的特征值.

**定理 1.76** 设  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的  $n$  维线性空间, 对于一个确定的对称双线性函数  $f$  来说, 式(1.5-16)中  $+1$ 、 $-1$  和  $0$  的个数是唯一确定的, 不随基矢改变而变.

**证明** . 此定理一般称为“惯性定理”; 可参阅任意线性代数教材, 比如 [9]<sup>p. 432</sup> 定理 6. ■

### 1.5.3 多重线性映射

从单元微积分到两元微积分是质变; 从两元微积分到  $n(> 2)$  元微积分只是量变. 与此类似, 从单重线性映射到双重线性映射是质变 (或许也算不上), 从双重线性映射到  $r(> 2)$  重线性映射只是量变, 叙述起来麻烦一些而已. 所以我们只把多重线性映射看作双线性映射的推广.

**定义 1.77** 设  $W$  和  $V_1, \dots, V_r$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间, 如果  $r$  元映射  $f: V_1 \times \dots \times V_r \rightarrow W$  对每一个变元都具有如下线性性质

$$f(\dots, k\alpha + \beta, \dots) = kf(\dots, \alpha, \dots) + f(\dots, \beta, \dots); \quad \forall k \in \mathbb{F}, \forall \alpha, \beta \in V_p, 1 \leq p \leq r.$$

则称映射  $f$  是从  $V_1 \times \dots \times V_r$  到  $W$  的  $r$  **重线性映射**. 如果  $W \equiv \mathbb{F}$ , 那么映射  $f$  称为  $\mathbb{F}$  值  $r$  **重线性函数**.

上面关于双线性映射的所有定理可以几乎不用任何修改地推广到  $r(> 2)$  重线性映射.

**例 1.78**  $n$  阶行列式函数  $\det$  是从直积  $\overbrace{\mathbb{F}^n \times \dots \times \mathbb{F}^n}^n$  空间到数域  $\mathbb{F}$  的一个多重线性函数. 从行列式定义容易验证, 设有矩阵  $n$  阶  $A = \{a_{ij}\}$ , 则

$$\det(A) \equiv |A| = \sum_{j_1 j_2 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}, \quad j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_n. \quad (1.5-17)$$

其中  $\tau(j_1 j_2 \dots j_n)$  是这个  $n$  个数的排列, 偶排列返回偶数, 奇排列返回奇数.

将矩阵的行看成  $n$  维线性空间, 则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ k_1 b_1 + k_2 c_1 & \dots & k_1 b_n + k_2 c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 \dots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \dots j_n)} a_{1j_1} \dots (k_1 b_{j_i} + k_2 c_{j_i}) \dots a_{nj_n}$$

$$\begin{aligned}
&= k_1 \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots b_{j_i} \cdots a_{nj_n} + k_2 \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots c_{j_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= k_1 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_1 & \cdots & b_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + k_2 \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_1 & \cdots & c_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

上式充分说明了将行列式看成映射具有定义1.77中的线性性质，因此是  $n$  重线性函数。

## 1.6 张量积

本节讲述张量积的概念；其实没有张量积，也可以通过多重线性函数给张量一个明确的定义，见定义1.93。不过，多重线性映射是由  $r$  个线性空间笛卡尔积到相应值域的映射，使用过程中有些时候略显麻烦；我们可以先把这  $r$  个线性空间的笛卡尔积化为一个大的线性空间，即本节要讲述的张量积。先叙述两个线性空间的张量积概念，然后可以很自然地推广到任意有限个情形。

### 1.6.1 线性空间张量积

式(1.5-4)给出了双线性映射所对应的度规矩阵，从中可以看出全体双线性映射形成的线性空间是  $m \cdot n$  维的（实际上还需乘上  $W$  的维数，但张量积维数与  $W$  无关）；所以由双线性映射构造的张量积也应是  $m \cdot n$  维的。

**定理 1.79** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间，维数分别是  $m, n$ 。则存在  $\mathbb{F}$  上的线性空间  $Y$  与  $\tau \in \mathcal{L}(U, V; Y)$  满足条件：(1)  $Y$  由  $\tau$  的像  $\tau(U \times V)$  生成；(2) 对  $\mathbb{F}$  上任意线性空间  $Z$  以及任意  $f \in \mathcal{L}(U, V; Z)$ ，存在唯一的  $g \in \text{Hom}(Y, Z)$  使得  $f = g \circ \tau$ ，见图1.1中的交换关系。

**证明**。设  $U$  和  $V$  的基矢分别是  $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m$  和  $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 。任意取数域  $\mathbb{F}$  上  $mn$  维线性空间，记为  $Y$ ，取其基矢为

$$\begin{array}{cccc}
\omega_{11} & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1n} \\
\omega_{21} & \omega_{22} & \cdots & \omega_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\omega_{m1} & \omega_{m2} & \cdots & \omega_{mn}
\end{array} \tag{1.6-1}$$

先证明映射  $\tau$  的存在性。定义  $\tau: U \times V \rightarrow Y$  为（下式构造方式与式(1.3-6)几乎相同，这



是此类映射的通用定义方法)

$$\tau(x^i \epsilon_i, y^j \eta_j) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x^i y^j \omega_{ij}. \quad (1.6-2)$$

容易验证这个映射是双线性的, 并且有  $\tau(\epsilon_i, \eta_j) = \omega_{ij}$ , 空间  $Y$  由  $\tau(U \times V)$  生成. 解决了空间  $Y$  和映射  $\tau$  的存在性问题, 也就说明了条件 (1) 成立.

设  $Z$  是  $\mathbb{F}$  上任意线性空间,  $\forall f \in \mathcal{L}(U, V; Z)$ , 定义线性映射  $g: Y \rightarrow Z$  为

$$g\left(\sum_{i,j}^{m,n} z^{ij} \omega_{ij}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i,j}^{m,n} z^{ij} f(\epsilon_i, \eta_j). \quad (1.6-3)$$

定义左端可作变化  $g(\sum_{i,j} z^{ij} \omega_{ij}) = \sum_{i,j} z^{ij} g(\tau(\epsilon_i, \eta_j))$ . 所以这样定义的  $g \in \text{Hom}(Y, Z)$ , 并且满足  $f = g \circ \tau$ . 从而也就证明了条件 (2) 的存在性.

再证  $g$  的唯一性. 假设还存在另一个线性映射  $g_1: Y \rightarrow Z$  也满足  $f = g_1 \circ \tau$ , 那么对于  $U \times V$  的基矢  $(\epsilon_i, \eta_j)$  有

$$g \circ \tau(\epsilon_i, \eta_j) = f(\epsilon_i, \eta_j) = g_1 \circ \tau(\epsilon_i, \eta_j) \Rightarrow g(\omega_{ij}) = g_1(\omega_{ij}),$$

也就是说  $g$  和  $g_1$  作用在  $Y$  的基矢上结果相同, 从而  $g = g_1$ . ■

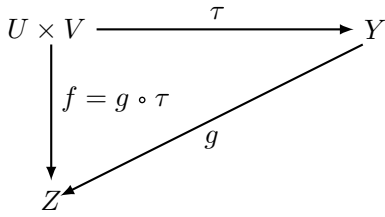


图 1.1: 交换图一

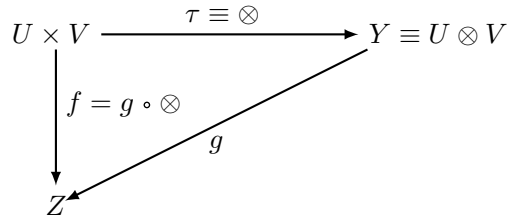


图 1.2: 交换图二

在上面定理证明过程中, 任意取  $mn$  维线性空间  $Y$ , 这说明此空间是不唯一的. 设存在另一  $mn$  维线性空间  $Y_1$  和双线性映射  $\tau_1$  也满足定理1.79中的条件 (1) 和 (2). 两者是什么关系呢?

由于定理1.79中空间  $Z$  是任意取的, 我们可以将其取为空间  $Y_1$  (见图1.3), 依照定理中论述, 对于  $\tau_1$  存在线性映射  $\psi_1$  使得  $\tau_1 = \psi_1 \circ \tau$ .

我们再将交换图换成图1.4形式, 同样由定理1.79可知对于双线性映射  $\tau$  和  $\tau_1$ , 存在线性映射  $\psi_2$  使得  $\tau = \psi_2 \circ \tau_1$ . 由交换图三和四反应的映射间关系可得

$$\tau_1 = \psi_1 \circ \tau = \psi_1 \circ \psi_2 \circ \tau_1 \quad (1.6-4)$$

$$\tau = \psi_2 \circ \tau_1 = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \tau \quad (1.6-5)$$

由于这些映射是作用在整个空间上, 所以有

$$\psi_1 \circ \psi_2 = \text{id} = \psi_2 \circ \psi_1. \quad (1.6-6)$$

即它们之积是恒等映射, 从而说明  $\psi_1$ 、 $\psi_2$  互为逆映射, 因此它们是双射. 由定义1.52可知  $\psi_1$  和  $\psi_2$  是线性同构, 这说明:  $Y$  和  $Y_1$  是线性同构关系. 可得如下命题,

**命题 1.80** 定理1.79中所用的线性空间  $Y$  并不唯一, 但它们线性同构. 或者说: 在相差一个线性同构映射的前提下, 张量积是唯一确定的.

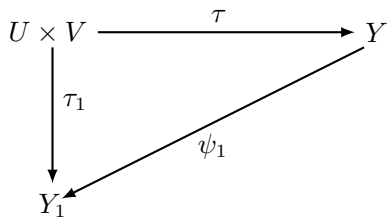


图 1.3: 交换图三

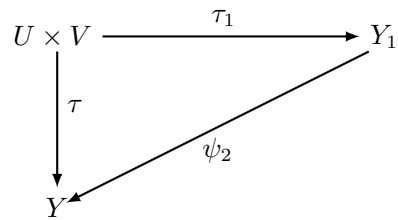


图 1.4: 交换图四

现在可以把  $U \times V$  上的双重线性映射转化为单重线性映射了. 确切地说: 对于给定的线性空间  $U$  和  $V$ , 要构造只依赖于  $U$  和  $V$  的线性空间  $U \otimes V$  及双线性映射  $\tau: U \times V \rightarrow U \otimes V$ , 使得对于任意双线性映射  $f: U \times V \rightarrow Z$ , 存在唯一的单重线性映射  $g: U \otimes V \rightarrow Z$  适合于  $f = g \circ \tau: U \times V \rightarrow Z$ . 见图1.2中的交换关系. 这便是张量积的定义,

**定义 1.81** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间, 维数分别是  $m, n$ . 存在满足定理1.79中条件 (1) 和 (2) 的  $(Y, \tau)$  称为线性空间  $U$  与  $V$  的张量积, 记  $Y \equiv U \otimes V$ .  $\tau$  称为  $Y \equiv U \otimes V$  的标准映射, 并记  $\tau(\alpha, \beta) = \alpha \otimes \beta, \forall \alpha \in U, \beta \in V$ . 参见图1.2.

### 1.6.2 张量积性质

**命题 1.82** 设  $U$  和  $V$  的基矢分别是  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$  和  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . 则: (1)  $\dim(U \otimes V) = \dim U \cdot \dim V$ . (2) 张量积  $U \otimes V$  的基矢为  $\{\epsilon_i \otimes \eta_j | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ .

**证明.** 由定理1.79中存在性部分论述和该定理前的讨论可知结论 (1) 是正确的.

用反证法证明  $\epsilon_i \otimes \eta_j$  线性无关. 假设存在不全为零的系数  $z^{ij} \in \mathbb{F}$  使得  $z^{ij} \epsilon_i \otimes \eta_j = 0$ , 只需将对偶基  $\epsilon^{*k}, \eta^{*l}$  作用在这个等式上, 有  $z^{kl} = 0$ , 与假设矛盾.

线性无关的矢量组  $\epsilon_i \otimes \eta_j$  个数恰好等于张量积空间  $U \otimes V$  维数, 所以它们可以当成张量积空间的基矢. ■

张量积  $U \otimes V$  中任意矢量  $\omega$  皆可由基矢展开, 即

$$\omega = \sum_{i,j} z_{ij} \epsilon_i \otimes \eta_j = \sum_i \epsilon_i \otimes \left( \sum_j z_{ij} \eta_j \right), \quad (1.6-7)$$

上式中的展开系数  $z_{ij}$  是唯一确定的. 令  $\beta_i = \sum_j z_{ij} \eta_j$ , 则上式变为

$$\omega = \sum_i \epsilon_i \otimes \beta_i, \quad (1.6-8)$$

需注意,  $\beta_i (1 \leq i \leq m)$  几乎不可能是  $n$  维空间  $V$  的基矢, 并且  $\{\beta_i\}$  可能是线性相关的. 张量积中任意矢量都可以表示成这种单重求和的形式; 但这种表示形式不具有唯一性, 见下例; 需小心使用.

**例 1.83** 定义1.81中的映射  $\tau$  是双线性的, 所以有

$$\tau(0, \beta) = \tau(0 \cdot 0, \beta) = 0 \cdot \tau(0, \beta) = 0, \quad \text{同理可得} \quad \tau(\alpha, 0) = 0,$$

因此  $0 \otimes \beta = 0 = \alpha \otimes 0, \forall \alpha \in U, \beta \in V$ , 这说明张量积的零元表示不唯一.

如果读者学过量子力学, 那么一定知道电子波函数是两部分的乘积, 其一是位型空间波函数, 其二是自旋空间波函数; 很多时候将每个粒子波函数直接相乘构建多粒子体系的波函数. 从数学角度看这种乘积是张量积. 下面命题为量子信息等领域基础认知提供了参考.

**命题 1.84** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $m(\geq 2)$  维和  $n(\geq 2)$  维线性空间, 设  $U$  基矢是  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ ,  $V$  的基矢是  $\eta_1, \dots, \eta_n$ . 那么,  $\forall \alpha \in U, \beta \in V$ , 它们的张量积  $\alpha \otimes \beta$  一般不能表示成两个或两个以上的形如  $\epsilon_i \otimes \eta_i$  的基矢量和.

**证明.** 用反证法. 设  $\alpha, \beta$  可分别展开为  $\alpha = a^i \epsilon_i$  和  $\beta = b^j \eta_j$ , 并且有  $\alpha \otimes \beta = \sum_i \epsilon_i \otimes \eta_i$ . 而此式左端的张量积可表示为  $\alpha \otimes \beta = \sum_{ij} a^i b^j (\epsilon_i \otimes \eta_j)$ . 由此可得出

$$a_i b_i = 1, \quad a_i b_j = 0, \quad \text{重复指标不求和, 且 } i \neq j.$$

以二维 ( $m = 2 = n$ ) 为例来说明情况. 此时由上式中的第一式可解出  $a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ , 这显然与第二式  $a_1 b_2 = 0, a_2 b_1 = 0$  相矛盾. 对于高维情况也能得到类似矛盾. 这便证明了命题, 即张量积  $\epsilon_i \otimes \eta_i \pm \epsilon_j \otimes \eta_j$  不能写成单项张量积  $\alpha \otimes \beta$  的形式.

除此之外, 当  $i \neq j$  时  $\epsilon_i \otimes \eta_j \pm \epsilon_j \otimes \eta_i$  也不能表示成  $\alpha \otimes \beta$  单项张量积的形式. 请与式(1.6-8)对比, 加深理解. ■

**命题 1.85** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间,  $U^*, V^*$  分别是它们的对偶空间, 则 (1)  $U \otimes V$  自然同构于  $\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{F})$ . (2)  $U^* \otimes V^*$  自然同构于  $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{F})$ .

**证明.** 由于  $V$  的对偶空间  $V^*$  的对偶空间  $V^{**}$  是  $V$  自身 (见式(1.4-10)), 所以可定义

$$(\alpha^{**} \otimes \beta^{**})(f, g) \equiv (\alpha \otimes \beta)(f, g) \stackrel{\text{def}}{=} f(\alpha)g(\beta), \quad \forall \alpha \in U, \beta \in V; f \in U^*, g \in V^*. \quad (1.6-9)$$

可见映射  $\alpha^{**} \otimes \beta^{**} \equiv \alpha \otimes \beta \in \mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{F})$ , 并且这个映射是双线性的; 此外还可证明此映射是单一的 (证明过程与定理1.60中的类似). 由命题1.54可知映射(1.6-9)是自然同构映射. 所以空间  $U \otimes V$  的自然同构于  $\mathcal{L}(U^*, V^*; \mathbb{F})$ .

与上述论证类似, 可证空间  $U^* \otimes V^*$  的自然同构于  $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{F})$ . ■

**注 1.86** 式(1.6-9)作用是有先后顺序的, 也就是说: 如果写成  $(\alpha \otimes \beta)(g, f) = g(\alpha)f(\beta)$ , 则是错误的表示! 因为  $g(\alpha)$  和  $f(\beta)$  均无意义, 这说明张量积一般不满足交换律, 即通常  $\alpha \otimes \beta(f, g) \neq \beta \otimes \alpha(f, g)$ .

**命题 1.87** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间, 则  $\mathcal{L}(U, V; \mathbb{F})$  同构于  $\mathcal{L}(U \otimes V; \mathbb{F})$ .

**证明** . 由定理1.79及定义1.81可知,  $\forall g \in \mathcal{L}(U \otimes V; \mathbb{F})$  都有 (见图1.2)  $f_g = g \circ \otimes \in \mathcal{L}(U, V; \mathbb{F})$ . 由定理1.79知  $g$  是唯一; 那么对于给定  $f$ , 映射  $g \rightarrow f_g$  便是双射. 再者有  $f_{kg_1+g_2} = (kg_1 + g_2) \circ \otimes = kg_1 \circ \otimes + g_2 \circ \otimes = kf_{g_1} + f_{g_2}$ ; 这说明了映射  $g \rightarrow f_g$  还是线性的; 证明过程与特定基矢无关, 所以此映射是自然同构映射. ■

**命题 1.88** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间,  $U^*, V^*$  分别是它们的对偶空间, 如果将  $U \otimes V$  的对偶空间记为  $(U \otimes V)^*$ , 则  $(U \otimes V)^*$  同构于  $U^* \otimes V^*$ .

**证明** . 线性空间  $(U \otimes V)^*$  本来就是  $\mathcal{L}(U \otimes V; \mathbb{F})$  (见定义1.56), 而由上面命题1.87和1.85可知  $\mathcal{L}(U \otimes V; \mathbb{F}) \cong \mathcal{L}(U, V; \mathbb{F}) \cong U^* \otimes V^*$ . 并且这些同构皆是自然同构 (见式(1.4-10)). ■

**命题 1.89** 设  $U, V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的线性空间, 则存在  $U \otimes V$  到  $V \otimes U$  的同构映射  $\phi$  满足  $\phi(\alpha \otimes \beta) = \beta \otimes \alpha$ ,  $\forall \alpha \in U, \forall \beta \in V$ .

**命题 1.90** 设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间, 则  $\mathbb{F} \otimes V, V \otimes \mathbb{F}$  和  $V$  两两之间存在同构映射.

**定理 1.91** 设  $V_1, V_2, V_3$  是数域  $\mathbb{F}$  上线性空间, 则存在  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  到  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  的同构映射  $\phi$  满足  $\phi((\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3) = \alpha_1 \otimes (\alpha_2 \otimes \alpha_3)$ , 其中  $\forall \alpha_i \in V_i$ .

**证明** . 从定理1.66可知  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  和  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  的维数相等, 再由基本定理1.53可知本定理中的同构映射是存在的, 下面我们给出这个映射. 设  $V_1, V_2$  和  $V_3$  的基矢分别是  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m, \eta_1, \dots, \eta_n$  和  $\omega_1, \dots, \omega_l$ . 参考式(1.3-6), 定义映射如下,

$$\phi(z^{ijk}(\epsilon_i \otimes \eta_j) \otimes \omega_k) \stackrel{\text{def}}{=} z^{ijk} \epsilon_i \otimes (\eta_j \otimes \omega_k). \quad (1.6-10)$$

参考定理1.53 “充分性” 证明过程中可知映射  $\phi$  是  $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$  到  $V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$  的一个同构映射. 将  $\alpha_i$  在各自基矢展开, 再由定义(1.6-10)出发可直接得到  $\phi((\alpha_1 \otimes \alpha_2) \otimes \alpha_3) = \alpha_1 \otimes (\alpha_2 \otimes \alpha_3)$ .

参阅本定理证明过程, 可证明命题1.89和1.90. ■

定理1.91说明张量积满足结合律, 先算哪两个张量积都可以, 可直接记成  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ , 无需再加括号. 由定理1.91易将张量积定义拓展到有限多个; 上面所有定理、命题也都可以拓展到有限多个张量积形式, 而内容几乎无需改变. 例如, 本节自然同构关系可总结为,

$$(U \otimes V \otimes W)^{**} \cong U \otimes V \otimes W \cong \mathcal{L}(U^*, V^*, W^*; \mathbb{F}) \cong \mathcal{L}(U^* \otimes V^* \otimes W^*; \mathbb{F}), \quad (1.6-11a)$$

$$(U \otimes V \otimes W)^* \cong U^* \otimes V^* \otimes W^* \cong \mathcal{L}(U, V, W; \mathbb{F}) \cong \mathcal{L}(U \otimes V \otimes W; \mathbb{F}). \quad (1.6-11b)$$

## 1.7 张量定义

设  $V$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $m$  维线性空间,  $V^*$  是其对偶空间, 记张量积为

$$\mathcal{T}_q^p(V) \equiv \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\uparrow} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\uparrow}, \quad p \geq 0, q \geq 0, \text{ 且 } p, q \in \mathbb{Z}. \quad (1.7-1)$$

特别约定

$$\mathcal{T}_0^0(V) \equiv \mathcal{T}^0(V) \equiv \mathcal{T}_0(V) \equiv \mathbb{F}, \quad \mathcal{T}_0^p(V) \equiv \mathcal{T}^p(V), \quad \mathcal{T}_q^0(V) \equiv \mathcal{T}_q(V). \quad (1.7-2)$$

式(1.7-1)的  $V$  与  $V^*$  可以交错排列, 由命题1.89可知, 在相差一个同构映射意义下式(1.7-1)是唯一的.

**定义 1.92** 张量积  $\mathcal{T}_q^p(V)$  中的元素称为  $(p, q)$  型张量,  $p$  称为逆变次数或反变次数,  $q$  称为协变次数或共变次数.

**定义 1.93**  $(p, q)$  型张量是指  $\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\uparrow} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\uparrow}$  上的一个  $p+q$  重线性函数.  $V$  上全体  $(p, q)$  型张量除了记为  $\mathcal{T}_q^p(V)$ , 还可记为  $\mathcal{L}(\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{p\uparrow} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{q\uparrow}; \mathbb{F})$ .

由式(1.6-11)可知, 上述两个定义是等价的. 需注意: 定义1.92中是  $p$  个  $V$  和  $q$  个  $V^*$  的张量积, 而定义1.93中是  $p$  个  $V^*$  和  $q$  个  $V$  的笛卡尔积.

特别地,  $(1, 0)$  型张量 (即线性空间  $V$  中元素) 称为逆变矢量;  $(0, 1)$  型张量 (即对偶空间  $V^*$  中元素) 称为协变矢量;  $(0, 0)$  型张量 (即数域  $\mathbb{F}$  中元素) 称为标量.

设  $V$  的基矢为  $\{\epsilon\}$ , 则对偶空间  $V^*$  的基矢为  $\{\epsilon^*\}$ . 于是由命题1.82可知

$$\epsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{i_p} \otimes \epsilon^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{*j_q}, \quad i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q = 1, \dots, m \quad (1.7-3)$$

是  $\mathcal{T}_q^p(V)$  的一组基矢.  $\forall \Phi \in \mathcal{T}_q^p(V)$  可唯一表示为

$$\Phi = \Phi_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} \epsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{i_p} \otimes \epsilon^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{*j_q} \quad (1.7-4)$$

其中,

$$\Phi_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = \Phi(\epsilon^{*i_1}, \dots, \epsilon^{*i_p}; \epsilon_{j_1}, \dots, \epsilon_{j_q}) = \langle \Phi, \epsilon^{*i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{*i_p} \otimes \epsilon_{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{j_q} \rangle. \quad (1.7-5)$$

$\Phi_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$  称为张量  $\Phi$  在基矢  $\{\epsilon \otimes \epsilon^*\}$  上的分量.

选空间  $V$  的另一组基底  $\{\eta \otimes \eta^*\}$ , 两组基底由非退化矩阵关联, 即  $\eta_k = \epsilon_i A_{\cdot k}^i$ ,  $B$  是矩阵  $A$  的转置逆 (见定理1.59).  $\tilde{\Phi}_{k_1 \cdots k_q}^{l_1 \cdots l_p}$  是在基矢  $\{\eta \otimes \eta^*\}$  上的分量, 结合式(1.7-4)有

$$\begin{aligned} \Phi &= \tilde{\Phi}_{k_1 \cdots k_q}^{l_1 \cdots l_p} \eta_{l_1} \otimes \cdots \otimes \eta_{l_p} \otimes \eta^{*k_1} \otimes \cdots \otimes \eta^{*k_q} \\ &= \tilde{\Phi}_{k_1 \cdots k_q}^{l_1 \cdots l_p} A_{\cdot l_1}^{i_1} \cdots A_{\cdot l_p}^{i_p} B_{j_1}^{k_1} \cdots B_{j_q}^{k_q} \epsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{i_p} \otimes \epsilon^{*j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{*j_q} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{\Phi}_{k_1 \dots k_q}^{l_1 \dots l_p} = \Phi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} A_{k_1}^{j_1} \dots A_{k_q}^{j_q} B_{i_1}^{l_1} \dots B_{i_p}^{l_p}. \quad (1.7-6)$$

上式是在基矢变换下，张量对应分量之间的变换式。最早，Ricci 就是用此式定义张量，也就是张量的分量定义方式。

反之，如果对空间  $V$  的每一个基底  $\{\epsilon \otimes \epsilon^*\}$  都指定一个由  $m^{p+q}$  个  $\mathbb{F}$  值数构成的数组  $\Phi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ ；当基底变换时 ( $\eta_k = \epsilon_i A_k^i$ )，相应数按式(1.7-6)进行变换，那么可以定义一个  $(p, q)$  型张量  $\Phi_{new}$ ，它以  $\Phi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$  为它在基底  $\{\epsilon \otimes \epsilon^*\}$  下的分量。仿照式(1.3-5)或式(1.5-6)中的手法，定义如下  $\mathbb{F}$  值映射，

$$\Phi_{new}(\alpha_{i_1} \epsilon^{*i_1}, \dots, \alpha_{i_p} \epsilon^{*i_p}, v^{j_1} \epsilon_{j_1}, \dots, v^{j_q} \epsilon_{j_q}) \stackrel{def}{=} \Phi_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_p} v^{j_1} \dots v^{j_q}. \quad (1.7-7)$$

这样定义的映射对每个宗量都是线性的，在基矢变化时定义右端项具有形式不变性。不难看出  $\Phi_{new} \in \mathcal{L}(V^* \times \dots \times V^* \times V \times \dots \times V; \mathbb{F})$ ，这个定义便说明了可由分量定义得到张量的代数定义1.93。

现代代数、几何中定义、定理的描述方式是尽量不涉及分量；用分量语言描述后，还需验证这种描述必须在基矢变换下具有形式不变性，即描述不能依赖于某一套特定基矢，必须对每套基矢都适用（并且形式相同）。定义1.92和定义1.93中没有涉及任何分量信息，天生具有这种不变性。而上面由 Ricci 用分量语言定义张量的方式（见(1.7-6)）基本已被抛弃了。

### 加法、张量积、缩并

张量积  $\mathcal{T}_q^p(V)$  本身就是一个线性空间，属于它的元素（也就是  $(p, q)$  型张量）自然存在加法和数量乘法，见定义1.34中的描述。其实就是在选定基底后，对应分量相加减；或者对应分量进行数量乘法。这便是同型张量的**加减法**。

除了此以外，不同型（或同型）张量间还可以定义**张量积**。设有两个张量积空间  $\mathcal{T}_q^p(V)$  和  $\mathcal{T}_s^r(V)$ ；这两个空间都是线性空间，自然可以用上节的张量积定义1.81把这两个线性空间乘起来，得到一个新的张量积空间  $\mathcal{T}_{q+s}^{p+r}(V) = \mathcal{T}_q^p(V) \otimes \mathcal{T}_s^r(V)$ 。具体来说便是，在取定基底后，对于任意  $x \in \mathcal{T}_q^p(V)$  和  $y \in \mathcal{T}_s^r(V)$ ，它们的乘积是对应分量的乘积（即  $\mathbb{F}$  值的数量乘法，比如实数乘法或复数乘法），

$$(x \otimes y)_{j_1 \dots j_{q+s}}^{i_1 \dots i_{p+r}} = x_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \cdot y_{j_{q+1} \dots j_{q+s}}^{i_{p+1} \dots i_{p+r}}. \quad (1.7-8)$$

很显然，用这种方法定义的乘法符合分配律、结合律。

张量另外一个重要的运算是**缩并**，它是一个线性映射  $C_\mu^\lambda: \mathcal{T}_q^p(V) \rightarrow \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}(V)$ 。我们以  $(2, 2)$  型张量为例来说明，用张量  $\Phi$  的分量形式来表示

$$\begin{aligned} C_1^2 \Phi &= C_1^2 (\Phi_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \epsilon_{i_1} \otimes \epsilon_{i_2} \otimes \epsilon^{*j_1} \otimes \epsilon^{*j_2}) = \Phi_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} C_1^2 (\epsilon_{i_1} \otimes \epsilon_{i_2} \otimes \epsilon^{*j_1} \otimes \epsilon^{*j_2}) \\ &= \Phi_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \langle \epsilon_{i_2}, \epsilon^{*j_1} \rangle (\epsilon_{i_1} \otimes \epsilon^{*j_2}) = \Phi_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \delta_{i_2}^{j_1} (\epsilon_{i_1} \otimes \epsilon^{*j_2}) = \Phi_{k j_2}^{i_1 k} \epsilon_{i_1} \otimes \epsilon^{*j_2}. \end{aligned} \quad (1.7-9)$$

即让指定基矢作内积，得到  $\delta$  函数，运算后便是分量指定指标求和；这种操作把协变和逆变各降一阶。

## 非对易性

虽然由命题1.89可知, 存在同构映射  $\phi$  使得  $\phi(\alpha \otimes \beta) = \beta \otimes \alpha$ ; 但是一般说来两者间不能直接划等号, 即一般说来  $\alpha \otimes \beta = \beta \otimes \alpha$  是不正确的. 其根源是张量积定义1.81中的标准映射  $\tau(\cdot, \cdot)$  一般说来不是对称的双线性函数; 双线性函数的作用是有顺序的, 见注解1.86中叙述.

这种非对易性只体现在协变内部或者逆变内部, 用分量语言来表示便是: 一般情况下,  $\Phi^{ij} \neq \Phi^{ji}$ 、 $\Phi_{ij} \neq \Phi_{ji}$ . 更多讨论见第47页的脚注2.

## 1.8 外代数

在本节, 叙述对称张量和反对称张量的概念, 着重讨论反对称张量. 为叙述方便, 只讨论纯协变张量, 同样的讨论也适用于纯逆变张量; 但本节内容一般不能应用于混合张量  $T^r_s$ .

**定义 1.94** 设  $\xi \in \mathcal{T}_q(V)$ , 如果交换任意两个自变宗量位置 (见定义1.93),  $\xi$  值不变, 则称  $\xi$  是对称的  $q$  阶协变张量. 如果交换任意两个自变宗量位置,  $\xi$  值只改变符号, 则称  $\xi$  是反对称的  $q$  阶协变张量.

我们用二阶协变张量来说明上面的定义, 对称是指对于任意非零的逆变矢量  $u, v$ , 都有  $\xi(u, v) = \xi(v, u)$ ; 反对称是指对于任意非零的逆变矢量  $u, v$ , 都有  $\xi(u, v) = -\xi(v, u)$ .

用  $\mathcal{S}(q)$  表示  $q$  个不同元素的置换群 (见5页例1.29). 设  $\sigma \in \mathcal{S}(q)$ , 可定义符号函数  $\text{sign}(\sigma)$  为,

$$\text{sign}(\sigma) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, & \text{如果 } \sigma \text{ 是偶置换;} \\ -1, & \text{如果 } \sigma \text{ 是奇置换.} \end{cases} \quad (1.8-1)$$

很明显, 有  $\text{sign}(\sigma \circ \tau) = \text{sign}(\sigma) \cdot \text{sign}(\tau)$ ,  $\forall \sigma, \tau \in \mathcal{S}(q)$ .

**命题 1.95** 设  $\xi \in \mathcal{T}_q(V)$ , 那么,  $\xi$  是对称张量的充要条件是  $\xi$  的分量关于各个指标是对称的, 即  $\xi_{i_1 \dots i_q} = \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}$ .  $\xi$  是反对称张量的充要条件是  $\xi$  的分量关于各个指标是反对称的, 即  $\text{sign}(\sigma) \cdot \xi_{i_1 \dots i_q} = \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}$ . 其中  $\sigma$  是置换群  $\mathcal{S}(q)$  中任意群元.

**证明**. 设  $\xi$  的展开式 (参见式(1.7-4)) 为  $\xi = \xi_{i_1 \dots i_q} \epsilon^{*i_1} \otimes \dots \otimes \epsilon^{*i_q}$ , 任取  $q$  个非零逆变矢量  $v_j$  (指标  $j$  只是标记不同的矢量, 不是分量标记;  $(v_j)^{i_j}$  中的上标  $i_j$  才是分量), 则

$$\xi(v_1, \dots, v_q) = \xi_{i_1 \dots i_q} (v_1)^{i_1} \dots (v_q)^{i_q}, \quad (1.8-2)$$

显然这个展开式与基矢选择无关.  $\forall \sigma \in \mathcal{S}(q)$ , 定义1.94中交换任意自变宗量是指,

$$(\sigma(\xi))(v_1, \dots, v_q) \equiv \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}). \quad (1.8-3)$$

依据上式, 将  $\sigma$  作用在式(1.8-2)两边, 有 (记  $\tau = \sigma^{-1}$ )

$$(\sigma(\xi))(v_1, \dots, v_q) = \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = \xi_{i_1 \dots i_q} (v_{\sigma(1)})^{i_1} \dots (v_{\sigma(q)})^{i_q}$$

$$= \xi_{i_1 \dots i_q}(v_1)^{i_{\tau(1)}} \dots (v_q)^{i_{\tau(q)}} = \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}(v_1)^{i_1} \dots (v_q)^{i_q}. \quad (1.8-4)$$

有了上述准备, 可以开始证明命题了.

如果  $\xi$  是对称的 (等价于  $\xi(v_1, \dots, v_q) = \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$ ), 则从式(1.8-2)和(1.8-4)可知  $\xi_{i_1 \dots i_q} = \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}$ . 反之, 如果有  $\xi_{i_1 \dots i_q} = \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}$ , 那么从式(1.8-2)和(1.8-4)也可得到  $\xi(v_1, \dots, v_q) = \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$ .

如果  $\xi$  是反对称的 (等价于  $\xi(v_1, \dots, v_q) = \text{sign}(\sigma) \cdot \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$ ), 则从式 (1.8-2) 和 (1.8-4) 可知  $\xi_{i_1 \dots i_q} = \text{sign}(\sigma) \cdot \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}$ . 反之, 如果有  $\xi_{i_1 \dots i_q} = \text{sign}(\sigma) \cdot \xi_{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(q)}}$ , 那么从式 (1.8-2) 和 (1.8-4) 也可得到  $\xi(v_1, \dots, v_q) = \text{sign}(\sigma) \cdot \xi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)})$ . 此处的表达式与命题中略有差别, 读者能识别出两者本质上相同吗? ■

命题1.95指出: 用分量表达对称、反对称张量与定义1.94中的描述方式是等价的. 很多时候用分量语言来描述对称或反对称更为方便, 比如下述定义,

**定义 1.96** 用圆括号表示对称, 方括号表示反对称, 定义如下

$$\xi_{(i_1 i_2 \dots i_q)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(q)} \xi_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(q)}}, \quad (1.8-5)$$

$$\xi_{[i_1 i_2 \dots i_q]} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(q)} \text{sign}(\sigma) \xi_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \dots i_{\sigma(q)}}. \quad (1.8-6)$$

给出几个常用的例子,

$$\xi_{(ab)} = \frac{1}{2}(\xi_{ab} + \xi_{ba}), \quad \xi_{[ab]} = \frac{1}{2}(\xi_{ab} - \xi_{ba}). \quad (1.8-7)$$

$$\xi_{(abc)} = \frac{1}{6}(\xi_{abc} + \xi_{bca} + \xi_{cab} + \xi_{acb} + \xi_{bac} + \xi_{cba}), \quad (1.8-8)$$

$$\xi_{[abc]} = \frac{1}{6}(\xi_{abc} + \xi_{bca} + \xi_{cab} - \xi_{acb} - \xi_{bac} - \xi_{cba}). \quad (1.8-9)$$

如果想让方括号 (或圆括号) 中某些参数不参与反对称 (或对称) 循环, 可用下式表示

$$\xi_{[ij|kl|n]}. \quad (1.8-10)$$

上式表示  $i, j, n$  参与全反对称操作, 而参数  $k, l$  不参与反对称操作.

与  $m$  级矩阵  $A = \{a_{ij}\}$  的行列式 (Determinant) 定义很类似的另一个概念是 (见式(1.5-17)并与之对比, 只是所有乘积前的系数全部是  $+1$ ):

**定义 1.97** 积和式 (Permanent), 定义为

$$\text{perm}(A) = \sum_{j_1 j_2 \dots j_m} (+1)^{\tau(j_1 j_2 \dots j_m)} a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{mj_m}, \quad j_1 \neq j_2 \neq \dots \neq j_m. \quad (1.8-11)$$

例如两个低阶积和式为

$$\text{perm} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc, \quad \text{perm} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh + ceg + bdi + afh.$$



与行列式（见例1.78）相同，积和式也可看作多重线性函数。量子物理中的费米子表示用行列式，玻色子表示则要用积和式。上面的对称化（即圆括号）也可用积和式。

### 1.8.1 广义 Kronecker 记号

本小节约定：所有角标，例如  $\{i\}, \{j\}$ ，跑动范围是  $1 \leq \{i\}, \{j\} \leq m$ ，并且  $q \leq m$ 。通常的 **Kronecker** 记号是（一般情况下不区分这个记号的上下指标），

$$\delta_{ij} \equiv \delta^{ij} \equiv \delta_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (1.8-12)$$

现引入广义 **Kronecker** 记号（广义记号需要区分上下指标），

$$\delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} +1, & i_1, \dots, i_q \text{ 互不相同, 且 } j_1, \dots, j_q \text{ 是 } i_1, \dots, i_q \text{ 偶置换;} \\ -1, & i_1, \dots, i_q \text{ 互不相同, 且 } j_1, \dots, j_q \text{ 是 } i_1, \dots, i_q \text{ 奇置换;} \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases} \quad (1.8-13)$$

根据定义， $\delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q}$  关于上指标是反对称的，关于下指标也是反对称的。当广义 Kronecker 记号上下标是相同的内容，只是排列不同（即，恒不为零时），那么有

$$\delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} = \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_q \\ j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix}. \quad (1.8-14)$$

如果广义 Kronecker 记号为零，那么置换记号  $\begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_q \\ j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix}$  是没有定义的。当广义 Kronecker 记号恒不为零时，置换记号自然有定义，利用置换群元的乘法，那么必然有

$$\begin{aligned} \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_q \\ k_1 & \cdots & k_q \end{pmatrix} &= \text{sign} \left[ \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_q \\ j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_q \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{sign} \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_q \\ j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix} \cdot \text{sign} \begin{pmatrix} j_1 & \cdots & j_q \\ k_1 & \cdots & k_q \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \delta_{k_1 \cdots k_q}^{i_1 \cdots i_q} &= \delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} \cdot \delta_{k_1 \cdots k_q}^{j_1 \cdots j_q}. \quad \text{重复指标 } \{j\} \text{ 不求和} \end{aligned} \quad (1.8-15)$$

再次强调，上式要求  $(i_1 \cdots i_q)$ 、 $(j_1 \cdots j_q)$  和  $(k_1 \cdots k_q)$  必须是满足定义(1.8-13)前两行，并且不满足第三行的整数。

**命题 1.98** 广义 Kronecker 记号有行列式表示，

$$\delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} = \begin{vmatrix} \delta_{j_1}^{i_1} & \cdots & \delta_{j_q}^{i_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{j_1}^{i_q} & \cdots & \delta_{j_q}^{i_q} \end{vmatrix}. \quad (1.8-16)$$

**证明** . 根据行列式定义(1.5-17)直接计算上式右端得,

$$\delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(q)} (-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_q)} \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \cdots \delta_{\sigma(j_q)}^{i_q}. \quad (1.8-17)$$

命题等价于证明上式. 当指标  $(i_1, \cdots, i_q)$  (或  $(j_1, \cdots, j_q)$ ) 中有两个 (或多个) 相同时, 由行列式的反对称性质可知, 上式为零. 与广义 Kronecker 记号第三行定义相符合.

下面只讨论  $(i_1, \cdots, i_q)$  两两不相等情形. 如果  $(j_1, \cdots, j_q)$  有不同于  $(i_1, \cdots, i_q)$  的元素时, 比如  $(i_1, i_2)$  指标集是  $(1, 2)$ , 而  $(j_1, j_2)$  指标集是  $(2, 3)$ , 那么式(1.8-17)中的积肯定包含有恒为零的  $\delta_j^i$  项 (如  $\delta_2^1 \delta_3^2 - \delta_3^1 \delta_2^2$ ), 所以上面行列式恒为零. 与广义 Kronecker 记号第三行定义相符合.

所以, 只需讨论指标集  $(j_1, \cdots, j_q)$  全同于  $(i_1, \cdots, i_q)$  的情形, 两者差别只是排列不同. 行列式的求和式共有  $q!$  项, 其中只有一项非零, 即  $\delta_{i_1}^{i_1} \delta_{i_2}^{i_2} \cdots \delta_{i_q}^{i_q}$  (重复指标不求和), 其它项因  $\delta_j^i$  记号的上下指标内容不同而为零. 此非零项前的  $(-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_q)}$  系数返回值与式(1.8-13)中的奇偶排列返回值相同. 证毕. ■

参考上面的命题中的式(1.8-17), 式(1.8-18)几乎一望而知,

$$\delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(q)} \text{sign}(\sigma) \delta_{\sigma(j_1)}^{i_1} \cdots \delta_{\sigma(j_q)}^{i_q} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}(q)} \text{sign}(\sigma) \delta_{j_1}^{\sigma(i_1)} \cdots \delta_{j_q}^{\sigma(i_q)}, \quad (1.8-18)$$

$$= q! \delta_{[j_1}^{i_1} \cdots \delta_{j_q]}^{i_q} = q! \delta_{j_1}^{[i_1} \cdots \delta_{j_q]}^{i_q]. \quad (1.8-19)$$

参考定义1.96, 式(1.8-18)可直接变为式(1.8-19). 利用(1.8-19)可直接证明下两式,

$$\frac{1}{q!} \delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} T^{j_1 \cdots j_q} = \delta_{j_1}^{[i_1} \cdots \delta_{j_q]}^{i_q] T^{j_1 \cdots j_q} = T^{[i_1 \cdots i_q]}, \quad (1.8-20)$$

$$\frac{1}{q!} \delta_{i_1 \cdots i_q}^{j_1 \cdots j_q} S_{j_1 \cdots j_q} = \delta_{[i_1}^{j_1} \cdots \delta_{i_q]}^{j_q] S_{j_1 \cdots j_q} = S_{[i_1 \cdots i_q]}. \quad (1.8-21)$$

缩并运算中的方括号具有“传染性”(圆括号亦然, 证明留给读者),

$$S_{i_1 \cdots i_q} T^{[i_1 \cdots i_q]} = S_{i_1 \cdots i_q} \frac{1}{q!} \delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} T^{j_1 \cdots j_q} = S_{[j_1 \cdots j_q]} T^{j_1 \cdots j_q}. \quad (1.8-22)$$

括号内增加异种括号恒为零, 以及异种括号缩并恒为零 (证明留给读者), 例如

$$T_{[a[bc]d]} = 0, \quad T_{[a(bc)d]} = 0; \quad T_{(abc)} S^{[abc]} = 0. \quad (1.8-23)$$

### 1.8.1.1 缩并

单重 Kronecker 记号的缩并是,

$$\delta_i^i \equiv \sum_{i=1}^m \delta_i^i = \sum_{i=1}^m 1 = m. \quad (1.8-24)$$

上式中求和号下的重复指标  $i$  不再求和（即不是双重求和）；这是一个熟知的式子，广义 Kronecker 记号自然有与之对应的公式。我们先将广义 Kronecker 记号展开，把行列式(1.8-16)按最后一行将其展开，有

$$\begin{aligned}\delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q} &= (-)^{q+1} \delta_{j_1}^{i_q} \cdot \delta_{j_2 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{q-1}} + (-)^{q+2} \delta_{j_2}^{i_q} \cdot \delta_{j_1 \hat{j}_2 j_3 \dots j_q}^{i_1 \dots i_{q-1}} + \dots + (-)^{q+q} \delta_{j_q}^{i_q} \cdot \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} \\ &= \sum_{s=1}^q (-)^{q+s} \delta_{j_s}^{i_q} \cdot \delta_{j_1 \dots \hat{j}_s \dots j_q}^{i_1 \dots i_{q-1}}.\end{aligned}\quad (1.8-25)$$

其中脱字符  $\hat{j}$  表示没有这一项；第二行只是将第一行写成求和形式而已。令式(1.8-25)中左端项的  $i_q = j_q = k$ ，即令最后一项求和，得

$$\begin{aligned}\delta_{j_1 \dots j_{q-1} k}^{i_1 \dots i_{q-1} k} &= (-)^{q+1} \delta_{j_1}^k \cdot \delta_{j_2 \dots j_{q-1} k}^{i_1 \dots i_{q-1}} + (-)^{q+2} \delta_{j_2}^k \cdot \delta_{j_1 \hat{j}_2 j_3 \dots j_{q-1} k}^{i_1 \dots i_{q-1}} + \dots + (-)^{q+q} \delta_k^k \cdot \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} \\ &= (-)^{q+1} \delta_{j_2 \dots j_{q-1} j_1}^{i_1 \dots i_{q-1}} + (-)^{q+2} \delta_{j_1 \hat{j}_2 j_3 \dots j_{q-1} j_2}^{i_1 \dots i_{q-1}} + \dots + (-)^{q+q} m \cdot \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} \\ &= -\delta_{j_1 j_2 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} - \delta_{j_1 j_2 j_3 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} - \dots - \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} + m \cdot \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}} \\ &= (m - (q - 1)) \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}}.\end{aligned}$$

我们将上式中的  $q - 1$  换成  $q$  便有

$$\delta_{j_1 \dots j_q k}^{i_1 \dots i_q k} = (m - q) \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q}.\quad (1.8-26)$$

如果令上式中的  $i_q = j_q = l$ ，即求和，便有

$$\delta_{j_1 \dots j_{q-1} l k}^{i_1 \dots i_{q-1} l k} = (m - q) \delta_{j_1 \dots j_{q-1} l}^{i_1 \dots i_{q-1} l} = (m - q)(m - (q - 1)) \delta_{j_1 \dots j_{q-1}}^{i_1 \dots i_{q-1}}.\quad (1.8-27)$$

由此式作递归易得

$$\begin{aligned}\delta_{j_1 \dots j_q i_{q+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_r} &= (m - (r - 1)) \dots (m - (q + 1)) (m - q) \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q} \\ &= \frac{(m - q)!}{(m - r)!} \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q}, \quad 0 \leq q \leq r \leq m.\end{aligned}\quad (1.8-28)$$

此式是缩并运算的核心式，由它可以得到诸多公式；比如令式(1.8-28)中的  $q = 0$ ，则得，

$$\delta_{i_1 \dots i_r}^{i_1 \dots i_r} = \frac{m!}{(m - r)!}.\quad (1.8-29)$$

当上式中的  $r = 1$  时，自然得到式(1.8-24)。当上式中的  $r = m$  时，得到

$$\delta_{i_1 \dots i_m}^{i_1 \dots i_m} = m!.\quad (1.8-30)$$

令式(1.8-28)中的  $r = m$ ，则得，

$$\delta_{j_1 \dots j_q i_{q+1} \dots i_m}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_m} = (m - q)! \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q}.\quad (1.8-31)$$

令上式中的  $q = 0$  也能得到式(1.8-30)。

## 1.8.1.2 乘积

这小节给出两个个广义 Kronecker 记号乘积（及缩并）的计算公式。在公式(1.8-15)中，我们强调了：重复指标  $\{j\}$  不求和；下式是对重复指标求和的公式，

$$\delta_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_q} = \frac{1}{q!} \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q} \cdot \delta_{k_1 \dots k_q}^{j_1 \dots j_q} \quad \text{重复指标 } \{j\} \text{ 求和} \quad (1.8-32)$$

**证明：**当上式中  $(i_1 \dots i_q)$  不是  $(k_1 \dots k_q)$  的置换时，那么等号两端必然都是零。当  $\{i\}$ （或  $\{k\}$ ）内部满足定义(1.8-13)第三行时，那么上式等号两端必然也都是零。由于指标集  $\{j\}$  从 1 跑到  $m$ ，自然有些组合会令式(1.8-32)右端的两项之一（或者两项）为零，但这并不影响最终的求和结果（加上零，等于什么都没加！）。

所以我们只需考虑  $\{i\}$ 、 $\{j\}$  和  $\{k\}$  满足定义(1.8-13)前两行的情形即可。在这种情形下，求和哑标  $\{j\}$  的各种排列中有  $q!$  项使得右端非零，所以除以了系数  $q!$ ；因为哑标  $\{j\}$  有上下两组，所以它们内部因交换产生的负号正好相消，因此每个非零项都是相等的。 ■

令式(1.8-32)中的  $k_1 = i_1, \dots, k_q = i_q$ ，同时利用式(1.8-29)，有

$$\delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q} \cdot \delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q} = q! \frac{m!}{(m-q)!}. \quad (1.8-33)$$

式(1.8-32)是对全部指标缩并，下式给出只对部分指标缩并的公式，

$$\delta_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_r}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_r} \cdot \delta_{k_{q+1} \dots k_r}^{j_{q+1} \dots j_r} = (r-q)! \delta_{j_1 \dots j_q k_{q+1} \dots k_r}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_r}, \quad 0 \leq q \leq r \leq m. \quad (1.8-34)$$

证明过程与式(1.8-32)的证明过程类似，请读者补齐。令上式中的  $k_{q+1} = i_{q+1}, \dots, k_r = i_r$ ，并利用式(1.8-28)，有

$$\delta_{j_1 \dots j_q j_{q+1} \dots j_r}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_r} \cdot \delta_{i_{q+1} \dots i_r}^{j_{q+1} \dots j_r} = (r-q)! \delta_{j_1 \dots j_q i_{q+1} \dots i_r}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_r} = (r-q)! \frac{(m-q)!}{(m-r)!} \delta_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_q}. \quad (1.8-35)$$

再给出一个重要公式，

$$\delta_{j_1 \dots j_r}^{i_1 \dots i_q i_{q+1} \dots i_r} \cdot \delta_{k_1 \dots k_q i_{q+1} \dots i_r}^{j_1 \dots j_r} = r! \frac{(m-q)!}{(m-r)!} \delta_{k_1 \dots k_q}^{i_1 \dots i_q}, \quad 0 \leq q \leq r \leq m. \quad (1.8-36)$$

证明过程与式(1.8-32)的证明过程类似，先缩并指标  $\{j\}$ ，得出因子  $r!$ ；再缩并指标  $i_{q+1}$  至  $i_r$ ，并用式(1.8-28)可得到最终的公式。

作为应用，下面证明：方括号内可以随意增减方括号（圆括号亦然，证明留给读者），

$$\begin{aligned} T_{[[i_1 \dots i_q] k_{q+1} \dots k_r]} &\stackrel{1.8-21}{=} \frac{1}{r!} \delta_{i_1 \dots i_q k_{q+1} \dots k_r}^{l_1 \dots l_q l_{q+1} \dots l_r} \left( \frac{1}{q!} \delta_{l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_q} T_{j_1 \dots j_q l_{q+1} \dots l_r} \right) \\ &= \frac{1}{r! q!} \delta_{i_1 \dots i_q k_{q+1} \dots k_r}^{l_1 \dots l_q l_{q+1} \dots l_r} \delta_{l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_q} \cdot T_{j_1 \dots j_q l_{q+1} \dots l_r} \\ &\stackrel{1.8-34}{=} \frac{1}{r!} \delta_{i_1 \dots i_q k_{q+1} \dots k_r}^{j_1 \dots j_q l_{q+1} \dots l_r} T_{j_1 \dots j_q l_{q+1} \dots l_r} \\ &\stackrel{1.8-21}{=} T_{[i_1 \dots i_q k_{q+1} \dots k_r]}. \end{aligned} \quad (1.8-37)$$

由式(1.8-34)和(1.8-36)是缩并乘积的核心式，再结合上小节的缩并公式，可得到一些常用公式，不再列出。

## 1.8.1.3 行列式

设  $a = \{a_i^j\}$  是  $q$  级矩阵, 那么有行列式的多种表达方式

$$\begin{aligned} \det(a) &= \sum_{j_1 \cdots j_q} (-1)^{\sigma(j_1 \cdots j_q)} a_1^{j_1} \cdots a_q^{j_q} = \delta_{j_1 \cdots j_q}^{1 \cdots q} a_1^{j_1} \cdots a_q^{j_q} = \epsilon_{j_1 \cdots j_q} a_1^{j_1} \cdots a_q^{j_q} \\ &= \delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} a_{i_1}^{j_1} \cdots a_{i_q}^{j_q} \quad \text{指标 } \{i\} \text{ 取固定整数, 不求和; } \{j\} \text{ 求和} \\ &= \frac{1}{q!} \delta_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_q} a_{i_1}^{j_1} \cdots a_{i_q}^{j_q} \quad \text{指标 } \{i\}, \{j\} \text{ 求和} \end{aligned} \quad (1.8-38)$$

上式第一个等号“=”是行列式定义(1.5-17); 第二、三个“=”无非是将置换群元  $\sigma$  换个记号而已, 需要强调的是  $\epsilon_{j_1 \cdots j_q}$  下角标中的任意指标取值不能大于  $q$ ; 第四个“=”中的  $(i_1, \cdots, i_q)$  取固定整数并且不求和, 它只是  $(1, \cdots, q)$  的某种排列, 比如  $(2, 3, 1, \cdots, q)$ ; 第五个“=”令指标  $\{i\}$  也求和, 此时必然会产生  $q!$  个相同项(见式(1.8-32)证明过程的讨论), 所以引入了该系数.

## 1.8.2 外积

外代数一般是把式(1.8-50d)当作定义, 然后展开讨论, 得到全部理论; 这种讲法请参阅文献 [5]<sup>§2.3</sup>; 此种讲法虽然逻辑清晰、结构缜密, 但对初学者而言显得有些晦涩、神秘. 下面我们采用另外一种讲法, 虽然数学严格性、简洁性不如前者, 但较易理解.

## 1.8.2.1 定义

为使公式简洁, 以逆变矢量来讨论外积(可省掉角标上的星号), 结论同样适用于协变矢量. 设  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的  $m$  维矢量空间, 取  $V$  的一组基  $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_m$ , 用这组基和实数“1”形式地作下列元素

$$\begin{array}{lll} 1, & \text{单位元素,} & \bigwedge^0(V) \equiv \mathbb{R}; \\ \epsilon_i, & i = 1, 2, \cdots, m, & \bigwedge^1(V) \equiv V; \\ \epsilon_{i_1} \wedge \epsilon_{i_2}, & 1 \leq i_1 < i_2 \leq m, & \bigwedge^2(V); \\ \cdots \cdots, & \cdots \cdots, & \cdots \cdots; \\ \epsilon_{i_1} \wedge \epsilon_{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}, & 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m, & \bigwedge^p(V); \\ \cdots \cdots, & \cdots \cdots, & \cdots \cdots; \\ \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \wedge \cdots \wedge \epsilon_m, & \text{只有一个元素,} & \bigwedge^m(V) \cong \mathbb{R}. \end{array} \quad (1.8-39)$$

上面一共有

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m} = 2^m. \quad (1.8-40)$$

个元素, 用这  $2^m$  个元素作为基底, 数量乘法选为实数乘法, 矢量加法为同种基矢前实系数相加, 则可另构建一个实数域  $\mathbb{R}$  上的一个  $2^m$  维矢量空间  $G(V)$ .

式(1.8-39)中引入一种新的符号“ $\wedge$ ”，这个符号还没有确切定义，我们规定，对于基矢而言它还需满足如下条件，

$$\epsilon_i \wedge \epsilon_j = -\epsilon_j \wedge \epsilon_i, \quad (1.8-41a)$$

$$(\epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_r}) \wedge (\epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_s}) = \epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_r} \wedge \epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_s}, \quad (1.8-41b)$$

$$(\epsilon_i \wedge \epsilon_j) \wedge \epsilon_k = \epsilon_i \wedge \epsilon_j \wedge \epsilon_k = \epsilon_i \wedge (\epsilon_j \wedge \epsilon_k). \quad (1.8-41c)$$

上式中各角标满足  $1 \leq \{i\}, \{j\}, \{k\} \leq m$ ，且没有大小关系约束。因外积具有反对称性（见式(1.8-41a)），所以有（下式中的重复指标不求和）

$$\epsilon_i \wedge \epsilon_i = -\epsilon_i \wedge \epsilon_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1.8-42)$$

我们已在矢量空间  $G(V)$  的基矢中引入一种乘法，下面继续规定其分配律和齐次性。

$$(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma = a\alpha \wedge \gamma + b\beta \wedge \gamma, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in G(V), \quad (1.8-43a)$$

$$\gamma \wedge (a\alpha + b\beta) = a\gamma \wedge \alpha + b\gamma \wedge \beta, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \alpha, \beta, \gamma \in G(V). \quad (1.8-43b)$$

作了各种规定（式(1.8-41)和(1.8-43)）后，这种乘法称为**楔积**或**外积**。定义了外积的  $G(V)$  称为 **Grassmann 代数**或**外代数**。

其中以  $\binom{m}{p}$  个元素

$$\epsilon_{i_1} \wedge \epsilon_{i_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq m \quad (1.8-44)$$

为基底的实矢量空间记作  $\wedge^p(V)$ （是  $G(V)$  的子空间），此空间中的任意元素可以表示为

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} a^{i_1 \cdots i_p} \epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}, \quad a^{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{R}. \quad (1.8-45)$$

特别地记  $\wedge^0(V) \equiv \mathbb{R}$  和  $\wedge^1(V) \equiv V$ 。需注意  $\wedge^m(V) \cong \mathbb{R}$  以及  $\wedge^{m-1}(V) \cong V$ ，即它们是同构关系（因为这些空间的维数相等）。容易看出  $G(V)$  可以表示成子空间的直和，

$$G(V) = \wedge^0(V) \oplus \wedge^1(V) \oplus \cdots \oplus \wedge^m(V). \quad (1.8-46)$$

**命题 1.99** 对于  $V$  中任意元素  $x$ ，有  $x \wedge x = 0$ 。

**证明** . 将  $x$  在基底上展开为  $x = a^i \epsilon_i$ ，则有

$$x \wedge x = (a^i \epsilon_i) \wedge (a^j \epsilon_j) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} a^i a^j (\epsilon_i \wedge \epsilon_j + \epsilon_j \wedge \epsilon_i) \stackrel{1.8-41a}{=} 0.$$

求和过程中注意指标的大小次序，以及应用乘法反对称。 ■

**注 1.100** 由外积的反对称性，可知任意选择  $n(>m)$  个基矢的外积恒为零（因为  $n$  个基矢必有重复），即  $\epsilon_1 \wedge \cdots \wedge \epsilon_n = 0$ 。这说明式(1.8-41b)中作外积的基矢个数最多是  $m$  个。

## 1.8.2.2 反对称化表示

从上面可以看到, 外代数表示中总要求  $\sum$  的求和指标满足一定大小顺序, 多有不便. 交换基矢中任意两个下标都会产生一个负号, 这个属性说明此基底可以用广义 Kronecker 记号来表示. 我们先从两个基矢开始讨论,

$$\epsilon_i \wedge \epsilon_j \cong \epsilon_i \otimes \epsilon_j - \epsilon_j \otimes \epsilon_i \equiv \delta_{ij}^{kl} \epsilon_k \otimes \epsilon_l, \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (1.8-47)$$

上式中对  $i$  和  $j$  的大小关系不作要求. 符号 “ $\cong$ ” 左右两端对下指标的交换产生相同的正负号; 如果  $i = j$ , 那么 “ $\cong$ ” 两端都是零. 因此 “ $\cong$ ” 可理解为同构; 既然同构, 干脆将两者认同, 或当成定义; 推广到任意个下标, 便是

$$\epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p} \stackrel{\text{def}}{=} \delta_{i_1 \cdots i_p}^{j_1 \cdots j_p} \epsilon_{j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{j_p}, \quad 1 \leq \{i\}, \{j\} \leq m. \quad (1.8-48)$$

上式中对指标组  $\{i\}$  间的大小关系不作要求. 如果指标组  $\{i\}$  中有两个或多个指标相同, 根据基矢外积的反对称性可知左端为零; 由广义 Kronecker 记号的定义可得右端也为零.

外代数  $G(V)$  子空间  $\wedge^p(V)$  中任意矢量  $\alpha$  可以表示为

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq m} a^{i_1 \cdots i_p} \epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}, \quad \text{规定 } \{i\} \text{ 序关系} \quad (1.8-49a)$$

$$= \frac{1}{p!} a^{j_1 \cdots j_p} \epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_p}. \quad \text{不规定 } \{j\} \text{ 序关系} \quad (1.8-49b)$$

式(1.8-49b)中的因子  $\frac{1}{p!}$  自然是因(无大小关系限制的)指标组  $\{j\}$  重复求和而产生的; 上两式要求分量  $a^{j_1 \cdots j_p}$  对上标全反对称. 这是外代数中两个常用的展开表达式.

下面来介绍  $G(V)$  两个子空间  $\wedge^p(V)$  和  $\wedge^q(V)$  中矢量的外积, 设  $\alpha \in \wedge^p(V)$ ,  $\beta \in \wedge^q(V)$ ,

$$\alpha \wedge \beta = \left( \frac{1}{p!} a^{j_1 \cdots j_p} \epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_p} \right) \wedge \left( \frac{1}{q!} b^{k_1 \cdots k_q} \epsilon_{k_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{k_q} \right) \quad (1.8-50a)$$

$$= \frac{1}{p!q!} a^{j_1 \cdots j_p} b^{k_1 \cdots k_q} (\epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_p}) \wedge (\epsilon_{k_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{k_q}) \quad (1.8-50b)$$

$$= \frac{1}{p!q!} a^{j_1 \cdots j_p} b^{k_1 \cdots k_q} \delta_{j_1 \cdots j_p k_1 \cdots k_q}^{i_1 \cdots i_p l_1 \cdots l_q} (\epsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{i_p} \otimes \epsilon_{l_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{l_q}) \quad (1.8-50c)$$

$$= \frac{(p+q)!}{p!q!} a^{j_1 \cdots j_p} b^{k_1 \cdots k_q} \epsilon_{[j_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{j_p} \otimes \epsilon_{k_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{k_q]}. \quad (1.8-50d)$$

上式给出了  $\alpha \wedge \beta \in \wedge^{p+q}(V)$  的几种常用表达式, 尤其式(1.8-50d)常被当作外积定义. 从式(1.8-50b)我们还可以得到,

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \frac{1}{p!q!} a^{j_1 \cdots j_p} b^{k_1 \cdots k_q} (\epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_p}) \wedge (\epsilon_{k_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{k_q}) \\ &= \frac{1}{p!q!} a^{j_1 \cdots j_p} b^{k_1 \cdots k_q} (-)^{pq} (\epsilon_{k_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{k_q}) \wedge (\epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_p}) \\ &= (-)^{pq} \beta \wedge \alpha. \end{aligned} \quad (1.8-51)$$

这是两个矢量外积对易公式, 非常重要.

### 1.8.2.3 矢量变换

设  $\eta_1, \dots, \eta_p$  是空间  $V$  的一组矢量 (未必是基矢), 那么它们可以用基矢组  $\{\epsilon\}$  展开,

$$\eta_i = \epsilon_j a_{ji}^j, \quad i = 1, \dots, p, \quad p \leq m; \quad 1 \leq j \leq m. \quad (1.8-52)$$

其中,  $a_{ji}^j$  是  $m \times p$  级矩阵. 作矢量组  $\{\eta\}$  的外积, 有

$$\begin{aligned} \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p &= a_{\cdot 1}^{j_1} \dots a_{\cdot p}^{j_p} \epsilon_{j_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{j_p}, \quad \text{指标组 } \{j\} \text{ 是无序的, 且求和} \\ &= a_{\cdot 1}^{j_1} \dots a_{\cdot p}^{j_p} \cdot \delta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \cdot \epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_p}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq m} \begin{vmatrix} a_{\cdot 1}^{i_1} & \dots & a_{\cdot 1}^{i_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\cdot p}^{i_1} & \dots & a_{\cdot p}^{i_p} \end{vmatrix} \epsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \epsilon_{i_p}. \end{aligned} \quad (1.8-53)$$

上式第二个等号将无序排列的  $\{j\}$  换成有序排列组  $\{i\}$ , 交换下标产生的负号体现在广义 Kronecker 符号中; 第三个等号无非是行列式定义. 有了这个公式可以证明如下命题,

**命题 1.101**  $V$  中矢量组  $\eta_1, \dots, \eta_p$  是线性无关的充要条件是  $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p \neq 0$ .

**证明.** 如果  $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p \neq 0$ , 那么可知式(1.8-53)的诸多行列式中至少有一个不为零, 这说明矩阵  $\{a_{ji}^j\}$  的秩等于  $p$ ; 从式(1.8-52)可知矢量组  $\eta_1, \dots, \eta_p$  线性无关.

反之, 如果矢量组  $\eta_1, \dots, \eta_p$  线性无关, 那么矩阵  $\{a_{ji}^j\}$  的秩等于  $p$ , 因此它至少有一个  $p$  级子行列式不为零, 所以  $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_p \neq 0$ . ■

**注 1.102** 令上面命题中的  $p = m$ , 当行列式  $\det(a_{ji}^j) \neq 0$  时, 矢量组  $\eta_1, \dots, \eta_m$  可当作线性空间  $V$  的一组基矢, 并且有  $\eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_m = \det(a_{ji}^j) \epsilon_1 \wedge \dots \wedge \epsilon_m$ ; 选择  $\det(a_{ji}^j) > 0$  可保证两组基矢  $\{\epsilon\}$  和  $\{\eta\}$  定向相同 (定向定义见 §3.5).

### 1.8.2.4 例子

这小节用  $\mathbb{R}$  上三维矢量空间  $V$  来把上面一些理论具体化, 将有助于理解问题; 既然是三维空间, 我们用更常见的字母  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  来表示基矢. 依照前面讨论, 外代数可表示成

$$G(V) = V^0 \oplus V^1 \oplus V^2 \oplus V^3. \quad (1.8-54)$$

其中有同构关系 (见定理1.53),

$$V^3 \cong V^0 \equiv \mathbb{R}; \quad V^2 \cong V^1 \equiv V. \quad (1.8-55)$$

$V^0 \equiv \mathbb{R}$  中的元素是纯数, 可看作标量; 我们生活的空间可看成  $V$  中的矢量, 基矢是  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ ;  $V^2$  同构于  $V$ , 其基矢是  $\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3\}$ ;  $V^3$  同构于  $\mathbb{R}$ , 其基矢是  $\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3\}$ . 有鉴于此, 在三维空间中, 我们只需要研究标量与矢量就足够了; 无需研究  $V^2$  和  $V^3$ .



留几个问题给读者以加深理解：取  $m = 3, p = 2$ ，读者可将式(1.8-53)详细写出来；将式(1.8-49)展开。

### 1.8.2.5 外型式

本小节在此之前，我们一直使用矢量空间  $V$ ，其实上面所有内容都可以换成其对偶空间  $V^*$ （也是一种矢量空间）；也就是用协变矢量来作外积，这在微分几何中有重要应用。

**定义 1.103** 数域  $\mathbb{R}$  上  $m$  维矢量空间  $V$  上  $(0, q)$  型反对称张量称为  $V$  上的  $q$  次外型式，简称  $q$  型<sup>7</sup>。空间  $V$  上全体  $q$  次外型式记为  $\Lambda^q(V^*)$ 。

依照前面讨论  $G(V^*) = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \Lambda^2(V^*) \oplus \cdots \oplus \Lambda^q(V^*) \oplus \cdots \oplus \Lambda^m(V^*)$  是空间  $V^*$  上的外代数。

设  $V$  的基矢为  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_m$ ，其对偶空间  $V^*$  的基矢为  $\epsilon^{*1}, \dots, \epsilon^{*m}$ ； $\alpha \in \Lambda^q(V^*)$ ，那么对于任意  $v_1, \dots, v_q \in V$  有（注意用式(1.8-49)）

$$\begin{aligned} \alpha(v_1, \dots, v_q) &= \frac{1}{q!} \alpha_{j_1 \dots j_q} \epsilon^{*j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{*j_q} (v_1^{i_1} \epsilon_{i_1}, \dots, v_q^{i_q} \epsilon_{i_q}) \\ &\stackrel{1.8-48}{=} \frac{1}{q!} \alpha_{j_1 \dots j_q} v_1^{i_1} \cdots v_q^{i_q} \cdot \delta_{k_1 \dots k_q}^{j_1 \dots j_q} \epsilon^{*k_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{*k_q} (\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_q}) \\ &= \frac{1}{q!} \alpha_{j_1 \dots j_q} v_1^{i_1} \cdots v_q^{i_q} \cdot \delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}. \quad \{i, j\} \text{ 无大小次序} \end{aligned} \quad (1.8-56)$$

参考(1.8-53)中的计算过程，上式最后一步可以化成一个行列式（ $\{j\}$  有大小次序后，因子  $q!$  消失），即

$$\alpha(v_1, \dots, v_q) = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq m} \alpha_{j_1 \dots j_q} \begin{vmatrix} v_1^{j_1} & \cdots & v_1^{j_q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_q^{j_1} & \cdots & v_q^{j_q} \end{vmatrix}. \quad (1.8-57)$$

式(1.8-56)或(1.8-57)称为  $q$  次外型式  $\alpha$  的求值公式，需注意外型式  $\alpha$  关于分量指标是全反对称的。这个公式表明，外型式无非是一些行列式的线性组合；同时也表明了外代数和行列式的密切关系。式(1.8-57)一个典型的特例是，

$$\epsilon^{*j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{*j_q} (\epsilon_{i_1}, \dots, \epsilon_{i_q}) = \delta_{i_1 \dots i_q}^{j_1 \dots j_q}. \quad (1.8-58)$$

### 1.8.2.6 几个定理

我们叙述几个常用定理。首先给出 Cartan 引理。

**定理 1.104** 设  $n$  维线性空间  $V$  中有两组矢量  $v_1, \dots, v_r$  和  $w_1, \dots, w_r$ ，其中  $1 \leq r \leq n$ ；这两组矢量满足

$$\sum_{\alpha=1}^r v_\alpha \wedge w_\alpha = 0. \quad (1.8-59)$$

<sup>7</sup> 英文 “form” 在这里被翻译成 “型式”，而不是 “形式”；主要是后者意义太多了，容易误解。

如果矢量组  $v_1, \dots, v_r$  线性无关, 那么  $w_\alpha$  可以表示成它们的线性组合

$$w_\alpha = \sum_{\beta=1}^r c_{\alpha\beta} v_\beta, \quad 1 \leq \alpha \leq r, \quad \text{并且} \quad c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}. \quad (1.8-60)$$

**证明** . 因为矢量组  $v_1, \dots, v_r$  线性无关, 可以将其扩充成线性空间  $V$  的一组基矢量

$$v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n.$$

矢量  $w_\alpha$  自然可以用其展开,

$$w_\alpha = \sum_{\beta=1}^r c_{\alpha\beta} v_\beta + \sum_{i=r+1}^n c_{\alpha i} v_i. \quad (1.8-61)$$

将上式带入式(1.8-59)得

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\alpha=1}^r v_\alpha \wedge \left( \sum_{\beta=1}^r c_{\alpha\beta} v_\beta + \sum_{i=r+1}^n c_{\alpha i} v_i \right) = \sum_{\alpha, \beta=1}^r c_{\alpha\beta} v_\alpha \wedge v_\beta + \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i=r+1}^n c_{\alpha i} v_\alpha \wedge v_i \\ &= \sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq r} (c_{\alpha\beta} - c_{\beta\alpha}) v_\alpha \wedge v_\beta + \sum_{\alpha=1}^r \sum_{i=r+1}^n c_{\alpha i} v_\alpha \wedge v_i \end{aligned}$$

由于  $\{v_i \wedge v_j, 1 \leq i < j \leq n\}$  是  $\wedge^2(V)$  的一个基底, 因此由上式可以得到

$$c_{\alpha\beta} - c_{\beta\alpha} = 0, \quad c_{\alpha i} = 0. \quad (1.8-62)$$

将此式带回式(1.8-61), 便证明了 Cartan 引理, 即式(1.8-60). ■

**定理 1.105** 设  $n$  维线性空间  $V$  中有线性无关矢量组  $v_1, \dots, v_r$ ;  $w$  是  $V$  上  $p$  次外矢量, 即  $w \in \wedge^p(V)$ . 那么, 存在  $\psi_1, \dots, \psi_r \in \wedge^{p-1}(V)$ , 使得

$$w = v_1 \wedge \psi_1 + v_2 \wedge \psi_2 + \dots + v_r \wedge \psi_r \quad (1.8-63)$$

的充分必要条件是

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w = 0. \quad (1.8-64)$$

**证明** . 式(1.8-63)通常被记为  $w \equiv 0 \pmod{(v_1, \dots, v_r)}$ .

先证 “ $\Rightarrow$ ”. 如果式(1.8-63)成立, 那么

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w = v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge (v_1 \wedge \psi_1 + \dots + v_r \wedge \psi_r) = 0. \quad (1.8-65)$$

再证 “ $\Leftarrow$ ”. 因为矢量组  $v_1, \dots, v_r$  线性无关, 可将其扩充成空间  $V$  的一组基矢量

$$v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n.$$

$p$  次外矢量  $w$  自然可以用其展开,

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} w^{i_1 \dots i_p} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}. \quad (1.8-66)$$

当  $r+p > n$  时, 式(1.8-64)自动成立. 如果式(1.8-66)中基矢  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$  在  $v_{r+1}, \dots, v_n$  中有重复选择, 那么该项必为零; 我们只考虑在  $v_{r+1}, \dots, v_n$  中选择不重复. 因为  $p > n - r$ , 所以基矢  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}$  至少含有  $v_1, \dots, v_r$  中的一项, 也就是式(1.8-63)成立.

下面只考虑  $r+p \leq n$  情形. 借用式(1.8-66)展开式(1.8-64),

$$0 = v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} w^{i_1 \dots i_p} v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}. \quad (1.8-67)$$

上式中的基矢量

$$\{v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p}\}, \quad r+1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n \quad (1.8-68)$$

是外矢量空间  $\wedge^{r+p}(V)$  基底的一部分; (由于式(1.8-64)成立) 所以式(1.8-67)意味着

$$w^{i_1 \dots i_p} = 0, \quad r+1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n. \quad (1.8-69)$$

这说明, 只有当  $i_1$  只在  $\{1, \dots, r\}$  取值时,  $w^{i_1 \dots i_p}$  才可能不为零. 于是

$$w = \sum_{j=1}^r v_j \wedge \left( \sum_{j < i_2 < \dots < i_p \leq n} w^{j i_2 \dots i_p} v_{i_2} \wedge \dots \wedge v_{i_p} \right). \quad (1.8-70)$$

上式满足定理要求. ■

以上几个定理中的矢量换成对偶矢量, 结论仍旧成立.

## 1.9 抽象指标记号

从前面章节可以看到, 如果有线性空间两个矢量  $\beta$  和  $\xi$ , 数学家习惯用符号  $\beta \cdot \xi$  或  $(\beta, \xi)$  或  $\langle \beta, \xi \rangle$  来表示两个矢量的内积; 数学家的表示有一个好处是不涉及分量, 也就是不必事先选择一套基矢; 这是几何或代数语言, 是现代数学习惯表示方法 (如 §1.7, 或见文献 [5]. 为引用方便, 称为第一种表示法). 而物理学家更习惯用分量 (为引用方便, 称为第二种表示法) 求和  $\beta^r \xi_r$  来表示内积, 这需要事先选好一套基矢 (或者坐标系); 当从一套基矢变换到另一套基矢时, 这些分量会发生变化. 然而, 具体计算必然要先选择基矢, 再使用分量, 这是无法避免的; 如果坚持使用第一种表示法, 有些复杂的计算往往无法处理. 这被视为在数学家和物理学家间的符号表示冲突.

Roger Penrose<sup>[3]Ch. 2</sup>发明了抽象指标记号 (abstract index notation) 用来表示张量与旋量, 大体可以减少上述冲突. 与第一种表示法相比, 抽象指标法能够显示张量的类型, 同

时可清楚地表明缩并等运算. 而与第二种表示法不同, 抽象指标法与特定的基底无关, 可以表示出张量等式. 下面介绍这种张量表示方法 (假设读者已熟悉第一、二种表示方法).<sup>8</sup>

**甲** 求和约定 (见14页脚注6) 继续有效, 且求和哑标必须一上一下, 否则错误. 明确写出求和号时, 求和约定失效. 小写字母  $m$  只用来表示流形  $M$  的维数或物质质量, 不作求和哑标使用. 求和哑标一般是  $i, j, k, l, n, p, q, r, s, t$  等以及所有希腊字母. 在第一部分 (微分几何部分) 中, 哑标 ( $i, j, \mu, \nu$  等) 求和范围一般从 “1” 开始计数 (特别声明的除外). 从第二部分开始 (相对论部分), 严格约定希腊字母  $\alpha, \beta, \dots$  等从 “0” 开始计数到 “3”, 第 “0” 维表示时间; 拉丁字母  $i, j, \dots$  等从 “1” 开始计数到 “3”, 表示纯空间.

**乙**  $(p, q)$  型张量用带有  $p$  个上标和  $q$  个下标的字母表示, 上下标均用小写拉丁字母<sup>9</sup> (即  $abcdef\dots$ , 一般不会超过 “ $f$ ”), 它们用来指明张量类型, 称为抽象指标. 比如用  $v^a$  (上标) 表示矢量空间中的矢量,  $\omega_a$  (下标) 表示对偶空间的矢量,  $T_c^{ab}$  表示  $(2, 1)$  型张量, 等等. 这种表示方式与第二种方法 (即分量表示法) 很像, 但是这里的上下标不代表分量, 不能谈及  $a = 1$  或  $a = 2$  的问题, 它只是抽象地表示是何种张量.<sup>10</sup> 写等式时需要注意 “指标平衡”, 例如可写成  $u^a + v^a = w^a$  或  $u^b + v^b = w^b$ , 但不能写作  $u^a + v^b = w^a$ .

**丙** 通常会省略张量积记号 “ $\otimes$ ”. 例如在第一种表示法中有  $T \in \mathcal{T}_1^2(V)$  和  $S \in \mathcal{T}_1^1(V)$ , 则  $T \otimes S$  在抽象指标法中记作  $T_c^{ab} S_e^d$ ; 当然记成  $T_c^{ab} \otimes S_e^d$  也没有任何问题. 显然, 第一种记号不能表明张量类型; 而抽象指标记号 (以及第二种记号) 能清晰表明张量类型, 这是抽象指标记号最重要的优点.

**丁** 基矢也是通常的矢量 (或对偶矢量), 本可以与**乙**中相同, 但是基矢一般是一组矢量, 不是单个的, 所以给基矢量增加一个内指标. 举例说明, 先叙述第一种表示方法, 张量在基矢组啥的展开时为  $T = T_\rho^{\mu\nu} \mathbf{e}_\mu \otimes \mathbf{e}_\nu \otimes \mathbf{e}^{*\rho}$ , 其中  $\mathbf{e}_\mu$  是基矢,  $\mathbf{e}^{*\rho}$  是对偶基矢. 在抽象指标中, 将基矢  $\mathbf{e}_\mu$  记为  $(e_\mu)^a$ , 将对偶基矢  $\mathbf{e}^{*\rho}$  记为  $(e^\rho)_a$ ; 即增加一个圆括号, 内部指标表示是第几个基矢, 外部是抽象指标; 因对偶矢量  $(e^\rho)_a$  的外指标已表明它是对偶矢量, 所以无需写成  $(e^{*\rho})_a$ <sup>11</sup>. 现在, 第一种表示法中的张量用抽象指标表示为,

$$T_c^{ab} = T_\rho^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\rho)_c. \quad (1.9-1)$$

基矢量  $(e_\mu)^a$  的内指标表示第  $\mu$  个基矢, 可以问及  $\mu = 1$  还是  $\mu = 2$  的问题; 张量  $T_c^{ab}$  的分量  $T_\rho^{\mu\nu}$  指标  $\mu, \nu, \rho$  自然也可以被问此问题.

**戊** 缩并运算. 例如对于  $(1, 1)$  型张量  $T$  的缩并, 在第一种表示法中写作  $C_1^1 T =$

<sup>8</sup>这里采用Wald [4, §2.4, §3.4b]书中的表示方法; 中文介绍可参见文献 [7]<sup>§2.6</sup>. 其实, 抽象指标记号的角标比用第二种表示法还要繁杂, 这对公式的具体表示带来诸多不便. 笔者选用这种方式的原因是: 它可以减少计算错误!

如果读者的数学计算十分纯熟, 用第一种记号可能更好.

<sup>9</sup>Penrose, Rindler [3, Ch. 2]书籍采用的是希腊字母. 他们书中求和例子  $V^\alpha = V^\alpha \delta_\alpha^\alpha$  (见 Eq. (2.3.5)), 粗罗马字体的  $\alpha$  表示求和哑标, 普通字体的  $\alpha$  表示抽象指标. 可见, 这种差别很细微, 容易引起误解.

<sup>10</sup>在分量表示法中可以谈及分量指标具体的数值, 比如可以说矢量  $\xi$  在基矢组展开后的分量是  $\xi^i$ , 在此处可以谈及  $i$  是等于 1 还是等于 2, 这表示  $\xi$  的第 1 分量及第 2 分量.

<sup>11</sup>除了基矢量使用圆括号之外, 其它矢量组或对偶矢量组也要使用圆括号以区分内外指标, 比如128页的联络 1 型式(4.3-5). 圆括号的使用固然使指标区分得更加明显, 但也让公式表述更加繁琐.

$T(\mathbf{e}^{*\mu}; \mathbf{e}_\mu) = T_\mu^\mu$ , 在抽象指标法中可简单地记作  $T_a^a$ . 再比如对于  $(2, 1)$  型张量的缩并,  $C_1^1 T = T(\mathbf{e}^{*\mu}; \cdot; \mathbf{e}_\mu) \equiv T_a^{ab}$ ,  $C_1^2 T = T(\cdot; \mathbf{e}^{*\mu}; \mathbf{e}_\mu) \equiv T_b^{ab}$ , 等. 可见对于缩并运算抽象指标法更清晰. 用分量语言和抽象指标表示纯缩并运算在形式上是相同的, 我们不严格区分它们.

〔己〕分量表示. 用小写希腊字母 ( $\mu, \nu$  等) 来表示张量分量<sup>12</sup>, 既然是分量, 自然可问及  $\mu = 1$  还是  $\mu = 3$  等问题. 由抽象指标形式通过缩并运算可以得到分量表达式

$$T_\rho^{\mu\nu} = T_c^{ab}(e^\mu)_a(e^\nu)_b(e_\rho)^c. \quad (1.9-2)$$

在〔戊〕中介绍了抽象指标的缩并, 引入分量表示后, 需要明确如果分量的上下指标相同也代表求和 (即缩并), 一般说来  $T_\mu^\mu \equiv T_a^a$ . 有时候只缩并部分张量指标, 比如  $T_{a\mu} = T_{ab}(e_\mu)^b$ ; 但这种记号表示有可能会引起误解, 尽量不用.

〔庚〕第29页的“非对易性”中 (以及注解1.86) 讲述了一般情况下  $\alpha \otimes \beta(f, g) \neq \alpha \otimes \beta(g, f)$ ; 在这种记号中, 括号内  $(f, g)$  因子顺序表示作用顺序, 当然不能随便交换. 在抽象指标记号中, 将线性映射作用记为  $\alpha_a \beta_b(f^a, g^b)$ , 很多时候会将圆括号省略, 简记为  $\alpha_a \beta_b f^a g^b$ . 此时  $\alpha_a \beta_b f^a g^b = \beta_b \alpha_a f^a g^b$  是正确的, 即带着抽象指标交换是允许的; 因为上下标间的缩并表明了作用对象, 不用  $f, g$  的顺序表示作用对象. 不对易性体现在  $\alpha_a \beta_b \neq \alpha_b \beta_a$ . 除此以外, 一般说来  $T_{ab} \neq T_{ba}$ , 这种交换是不正确的; 见第47页的脚注2.

〔辛〕由于描述中采用了抽象指标记号, 切矢量  $v^a$  和对偶矢量  $\omega_a$  间的线性映射  $\omega_a(v^a)$  可能会被简单地理解成缩并. 这多少有些误解; 比如后面我们会给出联络 ( $\nabla_a$ , 一种求导算符), 虽然  $\nabla_a(v^a)$  中包含缩并运算, 但不是简单的缩并, 还要求导. 也就是说线性映射  $\omega_a(v^a)$  除了缩并还可能包含其它运算, 比如求导、积分等; 此时最好不要省略圆括号了.

〔壬〕有些情形不宜使用抽象指标记号; 比如见 §2.1.3; 见63页注2.26; 见89页注2.86; 见115页注4.4; 见李群一章.

## 第一章参考文献

- [1] COURANT R, HILBERT D. Methods of Mathematical Physics (Vol. II)[M]. US: Wiley-VCH, 1989. DOI: [10.1002/9783527617234](https://doi.org/10.1002/9783527617234) (引用页: 11).
- [2] MUNKRES J R. Topology[M]. 2nd ed. US: Person, 2000 (引用页: 2, 3).
- [3] PENROSE R, RINDLER W. Spinors and Space-Time (Vol. I)[M]. UK: Cambridge University Press, 1984 (引用页: 41, 42).
- [4] WALD R M. General Relativity[M]. US: University of Chicago Press, 1984 (引用页: 42).
- [5] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 35, 41).
- [6] 陈维桓. 微分几何[M]. 2版. 北京: 北京大学出版社, 2017 (引用页: 2).

<sup>12</sup>也可约定小写拉丁字母来表示分量, 比如  $i, j, k, l$  等, 但一定要和抽象指标区分开来.

- [7] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论 (上) [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2006 (引用页: 42).
- [8] 刘长礼. 物理与工程, 2017, 27(3): 7-9. arXiv: [1002.0892](#) (引用页: 10).
- [9] 丘维声. 高等代数 (下) [M]. 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2019 (引用页: 11, 13, 21).

## 第二章 微分流形

本章将介绍微分流形概念，这是微分几何的基础。接着介绍流形上的切向量场、余切向量场、张量场，然后叙述单参数变换群以及李导数。

本章及以后各章节，如无特殊声明，在实数域  $\mathbb{R}$  上讨论问题。

### 2.1 广义欧几里得空间

在正式描述弯曲的（指黎曼曲率非零）微分流形前，再对平直的（指黎曼曲率为零）广义欧几里得空间做些说明是大有裨益的。本小节的概念可直接用到流形上的切空间，进而可用到流形论中。本节是连接上一章与微分流形的桥梁。欧几里得空间的定义见7页1.35，它就是指定了正定度规（ $g(\cdot, \cdot) \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle$ ）的矢量空间。

#### 2.1.1 广义欧氏空间

欧氏空间度规（内积）是正定、对称的双线性函数。仿照于此，给出如下定义，

**定义 2.1** 设  $V$  是实数域  $\mathbb{R}$  上的  $m$  维线性空间，给定  $V$  上非退化的、对称的双线性函数  $g(\cdot, \cdot)$ ，那么  $V$  称为广义欧几里得空间，记为  $(V, g)$ 。

如果在 §1.5.2 的式(1.5-16)中只有一个负号，其余皆为正号（即存在基矢使得  $\eta$  的度量矩阵非对角元全为零，对角元有 1 个  $-1$ 、 $m-1$  个  $+1$ ），那么此空间称为广义闵可夫斯基空间，记为  $(V, \eta)$ 。

特别地，当度规矩阵  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  时，空间  $\mathbb{R}^4$  便是物理上的 4 维闵可夫斯基时空，记为  $(\mathbb{R}^4, \eta)$ ；度规  $\eta$  称为洛伦兹度规或闵氏度规。<sup>1</sup>

如果广义欧氏空间  $(V, g)$  的基矢  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  满足

$$g(\epsilon_i, \epsilon_j) = \begin{cases} +1 \text{ 或 } -1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (2.1-1)$$

则称基矢组  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$  是广义欧氏空间  $(V, g)$  的正交归一基矢量。上式仍旧使用了“第一种表示”记号，下面详细介绍如何用抽象指标表示度规张量。

<sup>1</sup> 时空是较物理的称呼，空间是偏数学的叫法；两者等价。

### 2.1.2 度规张量的表示

给定数域  $\mathbb{R}$  上线性空间  $V$ , 基矢组是  $(e_\mu)^a$ ; 它的对偶空间是  $V^*$ , 基矢组是  $(e^\mu)_a$ . 度规是一个二阶对称、非退化张量, 它的抽象指标表示可写为

$$g_{ab} = g_{\mu\nu}(e^\mu)_a(e^\nu)_b, \quad g_{ab} = g_{ba}; \quad g_{\mu\nu} = g_{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b, \quad g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}. \quad (2.1-2)$$

因度规是非退化的, 上式中矩阵  $g_{\mu\nu}$  的逆一定存在, 记为  $g^{\mu\nu} \equiv (g_{\mu\nu})^{-1}$ , 而且这个逆矩阵一定是对称的, 它们有如下关系

$$g_{\mu\nu}g^{\nu\rho} = \delta_\mu^\rho = g^{\rho\nu}g_{\nu\mu}. \quad (2.1-3)$$

给此逆矩阵配上基矢, 即

$$g^{ab} = g^{\mu\nu}(e_\mu)^a(e_\nu)^b, \quad g^{ab} = g^{ba}; \quad g^{\mu\nu} = g^{ab}(e_\mu)^a(e_\nu)^b, \quad g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}. \quad (2.1-4)$$

则  $g^{ab}$  是一个  $(2,0)$  型非退化、对称张量, 它称为  $g_{ab}$  的**共轭张量**. 需注意, 此共轭张量与基底的选择无关 (请读者自证).

基矢和对偶基矢间的关系见14页式(1.4-6), 用抽象指标可表示为

$$(e_\mu)^a(e^\nu)_a = \delta_\mu^\nu = \begin{cases} 1, & \mu = \nu \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (2.1-5)$$

需要注意: 上式与度规是否正定无关, 洛伦兹度规下的公式也如上所示.

度规张量有了协变与逆变两种形式, 经计算 (为了让读者对抽象指标记号有更好地了解, 详细给出了每个步骤) 可得

$$\begin{aligned} g^{ab}g_{bc} &= g^{\mu\nu}(e_\mu)^a(e_\nu)^b g_{\rho\sigma}(e^\rho)_b(e^\sigma)_c = g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}(e_\mu)^a(e^\sigma)_c [(e^\rho)_b(e_\nu)^b] \\ &= g^{\mu\nu}g_{\rho\sigma}(e_\mu)^a(e^\sigma)_c \cdot \delta_\nu^\rho = g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma}(e_\mu)^a(e^\sigma)_c \\ &= \delta_{\sigma}^\mu(e_\mu)^a(e^\sigma)_c = (e_\mu)^a(e^\mu)_c = \delta_c^a. \end{aligned} \quad (2.1-6)$$

上式最后一行便是  $\delta_c^a$  的抽象指标表达式.

线性空间  $V$  中指定了度规张量  $g_{ab}$  后, 由19页定理1.70可知, 度规  $g_{ab}$  可将矢量空间  $V$  自然同构于其对偶空间  $V^*$ ; 即  $\forall u^b \in V$ , 那么必然存在唯一对偶矢量  $g_{ab}u^b \in V^*$  与之相对应; 既然是自然同构, 那我们就直接将其记为  $u_a \equiv g_{ab}u^b$ . 这样  $u^a$  可以看成矢量  $\mathbf{u}$  的逆变形式, 而  $u_a$  可以看成矢量  $\mathbf{u}$  的协变形式; 也就是, 将它们看作同一矢量的不同表现形式.

反之, 也可认为  $g^{ab}$  将  $V^*$  自然同构于  $V$ , 请读者仿照定理1.70证明一下.

还可以将度规作用理解成: 升降指标, 比如,

$$u_a = g_{ab}u^b, \quad w^a = g^{ab}w_b, \quad T_{..bf}^{ae} = g^{ac}T_{c..f}^{ed}g_{db}.$$



除了对抽象形式的张量升降指标外, 度规分量还可升降张量分量指标, 仅举一例

$$g^{\mu\nu}u_\nu = g^{ab}(e^\mu)_a(e^\nu)_b u_c(e_\nu)^c = g^{ab}(e^\mu)_a u_c \delta_b^c = g^{ab}u_b(e^\mu)_a = u^a(e^\mu)_a = u^\mu.$$

对于张量需要注意的是: 当可以用度规升降指标时, 协变和逆变指标是不可以混排的, 需要区分前后. 两个混合型张量  $T_b^a$  和  $T_b^a$  是同一张量的不同形式; 而  $T_b^a$  意义含混不明<sup>2</sup>. 二阶对称张量可以不严格区分上下指标的顺序, 比如  $\delta_a^b \equiv \delta_a^b \equiv \delta_a^b$ .

我们来看看二阶张量指标的排列方式代表什么. 因  $T^{ac} = T_b^a g^{bc}$ , 所以  $T^{ac}$  表示  $Tg^{-1}$ , 即矩阵  $T$  和度规逆变形式的乘积. 因  $T_{cb} = g_{ac}T_b^a$ , 所以它代表  $gT$ , 即度规协变形式与矩阵  $T$  的乘积. 最后,  $T_b^a = g_{bc}T_d^c g^{da}$  代表  $gTg^{-1}$ , 注意  $T_b^a$  的行指标是在前面的  $b$ , 列指标是在后面的  $a$ . 对于二阶张量来说, 指标的先后顺序决定了度规矩阵是左乘还是右乘, 矩阵左右乘法的结果一般是不同的. 可见在指定度规之后, 协变、逆变指标不能混排; 在之后的叙述中, 我们将协变、逆变指标错开排列, 给出预留空位.

在正定、正交归一基矢(2.1-1)下, 有  $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , 以及  $u^\mu = u_\mu$ , 此时不必区分逆变、协变; 仅限于正定情形. 比如上面的洛伦兹度规情形下便没有  $u^\mu = u_\mu$ .

读者有没有识别出  $g_{ab}$ 、 $g^{ab}$  和  $\delta_a^b$  是同一张量的不同形式?

### 2.1.3 矢量抽象化

在空间几何或解析几何中, 我们将矢量定义成有大小和方向的量, 可用由起点  $A$  到终点  $B$  的有向线段  $\overrightarrow{AB}$  来表示; 箭头表示方向, 线段的长短表示矢量的大小. 这个矢量的概念可以沿着两个方向抽象化, 第一个是代数的, 第二个是微分几何的.

上一章中已介绍如何抽象成代数的了, 简要回顾一下. 在  $m$  维欧氏空间  $E^m$  中建立一个正交归一标架  $\{O; \mathbf{e}_i\}$ <sup>3</sup>,  $O$  是坐标原点. 任意矢量都可以将其起点平移到原点  $O$ , 所以我们只需研究起点在原点的有向线段即可. 对于点  $P \in E^m$  对应着  $m$  元数组  $\{\lambda^i\}$  使得

$$\overrightarrow{OP} = \lambda^i \mathbf{e}_i. \quad (2.1-7)$$

这个  $m$  元数组  $(\lambda^1, \dots, \lambda^m)$  对应着  $\mathbb{R}^m$  中的矢量; 这样便把箭头抽象成了线性空间  $\mathbb{R}^m$  中的矢量了, 这个映射是双射. (注:  $E^m$  是点的空间,  $\mathbb{R}^m$  是矢量空间.)

下面描述矢量如何由“箭头”过渡到微分几何中. 在  $E^m$  取定正交归一标架  $\{O; \mathbf{e}_i\}$ , 设有  $C^r$  映射  $f: \mathbb{R} \rightarrow E^m$ , 则映射  $f$  可以表示成  $m$  个实函数  $x^1(t), \dots, x^m(t)$ , 即

$$\overrightarrow{Of(t)} = x^i(t) \mathbf{e}_i, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.1-8)$$

通常把映射  $f$  称为  $E^m$  中一条  $C^r$  曲线.

<sup>2</sup>当没有定义度规时, 指标不能升降. 协变(或逆变)内部不能混排; 但协变、逆变是可以混排的, 因为此时协变、逆变没有任何关系. 也就是说在没有指定度规的线性空间中,  $T_b^a = T_b^a = T_b^a$  表示同一意思.

<sup>3</sup>本小节经常用箭头表示矢量; 如果使用抽象指标, 会导致等号两端抽象指标不匹配, 所以恢复到“第一种记号”方式.

而曲线的切矢量与曲线的导数又是一一对应的（双射），即

$$f'(t_0) = \frac{dx^i}{dt}(t_0) \mathbf{e}_i, \quad (2.1-9)$$

上式中描述的导数（即切矢量）称为方向导数。我们仅以平面上曲线来进一步说明切矢量的概念（见图2.1）。取定平面上直角坐标系  $\{O; \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y\}$ ，那么曲线方程可以表示成  $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{e}_x + y(t)\mathbf{e}_y$ ，将曲线的参数方程  $\mathbf{r}(t)$  对  $t$  求导（注意常基矢的微分恒为零），有

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = x'(t)\mathbf{e}_x + y'(t)\mathbf{e}_y. \quad (2.1-10)$$

上式的意义是：曲线上有点  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  和点  $\mathbf{r}(t)$ ，两点连线便是曲线的割线，当  $\Delta t \rightarrow 0$  时，割线趋于蓝色切线位置。从此式也可以看出切矢量是式(2.1-9)中的形式。

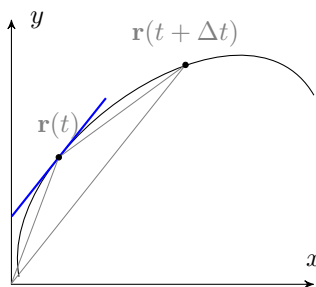


图 2.1: 切矢量

曲线切矢量自然是一条有大小的有向线段，这自然可以与  $\mathbb{R}^m$  中的矢量建立同构关系。因此我们建立了“同构”<sup>4</sup>关系图如下

$$\boxed{\mathbb{R}^m \text{ 中矢量}} \simeq \boxed{\text{有向线段（箭头）}} \simeq \boxed{E^m \text{ 中曲线方向导数}} \simeq \boxed{E^m \text{ 中定义2.2}}$$

上述内容（除定义2.2）在微积分教材中都有叙述。

我们以二维曲面（比如球面）为例再复述一下上面几个方框以加深理解。过曲面上一点  $P$  有无数条曲线，每条曲线都有切线（也就是切矢量，也就是有大小有方向的线段，即箭头），所有这些切线都在点  $P$  的切平面上（切平面也是二维的），切平面便是线性空间  $\mathbb{R}^2$ ；而切矢量（即切线）又与方向导数同构。上面诸多概念很难平移到微分流形上，而（经过改造的）方向导数却可以移到流形论中。下小节来叙述最后一个方框内的内容。

### 2.1.3.1 方向导数抽象化

取定欧氏空间  $E^m$  的基矢量  $\{O; (e_i)^a\}$ （恢复抽象指标记号），其对偶矢量是  $\{(e^i)_a\}$ ；其实在正定、正交归一基矢下，协变、逆变基矢是相同的，但我们仍用上下标来区分它们。

<sup>4</sup>这里加引号的同构并非定义1.52中的同构，而且特意换了一个符号来表示。这里的同构只是表示这几个方框都有相同的东西，这些东西是“矢量”的本质；也有不同的东西，比如“箭头”这种非常形象的图像无法向代数学和微分几何学中移植。

在多元微积分中,  $\mathbb{R}^m$  上全体  $r$  次连续可微  $m$  元函数记为  $C^r(\mathbb{R}^m)$ , 有了上面代数学抽象的双射, 自然也可以把它记成  $C^r(E^m)$ ;  $C^r(E^m)$  中的函数是  $g: E^m \rightarrow \mathbb{R}$ . 我们用  $C_P^r(E^m)$  代表点  $P \in E^m$  上全体  $m$  元函数集合.

设  $f: \mathbb{R} \rightarrow E^m$  是一条欧氏空间的  $C^r$  曲线, 点  $P = f(t_0)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ;  $\forall g \in C_P^r(E^m)$ , 则  $g \circ f$  是定义在  $t_0$  点附近的  $C^r$  函数. 简单来说, 映射  $f$  将实数轴上某区间  $(a, b)$  变成了  $E^m$  中的一堆连续可微的坐标  $(x^1(t), \dots, x^m(t)) \equiv f(t)$ , 映射  $g$  又将这些坐标变回到实数轴上. 根据复合函数求导法则, 有

$$\left. \frac{d(g \circ f(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} g(x^1(t), \dots, x^m(t)) = \left. \frac{\partial g}{\partial x^i} \right|_{f(t_0)} \frac{dx^i(t_0)}{dt}, \quad (2.1-11)$$

$f$  的自变宗量只有一个, 因变量是  $m$  个实数;  $g$  的自变宗量有  $m$  个, 因变量只是一个实数;  $g(x^1, \dots, x^m)$  是  $g$  在给定标架  $\{O; (e_i)^a\}$  上的  $m$  元实函数, 我们令

$$\nabla_a g(f(t_0)) \equiv \left. \frac{\partial g}{\partial x^i} \right|_{f(t_0)} (e^i)_a, \quad (2.1-12)$$

上式中  $\nabla_a$  的下标  $a$  只是为了平衡等号右端的抽象指标而加上的<sup>5</sup>, 并且对哑标  $i$  求和. 从这个式子, 我们可以把  $\nabla_a g(f(t_0))$  理解成点  $f(t_0) \in E^m$  处的一个矢量, 这个矢量与标架  $\{O; (e_i)^a\}$  的选择无关. 证明过程并不复杂, 我们另选一个标架  $\{O'; (\epsilon_i)^a\}$ , 则  $g$  在标架  $\{O'; (\epsilon_i)^a\}$  ( $(\epsilon_i)^a = (e_j)^a A_{\cdot i}^j$ ) 下对应的  $m$  元实函数是  $g'(y^1, \dots, y^m)$ , 有如下表达式

$$g'(y^1, \dots, y^m) = g(c^1 + B_j^{-1} x^j, \dots, c^m + B_j^m x^j), \quad (2.1-13)$$

其中  $c^i$  是矢量  $\overrightarrow{OO'}$  在标架  $\{O; (e_i)^a\}$  中的坐标;  $y^i$  是标架  $\{O'; (\epsilon_i)^a\}$  中的坐标变量 (区别于标架  $\{O; (e_i)^a\}$  中的坐标  $x^i$ );  $\{y\}$  与  $\{x\}$  关系请参阅式(1.7-6), 以及 15 页定理 1.59,  $B_k^{\cdot i}$  是矩阵  $A_{\cdot i}^j$  的转置逆. 于是, 运用复合函数求导法则, 有

$$\frac{\partial g'}{\partial y^i} (\epsilon^i)_a = \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^i} (\epsilon^i)_a = \frac{\partial g}{\partial x^j} A_{\cdot i}^j (\epsilon^i)_a = \frac{\partial g}{\partial x^j} A_{\cdot i}^j B_k^{\cdot i} (e^k)_a = \frac{\partial g}{\partial x^j} (e^j)_a \quad (2.1-14)$$

不同标架下, 形式相同, 这表明矢量  $\nabla_a g(f(t_0))$  与标架选取无关. 如果读者了解二维空间的曲面论, 那应能看出  $\nabla_a g(f(t_0))$  是函数  $g$  在二维曲面上点  $f(t_0)$  处的梯度矢量. 令

$$v^a \equiv \frac{dx^i(t_0)}{dt} (e_i)^a, \quad (2.1-15)$$

则  $v^a$  是曲线  $f(t)$  在  $t = t_0$  处的切矢量 (对比式(2.1-9)不难得出此结论). 与上面论证类似, 也可证明  $v^a$  与标架选取无关, 请读者补齐证明. 有了这些记号, 可以将式(2.1-11)改写为

$$\left. \frac{d(g \circ f(t))}{dt} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial g}{\partial x^j} \right|_{f(t_0)} (e^j)_a (e_i)^a \frac{dx^i(t_0)}{dt} = v^a \nabla_a g(f(t_0)). \quad (2.1-16)$$

<sup>5</sup> 在有了联络定义后,  $\nabla_a$  就表示联络, 现在我们只把这个下标当成人为附加上的. 因正定欧氏空间基矢正交归一, 所以  $(e^i)_a \equiv (e_i)^a$ .

需要注意的是, 式(2.1-16)最后一项与具体坐标无关, 只线性地依赖于曲线  $f$  的切矢量  $v^a$ ; 而且我们已经论证整个推导过程均不依赖于某一套特定基矢. 这样表达式  $v^a \nabla_a g(f(t_0))$  称为函数  $g \in C_P^r(E^m)$  在点  $P = f(t_0)$  处沿矢量  $v^a$  的方向导数, 记作<sup>6</sup>

$$D_v g \equiv v^a \nabla_a g(f(t_0)), \quad \forall g \in C_P^r(E^m). \quad (2.1-17)$$

上面的讨论说明, 在点  $P$  处任意一个切矢量  $v^a$  决定了一个算子  $D_v : C_P^r \rightarrow \mathbb{R}$ , 它满足如下规则,

**定义 2.2** (1) 线性性:  $\forall g, h \in C_P^r(E^m)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , 有  $D_v(g + \lambda h) = D_v g + \lambda D_v h$ ;

(2) Leibnitz 律:  $\forall g, h \in C_P^r(E^m)$ , 有  $D_v(g \cdot h) = h(P) \cdot D_v g + g(P) \cdot D_v h$ .

由式(2.1-17)可以直接得到上面两条性质. 反之有如下定理,

**定理 2.3** 如果有映射  $\sigma : C_P^r(E^m) \rightarrow \mathbb{R}$  满足上述条件 (1) 和 (2), 那么在点  $P$  处必然存在唯一的切矢量  $v^a$  使得  $\sigma = D_v$ .

由定理2.3可知: 证明了上小节末尾那个等价关系的最后一个方框, 也就是满足定义2.2中条件的映射  $D_v$  便是欧氏空间中的切矢量; 这种算符化的切矢量表述方式可以很容易地推广到微分流形中.

### 2.1.3.2 定理2.3的证明

上述定理的证明还需要另外两个定理, 首先我们重述一下多元函数微分中值定理 (可参考任一本数学分析书籍). 设  $P \in E^m$ , 其坐标为  $(x_0^1, \dots, x_0^m)$ ,  $\forall g \in C_P^r(E^m)$ , 有

$$g(x^1, \dots, x^m) = g(x_0^1, \dots, x_0^m) + (x^i - x_0^i) \frac{\partial g(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^i}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (2.1-18)$$

其次, 还需证明如下命题,

**命题 2.4** 如果映射  $\sigma$  满足定义2.2中条件, 那么  $\sigma$  作用在常实数上为零.

**证明**. 首先将  $\sigma$  作用在实数 “1” 上, 由条件 (2) 可知

$$\sigma(1) = \sigma(1 \cdot 1) = 1 \cdot \sigma(1) + 1 \cdot \sigma(1) = 2 \cdot \sigma(1) \Rightarrow \sigma(1) = 0.$$

对于任意实常数  $c$ , 由上式及性质 (1) 可知  $\sigma(c) = \sigma(1 \cdot c) = c \cdot \sigma(1) = 0$ . ■

下面开始证明定理2.3. 我们注意到坐标函数  $x^i$  是点  $P$  邻域内的  $C_P^\infty$  函数, 设映射  $\sigma$  作用在  $x^i$  上的值为  $v^i \equiv \sigma(x^i)$ , 结合基矢量, 我们构造  $P$  点的切矢量

$$v^a = v^i (e_i)^a = \sigma(x^i) (e_i)^a. \quad (2.1-19)$$

<sup>6</sup>当  $v^a$  作为角标时, 为了平衡抽象指标 (等号右端的抽象指标已经缩并掉), 略去指标  $a$ .

接着, 我们将映射  $\sigma$  作用到式(2.1-18)上, 有

$$\begin{aligned}\sigma(g) &= \sigma(g(x_0^1, \dots, x_0^m)) + \sigma\left((x^i - x_0^i) \frac{\partial g(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^i}\right) \\ &= \sigma((x^i - x_0^i)) \cdot \frac{\partial g(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^i} \Big|_P + (x^i - x_0^i)|_P \cdot \sigma\left(\frac{\partial g(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^i}\right) \\ &= \sigma(x^i) \frac{\partial g(x_0)}{\partial x^i} = v^a (e^i)_a \frac{\partial g(x_0)}{\partial x^i} = v^a \nabla_a g(x_0) = D_v g.\end{aligned}$$

计算过程并不困难, 注意到  $x_0$  和  $g(x_0^1, \dots, x_0^m)$  是实常数, 并利用命题2.4; 参阅定义2.2中条件 (1) 和 (2), 同时应用式(2.1-12)、式(2.1-17)和式(2.1-19)可得最终答案. 这便证明了定理中  $v^a$  的存在性, 下面用反证法证明  $v^a$  的唯一性. 假设有不同与  $v^a$  的矢量  $\tilde{v}^a = \tilde{v}^i (e_i)^a$  满足条件  $\sigma = D_{\tilde{v}}$ , 将它作用在坐标函数  $x^i$  上, 易得

$$\sigma(x^i) = D_{\tilde{v}}(x^i) = \tilde{v}^a \nabla_a (x^i) = \tilde{v}^a (e^j)_a \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \tilde{v}^a (e^i)_a = \tilde{v}^i. \quad (2.1-20)$$

即,  $\tilde{v}^i = \sigma(x^i) = v^i$ ; 参见式(2.1-19)可知  $\tilde{v}^a = v^a$ ; 定理2.3证毕.

#### 2.1.4 欧氏空间切映射

切映射是微分流形里重要概念之一, 为此我们先叙述欧氏空间的切映射, 这可为后面切映射概念的引入做些铺垫. 设  $E^m$  中的坐标是  $x^i$ , 标架是  $\{O; (e_i)^a\}$ ;  $E^n$  中的坐标是  $y^\alpha$ , 标架是  $\{P; (\epsilon_i)^a\}$ . 多元微积分中已经学习过从  $E^m$  到  $E^n$  的  $C^r$  映射  $\phi$  的知识, 映射  $\phi$  有  $m$  个自变宗量, 有  $n$  个因变量, 可以表示为

$$y^\alpha = \phi^\alpha(x^1, \dots, x^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n. \quad (2.1-21)$$

此映射的 Jacobi 矩阵是

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^1}{\partial x^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial \phi^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}. \quad (2.1-22)$$

映射  $\phi: E^m \rightarrow E^n$  的一个重要不变量是它在各点的秩, 这个秩等于上面 Jacobi 矩阵秩.

仿照上节, 设有过点  $A \in E^m$  的曲线  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow E^m$ , 且  $A = \gamma(0)$ , 曲线在此点的切矢量是  $v^a = \frac{dx^i \circ \gamma(0)}{dt} (e_i)^a$ . 映射  $\phi$  将  $E^m$  中的曲线  $\gamma(t)$  变成  $E^n$  中的曲线  $\tilde{\gamma}(t)$ , 即有  $\tilde{\gamma}(t) = \phi \circ \gamma(t)$ , 且  $B = \tilde{\gamma}(A) = \tilde{\gamma}(0) \in E^n$ ; 我们记  $E^n$  中曲线  $\tilde{\gamma}(t)$  在  $B$  点切矢量为  $\tilde{v}^a$ , 那么它与  $v^a$  有什么关系?

依照前面给出的参数方程, 我们知道  $\tilde{\gamma}(t)$  的参数方程为,

$$y^\alpha = \phi^\alpha(x^1(t), \dots, x^m(t)), \quad (2.1-23)$$

切矢量  $\tilde{v}^a$  自然是对曲线  $\tilde{\gamma}(t)$  的方向导数 (上小节已指出方向导数同构于切矢量),

$$\tilde{v}^a = \frac{dy^\alpha \circ \tilde{\gamma}(0)}{dt} (\epsilon_\alpha)^a = \frac{dy^\alpha \circ \phi \circ \gamma(0)}{dt} (\epsilon_\alpha)^a = \frac{\partial y^\alpha \circ \phi}{\partial x^i} \Big|_A \frac{dx^i \circ \gamma(0)}{dt} (\epsilon_\alpha)^a. \quad (2.1-24)$$

上式便是  $\tilde{v}^a$  的展开式; 从上式和  $v^a$  的展开式可得两个切矢量分量间的关系式

$$\tilde{v}^a = v^i \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Big|_{(x^1(0), \dots, x^m(0))}. \quad (2.1-25)$$

由此式可见, 映射  $\phi$  诱导出从  $E^m$  中  $A$  点切空间到  $E^n$  中点  $B$  切空间之间的线性变换, Jacobi 矩阵(2.1-22)恰好是这个线性变换在相应基底下的变换矩阵.

高维空间较难想象, 我们设想  $\phi: E^2 \rightarrow E^2$ , 即它只把某曲面 (甚至是平面) 变换到另外一个曲面, 那么  $v^a$  便是变换前曲面  $A$  点切平面上的一矢量,  $\tilde{v}^a$  便是变换后曲面  $B$  点切平面上的切矢量, 这两个切矢量之间的变换关系由 Jacobi 矩阵描述. 这在二维曲面论中是熟知的结论.

映射  $\phi$  所诱导的两个切空间 (二维时是切平面) 间的线性映射称为切映射, 记为  $\phi_*$ , 即  $\phi_* v^a = \tilde{v}^a$ .

考虑  $E^m$  中第  $i$  条坐标线的切矢量, 即让  $v^i = 1$  ( $i$  是固定值, 比如  $i = 1$ ), 其它  $v^j = 0, \forall j \neq i$ . 依照公式(2.1-24)的最后一步哑标  $\alpha$  继续求和, 哑标  $i$  只有一项非零且  $v^i = 1$ , 从而有

$$\tilde{v}^a = \phi_* v^a \Rightarrow \phi_*(e_i)^a = \sum_{\alpha=1}^n (\epsilon_\alpha)^a \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Big|_{(x^1(0), \dots, x^m(0))}. \quad (2.1-26)$$

此公式即基矢间的切映射关系.

虽然本节定义了广义欧氏空间的度规, 但不是微分流形上的度规. 从下节开始, 一直到 §5.1 都不会用到度规这个基本几何量. 读者可以看到: 即使没有度规, 微分几何内容仍旧十分丰富.

## 2.2 微分流形基本概念

微分流形是现代数学中的一个基本概念, 在数学的众多分支中都有应用. 我们在 §1.1.1 引入了拓扑流形的概念 (见定义1.8), 在拓扑流形中, 有拓扑结构, 可以谈及连续性、同胚性等等, 但无法涉及映射是否可微. 为了使某些拓扑流形可以谈及映射可微性, 需要对这类流形提出某些合适的、特别的要求, 以使此流形具备支持微分运算的结构.

### 2.2.1 微分流形定义

上节介绍的广义欧氏空间  $\mathbb{R}^m$  上的函数可以涉及可微性, 这种可微性在数学分析中早已研究过; 如果我们让拓扑流形每一点的邻域都具有空间  $\mathbb{R}^m$  上的某些属性, 那么就可以谈及拓扑流形上的可微性了, 这便需要引入微分流形的概念.

**定义 2.5** 设有  $m$  维拓扑流形  $M$  (同时要求  $M$  具有可数拓扑基), 并且存在集族  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \mathcal{J}\}$  (其中  $\mathcal{J}$  为某种指标集) 满足:

- (1)  $\{U_\alpha | \alpha \in \mathcal{J}\}$  是  $M$  的一个开覆盖, 映射  $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  是拓扑同胚的;
- (2) 相容性:  $\forall \alpha, \beta \in \mathcal{J}$ , 如果  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , 那么坐标变换  $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$  和  $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$  是  $C^r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ) 的;
- (3) 对于条件 (1) 和 (2) 来说, 集族  $\mathcal{A}$  是  $C^r$  极大的.

则称  $M$  是  $m$  维  $C^r$  **微分流形**;  $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$  称为**坐标卡** (或坐标图); 满足条件 (1) 和 (2) 的坐标卡集合称为**坐标图册**, 再满足第 (3) 条, 则  $\mathcal{A}$  称为流形  $M$  的一个  $C^r$  **微分结构**.

当  $r = 0$  时就是拓扑流形, 没有可微性. 可微阶数  $C^r$  一般取为  $C^\infty$ , 称为**光滑流形**; 如无特殊声明, 之后章节皆取  $r = \infty$ ; 而且我们也不再严格区分微分流形与光滑流形的差别 (其差别无非是可微到多少阶).

这个定义引入了许多新概念, 自然需要进一步解释. 先解释坐标卡.

$M$  是拓扑流形, 它的每一个开集  $U$  (暂时省略角标  $\alpha$ ) 都同胚于  $\mathbb{R}^m$  中的开子集, 即有  $\varphi: U \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ , 并且  $\varphi^{-1}$  也是连续映射<sup>7</sup>. 由于  $\mathbb{R}^m$  中的开集天然存在坐标, 我们利用同胚属性将此坐标移植到开集  $U$  上, 具体这样操作: 设  $p \in U$  是  $M$  中的一点; 同胚映射  $\varphi$  将其映射为  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi(p)$  的坐标是  $(\varphi(p))^i$ , 令点  $p \in U$  的坐标是  $x^i(p) \equiv (\varphi(p))^i$ ; 显然这个坐标是依赖于映射  $\varphi$  的, 不同映射将给出不同的坐标.  $U$  中的点原来没有坐标概念, 我们借助同胚这个操作, 赋给了它坐标属性;  $(U, \varphi)$  称为  $M$  的**坐标卡**,  $(U, x^i)$  称为  $M$  的**局部坐标系**, 坐标卡和局部坐标系是同一内容的两种不同叫法而已.

再解释相容性, 描述过程可参考图2.2. 定义2.5中条件 (1) 使用了指标集, 这使得符号有较多角标; 为了简洁起见, 我们用不同字符  $(U, \varphi; x^i)$  和  $(V, \psi; y^i)$  来表示流形  $M$  的两个不同的坐标卡 (从而暂时省略了稍显繁杂的角标).

如果  $U \cap V = \emptyset$ , 则称  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  是相容的.

下面只讨论  $U \cap V \neq \emptyset$  的情形. 令

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i, \quad y^i(p) = (\psi(p))^i, \quad \forall p \in U \cap V, \quad (2.2-1)$$

那么点  $p$  的两组坐标  $x^i(p)$  和  $y^i(p)$  是相互连续依赖的. 因为  $\varphi$  和  $\psi$  是同胚映射, 则它们在非空开集  $U \cap V$  上的限制

$$\varphi|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow \varphi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m,$$

$$\psi|_{U \cap V}: U \cap V \rightarrow \psi(U \cap V) \subset \mathbb{R}^m.$$

也是同胚; 它们的逆自然也是同胚; 同胚又具有传递性, 所以

$$\psi|_{U \cap V} \circ (\varphi|_{U \cap V})^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow U \cap V \rightarrow \psi(U \cap V),$$

$$\varphi|_{U \cap V} \circ (\psi|_{U \cap V})^{-1}: \psi(U \cap V) \rightarrow U \cap V \rightarrow \varphi(U \cap V).$$

<sup>7</sup>有的文献定义  $\varphi^{-1}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ; 由于  $\varphi$  是同胚, 用  $\varphi$  还是  $\varphi^{-1}$  来定义都可以的, 注意区分便是.

也是同胚的, 同时上面两个映射互为逆映射. 这些同胚关系可以用坐标表示成,

$$x^i(p) = (\varphi(p))^i = (\varphi \circ \psi^{-1}(\psi(p)))^i \equiv g^i(y^1(p), \dots, y^m(p)), \quad (2.2-2)$$

$$y^i(p) = (\psi(p))^i = (\psi \circ \varphi^{-1}(\varphi(p)))^i \equiv f^i(x^1(p), \dots, x^m(p)). \quad (2.2-3)$$

很明显, 上式是  $\mathbb{R}^m$  开子集中的坐标变换. 因同胚映射本身是连续映射, 所以  $f^i$  (即  $y^i$ ) 和  $g^i$  (即  $x^i$ ) 都是连续函数; 并且由上面定义可知它们互逆, 即

$$x^i = g^i(f^1(x^1, \dots, x^m), \dots, f^m(x^1, \dots, x^m)), \quad (2.2-4)$$

$$y^i = f^i(g^1(y^1, \dots, y^m), \dots, g^m(y^1, \dots, y^m)). \quad (2.2-5)$$

因  $f^i$  和  $g^i$  都是定义在  $\mathbb{R}^m$  开集上的函数, 所以可以定义它们的可微性; 而  $\psi \circ \varphi^{-1}$  和  $\varphi \circ \psi^{-1}$  可微与否可分别由  $f$  和  $g$  可微与否来定义. 我们只需假设  $f^i$  和  $g^i$  是  $C^r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ) 的即可 (其中  $r$  可选为解析的, 即  $r = \omega$ ). 当  $\psi \circ \varphi^{-1} \equiv f$  和  $\varphi \circ \psi^{-1} \equiv g$  有了可微性时, 我们便称坐标卡  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  是  $C^r$  相容的. 可见, 流形  $M$  上映射  $(\psi \circ \varphi^{-1}, \varphi \circ \psi^{-1})$  的可微性是借助于  $\mathbb{R}^m$  中映射  $(f, g)$  可微性来定义的.

接着解释条件 (3) 中的极大性: 如果  $(U, \varphi)$  是流形  $M$  的一个坐标卡, 并且  $(U, \varphi)$  与  $\mathcal{A}$  中的每一个成员都是  $C^r$  相容的, 那么  $(U, \varphi)$  必然属于  $\mathcal{A}$ ; 此时称  $\mathcal{A}$  是极大的.

设微分流形  $M$  有坐标卡集合  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$ , 这两个集合都分别满足定义中条件 (1) 和 (2). 这时有两种可能, 第一, 两个图册互不相容, 即  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  之间的两个坐标卡的坐标变换不满足条件 (2); 参见例 2.8; 这时流形有两个不同的微分结构.

第二, 两个图册相容, 见例 2.11; 那么可以证明如下命题,

**命题 2.6** 设微分流形  $M$  上有坐标卡集合  $\mathcal{B}$  满足定义 2.5 中的条件 (1) 和 (2), 那么在  $M$  上必然存在唯一的一个微分结构  $\mathcal{A} \supset \mathcal{B}$ .

**证明.** 已知存在坐标卡集合  $\mathcal{B}$  满足条件 (1) 和 (2), 索性把所有与  $\mathcal{B}$  相容的坐标卡都放在一起构造出一个最大的图册, 称之为  $\mathcal{A}$ . 用这种方式构造的集合  $\mathcal{A}$  显然满足条件 (1) 和 (2), 这便是条件 (3) 中所说的极大图册. 这种方式构造出的  $\mathcal{A}$  显然是唯一的. ■

这个命题说明: 定义 2.5 中的条件 (1) 和 (2) 是基本的.

下面给出几个具体例子.

**例 2.7**  $m$  维欧氏空间  $\mathbb{R}^m$ . 只需取一个开集  $U = \mathbb{R}^m$  即可, 令映射  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  是恒等映射, 则  $(U, \varphi)$  是空间  $\mathbb{R}^m$  的坐标卡, 称之为  $\mathbb{R}^m$  的标准微分结构, 此微分结构是平庸的.

**例 2.8** 实数轴  $\mathbb{R}$  上可以构造不同的微分结构. 第一种微分结构取为如例 2.7 所示的标准微分结构, 记为  $\mathcal{A}_1$ , 局部坐标用  $x$  表示.

第二种微分结构可以这样构造, 取  $V = \mathbb{R}$ , 映射  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}$  取为  $\psi(y) = y^5, \forall y \in V$ , 记这种结构为  $\mathcal{A}_2 = (V, \psi)$ .



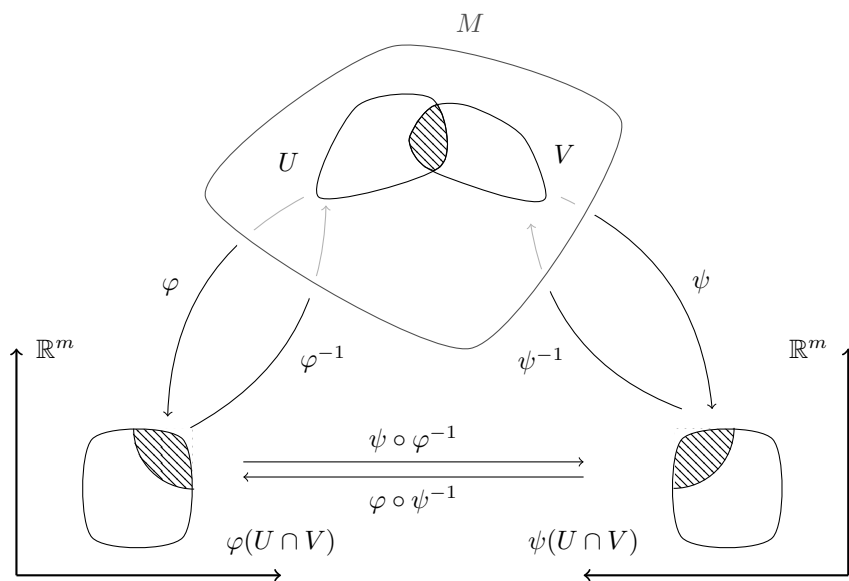


图 2.2: 坐标卡与相容性

坐标变换  $\varphi \circ \psi^{-1}$  的表达式为  $x = \sqrt[3]{y}$ , 很明显这个函数在  $y = 0$  处不可微, 所以两个微分结构并不相容.

**例 2.9**  $m$  维球面  $S^m(a) = \{x : x \in \mathbb{R}^{m+1}, |x| = a, a > 0\}$  的微分流形.

对每一个  $\alpha (1 \leq \alpha \leq m+1)$ , 令

$$U_{\alpha}^{+} = \{(x^1, \dots, x^{m+1}) \in S^m : x^{\alpha} > 0\},$$

$$U_{\alpha}^{-} = \{(x^1, \dots, x^{m+1}) \in S^m : x^{\alpha} < 0\}.$$

这两个类型的集合是球面  $S^m(a)$  上的开集, 这些集合之并是球面  $S^m(a)$  的开覆盖, 即

$$S^m(a) = \bigcup_{\alpha=1}^{m+1} (U_{\alpha}^{+} \cup U_{\alpha}^{-}). \quad (2.2-6)$$

有了开覆盖, 下面定义映射  $\varphi_{\alpha}^{+} : U_{\alpha}^{+} \rightarrow \mathbb{R}^m$  和  $\varphi_{\alpha}^{-} : U_{\alpha}^{-} \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$\varphi_{\alpha}^{+}(x^1, \dots, x^{m+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^{\alpha}, \dots, x^{m+1}), \quad (2.2-7)$$

$$\varphi_{\alpha}^{-}(x^1, \dots, x^{m+1}) = (x^1, \dots, \hat{x}^{\alpha}, \dots, x^{m+1}). \quad (2.2-8)$$

其中  $\hat{x}^{\alpha}$  表示把第  $\alpha$  个分量  $x^{\alpha}$  去掉. 实际上, 这两个映射从不同的开集得到了相同的坐标. 在多元微积分角度上看, 上面两个映射是  $C^{\infty}$  的, 它们的逆也是  $C^{\infty}$  的; 所以  $(U_{\alpha}^{+}, \varphi_{\alpha}^{+})$  和

$(U_\alpha^-, \varphi_\alpha^-)$  是球面  $S^m(a)$  的坐标卡. 映射  $\varphi_\alpha^\pm$  (取  $\alpha$  为固定数值) 的几何意义是将  $S^m(a)$  的半球面  $U_\alpha^\pm$  沿第  $\alpha$  坐标轴投影到  $x^\alpha = 0$  坐标平面上.

下面我们来看坐标变换是否相容. 取  $\alpha$  和  $\beta$  为两个互不相等的固定数值, 那么必然有  $U_\alpha^+ \cap U_\beta^+ \neq \emptyset$ 、 $U_\alpha^+ \cap U_\beta^- \neq \emptyset$  和  $U_\alpha^- \cap U_\beta^- \neq \emptyset$ , 我们以  $U_\alpha^+ \cap U_\beta^-$  为例, 写出如下坐标变换的具体公式 (见式(2.2-9)),

$$\begin{aligned}\varphi_\beta^- \circ (\varphi_\alpha^+)^{-1} &: \varphi_\alpha^+(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-) \rightarrow \varphi_\beta^-(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-), \\ \varphi_\alpha^+ \circ (\varphi_\beta^-)^{-1} &: \varphi_\beta^-(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-) \rightarrow \varphi_\alpha^+(U_\alpha^+ \cap U_\beta^-).\end{aligned}$$

其余坐标变换公式留给读者当作练习. 假设  $\alpha < \beta$ , 对于  $S^m$  球面上的点  $(x^1, \dots, x^{m+1}) \in U_\alpha^+ \cap U_\beta^-$  有  $x^\alpha > 0$ ,  $x^\beta < 0$ , 应用条件  $|x| = a$  可得坐标变换公式,

$$\begin{aligned}\varphi_\beta^- \circ (\varphi_\alpha^+)^{-1}(x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^{m+1}) \\ = \left( x^1, \dots, x^{\alpha-1}, \sqrt{a^2 - \sum_{\gamma \neq \alpha} (x^\gamma)^2}, x^{\alpha+1}, \dots, \hat{x}^\beta, \dots, \hat{x}^{m+1} \right),\end{aligned}\quad (2.2-9a)$$

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha^+ \circ (\varphi_\beta^-)^{-1}(x^1, \dots, \hat{x}^\beta, \dots, x^{m+1}) \\ = \left( x^1, \dots, \hat{x}^\alpha, \dots, x^{\beta-1}, -\sqrt{a^2 - \sum_{\gamma \neq \beta} (x^\gamma)^2}, x^{\beta+1}, \dots, \hat{x}^{m+1} \right).\end{aligned}\quad (2.2-9b)$$

因为式子  $\sqrt{a^2 - \sum_{\gamma \neq \alpha} (x^\gamma)^2}$  和  $\sqrt{a^2 - \sum_{\gamma \neq \beta} (x^\gamma)^2}$  根号下是恒大于零的, 求导之后放在分母上不会导致无穷大, 所以两个坐标变换  $\varphi_\beta^- \circ (\varphi_\alpha^+)^{-1}$  和  $\varphi_\alpha^+ \circ (\varphi_\beta^-)^{-1}$  都是  $C^\infty$  的, 因此坐标卡  $(U_\alpha^+, \varphi_\alpha^+)$  和  $(U_\alpha^-, \varphi_\alpha^-)$  是  $C^\infty$  相容的. 与此类似同样可证其余坐标卡也是  $C^\infty$  相容的, 所以坐标卡集合  $\{(U_\alpha^+, \varphi_\alpha^+), (U_\alpha^-, \varphi_\alpha^-) : 1 \leq \alpha \leq m+1\}$  决定了球面  $S^m(a)$  上的  $C^\infty$  一种微分结构, 进而  $S^m(a)$  符合定义2.5中所有条件, 所以它是微分流形.

**例 2.10** 继上一例题, 用球极投影法再次说明  $m$  维球面是微分流形.

设球面的北极和南极点坐标分别为  $N = (0, \dots, 0, a)$  和  $S = (0, \dots, 0, -a)$ . 令  $V_+ = S^m(a) \setminus \{S\}$ ,  $V_- = S^m(a) \setminus \{N\}$ , 这样定义的集合是球面上的开集. 分别定义如下映射  $\psi_\pm : V_\pm \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,

$$(y^1, \dots, y^m) \equiv \psi_+(x^1, \dots, x^{m+1}) = \left( \frac{ax^1}{a+x^{m+1}}, \dots, \frac{ax^m}{a+x^{m+1}} \right), \quad (2.2-10)$$

$$(z^1, \dots, z^m) \equiv \psi_-(x^1, \dots, x^{m+1}) = \left( \frac{ax^1}{a-x^{m+1}}, \dots, \frac{ax^m}{a-x^{m+1}} \right). \quad (2.2-11)$$

需要由上两式来求  $\psi_\pm$  的逆映射, 我们仅以  $\psi_+$  为例来说明求解过程. 将式(2.2-10)求平方和, 并利用  $\sum_{i=1}^{m+1} (x^i)^2 = a^2$ , 可得

$$\sum_{j=1}^m (y^j)^2 = \frac{a^2}{(a+x^{m+1})^2} \left( \sum_{i=1}^m (x^i)^2 \right) = \frac{a^2}{(a+x^{m+1})^2} (a^2 - (x^{m+1})^2)$$

$$\Rightarrow x^{m+1} = \frac{a(a^2 - \sum_j (y^j)^2)}{a^2 + \sum_j (y^j)^2}, \quad \text{或} \quad x^{m+1} = -a \text{ (舍弃)}.$$

有了最后一个坐标的表达式, 其它坐标几乎一望而知, 它们是 (同时给出  $\psi_-^{-1}$ )

$$\begin{aligned} (x^1, \dots, x^m, x^{m+1}) &= \psi_+^{-1}(y^1, \dots, y^m) \\ &= \frac{a}{a^2 + \sum_j (y^j)^2} \left( 2ay^1, \dots, 2ay^m, a^2 - \sum_{j=1}^m (y^j)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.2-12)$$

$$\begin{aligned} (x^1, \dots, x^m, x^{m+1}) &= \psi_-^{-1}(z^1, \dots, z^m) \\ &= \frac{a}{a^2 + \sum_j (z^j)^2} \left( 2az^1, \dots, 2az^m, \sum_{j=1}^m (z^j)^2 - a^2 \right). \end{aligned} \quad (2.2-13)$$

有了逆映射, 便可以求出坐标变换如下

$$(z^1, \dots, z^m) = \psi_- \circ \psi_+^{-1}(y^1, \dots, y^m) = \frac{a^2}{\sum_j (y^j)^2} (y^1, \dots, y^m), \quad (2.2-14)$$

$$(y^1, \dots, y^m) = \psi_+ \circ \psi_-^{-1}(z^1, \dots, z^m) = \frac{a^2}{\sum_j (z^j)^2} (z^1, \dots, z^m). \quad (2.2-15)$$

不难验证这些坐标变换都是  $C^\infty$  的, 所以  $(V_+, \psi_+; y^i)$  和  $(V_-, \psi_-; z^i)$  构成了球面  $S^m(a)$  的容许局部坐标开覆盖, 决定了球面的一种微分结构, 从而它是微分流形.

**例 2.11** 以  $S^1(1)$  为例, 来说明上面两个例题中给出的坐标卡属于同一微分结构.

我们只取其中一个坐标变换, 其余坐标变换可类似给出. 取第一种坐标卡中的开集和映射为

$$U_1^+ = \{(x^1, x^2) \in S^1 : x^1 > 0\}, \quad \varphi_1^+(x^1, x^2) = x^2, \quad (\varphi_1^+)^{-1}(x^2) = \left( \sqrt{1 - (x^2)^2}, x^2 \right).$$

取第二种坐标卡中的开集和映射为

$$V_+, \quad \psi_+(x^1, x^2) = \frac{x^1}{1 + x^2}, \quad \psi_+^{-1}(y^1) = \frac{1}{1 + (y^1)^2} (2y^1, 1 - (y^1)^2).$$

坐标变换为

$$\varphi_1^+ \circ \psi_+^{-1}(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{1 + \xi^2}, \quad \psi_+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}(\eta) = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \eta}. \quad (2.2-16)$$

这些函数是  $C^\infty$  的, 所以坐标变换是相容的, 它们属于同一微分结构.

可见在构造微分流形时, 只需指出它的一个相容的坐标覆盖就行了, 这样已能研究全部的几何. 比如对于球面  $S^m(a)$ , (对于应用而言) 我们用例2.9或例2.10中的任意一个坐标覆盖即可, (除了微分拓扑等基础领域) 没有必要非将其延拓至最大相容的坐标覆盖 (即微分结构).

### 2.2.2 笛卡尔积流形

拓扑空间有笛卡尔积的概念（见定义1.14），微分流形也有类似概念．设有微分流形  $M$  和  $N$ ，其维数分别是  $m$  和  $n$ ，它们的微分结构分别是

$$\mathcal{A}_1 = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) | \alpha \in \mathcal{J}_1\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{(V_i, \psi_i) | i \in \mathcal{J}_2\}. \quad (2.2-17)$$

那么， $\{(U_\alpha \times V_i) | \alpha \in \mathcal{J}_1, i \in \mathcal{J}_2\}$  是拓扑积  $M \times N$  的一个开覆盖．对每一对指标  $\{(\alpha, i) \in \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2\}$ ，定义从  $U_\alpha \times V_i$  到  $\mathbb{R}^{m+n}$  的映射如下

$$(\varphi_\alpha \times \psi_i)(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_\alpha(x), \psi_i(y)), \quad \forall (x, y) \in U_\alpha \times V_i. \quad (2.2-18)$$

$$(\varphi_\alpha \times \psi_i)^{-1}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_\alpha^{-1}(X), \psi_i^{-1}(Y)), \quad \forall (X, Y) \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_i(V_i). \quad (2.2-19)$$

不难验证  $\varphi_\alpha \times \psi_i$  是从  $U_\alpha \times V_i$  到  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_i(V_i)$  的同胚映射．

再者，当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ,  $V_i \cap V_j \neq \emptyset$  时，定义

$$(\varphi_\alpha \times \psi_i) \circ (\varphi_\beta \times \psi_j)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}) \times (\psi_i \circ \psi_j^{-1}). \quad (2.2-20)$$

在这样定义下， $(U_\alpha \times V_i, \varphi_\alpha \times \psi_i)$  与  $(U_\beta \times V_j, \varphi_\beta \times \psi_j)$  是  $C^\infty$  相容的．当  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  和  $V_i \cap V_j = \emptyset$  至少有一个成立时，我们约定它们也是  $C^\infty$  相容的．这样，

$$\{(U_\alpha \times V_i, \varphi_\alpha \times \psi_i) | \alpha \in \mathcal{J}_1, i \in \mathcal{J}_2\}, \quad (2.2-21)$$

在拓扑积  $M \times N$  上决定了一个  $m+n$  维的光滑结构，这使得  $M \times N$  成为  $m+n$  维光滑流形，称为  $M$  和  $N$  的笛卡尔积流形．

很明显，上述流程可以推广到任意有限个流形  $(M_1, M_2, \dots)$  之积．

### 2.2.3 小结

微分流形定义要求每个局部开集  $U$  均同胚于  $\mathbb{R}^m$  中的开集，所以流形自然存在局部坐标  $\{U; x^i\}$ ，这个坐标是天生存在的，不需要额外定义；微分几何所有理论都需要构建在这个坐标基础之上．但是，流形论本身不依赖于某套特别的坐标系．因此，那种想完全摆脱局部坐标去构建微分几何理论的想法是错误的．

然而，微分几何理论的却是整体性的，流形论主要目的是研究在局部坐标变换下而保持不变的性质（如切矢量、外微分式、黎曼曲率等等）．微分几何理论不能只对某个特别的坐标系正确，对其它坐标系不正确；也就是理论本身必须与坐标系选取无关才可以；坐标本身没有意义，所有基本理论都不能只依赖某特定局部坐标（Christoffel 符号是个例外）．那种想用坐标分量语言来描述微分几何的方式貌似已经过时了．

引入坐标系的目的是为了把几何问题代数化，从而能用代数及微积分的方法来研究几何问题．选择适当的坐标可以大大简化研究难度，大家在书中看到的各种坐标，是前人经过长期研究而作出的选择，基本上是最优的了．

关于坐标本身没有意义的问题，我们举两个例子．

**例 2.12** 张三沿直线向东走了一段距离，我们把他走路的起点算作坐标  $a$ ，终点坐标记为  $b$ ；但是坐标本身（不论是  $a$  还是  $b$ ）都没有意义，有意义的是由“ $b-a$ ”表示的这段距离；而且这段距离是不随坐标系变换而改变的，比如随便将坐标系平移和旋转，这段距离是不变的，但两点坐标的数值却改变了。

**例 2.13** 在  $\mathbb{R}^3$  中的  $x-y$  平面上，画一个椭圆（称为旧的），中心在原点，长半轴沿  $x$ ，短半轴沿  $y$ ；这是最常用的坐标表示形式。我们将坐标轴进行任意旋转（甚至反射），那么（新）椭圆可能处于  $\mathbb{R}^3$  中任意一个平面上，不在  $x-y$  平面上；此时“旧”、“新”椭圆上的坐标几乎不可能一致了，但是椭圆的长、短半轴长度，偏心率等等几何量是不变的。这个例子生动地说明了“坐标本身没有意义”，我们应该研究那些坐标变换下的不变量。

在牛顿力学中，地球绕太阳旋转，我们依据牛顿第二定律和万有引力公式列出方程，如果按照上述“旧”方式取坐标，则方程很容易求解；如果按照上述“新”方式取坐标，则方程很难求解，可能需要用数值解法。不论哪个坐标系，求得的解必然是同一个椭圆，但地球在“旧”、“新”坐标系中的坐标是不同的。可见，即使在经典力学中，我们研究的仍是坐标变换下的不变量，坐标本身没有意义！

## 2.3 流形的映射

读者应该学习过多元微积分中  $\mathbb{R}^m$  与  $\mathbb{R}^n$  间映射（或函数）的概念，那里的内容大都可以推广到流形之间。

**定义 2.14** 设  $M$  和  $N$  分别是  $m$  和  $n$  维  $C^\infty$  微分流形，存在连续映射  $f: M \rightarrow N$ 。<sup>8</sup>  $\forall p \in M$ ，存在包含  $p$  的坐标卡  $(U, \varphi; x)$  以及  $N$  上包含点  $q \equiv f(p)$  的坐标卡  $(V, \psi; y)$ ，那么可以构造如下映射  $\hat{f}$ ，

$$\hat{f} \equiv \psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) (\subset \mathbb{R}^m) \rightarrow \psi(V) (\subset \mathbb{R}^n).$$

如果  $\hat{f}$  是  $C^r$  的（即可微到  $r(>0)$  阶），<sup>9</sup> 那么称映射  $f: M \rightarrow N$  在  $p$  点是  $C^r$  的；如果  $f$  在每一点都是  $C^r$  的，那么称之为  $C^r$  映射。

**注 2.15** 不难验证，上述定义与坐标卡选取无关。有了这个定义后，我们不再严格区分  $f$  和  $\hat{f}$ ，认为两者等同。在多元微积分中  $\hat{f}$  在  $p \in \mathbb{R}^m$  点的 Jacobi 矩阵也称为  $f$  在  $p \in M$  点的 Jacobi 矩阵。Jacobi 矩阵秩也可作类似认同。

**定义 2.16** 设定义 2.14 中的  $M$  是实数轴上的某个开区间  $(a, b)$ ，那么称映射  $f: (a, b) \rightarrow N$  为流形  $N$  上的一条  $C^r$ （参数）曲线。

设流形  $N$  中有  $C^r$  曲线  $f(t)$ ，其中  $t$  称为曲线的参数。如果有  $C^r$  变换函数  $u(t)$  将参数  $t$  变成  $u$ ，并且  $\frac{du}{dt}$  处处不为零，那么称变换后的曲线  $\tilde{f}(u) = f(u(t))$  是原曲线  $f(t)$  的

<sup>8</sup>读者应能注意到：只到这里的  $f$  只是拓扑流形间的映射，只能谈及连续性，无法涉及可微性。

<sup>9</sup> $\hat{f}$  肯定是连续的； $\hat{f}$  本质上是  $\mathbb{R}^m$  与  $\mathbb{R}^n$  开子集间的映射，自然可以谈及其可微性。

**重参数化曲线.** 既然  $\frac{du}{dt}$  处处不为零, 那么必然有  $\frac{du}{dt} > 0$  或者  $\frac{du}{dt} < 0$  处处成立, 即变换  $u(t)$  是单调的双射函数.

**定义 2.17** 设定义2.14中的  $N$  是实数轴上的某个开区间  $(a, b)$ , 那么称映射  $f: M \rightarrow (a, b)$  为流形  $M$  上的  $C^r$  **函数**. 全体  $C^r$  函数集合记作  $C^r(M)$ .

函数的加法和乘法在  $C^r(M)$  中是封闭的, (参照5页定义1.30) 因此  $C^r(M)$  在代数上是一个环.

**例 2.18** 设流形  $M$  的局部坐标是  $(U_\alpha, \varphi_\alpha; x^i)$ , 在局部坐标系下有  $\frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i$ , 这明确说明: 当把局部坐标  $x^i$  看成函数时, 它一定是  $C^\infty$  的.

**定义 2.19** 设定义2.14中的  $f$  是拓扑同胚, 若  $f$  和  $f^{-1}$  都是  $C^r$  的, 则称  $f$  是微分流形  $M$  与  $N$  间的  $C^r$  **微分同胚**. 若微分同胚只在  $M$  的某个局部坐标系  $U$  成立, 则称为  $U$  上的**局部微分同胚**.

拓扑同胚必然可得到两个流形的维数相等; 微分同胚自然也能得到此结论.

下面叙述几个关于映射的命题, 这些命题会在多处使用. 为理解方便, 先介绍  $\mathbb{R}^m$  空间中的一个命题,

**命题 2.20** 令  $Q$  是  $\mathbb{R}^m$  中的一个矩形区域. 存在一个  $C^\infty$  函数  $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  使得当  $x$  属于  $Q$  内部时, 有:  $\phi(x) > 0$ ; 否则  $\phi(x) = 0$ .

**证明.** 先考虑如下一维函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{t}), & t > 0; \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

此函数曲线见图2.3, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $f(t) \rightarrow 1^-$ ; 当  $t \rightarrow 0^+$  时,  $f(t) \rightarrow 0$ ; 拐点在  $t = 0.5$  处. 很明显, 函数  $f$  在实数轴上是  $C^\infty$  的. 利用此函数, 接着定义另一函数  $g$  (见图2.4),

$$g(t) = f(t) \cdot f(1-t) / (f(0.5))^2. \quad (2.3-1)$$

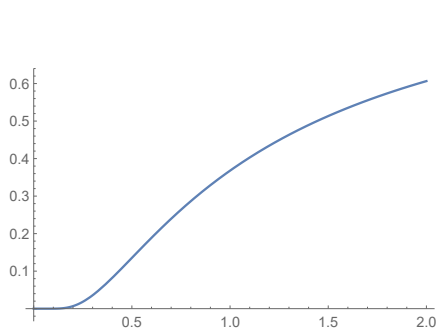
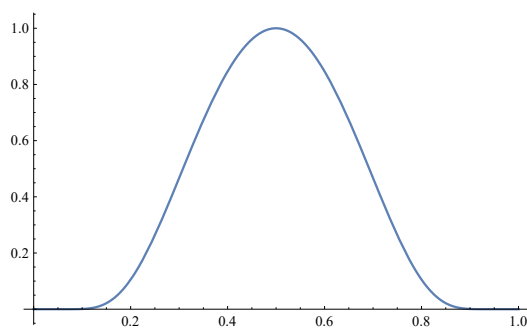
函数  $g$  在  $0 < t < 1$  中非零且恒正, 其它点恒为零; 最大值已归一化到 1.

对于高维空间  $\mathbb{R}^m$  中的矩形区域  $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ , 则可定义函数  $\phi$  如下

$$\phi(x) = g\left(\frac{x_1 - a_1}{b_1 - a_1}\right) \times g\left(\frac{x_2 - a_2}{b_2 - a_2}\right) \times \cdots \times g\left(\frac{x_m - a_m}{b_m - a_m}\right). \quad (2.3-2)$$

这样定义的函数满足命题要求, 这便证明了存在性. 需要指出的是这类函数有很多, 不止上述一个. ■

上面命题还有变种,

图 2.3: 指数函数  $f$ 图 2.4: 指数函数积  $g$ 

**命题 2.21** 令  $D_1$  和  $D_2$  是  $\mathbb{R}^m$  中两个同心球, 且  $\overline{D_1} \subset D_2$ . 则存在  $C^\infty$  函数  $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $0 \leq f \leq 1$ , 并且

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in D_1; \\ 0, & x \notin D_2. \end{cases} \quad (2.3-3)$$

上面命题将取值域限定为球, 这个限制可以拓展至一般情形,

**命题 2.22** 令  $U$  和  $V$  是  $\mathbb{R}^m$  中两个非空开集,  $\overline{V}$  是紧致的, 且  $\overline{V} \subset U$ . 则存在  $C^\infty$  函数  $g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $0 \leq g \leq 1$ , 并且

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in V; \\ 0, & x \notin U. \end{cases} \quad (2.3-4)$$

上面命题可以推广到一般流形上,

**命题 2.23** 令  $U$  和  $V$  是微分流形  $M$  中两个非空开集,  $\overline{V}$  是紧致的, 且  $\overline{V} \subset U$ . 则存在  $C^\infty$  函数  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $0 \leq h \leq 1$ , 并且

$$h(p) = \begin{cases} 1, & p \in V; \\ 0, & p \notin U. \end{cases} \quad (2.3-5)$$

命题2.21、2.22和2.23的证明并不复杂, 可参见文献 [4]<sup>§1.3</sup>. 这三个命题本质上是命题2.20的推广, 越来越抽象. 利用命题2.23, 可证明下面命题,

**命题 2.24** 设  $U$  是微分流形  $M$  的一个开子集, 给定函数  $f \in C^\infty(U)$ , 则  $\forall p \in U$ , 必有  $p$  点一个邻域  $V \subset U$ , 以及光滑函数  $\hat{f} \in C^\infty(M)$ , 使得  $\hat{f}|_V = f|_V$ .

**证明.** 利用流形的局部紧致性, 可以使得  $\overline{V}$  是  $U$  的真子集; 如果不是, 我们将  $V$  缩小一些即可. 依照命题2.23, 存在流形  $M$  上的光滑函数  $h$  满足式(2.3-5), 令

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) \cdot h(x), & \forall x \in V; \\ 0, & \forall x \notin U. \end{cases} \quad (2.3-6)$$

很明显, 有  $\hat{f}|_V = f|_V$ . 因  $f$  在  $U$  上光滑的, 故  $f \cdot h$  在  $V$  上也是光滑的; 而  $h$  又保证了  $\hat{f}$  能以  $C^\infty$  的方式光滑从  $V$  过渡到  $M \setminus U$ , 所以  $\hat{f}$  是整个流形  $M$  上的光滑函数. ■

这个命题是说: 局部的光滑函数可以很容易地延拓成整个流形上的光滑函数. 反之, 光滑流形  $M$  上的光滑函数场也可以限制在开子集  $V$  上.

## 2.4 切空间

在 §2.1.3.1 中, 我们给出了欧氏空间切矢量的定义 2.2; 现在有了微分流形概念, 可以把定义 2.2 移植到流形论中.

### 2.4.1 切矢量

**定义 2.25** 设有一  $m$  维  $C^\infty$  微分流形  $M$ , 任选其中一点  $x \in M$ . 点  $x$  上切矢量 (简称矢量)  $v^a$  是指满足如下条件的一个映射  $v^a: C_x^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$

- (1) 线性性:  $\forall g, h \in C_x^\infty(M)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , 有  $v(g + \lambda h) = v(g) + \lambda v(h)$ ;
- (2) Leibnitz 律:  $\forall g, h \in C_x^\infty(M)$ , 有  $v(g \cdot h) = (v(g)) \cdot h(x) + g(x) \cdot v(h)$ .

在 §2.1.3.1 中, 我们将方向导数等同于切矢量, 这个认知在流形中也是成立的. 设映射  $\gamma: (-a, a) \rightarrow M$  是微分流形  $M$  中一条经过固定点  $x_0$  的光滑曲线, 其中  $x_0 = \gamma(0)$ , 则下面的映射  $v^a: C_{x_0}^\infty \rightarrow \mathbb{R}$  (其中  $f \in C_{x_0}^\infty(M)$ )

$$v(f) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt} \right|_{t=0} \equiv \left. \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0}; \quad -a < t < a, \quad a > 0. \quad (2.4-1)$$

便确定了  $x_0$  点的一个切矢量  $v^a$ ; 只需验证上面公式满足定义即可. 线性性的验证是一望而知的. 下面验证 Leibnitz 律; 需要先指出

$$(f \cdot g) \circ \gamma \stackrel{\text{def}}{=} (f \circ \gamma) \cdot (g \circ \gamma), \quad (2.4-2)$$

将上式带入式(2.4-1), 有

$$\begin{aligned} v(f \cdot g) &= \left. \frac{d(f(\gamma(t)) \cdot g(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d(f(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0} \cdot g(\gamma(0)) + f(\gamma(0)) \cdot \left. \frac{d(g(\gamma(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\ &= (v(f)) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot v(g). \end{aligned}$$

验证完毕. 公式(2.4-1)中所定义的切向量称为曲线  $\gamma(t)$  在  $t = 0$  的切矢量. 这个例子非常生动地说明了切矢量和方向导数是一回事儿!



**注 2.26**  $v(f)$  是一个实数, 如果写成  $v^a(f)$  可能会被误认为是一个矢量, 所以略去抽象指标; 这是少数不使用抽象指标的场合之一. 而单独使用  $v^a$  时, 附上抽象指标. 后面切矢量场作用在标量函数场上时也不采用抽象指标记号.

局部坐标本身就是一个  $\mathbb{R}^m$ , 具有线性结构, 我们选取这样的曲线  $\gamma_j : (-a_j, a_j) \rightarrow M$ ,  $1 \leq j \leq m$  使得其局部坐标是

$$x^i(\gamma_j(t)) = x_0^i + \delta_j^i \cdot t, \quad (2.4-3)$$

上式中指标  $j$  是固定不变的, 上标  $i$  是其  $m$  个坐标分量的指标. 当  $i \neq j$  时, 坐标就处在  $x_0^i$  点不动; 当  $i = j$  时, (只有这一个) 坐标按线性规律 (即直线) 变化. 将这样的坐标代入式(2.4-1), 并将这个切矢量记为  $(\frac{\partial}{\partial x^j})^a$  (注意作用到标量函数上后, 略去抽象指标)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^j} f(\gamma(0)) &= \frac{d(f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(f \circ \varphi^{-1})(x_0^1, \dots, x_0^j + t, \dots, x_0^m)}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(x_0)} \frac{d(x_0^j + t)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x^j} \Big|_{\varphi(x_0)}. \end{aligned}$$

很明显切矢量(2.4-1)在坐标(2.4-3)下就表现为对标量函数  $f$  求坐标  $x^j$  的偏导数, 这也是将其记为  $(\frac{\partial}{\partial x^j})^a$  的理由; 这样的偏导数 (也就是切矢量) 共有  $m$  个, 即  $j = 1, \dots, m$ .

### 2.4.2 切空间基矢

上面定义中已给出切矢量对  $C_x^\infty(M)$  中全体 (标量) 函数具有线性性. 若在不同切矢量间定义如下关系,

$$(u+v)f \stackrel{\text{def}}{=} u(f) + v(f), \quad u, v \text{ 是 } x \in M \text{ 的任意切矢量}; \quad (2.4-4a)$$

$$(\lambda u)f \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(u(f)), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.4-4b)$$

上两式中  $f \in C_x^\infty(M)$ . 有了这样定义之后, 不难发现  $x \in M$  点全体切矢量满足线性空间的定义1.34, 我们称这个线性空间是微分流形  $M$  在点  $x$  的切空间, 记为  $T_x M$ . 下面我们证明这个空间的维数恰好是  $m$ ; 大体思路是: 首先找到  $m$  个切矢量, 然后证明它们线性无关, 最后证明每个切矢量都可以由它们展开.

设微分流形  $M$  在点  $x_0$  的邻域的容许坐标卡是  $(U, \varphi; x)$ , 点  $x_0$  的坐标是  $(x_0^1, \dots, x_0^m)$ . 前面已经指出了

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \Big|_{x_0}, \quad 1 \leq i \leq m, \quad (2.4-5)$$

是点  $x_0 \in U$  的切矢量. 需注意: 局部开子集  $U$  与  $\mathbb{R}^m$  是微分同胚的, 天生有坐标, 天生有偏导数的概念, 无需另行定义; 或者直接将  $U$  与  $\mathbb{R}^m$  作恒等认同.

用反证法证明它们线性无关. 假设存在  $m$  个不全为零的实常数  $c^i$  使得下式成立,

$$c^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0, \quad \forall f \in C^\infty(U). \quad (2.4-6)$$

将标量函数  $f$  选为坐标线  $x^k$ , 并将这些坐标线一一代入上式, 容易得到  $c^k = 0, k = 1, \dots, m$ . 与假设矛盾, 所以  $m$  个矢量是线性无关的.

任意给定一个满足定义2.25的矢量  $v^a \in T_{x_0}M$ , 下面证明它可以由  $(\frac{\partial}{\partial x^j})^a$  展开. 证明过程与定理2.3证明非常相似. 仿照命题2.4证明可以得到: 满足定义2.25的矢量  $v^a$  作用到任意实常数  $c$  上都使之为零, 即  $v(c) \equiv 0$ .

同样, 由多元函数微分中值定理可知,  $\forall f \in C^\infty_{x_0}(M)$ , 有

$$(f \circ \varphi^{-1})(x^1, \dots, x^m) = (f \circ \varphi^{-1})(x_0^1, \dots, x_0^m) + (x^i - x_0^i) \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^i},$$

其中  $0 < \theta < 1$ . 将矢量  $v^a$  作用到上式, 可得 (省略的计算步骤可参考定理2.3证明)

$$v(f \circ \varphi^{-1}(x^1, \dots, x^m)) = v(x^i - x_0^i) \cdot \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})(x_0 + \theta(x - x_0))}{\partial x^i} \Big|_{x=x_0}.$$

记  $v^i \equiv v(x^i)$ , 并将坐标省略, 上式变为 (将  $f \circ \varphi^{-1}$  记为  $\hat{f}$ )

$$v(\hat{f}) = v^i \cdot \frac{\partial \hat{f}(x_0)}{\partial x^i} \Leftrightarrow v^a = \sum_{i=1}^m v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a. \quad (2.4-7)$$

上面  $\Leftrightarrow$  后的式子将  $\hat{f} \equiv f \circ \varphi^{-1}$  略去 (因  $f$  和  $\varphi$  都是任选的), 并补上了抽象指标记号. 上式充分说明  $x_0$  点任意矢量  $v^a$  都可以由  $m$  个  $x_0$  点矢量  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{x_0}^a$  展开, 其系数是  $m$  个实数  $v^i \equiv v(x^i)$ .

因此,  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_{x_0}^a, 1 \leq i \leq m\}$  是线性空间  $T_{x_0}M$  的一组基矢量, 称之为自然坐标 (切) 基底, 简称自然基底; 空间  $T_{x_0}M$  的维数是  $m$ .

**例 2.27** 式(2.4-1)给出了光滑曲线  $\gamma(t)$  的切矢量, 我们用自然基底来表示这个切矢量. 设  $m$  维光滑流形  $M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $\forall p \in U$  ( $p$  对应  $t = 0$ ), 曲线  $\gamma(t)$  上点的局部坐标标记为  $\{x^i\}$ . 将式(2.4-1)展开为

$$\frac{d(f \circ \gamma(t))}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{dx^i \circ \gamma(t)}{dt} \Big|_{t=0} \Rightarrow \left( \frac{d}{dt} \right)_{\gamma(0)}^a = \frac{dx^i(\gamma(0))}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a. \quad (2.4-8)$$

上式中 “ $\Rightarrow$ ” 是因为  $f \in C_p^\infty(M)$  的任意性. 这便是曲线  $\gamma(t)$  在  $p$  点切矢量的局部坐标展开式; 其中切矢量  $(\frac{d}{dt})^a$  必需沿曲线  $\gamma(t)$ , 且取  $t = 0$ .

注: 一般称  $(\frac{d}{dt})^a$  是曲线  $\gamma(t)$  切线的切矢量, 简称切线切矢量. 比如二维球面  $S$  上任一点  $p$  的切平面  $T$  上的任意 (原点在切点  $p$  的) 矢量都是切于球面  $S$  的. 再取过  $p$  点的一个大圆  $\gamma(t)$ , 切平面上的切矢量未必切于大圆  $\gamma(t)$ . 我们用 “切线切矢量” 这一词语来描述切于曲线  $\gamma(t)$  的切矢量, 以区别于切平面  $T$  上其它切矢量.

### 2.4.3 余切空间

切空间是一个  $m$  维（平直）线性空间，按照 §1.4 内容，它应该有对偶空间。

**定义 2.28** 切空间  $T_{x_0}M$  的对偶空间称为微分流形  $M$  在点  $x_0$  的**余切空间**，记作  $T_{x_0}^*M$ 。余切空间的元素称为**余切矢量**。

§1.4 中所有内容都可以移植到余切空间；首先，余切空间维数与切空间相同，都是  $m$  维；其次，利用式(1.4-6)定义自然切基矢的**对偶自然基矢**，将其记为  $(dx^j)_a$ （由于点  $x_0$  的标记位置与对偶基矢抽象指标位置重合，暂将  $x_0$  略去），

$$(dx^j)_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a \equiv \left\langle (dx^j)_a, \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a \right\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \delta_i^j. \quad (2.4-9)$$

由上式定义的对偶基矢共有  $m$  个。将  $(dx^j)_a$  作用在任意矢量  $v^a$  上，有

$$(dx^j)_a v^a = (dx^j)_a \left[ v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a \right] = v^i \left[ (dx^j)_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a \right] = v^i \delta_i^j = v^j. \quad (2.4-10)$$

这说明  $(dx^j)_a$  的作用是取出  $v^a$  在自然坐标基底上的第  $j$  分量。

任意余切空间元素  $\omega_a \in T_{x_0}^*M$  都可以在自然对偶基矢上展开，并将其作用到任一切矢量  $v^a$  上，有

$$\omega_a(v^a) = [\omega_j(dx^j)_a] \left( v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a \right) = \omega_j v^i \delta_i^j = \omega_j v^j. \quad (2.4-11)$$

上式说明对偶矢量和切矢量的线性映射是一个实数；而切矢量  $v^a$  作用到标量函数  $f$  上也得到一个实数  $v(f)$ ；结合这两点，可说明标量函数  $f$  可以诱导出一个对偶矢量，记为  $(df)_a$ ；具体过程如下

$$(df)_a v^a \equiv v(f) = v^i \delta_i^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{x_0} = \left[ v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{x_0}^a \right] \left[ (dx^j)_a \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{x_0} \right]. \quad (2.4-12)$$

我们说了  $(df)_a$  是由  $f$  诱导的对偶矢量，自然令  $(df)_a v^a$  等于  $v(f)$ ，也可看成定义。上式计算过程用到了式(2.4-7)和式(2.4-9)。由上式可见， $f$  诱导的对偶矢量  $(df)_a$  可以看成

$$(df)_a = (dx^j)_a \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_{x_0}. \quad (2.4-13)$$

将此式去掉抽象指标，很明确地显示了由  $f$  诱导的对偶矢量是其普通微分  $df$ 。这也是我们将标量函数  $f$ （包括坐标基矢  $x^i$ ）诱导的对偶矢量记成微分的理由（也见式(2.4-9)）。

对于余切矢量认知，也可以先把式(2.4-12)当成定义，然后由此立刻导出坐标基矢间的内积公式(2.4-9)；再导出其它公式。很明显定义(2.4-9)和式(2.4-12)是相容的。

读者需注意，抽象指标作用之一是标记张量类型；当不用于求和哑标时，直接去掉后就变成了第一种记号方式；此时，自然坐标切基矢是偏导数  $((\frac{\partial}{\partial x^i})^a \rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i})$ ，自然坐标对偶基矢是普通微分式  $((dx^j)_a \rightarrow dx^j)$ 。

### 2.4.4 局部坐标变换

微分流形定义中要求坐标卡可以取成各种相容形式, 如果  $x_0 \in M$  有两个相互容许的坐标卡  $(U, \varphi; x)$  和  $(V, \psi; y)$ , 且  $U \cap V \neq \emptyset$ ; 对应的自然坐标基底分别是  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_{x_0}^a$  和  $(\frac{\partial}{\partial y^j})_{x_0}^a$ . 我们把  $(\frac{\partial}{\partial y^j})_{x_0}^a$  看成式(2.4-7)中的  $v^a$ , 那么有

$$\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{x_0}^a = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \Big|_{x_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}^a \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0}^a = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{x_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{x_0}^a. \quad (2.4-14)$$

上式同时写出了逆变换; 可见过渡矩阵恰好是  $x_0$  点的 Jacobi 矩阵.

在  $U \cap V$  中可以把  $y^j$  看成自变量是  $x^i$  的标量函数 (也可反过来), 将式(2.4-13)中的  $f$  用  $y^j$  替换后, 有

$$(dy^j)_a = (dx^i)_a \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_{x_0} \Leftrightarrow (dx^i)_a = (dy^j)_a \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \Big|_{x_0} \quad (2.4-15)$$

过渡矩阵恰好是  $x_0$  点的 Jacobi 矩阵之逆.

### 2.4.5 张量

有了切空间  $T_{x_0}M$  及其对偶空间  $T_{x_0}^*M$  (两个都是线性空间), 仿照 §1.7, 可以定义微分流形  $M$  在点  $x_0$  处的  $(p, q)$  型张量, 可以把它看成  $m^{p+q}$  维线性空间

$$\mathcal{T}_q^p(x_0) \equiv \underbrace{T_{x_0}M \otimes \cdots \otimes T_{x_0}M}_{p\uparrow} \otimes \underbrace{T_{x_0}^*M \otimes \cdots \otimes T_{x_0}^*M}_{q\uparrow} \quad (2.4-16)$$

中的元素. 也可以把它看成笛卡尔积空间

$$\underbrace{T_{x_0}^*M \times \cdots \times T_{x_0}^*M}_{p\uparrow} \times \underbrace{T_{x_0}M \times \cdots \times T_{x_0}M}_{q\uparrow} \quad (2.4-17)$$

的  $p+q$  重线性函数.

从上一小节可知线性空间  $\mathcal{T}_q^p(x_0)$  的自然基矢量是 (略去了下标  $x_0$ )

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)^{a_1} \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)^{a_p} \otimes (dx^{j_1})_{b_1} \otimes \cdots \otimes (dx^{j_q})_{b_q}, \quad 1 \leq \{i, j\} \leq m. \quad (2.4-18)$$

由式(2.4-14)和(2.4-15)不难得到上式在坐标变化下的变换关系. 通常我们会把张量积符号  $\otimes$  省略掉.

$\mathcal{T}_q^p(x_0)$  中的任一张量可以在基矢组(2.4-18)上展开,

$$\alpha^{a_1 \cdots a_p}_{b_1 \cdots b_q} = \alpha^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)^{a_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)^{a_p} (dx^{j_1})_{b_1} \cdots (dx^{j_q})_{b_q}. \quad (2.4-19)$$

当坐标变换时, 由式(2.4-14)和(2.4-15)易得分量的变换关系是

$$\tilde{\alpha}^{k_1 \cdots k_p}_{l_1 \cdots l_q}(y) = \alpha^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}(x) \times \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \times \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}}. \quad (2.4-20)$$

需要强调的是: 上式所有量都需在  $x_0 \in M$  点取值. 由此式直接可得一阶切矢量或余切矢量的分量变换关系.

### 2.4.6 小结

本小节引入了诸多概念: 切矢量、切空间、余切空间、自然坐标切基底、自然坐标对偶基底, 等等; 这些概念会贯穿整个微分几何.

在微积分中, 如果函数很复杂, 不好研究; 我们会将其进行泰勒展开, 首项是一阶导数项 (即线性项), 那么问题就简单多了. 多元微积分中同样有类似的线性化近似方法. 在二维曲面论中, 我们会取某点的切平面, 在这个切平面上来研究此曲面的局部性质. 微分流形  $M$  的切空间便是上述方法的推广, 切空间  $T_{x_0}M$  是微分流形  $M$  的局部线性化; 切空间具有  $\mathbb{R}^m$  空间的线性结构, 这样我们便可以用线性代数工具来研究了; 总之, 切空间是为了简化流形研究而引入的一个重要概念.

最后, 单列一个自然段来再次强调: 光滑流形  $M$  的切空间  $T_pM$  同构于  $\mathbb{R}^m$  的一个开子集, 或者说  $T_pM$  就是  $\mathbb{R}^m$  中的开子集.

## 2.5 诱导映射

设有两个微分流形  $M$  和  $N$ , 维数分别为  $m$  和  $n$  (两者未必相等), 存在光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$ ;  $M$  和  $N$  的局部坐标分别为  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$ , 则

$$y^\alpha = \phi(x^i) = y^\alpha(x^1, \cdots, x^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n. \quad (2.5-1)$$

取微分流形  $M$  中任一点  $x_0$  及微分流形  $N$  中点  $\phi(x_0)$ , 则有  $y_0^\alpha = \phi(x_0^i)$ . 那么它自然诱导出一系列映射.

**定义 2.29** 从  $C_{\phi(x_0)}^\infty(N)$  到  $C_{x_0}^\infty(M)$  的拉回映射  $\phi^*$  定义为

$$\phi^*(g) \stackrel{\text{def}}{=} g \circ \phi, \quad \forall g \in C_{\phi(x_0)}^\infty(N). \quad (2.5-2)$$

一般来说, 我们不能把  $M$  中的标量函数推前到  $N$  上; 比如映射  $\phi$  不是单射, 假设有  $\phi(x_1) = \phi(x_2) = y \in N$ , 那么  $y$  处的被推前函数值就不知道该选为  $g(x_1)$  还是  $g(x_2)$  的值了, 出现多值选择困难.

**定义 2.30** 定义推前映射, 或称为切映射

$$(\phi_*v)(g) \stackrel{\text{def}}{=} v(\phi^*(g)) = v(g \circ \phi), \quad \forall g \in C_{\phi(x_0)}^\infty(N), \quad \forall v^a \in T_{x_0}M. \quad (2.5-3)$$

同样注意, 对于一般的光滑映射, 我们不能定义切矢量的拉回; 请读者仿照上面讨论, 用非单性给出(类似)解释.

**定义 2.31** 拉回映射可拓展到余切矢量, 也称为余切映射

$$(\phi^*\omega)_a v^a \stackrel{\text{def}}{=} \omega_a (\phi_* v)^a, \quad \forall \omega_a \in T_{\phi(x_0)}^* N, \quad \forall v^a \in T_{x_0} M. \quad (2.5-4)$$

需要强调的是: 上面几个定义都是点对点的.

**命题 2.32** 切映射和余切映射都是线性的.

**证明** . 先证切映射是线性的. 设  $\forall u^a, v^a \in T_{x_0} M, \forall g \in C_{\phi(x_0)}^\infty(N), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$(\phi_*(u + \lambda v))(g) = (u + \lambda v)(g \circ \phi) = u(g \circ \phi) + \lambda \cdot v(g \circ \phi) = (\phi_* u)(g) + \lambda \cdot (\phi_* v)(g).$$

与前面约定相同, 当切矢量作用在标量函数上时省略抽象指标.

再证余切映射的线性性.  $\forall \omega_a, \mu_a \in T_{\phi(x_0)}^* N, \forall v^a \in T_{x_0} M, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi^*(\omega + \lambda \mu)_a v^a = (\omega + \lambda \mu)_a (\phi_* v)^a = (\phi^* \omega)_a v^a + \lambda (\phi^* \mu)_a v^a.$$

证明过程与上面证明完全类似, 所以省略了一步. 标量函数的拉回映射2.29也是线性的, 证明过程完全相同, 略. ■

**命题 2.33** 证明切映射确实是“切矢量”, 即验证  $\phi_* v$  满足定义2.25.

**证明** . 留给读者当作习题. ■

**命题 2.34** 导出自然基矢在切映射和余切映射下的变换关系.

**证明** . 符号同本小节开头叙述. 命题要求解的是切映射  $\phi_*(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$  在局部坐标  $(V; y)$  的自然基矢  $(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^a$  下的展开系数, 我们只需将它作用在局部坐标  $y^\alpha(x^i)$  上即可,

$$\left[ \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \right] (y^\alpha) = \frac{\partial}{\partial x^i} (y^\alpha \circ \phi) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Rightarrow \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^a. \quad (2.5-5)$$

切映射在局部坐标基矢间的关系是 Jacobi 矩阵, 注意这个 Jacobi 矩阵未必是方阵.

命题要求解的是余切映射  $\phi^*(dy^\alpha)_a$  在局部坐标  $(U; x)$  的自然基矢  $(dx^i)_a$  下的展开系数, 作法同上,

$$\begin{aligned} \phi^*(dy^\alpha)_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a &= (dy^\alpha)_a \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a = (dy^\alpha)_a \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \\ &\Rightarrow \phi^*(dy^\alpha)_a = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} (dx^i)_a. \end{aligned} \quad (2.5-6)$$

余切映射局部坐标基矢间的关系也是 Jacobi 矩阵.

最后强调一点: 所有公式只在  $x_0$  点取值, 为使下标简洁上面表达式中略去了此点. ■

命题2.34中映射是  $\phi: M \rightarrow N$ , 如果我们令  $N \equiv M$ , 并且令  $\phi$  是恒等映射  $\text{id}$ ; 但  $M$  和  $N$  的局部坐标未必相同. 这时上面命题中的变换可以理解成同一局部邻域内的坐标变换; 公式与 §2.4.4中的相同.

利用式(2.5-6)可证明如下一个重要公式, 即普通微分和拉回映射可对易.

$$\begin{aligned}\phi^*(df)_a &= \phi^* \left[ \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} (dy^\alpha)_a \right] = \frac{\partial f}{\partial y^\alpha} \Big|_{\phi(x_0)} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Big|_{x_0} (dx^i)_a = \frac{\partial(f \circ \phi)}{\partial x^i} \Big|_{x_0} (dx^i)_a \\ &= d_a(f \circ \phi) = d_a(\phi^* f).\end{aligned}\quad (2.5-7)$$

仿照上式, 其实式(2.5-6)也可以写为  $\phi^*(dy^\alpha)_a = d_a(y^\alpha \circ \phi)$ .

给出复合映射的关系式,

**定理 2.35** 设有光滑流形  $M, N$  和  $Q$ , 存在流形间的光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$  和  $\psi: N \rightarrow Q$ , 则复合映射  $\psi \circ \phi: M \rightarrow Q$  的三种诱导映射服从如下链式法则 (其中  $\forall p \in M$ ),

- (1)  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*: C_{\psi \circ \phi(p)}^\infty(Q) \rightarrow C_p^\infty(M)$ ; 对应定义2.29;
- (2)  $(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*: T_p M \rightarrow T_{\psi \circ \phi(p)} Q$ ; 对应定义2.30;
- (3)  $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*: T_{\psi \circ \phi(p)}^* Q \rightarrow T_p^* M$ ; 对应定义2.31.

**证明.** 设有任意  $v^a \in T_p M$  和任意  $f \in C_{\psi \circ \phi(p)}^\infty(Q)$ , 以及任意的  $\omega_a \in T_{\psi \circ \phi(p)}^*(Q)$ . 先证第(1)式, 由定义直接计算,

$$\begin{aligned}(\psi \circ \phi)^*(f) &= f \circ \psi \circ \phi(p) = (f \circ \psi) \circ \phi(p) = (\psi^*(f)) \circ \phi(p) = \phi^*(\psi^*(f))|_p; \text{ 或者} \\ (\psi \circ \phi)^*(f) &= f \circ \psi \circ \phi(p) = (f \circ \psi) \circ (\phi)|_p = \phi^*(f \circ \psi)|_p = \phi^*(\psi^*(f))|_p.\end{aligned}$$

上式最后一式便是第(1)条中的结论. 再证第(2)式,

$$(\psi \circ \phi)_* v(f) = v((\psi \circ \phi)^*(f)) = v(\phi^*(\psi^*(f))) = \phi_* v(\psi^*(f)) = \psi_* \circ \phi_* v(f).$$

证明过程中用到了第(1)式. 最后证明第(3)式,

$$((\psi \circ \phi)^* \omega_a)(v^a) = \omega_a((\psi \circ \phi)_* v^a) = \omega_a(\psi_* \circ \phi_* v^a) = \psi^* \omega_a(\phi_* v^a) = (\phi^* \circ \psi^* \omega_a)(v^a).$$

需要注意, 第(1)、(3)式的链式法则次序与原复合映射次序相反. ■

设有光滑流形  $M$  和  $N$ , 存在流形间的光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$ .  $M$  中有光滑参数曲线  $\gamma(t)$ , 此线切矢量如式(2.4-8)所述. 很明显  $\phi \circ \gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow N$  是流形  $N$  中一条光滑曲线, 下面来给出此条曲线的切矢量,  $\forall f \in C_{\phi(0)}^\infty(N)$ ,

$$\phi_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(0)} \right) (f) = \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(0)} (f \circ \phi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (f \circ \phi \circ \gamma(t)) = \frac{d}{dt} \Big|_{\phi \circ \gamma(0)} (f).$$

从上式可以得到: 曲线  $\gamma(t)$  切矢的推前等于“曲线像  $\phi \circ \gamma(t)$ ”的切矢, 即

$$\phi_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(0)} \right)^a = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\phi \circ \gamma(0)} \right)^a. \quad (2.5-8)$$

在涉及曲线切矢量的计算时, 此式非常有用.

## 2.6 子流形

利用数学分析中的反函数和隐函数定理可以证明如下定理, 证明过程并不困难, 省略不写, 也可参考 [4]§1.3.

**定理 2.36** 设光滑流形  $M$  和  $N$  的维数都是  $m$ ,  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射. 如果在一点  $p \in M$ , 切映射  $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  是同构的, 则存在点  $p$  在  $M$  中的邻域  $U$  使得  $V = f(U)$  是点  $f(p)$  在  $N$  中的一个邻域, 并且  $f|_U: U \rightarrow V$  是微分同胚映射.

利用上面定理可以证明如下重要定理.

**定理 2.37** 设光滑流形  $M$  和  $N$  的维数分别是  $m$  和  $n$ , 且  $m < n$ .  $f: M \rightarrow N$  是光滑映射, 并且切映射  $f_*: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  是非退化的. 则存在点  $p$  的局部坐标系  $(U; x^i)$  以及点  $q = f(p)$  的局部坐标系  $(V; y^\alpha)$ , 使得  $f(U) \subset V$ , 并且映射  $f|_U$  可用局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^i \circ f = x^i, & 1 \leq i \leq m; \\ y^\nu \circ f = 0, & 1 + m \leq \nu \leq n. \end{cases} \quad (2.6-1)$$

**证明.** 设光滑映射  $f$  在  $p$  点局部坐标系  $(U; x^i)$  下的像点  $q$  的坐标关系是

$$y^\alpha = f^\alpha(x^1, \dots, x^m), \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

因切映射  $f_*$  在点  $p$  是非退化的, 那么可知 Jacobi 矩阵至少存在一个  $m \times m$  的子矩阵的行列式非零, 不妨假设

$$\left. \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right|_{x^i=0} \neq 0.$$

因  $f$  是光滑函数, 此行列式至少是连续的, 所以存在  $p$  点附近一个充分小邻域, 在此小邻域范围内上式恒不为零.

可以将  $(U; x^i)$  的  $m$  维坐标卡延拓至  $n$  维, 即假设有  $\mathbb{R}^{n-m}$  中的一个充分小方体

$$I \equiv \{(x^{m+1}, \dots, x^n) \mid \max(|x^{m+1}|, \dots, |x^n|) < \delta\},$$

其中  $\delta$  是一个充分小正实数. 我们构造映射  $\tilde{f}: U \times I \rightarrow V$ , 其坐标表达式如下

$$\begin{cases} (y \circ \tilde{f})^i = f^i(x^1, \dots, x^m), & 1 \leq i \leq m; \\ (y \circ \tilde{f})^\alpha = x^\alpha + f^\alpha(x^1, \dots, x^m), & 1 + m \leq \alpha \leq n. \end{cases} \quad (2.6-2)$$

不失一般性, 以设  $p$  点坐标是原点  $0$ ; 如果不是, 平移一下原点即可. 我们将方体  $I$  的原点和  $p$  结合在一起, 构成  $U \times I$  的新原点  $\tilde{p} \equiv \{0\}$ . 很明显映射  $\tilde{f}$  在新原点  $\tilde{p}$  的 Jacobi 行列式不为零, 也就是切映射  $\tilde{f}_*$  是非退化的; 根据定理 2.36 可知映射  $\tilde{f}$  在  $\tilde{p}$  点充分小邻域内是微分同胚.



现在我们舍弃  $V$  中原有坐标系  $\{y^\alpha\}$  (如果  $\{y^\alpha\}$  与式(2.6-3)相同, 就不用舍弃了, 直接用!); 利用微分同胚  $\tilde{f}$  带来的坐标当成开集  $V$  的新局部坐标系  $(V; z)$ , 可表示为

$$\begin{cases} (z \circ \tilde{f})^i = x^i, & 1 \leq i \leq m; \\ (z \circ \tilde{f})^\alpha = x^\alpha, & 1+m \leq \alpha \leq n. \end{cases} \quad (2.6-3)$$

在此局部坐标系内,  $\tilde{f}$  是  $(U \times I; x)$  到  $(V; z)$  的恒等映射. 由映射  $\tilde{f}$  定义(2.6-2)可知  $\tilde{f}|_{U \times \{0\}}$  满足定理中要求的映射  $f|_U$ ; 也就是, 坐标系(2.6-3)具体表达为,

$$\tilde{f}(x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0) = (x^1, \dots, x^m, 0, \dots, 0). \quad (2.6-4)$$

此定理说明, 通过坐标变换满秩映射  $f$  可以将  $U$  单一地映入  $N$  的一个局部坐标面内. ■

### 2.6.1 浸入、嵌入与淹没

现在引入几个定义. 设光滑流形  $M$  和  $N$  的维数分别是  $m$  和  $n$ ;  $\phi: M \rightarrow N$  是光滑映射. 将 Jacobi 矩阵 (见注解2.15) 秩记为  $\text{rank}_p \phi$ , 可以考察关于秩的几种重要情形.

(1) 如果  $m = n = \text{rank}_p \phi$ , 那么  $\phi$  是局部微分同胚的.

(2) 如果  $m \leq n, \text{rank}_p \phi = m$ , 也就是映射  $\phi$  说在  $p$  点某个邻域内是局部单一的, 那么称  $\phi$  点  $p$  是局部浸入的. 如果映射  $\phi$  在  $M$  上每一点都浸入, 则称之为浸入映射.

(3) 设  $\phi: M \rightarrow N$  是浸入的, 如果  $\phi$  是整体单一的, 那么称之为嵌入映射.

(4) 设  $\phi: M \rightarrow N$  是嵌入的, 如果  $\phi$  从  $M$  带到  $\phi(M)$  的拓扑结构与  $\phi(M)$  从  $N$  上得到的诱导拓扑结构 (见定义1.3) 相同, “相同”是指由  $\phi$  带来的拓扑和从  $N$  诱导得到的拓扑相互同胚; 那么称之为正则嵌入映射.

(5) 如果  $m > n, \text{rank}_p \phi = n$ , 那么称  $\phi$  点  $p$  是局部淹没的.

浸入映射只要求局部单一, 并不要求大范围 (即整个流形) 单一; 因此浸入映射的像可能有自交点. 嵌入映射则要求在整个流形范围内是单一的, 没有自交点.

有了浸入和嵌入便可有了子流形定义,

**定义 2.38** 有  $m$  维光滑流形  $M$  和光滑流形  $N$  间的光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$ ; 若  $\phi$  是浸入 (嵌入、正则嵌入) 的, 则称  $(\phi, M)$  是  $N$  的一个  $m$  维浸入 (嵌入、正则嵌入) 子流形.

**定义 2.39** 设有集合  $A$  和  $B$ , 并且有  $A \subset B$ , 映射  $\iota: A \rightarrow B; \iota(x) = x, \forall x \in A$ . 那么, 称映射  $\iota$  为包含映射 (inclusion map).

包含映射一定是嵌入映射; 但反之未必, 因为嵌入映射的值域未必与定义域有交集.

### 2.6.2 浸入与嵌入区别

我们先叙述几个例题.

**例 2.40 开子流形.** 设  $U$  是光滑流形  $N$  的一个开子集, 将流形  $N$  的光滑结构限制在  $U$  上, 变得到  $U$  的一个光滑结构, 使之成为与  $N$  同维数的光滑流形. 很明显包含映射  $(\iota, U)$  是  $N$  的一个正则嵌入子流形. 那么, 称  $(\iota, U)$  是  $N$  的开子流形.

**例 2.41 闭子流形.** 设  $(\phi, M)$  是  $N$  的一个光滑嵌入子流形, 如果 (1)  $\phi(M)$  是  $N$  的一个闭子集. (2)  $\forall p \in \phi(M)$ ,  $N$  中存在局部坐标系  $(U; x^i)$  使得  $\phi(M) \cap U$  是由方程  $x^{m+1} = x^{m+2} = \dots = x^n = 0$  定义的, 那么, 称  $(\phi, M)$  是  $N$  的闭子流形.

二维球面连同包含映射就是三维空间的一个闭子集.

下面给出两个十分相近的函数, 它们都是从  $\mathbb{R}$  到  $\mathbb{R}^2$  的映射.

**例 2.42 浸入, 非嵌入例子.**

$$F(t) = \left( 2 \cos \left( t - \frac{\pi}{2} \right), \sin 2 \left( t - \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (2.6-5)$$

当  $t$  取值从  $-\infty$  到  $+\infty$  时, 式(2.6-5)在原点  $((0,0))$  处无穷多次自相交. 所以  $(F, \mathbb{R})$  是  $\mathbb{R}^2$  的浸入子流形, 不是嵌入子流形. ■

**例 2.43 浸入, 且嵌入, 但非正则嵌入例子.**

$$G(t) = \left( 2 \cos \left( 2 \arctan t + \frac{\pi}{2} \right), \sin 2 \left( 2 \arctan t + \frac{\pi}{2} \right) \right). \quad (2.6-6)$$

当  $t = 0$  时,  $G(0) = (0,0)$ . 当  $t \rightarrow \pm\infty$  时, 曲线无限接近原点, 但没有到达原点, 即  $G(t \rightarrow \pm\infty) \rightarrow (0,0)$ ; 没有自交点. 所以  $(G, \mathbb{R})$  是  $\mathbb{R}^2$  是嵌入子流形, 当然它也是浸入子流形.

由  $G$  带入  $G(\mathbb{R})$  的是一条不自相交的曲线, 这个拓扑是一维的, 同胚于实数轴. 我们再来看诱导拓扑, 参见定义1.3. 取二维平面  $\mathbb{R}^2$  中的通常拓扑: 开圆盘. 圆心在原点的开圆盘  $C$ , 无论半径取多小 (必须是个有限小的确定数值, 不能是零, 也不能取无限趋近于零的极限), 首先会包含  $-\epsilon < t < \epsilon$  的  $G(t)$  曲线; 其次当  $t \rightarrow \pm\infty$  时,  $G(t \rightarrow \pm\infty) \rightarrow (0,0)$ , 曲线都会进入开圆盘  $C$ . 很明显利用开圆盘得到的诱导拓扑不是一维的实线段, 与映射  $G$  带来的拓扑不同胚, 因此  $G$  不是正则嵌入. ■

**例 2.44 浸入, 且嵌入, 但非正则嵌入又一例.** 定义映射  $H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  如下

$$H(t) = \begin{cases} \left( \frac{3}{t^2}, \sin \pi t \right), & 1 \leq t < +\infty, \\ (0, t+2), & -\infty < t \leq -1. \end{cases} \quad (2.6-7)$$

假定  $H(t)$  在定义区间  $[-1, +1]$  内是连接  $(3,0)$  和  $(0,1)$  两点的光滑曲线, 且与上式给出的两个部分无交点. 映射  $(H, \mathbb{R})$  是整体单一浸入到  $\mathbb{R}^2$  的曲线, 没有自交点; 所以它是浸入的, 且是嵌入的.

带入拓扑是由  $H(t)$  描述的一维曲线, 同胚于实数轴. 下面分析诱导拓扑, 不难发现  $y$  轴的  $[-1, +1]$  部分是曲线  $H(t)$  的一部分, 记为  $I_y$ ; 显然  $I_y$  是诱导拓扑中的一部分, 且是一维直线段. 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 曲线会围绕着  $x$  轴上下摆动, 从右侧无限接近  $I_y$  部分. 与上

一例相似, 取  $\mathbb{R}^2$  中的通常拓扑——开圆盘  $C$ , 且令开圆盘的圆心在  $I_y$  上. 但是无论开圆盘半径取得多么小 (必须是有限小的确定值), 当  $t \rightarrow +\infty$  时, 曲线  $H(t \rightarrow +\infty)$  都会进入开圆盘  $C$ ; 所以  $H(t \rightarrow +\infty)$  也是诱导拓扑的一部分, 故带入拓扑与诱导拓扑不是同胚的. 因此, 映射  $H$  不是正则嵌入的. ■

我们再叙述几个定理, 省略证明过程, 可请参考文献 [4]<sup>§1.3</sup>.

**定理 2.45** 设  $(\phi, M)$  是光滑流形  $N$  的浸入子流形, 如果  $M$  是紧致的, 那么  $(\phi, M)$  是正则嵌入.

**定理 2.46** 设  $(\phi, M)$  是  $n$  光滑流形  $N$  的  $m$  维浸入子流形.  $(\phi, M)$  是正则嵌入的充分必要条件是: 它是  $N$  的一个开子流形的闭子流形.

**定理 2.47** 设  $(\phi, M)$  是  $n$  光滑流形  $N$  的  $m$  维浸入子流形.  $(\phi, M)$  是正则嵌入的充分必要条件是: 对任意点  $p \in M$ , 在  $N$  中存在  $q = \phi(q)$  的坐标卡  $(V; y^i)$ , 其中  $y^i(q) = 0$ ; 还要使得  $\phi(M) \cap V$  是由  $y^{m+1} = y^{m+2} = \dots = y^n = 0$  定义的.

对比定理2.37与定理2.47, 可以十分清晰地看到浸入与正则嵌入的区别: 浸入只能在局部坐标中令  $y^i = 0 (i > m)$  (要求存在点  $p$ , 即有限个点), 正则嵌入则在整体上要求坐标分量  $y^i = 0 (i > m)$  (要求对任意点  $p$ , 即所有点). 例2.42、2.43、2.44具体地表明了浸入、嵌入、正则嵌入的差别, 尤其请参阅后两道例题中带入拓扑和诱导拓扑的分析.

## 2.7 切丛与矢量丛

两个流形 (笛卡尔) 积是一个很基本的概念, 见 §2.2.2. 例如, 定义在微分流形  $M$  上实函数  $f(x)$  的像  $(x, f(x))$  便是从  $M$  到 (笛卡尔) 积流形  $M \times \mathbb{R}$  的一个映射; 这个概念可以进一步推广成纤维丛; 本节只叙述相对简单的纤维丛——切矢量丛, 进而叙述矢量丛.

### 2.7.1 切丛

切矢量丛是一个非常基本的概念, 这里只给出结果; 详尽完整论述可参见Spivak [3, pp. 63-106]或类似文献.

设  $M$  是  $m$  维光滑流形,  $p \in M$  点的切空间记为  $T_p M$ , 记

$$TM \equiv \bigcup_{p \in M} T_p M = \{v^a \in T_p M | \forall p \in M\}. \quad (2.7-1)$$

$TM$  是流形  $M$  上全体切矢量的集合. 我们要给它赋予一个拓扑结构和微分结构, 使它成为一个  $2m$  维的光滑流形. 我们将略去如下证明:  $TM$  是 Hausdorff 空间;  $TM$  存在开覆盖  $\bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha)$ , 并且这族开覆盖构成  $TM$  的可数拓扑基. 证明可见 [4-5]<sup>§3.1</sup>.

虽然省略了一些证明, 但还是要建立  $TM$  拓扑的. 定义映射  $\pi: TM \rightarrow M$  如下,

$$\pi(v^a) = p; \quad \forall v^a \in T_p M, \quad p \in M. \quad (2.7-2)$$

这样, 对每一个点  $p \in M$ , 都有  $\pi^{-1}(p) = T_p M$ ; 注意这里的  $\pi^{-1}$  不是指逆映射, 是指逆像的集合; 映射  $\pi$  不是单射, 无逆; 容易看出映射  $\pi$  是满射.

设微分流形  $M$  有微分结构  $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha; x^i) | \alpha \in I\}$ , 令

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \equiv \bigcup_{p \in U_\alpha} T_p M. \quad (2.7-3)$$

当  $\alpha$  遍历整个指标集  $I$  后, 便有  $\bigcup_{\alpha \in I} \pi^{-1}(U_\alpha) = TM$ . 很明显  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  是  $TM$  的子集; 因  $T_p M$  是  $m$  维的, 而点  $p \in U_\alpha$  ( $U_\alpha$  是  $m$  维) 又是可变动的, 所以可知  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  是  $2m$  维; 进而  $TM$  也是  $2m$  维的. 这个子集中的元素自然是切矢量; 前面我们说过建立微分流形以及坐标卡的过程无法摆脱特定基矢 (见 §2.2.3), 我们当然选择自然坐标基矢来描述  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  中的切矢量.

设  $(x_p^1, \dots, x_p^m)$  是  $p$  点在映射  $\varphi_\alpha$  作用下的坐标; 矢量  $v^a \in \pi^{-1}(U_\alpha)$  可以在  $p$  点自然切基矢  $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^a \Big|_p$  下展开, 其分量是  $(v^1, \dots, v^m)$ .  $\forall \alpha \in I$ , 定义映射  $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi_\alpha} \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$ , (其中  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$  维数是  $m$ )

$$\psi_\alpha \left( v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \Big|_p \right) \stackrel{def}{=} (x_p^1, \dots, x_p^m, v^1, \dots, v^m), \quad \forall p \in U_\alpha, v^a \in \pi^{-1}(U_\alpha). \quad (2.7-4)$$

因  $(x_p^1, \dots, x_p^m)$  与  $(v^1, \dots, v^m)$  都是可变动的, 所以上述定义更好地说明了  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  是  $2m$  维的. 不难看出映射  $\psi_\alpha$  是双射, 其逆存在; 我们可以规定  $\psi_\alpha$  和  $\psi_\alpha^{-1}$  是连续映射, 相当于规定了  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  中的开集; 这样, 式(2.7-4)中的映射便是拓扑同胚的, 它将  $\varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^m$  中的 (通常) 拓扑携带到  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  中. 很明显  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$  是  $TM$  一个坐标卡, 这样我们建立了  $TM$  的拓扑结构.<sup>10</sup>

我们开始建立  $TM$  上的微分结构; 只需验证坐标卡  $(\pi^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha)$  是  $C^\infty$  相容的. 实际上,  $\pi^{-1}(U_\alpha) \cap \pi^{-1}(U_\beta) \neq \emptyset \Leftrightarrow U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 设分别存在坐标卡  $(U_\alpha; x^i)$  和  $(U_\beta; \tilde{x}^i)$ ; 那么, 它们间的坐标变换是  $C^\infty$  的, 即 Jacobi 矩阵  $\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$  是  $\{x^j\}$  的  $C^\infty$  函数, 同样, 其逆矩阵  $\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}$  也是  $\{\tilde{x}^i\}$  的  $C^\infty$  函数. 设  $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ , 则式(2.7-4)中的  $v^a$  在  $p$  点的坐标表达式有两个等价描述,

$$v^a = v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \Big|_p = \tilde{v}^j \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \right)^a \Big|_p \quad (2.7-5)$$

不难得到两者分量的变换关系,

$$v^i = \tilde{v}^j \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \Big|_p \Leftrightarrow \tilde{v}^j = v^i \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} \Big|_p. \quad (2.7-6)$$

<sup>10</sup>建立  $M$  的拓扑过程大体如下: (1) 找到  $M$  的一个覆盖集合  $\mathcal{C}$ ; (2) 将集合  $\mathcal{C}$  与  $\mathbb{R}^m$  中的开子集建立双射关系  $\sigma$ , 要求  $\sigma$  和  $\sigma^{-1}$  都连续; (3) 双射  $\sigma$  可将  $\mathbb{R}^m$  中拓扑 (即开集概念) 携带到  $M$ ;  $\sigma$  便是拓扑同胚映射. 这样,  $M$  成为拓扑流形.

需注意: 如果  $M$  中原有拓扑结构  $\mathcal{T}$ , 这个拓扑未必与  $\mathbb{R}^m$  中开集存在条件 (2) 中的  $\sigma$ ; 如果存在, 那么  $(M, \mathcal{T})$  本身便是拓扑流形.

上述坐标变换关系中的 Jacobi 矩阵是  $C^\infty$  的, 坐标  $(v^1, \dots, v^m)$  本身也是  $C^\infty$  的, 那么坐标变换  $v^i \leftrightarrow \tilde{v}^i$  是  $C^\infty$  的; 而  $U_\alpha \cap U_\beta$  自身的坐标变换  $x^i \leftrightarrow \tilde{x}^i$  本来就是  $C^\infty$  的;  $TM$  坐标是由两者结合得到的  $(x^1, \dots, x^m, v^1, \dots, v^m)$ , 它的坐标变换自然也是  $C^\infty$  的. 由53页定义2.5中第二条和命题2.6可知, 这个坐标卡集合是相容的, 那么便建立了  $TM$  的  $C^\infty$  微分结构, 从而它是微分流形了.

### 2.7.2 向量丛

从微分流形  $TM$  所具有的特殊构造可抽象出如下定义,

**定义 2.48** 设  $E, M$  是两个光滑流形, 维数分别是  $q + m$  和  $m$ ;  $\pi : E \rightarrow M$  是光滑满映射;  $V \equiv \mathbb{R}^q$  是  $q$  维向量空间. 假设流形  $M$  上存在一个开覆盖  $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$  以及一组映射  $\{\psi_\alpha; \alpha \in I\}$ ;  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  是流形  $E$  的开覆盖; 它们满足如下条件:

(1)  $\forall \alpha \in I$ , 映射  $\psi_\alpha$  是从  $\pi^{-1}(U_\alpha)$  到  $U_\alpha \times \mathbb{R}^q$  的微分同胚, 且  $\forall p \in U_\alpha$  有

$$\psi_\alpha(v) \stackrel{\text{def}}{=} (p, y), \quad v \in \pi^{-1}(U_\alpha), y \in \mathbb{R}^q;$$

$$\pi \circ \psi_\alpha^{-1}(p, y) = p.$$

(2) 对于任意固定的  $p \in U_\alpha$ ,  $\psi_\alpha^{-1}(p, \cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \pi^{-1}(p)$  是微分同胚映射; 而且当  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 映射 (称为**过度函数族**)

$$g_{\beta\alpha}(p) \equiv \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, \cdot) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q,$$

是线性同构, 也就是说  $g_{\beta\alpha}(p) \in GL(q)$ ,  $GL(q)$  是实一般线性群.

(3) 当  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$  时, 映射  $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(q)$  是  $C^\infty$  的.

则称  $(E, M, \pi)$  是光滑流形  $M$  上秩为  $q$  的**向量丛**, 其中  $E$  称为**丛空间**,  $M$  称为**底空间**,  $\pi$  称为**丛投影**,  $V = \mathbb{R}^q$  称为**纤维型**; 条件 (1) 中的映射  $\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^q$  称为**向量丛  $E$  在  $U_\alpha$  上的局部平凡化**.

按照这个定义, §2.7.1中叙述的  $\pi : TM \rightarrow M$  是  $M$  上秩为  $m$  的向量丛, 称为微分流形  $M$  上的**切向量丛**, 简称**切丛**.

仿照切丛, 可以构建流形  $M$  上的余切丛、张量丛等; 它们都是向量丛的特例. 可参见文献 [4]<sup>§3.1</sup>.

**定义 2.49** 设  $(E, M, \pi)$  是向量丛, 若  $s : M \rightarrow E$  是一个  $C^r$  ( $1 \leq r \leq \infty$ ) 映射, 并且满足  $\pi \circ s \equiv \text{id} : M \rightarrow M$ , 则称映射  $s$  是向量丛  $E$  的一个**截面**. 如果  $s : U \rightarrow E$ , 其中  $U$  是  $M$  某坐标卡中的开集, 那么称映射  $s$  是定义在  $U$  上的**截面**.

## 2.8 切向量场

在 §2.4中, 我们已经介绍了微分流形  $M$  上某确定点  $x$  切向量定义2.25, 这个定义可以推广到整个流形, 那便是切向量场.

**定义 2.50** 在微分流形  $M$  的每一点  $x$  都指定一个切矢量  $v^a(x) \in T_x M$ , 称  $v^a$  是  $M$  上的一个切矢量场.

由定义不难看出切矢量场是这样一个映射  $v^a : M \rightarrow TM$ . 考虑到切丛  $(TM, M, \pi)$  和定义 2.49, 则可知  $\pi \circ v^a = \text{id}$ ; 因此切矢量场  $v^a$  是切丛  $TM$  的一个截面.

设  $m$  维微分流形  $M$  有局部坐标系  $(U, \varphi; x)$ , 很明显,  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$  (其中  $1 \leq i \leq m$ ) 是开集  $U$  上的切矢量场, 但一般说来它们不是整个流形  $M$  上的切矢量场. 在 §2.4 中, 已经说明在确定的点  $p$ ,  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p^a\}$  是该点切空间自然坐标基矢; 在  $U$  上每一点都有定义的  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是  $U$  上自然标架场, 任一  $U$  上切矢量场  $v^a(x)$  都可以用此标架展开

$$v^a(x)|_U = v^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a. \quad (2.8-1)$$

**定义 2.51** 若式(2.8-1)中系数  $v^i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是  $C^\infty(U)$  的, 则称  $v^a$  是  $U$  上光滑切矢量场. 若  $v^i$  对  $M$  每个坐标卡中开覆盖是  $C^\infty$  的, 则称  $v^a$  是  $M$  上光滑切矢量场;  $M$  上全体光滑切矢量场记为  $\mathfrak{X}(M)$ .

用自然方式定义  $\mathfrak{X}(M)$  中矢量场的加法与数乘 ( $\forall u^a, v^a \in \mathfrak{X}(M), \forall x \in M, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ),

$$(u^a + v^a)(x) \stackrel{\text{def}}{=} u^a(x) + v^a(x), \quad (\lambda \cdot v^a)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \cdot v^a(x). \quad (2.8-2)$$

这样定义后,  $\mathfrak{X}(M)$  构成了实数域  $\mathbb{R}$  上的矢量空间; 由于点  $x \in M$  是连续的、变动的, 所以这个矢量空间是无穷维的 (因  $x$  有无穷多个值). 除了实数域上的数量乘法, 还可以定义  $C^\infty(M)$  上函数乘法 (也称为  $C^\infty(M)$ -线性, 也见定理 2.67; 注意与数域  $\mathbb{F}$ -线性的区别),

$$(f \cdot v^a)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot v^a(x); \quad \forall x \in M, \forall f(x) \in C^\infty(M), \forall v^a \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.8-3)$$

流形  $M$  (或其开子集  $U$ ) 上的  $C^\infty(M)$  构成一个含有么元的交换环 (请读者依照定义 1.30 验证); 在式(2.8-3)定义下 (加法仍由式(2.8-2)中第一式来定义),  $\mathfrak{X}(M)$  构成了环  $C^\infty(M)$  上的矢量空间, 也称为  $C^\infty(M)$ -模; 模的定义见 6 页 1.33.

### 2.8.1 切矢量场几何定义

设有微分流形  $M$  及其局部坐标系  $(U, \varphi; x)$ , 再设  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 及  $f(x) \in C^\infty(M)$ ; 我们先给出切矢量场作用标量函数上的定义 (依约定省略抽象指标记号),

$$(v(f))(x) \stackrel{\text{def}}{=} v(x)(f(x)). \quad (2.8-4)$$

利用式(2.8-1), 得,

$$v(x)f = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial f \circ \varphi^{-1}}{\partial x^i}. \quad (2.8-5)$$

因  $v^i, f \in C^\infty(M)$ , 所以由上式可知光滑切矢量场作用在光滑标量场上得到一个光滑标量场, 也就是可以把光滑切矢量场看成这样一个映射  $v^a : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ; 上面局部坐标系是任选的, 所以这种看法与局部坐标系无关. 此映射自然满足一些性质, 见下面定理.

**定理 2.52** 依式(2.8-4)定义的  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$  是这样一个映射  $v^a : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , 并且它满足如下条件:

(1) 线性性:  $\forall g, h \in C^\infty(M)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , 有  $v(g + \lambda h) = v(g) + \lambda v(h)$ ;

(2) Leibnitz 律:  $\forall g, h \in C^\infty(M)$ , 有  $v(g \cdot h) = (v(g)) \cdot h(x) + g(x) \cdot v(h)$ .

反之, 如果有映射  $\alpha : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  满足上面两个条件, 那么存在唯一  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$  使得  $v(f) = \alpha(f)$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ .

这个定理说明: 如果映射满足上述两个条件, 那么它便是一个切向量场, 从而这两个条件可以看作是切向量场的几何(或第二)定义; 与切向量定义2.25相对应; 切向量场的第二定义不要事先给定局部坐标系, 显得更几何化.

定理的前一半证明很容易, 直接逐点验证即可. 后半部分证明略显复杂, 为此我们先证明一个命题, 也被称为**局部性定理**.

**命题 2.53** 设  $f, c \in C^\infty(M)$ , 在开集  $U \subset M$  上有  $f|_U = c|_U$ . 如果映射  $v : C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$  满足定理2.52中的两个条件, 那么必然有  $v(f)|_U = v(c)|_U$ .

**证明.** 利用第二个条件, 令  $g = 1$ ,  $h = 1$ , 则有  $v(1 \cdot 1) = 1 \cdot v(1) + 1 \cdot v(1) \Rightarrow v(1) = 2 \cdot v(1) \Rightarrow v(1) = 0$ , 进而可以得到  $v(const) = 0$ ; 这说明  $v$  将常数标量场映射为零标量场.

$\forall p \in U$ , 选择点  $p$  的一个足够小邻域  $V$ , 使得  $V \subset \bar{V} \subset U$ ; 令  $h \in C^\infty(M)$  是满足命题2.23中条件的标量场, 那么在整个流形  $M$  中有  $(f - c) \cdot h \equiv 0$ ; 将映射  $v$  作用在这个等式两端, 并利用 Leibnitz 律, 有

$$0 = v((f - c) \cdot h) = (v(f - c)) \cdot h + (f - c) \cdot v(h) \xrightarrow[\text{在 } V \text{ 上}]{\text{限制}} (v(f - c))|_V \cdot h|_V = 0.$$

因  $h$  限制在  $V$  上是恒为 1 的, (并利用线性性) 所以有  $v(f)|_V = v(c)|_V$ . 又因点  $p$  是任意的, 所以必然有  $v(f)|_U = v(c)|_U$ . ■

**注 2.54** 定理2.52中的映射  $\alpha$  是定义在整个流形  $M$  上的; 一般说来, 流形是不存在全局(即大范围、整体)坐标系的. 只有限制在局部开子集  $U \subset M$  上, 才可能存在一个坐标系就能覆盖住  $U$  的情形, 进而使用局部坐标来描述切向量. 定理2.52中的两个条件是针对整个流形  $M$  的, 我们不能随便将其应用到开子集  $U$  中, 或者说切向量在  $U$  上还没有定义; 我们通过命题2.53诱导出开子集  $U$  上的一个“切向量”定义, 并证明它满足“局部性”(即命题2.53中描述的属性). 没有局部性定理, 也就没有局部坐标系相应映射的定义, 比如式(2.8-6). 在后面的内容中还会有类似的局部性定理, 如外微分、联络局部性定理等等.

如此啰嗦地叙述, 是因为有些属性在整体与局部并不相同. 比如紧致性, 实直线是非紧的, 而其子集  $[0, 1]$  是紧致的. “局部性定理”都指出切向量定义(以及后面将会讲到的外微分、联络等, 它们都可以算“导数”的推广)在整体(流形  $M$ )与局部(开子集  $U$ )的性质是相同的.

$\forall p \in U$ , 选择点  $p$  的一个足够小邻域  $V$ , 使得  $V \subset \bar{V} \subset U$ ; 取  $f \in C^\infty(U)$ , 根据命题2.24可以将  $f$  延拓至整个流形  $M$  上的  $\hat{f} \in C^\infty(M)$ , 并且有  $f|_V = \hat{f}|_V$ . 根据局部性定理, 我们可以将  $\alpha(f)$  在  $p \in U$  点的局部值定义为

$$(\alpha(f))(p) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha(\hat{f}))(p). \quad (2.8-6)$$

定义号“ $\stackrel{\text{def}}{=}$ ”右端是  $C^\infty(M)$  中的标量场, 本来就有意义. 需要注意的是, 这个定义与开集  $V$  选取无关; 可以将  $V$  换成任意其它开集  $V'$ , 只要满足  $V' \subset \bar{V}' \subset U$  即可; 证明过程与上面完全相同. 也和函数  $\hat{f}$  的选取无关, 可以将  $\hat{f}$  换成任意  $\tilde{f}$ , 只需满足  $f|_V = \hat{f}|_V = \tilde{f}|_V$  即可 (有无穷多种  $\tilde{f}$  满足这个关系). 在通常的微积分中, 我们谈及函数  $f(x)$  在  $p$  点可导属性时, 只需涉及  $p$  点一个小邻域即可, 无需知道整个实数轴上  $f(x)$  的性状; 上面局部性定理告诉我们这一性质在微分流形中也成立 (此性质同样适用于后面的外微分、联络等).

容易验证由式(2.8-6)诱导出的局部映射  $\alpha: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  同样满足定理2.52中的两个条件. 下面开始证明定理2.52.

设流形  $M$  有相容性坐标覆盖  $(U_i, \varphi_i; x^j)$ , 对于任意点  $p \in M$ , 它必然属于某个开覆盖  $U_i$ ; 在此点, 我们定义一个映射  $v: C_p^\infty \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$(v(f))(p) \equiv (v(p))(f) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha(f))(p) = (\alpha(\hat{f}))(p), \quad \forall f \in C_p^\infty. \quad (2.8-7)$$

由于局部映射  $\alpha: C^\infty(U) \rightarrow C^\infty(U)$  同样满足定理2.52中的两个条件; 不难证明在定义2.8-7的意义下, 这两个条件全部限制在点  $p$  处取值, 即 (证明留给读者, 极易. 其中  $\forall g, h \in C_p^\infty, \lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} (v(p))(g + \lambda h) &= (v(p))(g) + \lambda \cdot (v(p))(h), \\ (v(p))(g \cdot h) &= (v(p)(g)) \cdot h + g \cdot (v(p))(h). \end{aligned} \quad (2.8-8)$$

上两式说明, 由式2.8-7定义的  $v(p)$  符合切矢量定义2.25, 因此  $v(p)$  是流形  $M$  在点  $p$  处的一个切矢量. 由于点  $p$  是任意选取的, 于是  $M$  中每一点都可以定义类似切矢量, 这样构造的  $v$  是  $M$  上的切向量场.

仍需证明  $v^a$  的光滑性. 取局部坐标系  $(U_i, \varphi_i; x^j)$ , 将  $v$  展开,

$$v^a(p) = v^j(p) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \Big|_p = (v(p))(x^j) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \Big|_p = (\alpha(p))(x^j) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \Big|_p \quad (2.8-9)$$

坐标函数  $x^j$  是光滑标量场, 故而  $\alpha(x^j)$  也是光滑标量场, 由定义2.8-6可知其限制在  $p$  点取值后,  $v^j(p)$  也是  $C_p^\infty$  的; 又因  $p$  是任取的, 所以  $v^j$  是  $C^\infty(M)$  的. 这便说明了  $v^a$  在  $M$  上的光滑性. 切向量场光滑性的证明不依赖于某特定局部坐标系. 定理证毕.

**注 2.55** 定理2.52的主要目的是提供一个 (表面上) 不用局部坐标系的方式定义切向量场, 也就是由此定理能导出定义2.50; 从而说明两个定义是等价的.

定理2.52中两个条件是针对整个流形而言的, 不能随便用到局部坐标系. 选取局部坐标系后, 通过局部性定理以及定义式(2.8-7), 把原来只对整体流形  $M$  成立的定义诱导出了局



部坐标系相应定义；而且容易证明此定义满足式(2.8-8)，即诱导出的定义符合切矢量2.50的要求。这样，便从第二定义导出了第一定义。

### 2.8.2 Poisson 括号

设  $u^a, v^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,

$$[u, v](f) \stackrel{\text{def}}{=} u(v(f)) - v(u(f)). \quad (2.8-10)$$

由上式定义的 Poisson 括号(也称为对易子)是流形  $M$  上一个光滑矢量场, 即  $[u, v]^a \in \mathfrak{X}(M)$ . 证明并不困难, 首先从定义式易看出:  $[u, v]: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ ; 剩下只需验证它满足定理2.52中的两个条件, 先验证线性性, (其中  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} [u, v](f + \lambda g) &= u(v(f + \lambda g)) - v(u(f + \lambda g)) = u(v(f) + \lambda v(g)) - v(u(f) + \lambda u(g)) \\ &= u(v(f)) + \lambda u(v(g)) - v(u(f)) - \lambda v(u(g)) = [u, v](f) + \lambda [u, v](g). \end{aligned}$$

Leibniz 律的验证略显麻烦, 我们先计算下式,

$$\begin{aligned} u(v(f \cdot g)) &= u(v(f) \cdot g + f \cdot v(g)) = u(v(f) \cdot g) + u(f \cdot v(g)) \\ &= u(v(f)) \cdot g + v(f) \cdot u(g) + u(f) \cdot v(g) + f \cdot u(v(g)). \end{aligned}$$

将上式中  $u$  和  $v$  互换, 并作差, 得

$$\begin{aligned} [u, v](f \cdot g) &= u(v(f)) \cdot g + f \cdot u(v(g)) - v(u(f)) \cdot g - f \cdot v(u(g)) \\ &= \{[u, v](f)\} \cdot g + f \cdot [u, v](g) \end{aligned}$$

这便验证了 Leibnitz 律. 因此证明了 Poisson 括号是一个光滑切矢量场.

设光滑流形  $M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ , 可在局部坐标系将 Poisson 括号展开,

$$\begin{aligned} [u, v](f) &= u^i \frac{\partial}{\partial x^i} (v^j \frac{\partial}{\partial x^j} (f)) - v^j \frac{\partial}{\partial x^j} (u^i \frac{\partial}{\partial x^i} (f)) \\ &= u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + u^i v^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - u^i v^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} \\ &= \left( u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} (f). \end{aligned} \quad (2.8-11)$$

用抽象指标可表示为

$$[u, v]^a = \left( u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - v^j \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a. \quad (2.8-12)$$

**定理 2.56** 光滑流形  $M$  上的切矢量场  $\mathfrak{X}(M)$  中的 Poisson 括号运算满足如下规则:

- (1) 反交换律:  $[u, v]^a = -[v, u]^a$ ;
- (2)  $\mathbb{R}$ -线性:  $[ku + v, w]^a = k[u, w]^a + [v, w]^a$ ;
- (3) Jacobi 恒等式:  $[u, [v, w]]^a + [w, [u, v]]^a + [v, [w, u]]^a = 0$ .

其中  $\forall u^a, v^a, w^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ .

**证明** . 前两条性质几乎是一目了然的; 下面给出第三条性质的证明,  $\forall f \in C^\infty(M)$ , 有

$$\begin{aligned} [u, [v, w]](f) &= [u, vw - wv](f) = (uvw - u w v - v w u + w v u)(f) \\ [w, [u, v]](f) &= (w u v - w v u - u v w + v u w)(f) \\ [v, [w, u]](f) &= (v w u - v u w - w u v + u w v)(f) \end{aligned}$$

上面三式相加便是定理中的第三条. ■

满足定理2.56中三个条件的运算, 可以看成某种乘法, 光滑切向量场  $\mathfrak{X}(M)$  便是实数域上关于 Poisson 括号乘积的**李代数**; 更详细内容请见 §8.1.

定理2.56中性质 (2) 说明 Poisson 括号具有  $\mathbb{R}$ -线性, 然而这一性质并不能推广成  $C^\infty(M)$ -线性;  $\forall f, g \in C^\infty(M)$ ,  $\forall u^a, v^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 一般有

$$[fu, gv]^a = fg[u, v]^a + f \cdot u(g) \cdot v^a - g \cdot v(f) \cdot u^a. \quad (2.8-13)$$

计算过程并不复杂, 留给读者当作练习.

### 2.8.3 场上的诱导映射

在 §2.5中, 引入确定点  $x_0$  的切映射、余切映射等概念; 其中有一些可以直接推广到“场”上, 有一些则不可以.

设有两个微分流形  $M$  和  $N$ , 维数分别为  $m$  和  $n$  (两者未必相等), 存在光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$ ;  $M$  和  $N$  的局部坐标分别为  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$ .

其中标量函数的拉回映射2.29可以直接推广到“场”与“场”间的拉回,

**定义 2.57** 从  $C^\infty(N)$  到  $C^\infty(M)$  的**拉回映射**  $\phi^*$  定义为

$$\phi^*(g) \stackrel{\text{def}}{=} g \circ \phi, \quad \forall g \in C^\infty(N). \quad (2.8-14)$$

由于标量函数的拉回映射本质上就是复合函数, 对  $\phi$  没有太多要求; 例如, 举一个极端的例子, 假设两个流形分别都是实直线  $\mathbb{R}$ ,  $\phi$  是个常数映射  $\phi(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , 这个映射显然不是单射, 也不是满射. 那么  $\phi$  定义的拉回是良定义吗? 检查拉回的定义就能看出一点问题都没有,  $\phi$  把 (目标流形  $N$ )  $\mathbb{R}$  的任何光滑函数  $g$  拉回为 (源流形  $M$ )  $\mathbb{R}$  的常数函数, 其值为  $g(0)$ ;  $\phi^*(g)$  对任意  $x \in M$  都有定义.

仿照切向量场定义, 给出余切向量场定义,

**定义 2.58** 在微分流形  $M$  的每一点  $x$  都指定一个余切向量  $\omega_a(x) \in T_x^*M$ , 称  $\omega_a$  是  $M$  上的一个**余切向量场**. 一般记为  $\mathfrak{X}^*(M)$  或者  $A^1(M)$ .

余切矢量的拉回同样可以拓展到“场”,

**定义 2.59** 余切向量场间的**拉回映射**定义为,

$$(\phi^*\omega)_a v^a \stackrel{\text{def}}{=} \omega_a(\phi_*v)^a, \quad \forall \omega_a \in \mathfrak{X}^*(N), \quad \forall v^a \in T_x M. \quad (2.8-15)$$

可以看出这个定义中的点  $x$  是可以遍历到流形  $M$  中任意一点的;  $(\phi_*v)^a$  只需逐点定义即可. 映射  $\phi$  是否单一 (是否满射) 并不影响  $(\phi^*\omega)_a$  是  $M$  上的“场”这一结论. 不难看出定义2.59很容易拓展到任意  $(0, q)$  型张量场.

切矢量的推前映射与以上两个定义不同, 一般说来, 它不能推前成“场”. 比如  $\phi$  不是单一的, 可能有  $x_1, x_2 \in M$  使得  $\phi(x_1) = \phi(x_2) = y \in N$ , 但多数情况下  $\phi_*(v_{x_1})^a \neq \phi_*(v_{x_2})^a$ ; 这样在  $y \in N$  便有两个不同的切矢量, 出现多值性. 再比如  $\phi$  不是满射, 那么  $\phi_*(v_x)^a$  不能遍历到  $N$  上每个点, 因此不能称为“场”.

如果规定  $\phi$  是微分同胚 (至少是局部微分同胚), 那么可以把推前切矢量变成“场”,

**定义 2.60** 定义切向量场的推前映射, 或称为切映射 (其中  $\phi$  是微分同胚)

$$(\phi_*v)(g) \stackrel{\text{def}}{=} v(\phi^*(g)) = v(g \circ \phi), \quad \forall g \in C_{\phi(x)}^\infty(N), \quad \forall v^a \in T_x M. \quad (2.8-16)$$

很明显, 切映射  $\phi_*$  是流形  $M$  切空间  $T_x M$  和流形  $N$  切空间  $T_{\phi(x)} N$  间的线性映射.

**命题 2.61** 设  $\phi: M \rightarrow N$  是微分同胚, 那么  $\forall v^a \in \mathfrak{X}(M)$ 、 $\forall \omega_a \in \mathfrak{X}^*(M)$  和  $f \in C^\infty(M)$ , 它们在微分同胚映射  $\phi$  下的变换关系是

$$\phi_*(fv^a) = (f \circ \phi^{-1})(\phi_*v^a), \quad \phi^{-1*}(v(f)) = (\phi_*v)(f \circ \phi^{-1}), \quad \phi^{-1*}(f\omega_a) = (f \circ \phi^{-1})(\phi^{-1*}\omega_a).$$

**证明.** 由定义2.60可知,  $\forall g \in C^\infty(N)$

$$\phi_*(fv)g = (fv)(g \circ \phi) = f \cdot (v(g \circ \phi)) = (f \circ \phi^{-1}) \cdot (\phi_*v(g)). \quad (2.8-17)$$

需注意  $f$  的定义域是  $M$ , 故需要  $\phi^{-1}$  操作. 与之类似, 可证明第二式

$$\phi^{-1*}(v(f)) = (v(f)) \circ \phi^{-1} = (\phi_*v)(f \circ \phi^{-1}). \quad (2.8-18)$$

第三式证明留给读者. 总的来说, 切向量场要用  $\phi_*$  推前; 标量函数场、余切向量场要用  $\phi^{-1}$  拉回. ■

### 2.8.4 $\phi$ -相关矢量场

定义2.60将映射限定为微分同胚, 其实这还能弱化. 设有两个光滑流形  $M$ 、 $N$ , 它们的维数分别是  $m$ 、 $n$ , 两者可以不等 (一般  $m \leq n$ ); 再设  $\phi: M \rightarrow N$  是光滑映射.

**定义 2.62**  $X^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $Y^a \in \mathfrak{X}(N)$ ; 如果  $\forall p \in M$  都有  $\phi_*X^a = Y_{\phi(p)}^a$  成立 (或等价的有  $X(f \circ \phi) = (Yf) \circ \phi$ ,  $\forall f \in C^\infty(N)$ ), 则称  $X^a$  与  $Y^a$  是  $\phi$ -相关矢量场.

举个简单的例子, 比如流形  $M$  是一条直线,  $N$  是二维平面;  $\phi$  是恒等映射, 它将  $M$  映射为  $N$  中的一条直线 (比如  $x$  坐标轴).  $M$  上 (直线) 自然可以定义一个矢量场  $X^a$ , 映射  $\phi$  只是将  $M$  映射为  $N$  中的  $x$  轴; 在  $N$  中  $x$  轴之外的地方无法与  $M$  建立联系, 故  $\phi$  不能把  $X^a$  推前为“场”. 但是如果我们把  $N$  中矢量场  $Y^a$  的取值范围限定在  $x$  轴上 (即  $\phi(M)$  上), 那么  $X^a$  和  $Y_{\phi(p)}^a$  间是有双射关系的, 这便是定义2.62中描述的  $\phi$ -相关.

**定理 2.63** 设  $X_i^a$  和  $Y_i^a$  是  $\phi$ -相关的 ( $i = 1, 2$ ), 则  $[X_1, X_2]^a$  与  $[Y_1, Y_2]^a$  是  $\phi$ -相关的.

**证明** . 由定义2.62可知,

$$Y_1(Y_2(f)) \circ \phi = (Y_1 \circ \phi)(Y_2(f \circ \phi)) = (Y_1 \circ \phi)(X_2(f \circ \phi)) = X_1(X_2(f \circ \phi)).$$

由此式自然可证  $\phi_*[X_1, X_2]^a = [Y_1, Y_2]^a = [\phi_*X_1, \phi_*X_2]^a$ . ■

由上述定理立刻可得如下定理,

**定理 2.64** 设  $\phi: M \rightarrow N$  是微分同胚映射, 则它的切映射保持 Poisson 括号不变, 即

$$\phi_*[X, Y]^a = [\phi_*X, \phi_*Y]^a, \quad \forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.8-19)$$

## 2.9 张量场

切矢量场的概念自然可以推广到张量上来, 见下,

**定义 2.65** 在微分流形  $M$  每一点  $x$  指定一个  $(p, q)$  型张量  $T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}(x) \in \mathcal{T}_q^p M(x)$ , 则称  $T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}(x)$  是  $M$  上的一个**张量场**.

设点  $x \in M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ , 张量  $T$  表达式为,

$$T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right)^{a_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right)^{a_p} (dx^{j_1})_{b_1} \cdots (dx^{j_q})_{b_q}. \quad (2.9-1)$$

**定义 2.66** 若式(2.9-1)中系数  $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$  是  $C^\infty(U)$  的, 则称  $T^{a_1 \dots a_p}_{b_1 \dots b_q}$  是  $U$  上**光滑张量场**.  $U$  上全体光滑切张量场记为  $\mathfrak{T}_q^p(U)$ ;  $M$  上全体光滑切张量场记为  $\mathfrak{T}_q^p(M)$ .

可以仿照切矢量场定义加法和数量乘法 (见式(2.8-2)) 使  $\mathfrak{T}_q^p(M)$  成为线性空间; 仿照式(2.8-3)定义  $C^\infty(M)$ -乘法 (注意, 此乘法不同于数量乘法). 除此之外, 还可逐点定义张量积运算和缩并运算 (见 §1.7). 如果记

$$\mathfrak{T}(M) = \bigoplus_{p, q \geq 0} \mathfrak{T}_q^p(M), \quad (2.9-2)$$

则  $\mathfrak{T}(M)$  成为  $C^\infty(M)$  模. 其中,  $\mathfrak{T}_0^0(M)$  便是  $C^\infty(M)$ ;  $\mathfrak{T}_0^1(M)$  便是  $\mathfrak{X}(M)$ ;  $\mathfrak{T}_1^0(M)$  是全体余切矢量场集合, 也称为**一次微分式**, 常用记号是  $A^1(M)$  或  $\mathfrak{X}^*(M)$ ;  $\mathfrak{T}_2^0(M)$  中有一类特别子集称作**度量或度规** (metric).

张量场也存在与定理2.52类似的定理, 因此张量场也可有与切矢量场类似的第二定义; 两者的第二定义不需要局部坐标系, 显得更几何化.

**定理 2.67** (张量场特征引理): 光滑流形  $M$  上一个多重线性映射  $\mathcal{T}$ ,

$$\mathcal{T} : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{p \uparrow} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \uparrow} \rightarrow C^\infty(M)$$

是一个  $(p, q)$  型光滑张量场, 等价于, 映射  $\mathcal{T}$  对每个位置都是  $C^\infty(M)$ -线性的 (包含  $\mathbb{R}$ -线性), 即

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}^{a_1 \cdots a_p}_{b_1 \cdots b_q} \alpha_{a_1}^1 \cdots \alpha_{a_p}^p v_1^{b_1} \cdots (f \cdot v_r^{b_r}) \cdots v_q^{b_q} \\ &= f \cdot \mathcal{T}^{a_1 \cdots a_p}_{b_1 \cdots b_q} \alpha_{a_1}^1 \cdots \alpha_{a_p}^p v_1^{b_1} \cdots v_q^{b_q} \\ &= \mathcal{T}^{a_1 \cdots a_p}_{b_1 \cdots b_q} \alpha_{a_1}^1 \cdots (f \cdot \alpha_{a_s}^s) \cdots \alpha_{a_p}^p v_1^{b_1} \cdots v_q^{b_q}. \end{aligned} \quad (2.9-3)$$

其中,  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,  $\forall \alpha_{a_i}^j \in \mathfrak{X}^*(M)$ ,  $\forall v_i^{b_i} \in \mathfrak{X}(M)$ , 任意的  $1 \leq r \leq q$  和  $1 \leq s \leq p$ .

**证明** . 可参考文献 [5]§3.5 定理 5.1, 或 [2]§12.3 引理 12.24; 或其它类似文献. ■

很明显, 这个定理有许多变种, 比如 (利用上面定理很容易证明如下推论)

**推论 2.68** 光滑流形  $M$  上一个多重线性映射  $\mathcal{T}$ ,

$$\mathcal{T} : \underbrace{\mathfrak{X}^*(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}^*(M)}_{p \uparrow} \times \underbrace{\mathfrak{X}(M) \times \cdots \times \mathfrak{X}(M)}_{q \uparrow} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

是一个  $(p+1, q)$  型光滑张量场, 充分必要条件是, 映射  $\mathcal{T}$  对每个位置都是  $C^\infty(M)$  线性的, 即满足式(2.9-3).

推前和拉回映射可拓展到  $(p, q)$  型张量场上,

**定义 2.69** 流形  $M$  上张量场  $T_{b_1 \cdots b_q}^{a_1 \cdots a_p}$  的诱导映射定义为 (其中  $\phi: M \rightarrow N$  是微分同胚)

$$(\Phi^* T)_{b_1 \cdots b_q}^{a_1 \cdots a_p} \omega_{a_1} \cdots \omega_{a_p} u^{b_1} \cdots u^{b_q} \stackrel{def}{=} T_{b_1 \cdots b_q}^{a_1 \cdots a_p} (\phi^* \omega_{a_1}) \cdots (\phi^* \omega_{a_p}) (\phi_*^{-1} u^{b_1}) \cdots (\phi_*^{-1} u^{b_q}).$$

其中  $\forall \omega_{a_i} \in T_{\phi(p)}^* N$ ,  $\forall u^{b_j} \in T_{\phi(p)} N$ ;  $\Phi^*$  是推前和拉回映射的混合; 矢量场  $u^{b_j}$  的“推前”需要用  $\phi_*^{-1}: T_{\phi(p)} N \rightarrow T_p M$ .

**命题 2.70** 设有  $M$  上两张量场  $T$  和  $S$ , 由定义2.69可知  $\Phi^*(T \otimes S) = \Phi^*(T) \otimes \Phi^*(S)$ .

## 2.10 单参数变换群

单参数变换群理论是微分流形中一个重要课题, 在Arnold(阿诺尔德) [1]的著作中有着详尽、完整论述<sup>11</sup>; 或者参考Spivak [3, Ch. 5]. 本节同时参考了文献 [4]§6.2.

我们需要用常微分方程理论来描述流形上的矢量场. 为此, 在本节假设常微分方程解存在且唯一, 也就是满足 Lipschitz 条件<sup>[1]§31</sup>.

**定义 2.71** 给定  $m$  维光滑流形  $M$  上的光滑切矢量场  $v^a$  且处处非零. 如果流形  $M$  上的光滑曲线  $\gamma(t)$  的切矢量  $(\frac{\partial}{\partial t})^a = v^a$  (见式(2.4-8)), 则称曲线  $\gamma(t)$  是切矢量场  $v^a$  的积分曲线 (或轨道).

<sup>11</sup> 其自序中说: 贯穿本书的是两个中心思想及其衍生结果, 即矢量场直化定理和单参数线性变换群理论.

因此, 在曲线上每一点, 曲线  $\gamma(t)$  的切矢量都由  $v^a$  规定.

设流形  $M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ , 借用式(2.4-7), 将切矢量场  $v^a$  在局部坐标系展开, 其中  $v^i$  是其分量. 再参考例题2.27, 可用分量语言来详细描述一下上述定义

$$\frac{dx^i \circ \gamma(t)}{dt} = v^i(x^1 \circ \gamma, \dots, x^m \circ \gamma), \quad x^i(t)|_{t=t_0} = x_p^i. \quad (2.10-1)$$

我们在上式中同时指定了初始条件: 当  $t = t_0$  时, 坐标  $x^i(t_0)$  取  $p \in M$  点坐标  $x_p^i$ . 上式是积分曲线的分量表达式, 需要注意矢量场  $v^a$  是不显含参量  $t$  的. 根据常微分方程解存在唯一性定理<sup>[1]§31</sup>可知给定初始条件的微分系统(2.10-1)解是唯一确定的; 也就是说给定矢量场  $v^a$  后, 过  $p$  点的积分曲线是(局部)唯一的. 由于积分曲线未必在整个实数轴上有定义, 所以积分曲线未必整体存在、唯一.

**例 2.72** 设有一维光滑流形: 实直线  $\mathbb{R}$ , 局部坐标取为  $\{x\}$ . 其上有光滑矢量场  $kx$  (只有一个分量), 其中  $k$  是实常数; 求其过  $x_0$  点的积分曲线. 将上述条件带入式(2.10-1), 有

$$\frac{dx(t)}{dt} = kx \Rightarrow x(t) = x_0 e^{k(t-t_0)}. \quad (2.10-2)$$

上面例题应该是最简单的情形之一, 读者可在平面上画出积分曲线(令  $x_0$  变动). 下面给出一个略微复杂一点的例子.

**例 2.73** 设有二维光滑流形: 二维实平面  $\mathbb{R}^2$ , 局部坐标取为  $\{x, y\}$ . 其上有光滑矢量场  $(x, ky)$  (有两个分量), 其中  $k$  是实常数; 求其过  $(x_0, y_0)$  点的积分曲线. 将上述条件带入式(2.10-1), 有

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x \\ \frac{dy(t)}{dt} = ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 e^{t-t_0} \\ y(t) = y_0 e^{k(t-t_0)} \end{cases} \quad (2.10-3)$$

积分曲线比上一例题复杂多了, 需要对  $k$  取值范围进行分类, 然后再画; 有兴趣的读者请仔细画出.

积分曲线不仅与出发点(即初始条件那个点)有关, 还与曲线参数化有关.

**例 2.74** 设  $v^a$  是光滑流形  $M$  上处处非零的光滑切矢量场. 假设  $\gamma(t)$  是矢量场  $v^a$  的积分曲线, 那么  $\gamma(u)$  (其中  $u = t + c$ ,  $c$  是实常数)也是矢量场  $v^a$  的积分曲线. 直接计算即可证明,

$$\frac{dx^i \circ \gamma(t+c)}{dt} = \frac{dx^i \circ \gamma(t+c)}{d(t+c)} = \frac{dx^i \circ \gamma(u)}{du} = v^i(u) = v^i(t+c). \quad (2.10-4)$$

处处非零矢量场  $v^a$  过  $p \in M$  点积分曲线  $\gamma(t)$ ,  $b < t < c$  在  $p$  点小邻域内是唯一的, 其中  $\gamma(0) = p$ . 我们将  $\gamma(t)$  的定义域  $(b, c)$  向整个实数轴延拓, 使得所有符合方程(2.10-1)的解都包含在内, 则称延拓后的积分曲线  $\gamma(t)$  为矢量场  $v^a$  的、通过点  $p$  的**最大积分曲线**. 需要指出的是最大积分曲线的定义域未必是整个实数轴, 可能存在某些无法包含在内的点或区间(比如奇点).

**定义 2.75** 设  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 若在  $p \in M$  有  $v^a(p) = 0$ , 则称  $p$  是切向量场  $v^a$  的奇点.

我们不研究奇点. 在非奇点附近, 切向量场性状是简单的.

**定义 2.76** 设  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$  且处处非零, 如果  $v^a$  的最大积分曲线 $\gamma(t)$  中的参数  $t$  可以取遍整个实数轴  $\mathbb{R}$ , 那么称  $v^a$  是完备切向量场.

设向量场  $v^a$  是完备的, 则它的最大积分曲线定义域是整个实数轴. 如果我们人为地挖掉某点 (比如  $t = 1$ ), 那么积分曲线定义域不再是整个实数轴, 向量场也不再完备. 这种点可以通过延拓来补齐, 从而使得向量场再次完备. 不能通过人工延拓而补上的点具有某种奇异性.

**命题 2.77** 设有光滑流形  $M$ , 处处非零的光滑向量场  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$  的最大积分曲线  $\gamma_p(t)$  过点  $p \in M$ , 并且当  $t = 0$  时,  $\gamma_p(0) = p$ ; 令  $q = \gamma_p(s)$ . 那么有  $\gamma_p(s+t) = \gamma_q(t)$ .

**证明**. 假设命题中所有参数取值在积分曲线  $\gamma_p$  定义域内.

由命题中叙述可知, 点  $q \in M$  也在积分曲线  $\gamma_p$  上, 且其参数取  $s$ , 即  $q = \gamma_p(s)$ .

曲线  $\gamma_q$  是指通过  $q$  点的向量场  $v^a$  的积分曲线 (且  $\gamma_q(0) = q$ ). 由于  $q$  在曲线  $\gamma_p$  上, 并且向量场  $v^a$  的最大积分曲线是唯一的 (可从常微分方程解的唯一性得到); 所以  $\gamma_q$  与  $\gamma_p$  是同一条曲线的两种不同表述方式, 差别仅在于初始点的不同. 依命题中叙述不难得到结论:  $\gamma_p(s+t) = \gamma_q(t)$ . ■

设有  $m$  维光滑流形  $M$ , 对于任意点  $p \in M$ , 由处处非零的完备切向量场 $v^a \in \mathfrak{X}(M)$  的最大积分曲线 $\gamma_p(t)$  可以定义一个变换<sup>12</sup>

$$\phi(t, p) \equiv \gamma_p(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall p \in M. \quad (2.10-5)$$

当  $p$  固定时,  $\phi(t, p)$  就是过  $p$  点积分曲线. 当参数  $t$  固定时,  $\phi(t, p)$  给出一个从  $M$  到  $M$  的映射 (变换);  $\forall (t, p) \in \mathbb{R} \times M$ , 记  $\phi_t(p) \equiv \phi(t, p)$ . 可证明此变换满足如下定理.

**定理 2.78** 变换  $\phi$  满足如下条件: (1)  $\phi_0 \equiv \text{id} : M \rightarrow M$ ; (2) 对于任意实数  $s, t$  都有  $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ .

**证明**. (1):  $\phi_0(p) = \phi(0, p)$  自然将  $p$  点映射成  $p$  点, 所以它是恒等映射.

(2): 由命题2.77可得:  $\phi_t \circ \phi_s(p) = \phi_t(\phi_s(p)) = \phi(t, q) = \phi_{t+s}(p)$ . ■

满足定理2.78中两个条件的  $\phi$  (由式(2.10-5)定义) 被称为单参数可微变换群. 完备切向量场  $v^a$  一般也称为由单参数可微变换群  $\phi(t, p)$  诱导的切向量场; 两者一一对应.

还需要说明  $\phi_t$  是一个群. 把第 (2) 条的复合映射看成群乘法, 很明显此乘法是封闭的. 由第 (2) 条易证群乘法满足结合律.  $\phi_0$  是恒等映射, 可看成单位元. 再从第 (2) 条可知  $\phi_{-t} \circ \phi_t = \phi_0 = \text{id}$ , 因此  $\phi_{-t} = \phi_t^{-1}$ ; 这说明  $\phi_t$  的逆存在且是  $C^\infty$  的. 综上,  $\phi_t$  是群.

<sup>12</sup>映射一般定义成两个不同集合之间的关系, 比如  $\phi : M \rightarrow N$ ; 如果是同一集合内部的映射 ( $\phi : M \rightarrow M$ ), 则赋予它一个特别的名字: 变换.

因  $\phi_t^{-1}$  存在, 所以  $\phi_t$  必然是双射, 进而  $\phi_t, \phi_t^{-1}$  都是  $C^\infty$  的双射; 故可知它是微分同胚的. 由第 (2) 条可得:  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t} = \phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$ , 这说明此群是可对易的.

$v_p^a$  是积分曲线  $\gamma_p(t)$  在  $p$  的切矢量, 由式(2.4-1)有公式 (省略抽象指标),

$$v_p(f) = \left. \frac{d(f \circ \gamma_p(t))}{dt} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi(t, p)) - f(\phi(0, p))}{t}, \quad \forall f \in C_p^\infty(M). \quad (2.10-6)$$

利用上式, 我们用推前映射语言来描述一下由  $\phi(t, p)$  诱导的切矢量场  $v^a$  的变换关系. 很明显  $p \equiv \phi(0, p)$ , 令  $q \equiv \phi(s, p)$ . 由定义式(2.10-6)不难得到

$$\begin{aligned} v_q(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi(t+s, p)) - f(\phi(s, p))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\phi_s(t, p)) - f(\phi_s(0, p))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \phi_s(t, p) - f \circ \phi_s(0, p)}{t} = v_p(f \circ \phi_s(p)) = \phi_{s*}(v_p)(f). \end{aligned}$$

因  $f$  及  $p$  的任意性, 由上式可得

$$v_q^a = v_{\phi_s(p)}^a = \phi_{s*}(v_p^a). \quad (2.10-7)$$

这便是两点间切矢量推前映射关系式.

上面定义是针对整个流形  $M$  而言, 它还可以弱化, 只针对流形的一个局部子集  $U$ ,

**定义 2.79** 设  $U$  是光滑流形  $M$  的一个开子集, 取  $\epsilon > 0$ . 如果光滑映射  $\phi: (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow M$  满足如下条件:

- (1)  $\forall p \in U, |t| < \epsilon$  都有  $\phi_0: U \rightarrow U$  恒等映射;
- (2) 若  $|s| < \epsilon, |t| < \epsilon, |s+t| < \epsilon$ , 则  $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{s+t}$ .

那么, 称  $\phi_t$  为作用在开子集  $U$  上的局部单参数可微变换群.

局部单参数可微变换群自然也有与之对应的局部光滑诱导切矢量场  $v^a \in \mathfrak{X}(U)$ . 所诱导的切矢量场  $v^a$  一般说来不再是完备的, 但  $\phi_t$  仍是局部微分同胚的.

**定理 2.80** 设  $\phi_t$  是作用在光滑流形  $M$  上的单参数可微变换群,  $v^a$  是其所诱导的光滑切矢量场. 如果  $\psi: M \rightarrow M$  是一个  $C^\infty$  微分同胚, 那么  $\tilde{\phi}_t \equiv \psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$  也是作用在  $M$  上的单参数可微变换群, 并且其诱导的光滑切矢量场是  $\psi_* v^a$ .

**证明.** 显然  $\tilde{\phi}_t$  是从  $M$  到  $M$  的变换;  $\tilde{\phi}_0 = \psi \circ \phi_0 \circ \psi^{-1} = \text{id}$  是恒等映射, 满足定理2.78中的第 (1) 条;  $\tilde{\phi}_t \circ \tilde{\phi}_s = (\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi_s \circ \psi^{-1}) = \psi \circ \phi_{t+s} \circ \psi^{-1} = \tilde{\phi}_{t+s}$ , 也满足第 (2) 条; 综上,  $\tilde{\phi}_t$  是作用在  $M$  上的单参数可微变换群.

对其求导便可得诱导切矢量场, 令  $q = \psi(p)$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(f) &= \left. \frac{d(f \circ \tilde{\phi}(t, q))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}(q))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \psi \circ \phi(t, p))}{dt} \right|_{t=0} \\ &\stackrel{2.10-6}{=} v(f \circ \psi) \stackrel{2.8-16}{=} \psi_* v(f). \end{aligned}$$

因此  $\tilde{\phi}_t$  诱导的光滑切矢量场是  $\tilde{v}^a = \psi_* v^a$ . ■



**定义 2.81** 设  $v^a$  是光滑流形  $M$  上的光滑切矢量场,  $\psi: M \rightarrow M$  是光滑微分同胚. 如果  $\psi_* v^a = v^a$ , 那么称  $v^a$  在  $\psi$  作用下是不变的.

**命题 2.82** 设  $\phi_t$  是作用在光滑流形  $M$  上的单参数可微变换群,  $v^a$  是其所诱导的光滑切矢量场;  $\psi: M \rightarrow M$  是一个  $C^\infty$  微分同胚.  $v^a$  在  $\psi$  作用下是不变的充分必要条件是:  $\phi_t$  与  $\psi$  可交换, 即  $\phi_t \circ \psi = \psi \circ \phi_t$ .

**证明.** 先证“ $\Leftarrow$ ”. 如果  $\phi_t$  与  $\psi$  可交换, 即  $\phi_t = \psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ , 由定理 2.80 可知  $v^a = \psi_* v^a$ , 即  $v^a$  在  $\psi$  作用下是不变的.

再证“ $\Rightarrow$ ”. 由  $v^a$  和  $\psi_* v^a$  决定的单参数可微变换群分别是  $\phi_t$  和  $\psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ . 如果  $v^a$  在  $\psi$  作用下是不变的, 即  $v^a = \psi_* v^a$ , 那么说明两个单参数可微变换群满足同一常微分方程和相同的初始条件, 也就是两条积分曲线是重合的, 即  $\phi_t = \psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ . ■

**定理 2.83** 设  $\phi_t$  是作用在光滑流形  $M$  上的单参数可微变换群,  $X^a$  是其所诱导的光滑切矢量场;  $Y^a$  是  $M$  上另一切矢量场. 那么两个切矢量场的 Poisson 括号 (对易子) 表达式为

$$[X, Y]^a = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_0}^a - (\phi_t)_* Y_{\phi_{-t}}^a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t})_* Y_{\phi_t}^a - Y_{\phi_0}^a}{t}. \quad (2.10-8)$$

**证明.** 只需令  $t \rightarrow -t$  即可看到两个表达式等价, 所以只需证明其中之一便可.

对于任意的  $f \in C^\infty(M)$ , 有  $(\phi_{-t})_* Y_{\phi_t}(f) = Y_{\phi_t}(f \circ \phi(-t, p))$ , 其中点  $p$  (对应  $t = 0$  点) 是  $M$  中任一点. 从中可以看出, 需要仔细计算其中的表达式  $F(t) \equiv f \circ \phi(-t, p)$ ; 在  $p \in M$  点小邻域内, 我们利用如下积分技巧

$$F(t) - F(0) = \int_0^1 \frac{dF(st)}{ds} ds = t \cdot \int_0^1 \frac{dF(st)}{d(st)} ds \equiv t \cdot g(t, p).$$

上式最后的恒等号相当于定义了  $g(t, p)$  的表示, 很明显  $g(t, p)$  是光滑函数. 由此可得

$$f \circ \phi(-t, p) = f(p) + t \cdot g(t, p). \quad (2.10-9)$$

先计算一下  $g(0, p)$ ,

$$g(0, p) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{dF(st)}{d(st)} ds = \int_0^1 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{df \circ \phi(-st, p)}{d(st)} ds \stackrel{2.10-6}{=} -X_p(f) \int_0^1 ds = -X_p(f).$$

计算极限 (注意应用上式),

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t})_* Y_{\phi_t} - Y_{\phi_0}}{t}(f) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_t}(f(p) + t \cdot g(t, p)) - Y_{\phi_0}(f)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{Y_{\phi_t}(f(p)) - Y_{\phi_0}(f)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} Y_{\phi_t}(g(t, p)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(Y_p f) \circ \phi(t, p) - (Y_p f) \circ \phi(0, p)}{t} - Y_p \circ X_p(f) \\ &\stackrel{2.10-6}{=} X_p(Y_p(f(p))) - Y_p \circ X_p(f) = [X, Y]_p(f). \end{aligned}$$

因  $p$  是任选的, 所以上式对整个流形均正确. ■

**定理 2.84** 设  $X^a$  是光滑流形  $M$  上的光滑切矢量场, 如果在点  $p \in M$  矢量场  $X_p^a \neq 0$ , 那么, 存在  $p$  点的一个局部坐标系  $(V; y^i)$  使得  $X^a|_V = (\frac{\partial}{\partial y^1})^a$ .

**证明.** 设  $p$  点附近存在局部坐标系  $(U; x^i)$ , 并将  $p$  取为坐标原点, 即  $x^i(p) = 0$ . 在这个局部坐标系内光滑流形  $X^a$  可以展开为

$$X^a|_U = \xi^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a, \quad \text{其中 } \xi^j \in C^\infty(U). \quad (2.10-10)$$

因  $X_p^a \neq 0$ , 不妨设  $\xi^1(p) \neq 0$ . 利用  $\xi^j$  的连续性, 可假设  $\xi^1$  在开集  $U$  上不为零; 如果有零点, 将  $U$  缩小便可. 考虑切矢量场  $X^a$  的积分轨道, 要求此轨道经过坐标面  $x^1 = 0$  上的点  $(0, y^2, \dots, y^m)$ , 此轨道满足如下常微分方程和初始条件,

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = \xi^i(x^1, \dots, x^m), \\ x^1(0; y^2, \dots, y^m) = 0, \\ x^\alpha(0; y^2, \dots, y^m) = y^\alpha, \quad 2 \leq \alpha \leq m. \end{cases} \quad (2.10-11)$$

根据常微分方程理论 (可参阅文献 [1]<sup>§31</sup>), 上述方程的解  $x^i(t; y^2, \dots, y^m)$  光滑依赖于自变量  $t$  和初始值  $y^2, \dots, y^m$ . 为了行文方便, 令  $y^1 = t$ , 解的 Jacobi 行列式为

$$\frac{\partial(x^1, \dots, x^m)}{\partial(y^1, \dots, y^m)} \Big|_{y=0} = \begin{vmatrix} \xi^1(p) & 0 & \cdots & 0 \\ \xi^2(p) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi^m(p) & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \xi^1(p) \neq 0. \quad (2.10-12)$$

Jacobi 行列式不为零, 说明可把坐标  $(x^1, \dots, x^m)$  变换成另一套局部坐标  $(y^1, \dots, y^m)$ , 即存在  $p$  点邻域  $V \subset U$  的局部坐标系  $\{y\}$ . 求复合函数偏导数,

$$\frac{\partial}{\partial y^1} = \frac{\partial x^i}{\partial y^1} \frac{\partial}{\partial x^i} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (2.10-13)$$

配上抽象指标后便是定理所求. 光滑矢量场  $X^a$  存在与之对应的单参数可微变换群  $\phi(t, p)$ ; 由上易见, 单参数  $t$  便是所选坐标系的第一个坐标. 一般称坐标系  $(V; y^i)$  是矢量场  $X^a$  的适配坐标系. ■

## 2.11 李导数

设  $X^a$  是  $m$  维光滑流形  $M$  上的完备光滑切矢量场, 它诱导的 (局部) 单参数可微变换群是  $\phi_t$ , 经过点  $x \in M$  的轨道记为  $\gamma_x(t)$  (当  $t = 0$  时  $\gamma_x(0) = x$ ); 由于  $\phi_t$  是 (局部) 微分同胚, 可将轨道  $\gamma_x(t)$  上不同点的切空间建立联系 (线性同构).

定义 2.85 由  $\phi_t$  可定义李导数 (Lie Derivative<sup>13</sup>),

$$\mathcal{L}_X f(p) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_t^*(p)f - \phi_0^*(p)f}{t} = (X(f))(p), \quad (2.11-1)$$

$$\mathcal{L}_X Y^a \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_{-t})_* Y^a - (\phi_0)_* Y^a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\phi_{t*}^{-1} Y^a - \phi_{0*}^{-1} Y^a}{t}, \quad (2.11-2)$$

$$\mathcal{L}_X T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} - \Phi_0^* T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}}{t}. \quad (2.11-3)$$

其中  $\forall f \in C_p^\infty(M)$ ,  $\forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M)$  和  $\forall T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} \in \mathfrak{T}_q^p(M)$ . 上面分别给出了标量场、切矢量场、一般张量场的李导数定义, 其实都可以归结为一般张量场定义.  $\Phi_t^*$  见定义(2.69).

注 2.86 为避免抽象指标不匹配, 算符  $\mathcal{L}_X$  的下指标  $X$  不附抽象指标, 即不写成  $\mathcal{L}_{X^a}$ .

由于李导数定义并不十分明朗, 下面略微详细描述一下. 由于  $\phi_t$  (至少局部上) 是微分同胚, 它的诱导映射都是线性同构的,

$$\phi_{-t*} \equiv \phi_{t*}^{-1} : T_{\gamma_x(t)} M \rightarrow T_x M, \quad (2.11-4)$$

$$\phi_t^* : T_{\gamma_x(t)}^* M \rightarrow T_x^* M, \quad (2.11-5)$$

$$\Phi_t^* : T_q^p(\gamma_x(t)) \rightarrow T_q^p(x). \quad (2.11-6)$$

上式最后一行的  $\Phi_t^*$  是点  $x$  张量空间和点  $\gamma_x(t)$  张量空间的线性同构映射. 设有局部坐标系  $(U; x^i)$ , 并令  $t$  是个充分小的正实数, 则有  $\gamma_x(t) \in U$ ; 我们用  $\{x^i\}$  表示  $x$  点处的坐标分量, 为了在形式上有所区分, 我们用  $\{y^i\}$  表示  $\gamma_x(t)$  点处的坐标分量; 需要注意的是, 当  $t \rightarrow 0$  时, 坐标  $\{y^i\}$  就变成了坐标  $\{x^i\}$ , 即  $\lim_{t \rightarrow 0} y^i = x^i$ .

张量  $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}$  在两点处的局部坐标表示如下,

$$T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(x) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \right)^{a_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right)^{a_p} (dx^{j_1})_{b_1} \cdots (dx^{j_q})_{b_q}, \quad (2.11-7)$$

$$T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(\gamma_x(t)) = T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(\gamma_x(t)) \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \right)^{a_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} (dy^{j_1})_{b_1} \cdots (dy^{j_q})_{b_q}. \quad (2.11-8)$$

将  $\Phi_t^*$  作用在  $T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(\gamma_x(t))$  上, 有

$$\begin{aligned} (\Phi_t^* T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p})(\gamma_x(t)) &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(\gamma_x(t)) \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \right)^{a_1} \cdots \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} \\ &\quad \times \phi_t^*(dy^{j_1})_{b_1} \cdots \phi_t^*(dy^{j_q})_{b_q}. \end{aligned} \quad (2.11-9)$$

由上式容易得到

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\Phi_t^* T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p})(\gamma_x(t)) = T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p}(x). \quad (2.11-10)$$

很容易证明上几式表述与局部坐标系的选取无关 (只需换个坐标系, 基矢会产生一组 Jacobi 矩阵; 张量分量也会产生一组 Jacobi 矩阵; 两组矩阵刚好互逆, 所以形式不变).

<sup>13</sup>Sophus Lie(1842-1899), 挪威数学家. 其另一更重大贡献是李群, 可见第八章.

**命题 2.87** 证明  $\Phi_t^*$  与缩并运算  $C$  可交换.

**证明** . 我们只以  $i_1$  和  $j_1$  的缩并来说明问题, 其它基矢缩并与之类似. 首先,

$$\begin{aligned} C_{i_1}^{j_1} \left( T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} (\gamma_x(t)) \right) &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\gamma_x(t)) \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \right)^{a_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} (dy^{j_1})_{a_1} \dots (dy^{j_q})_{b_q} \\ &= T_{kj_2 \dots j_q}^{ki_2 \dots i_p} (\gamma_x(t)) \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_2}} \right)^{a_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} (dy^{j_2})_{b_2} \dots (dy^{j_q})_{b_q}. \end{aligned}$$

再将  $\Phi_t^*$  作用在上式两端, 有

$$\begin{aligned} \Phi_t^* \left( C_{i_1}^{j_1} \left( T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} (\gamma_x(t)) \right) \right) &= T_{kj_2 \dots j_q}^{ki_2 \dots i_p} (\gamma_x(t)) \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_2}} \right)^{a_2} \dots \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} \\ &\quad \times \phi_t^* (dy^{j_2})_{b_2} \dots \phi_t^* (dy^{j_q})_{b_q}. \end{aligned} \quad (2.11-11)$$

利用命题2.34可以导出  $x$  点和  $\gamma_x(t)$  点基矢之间的变换关系,

$$\phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^a = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a, \quad \phi_t^* (dy^\alpha)_a = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} (dx^i)_a. \quad (2.11-12)$$

利用上两式, 把式(2.11-9)缩并, 可得

$$\begin{aligned} C_{i_1}^{j_1} \left( \Phi_t^* T_{b_1 \dots b_q}^{a_1 \dots a_p} (\gamma_x(t)) \right) &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\gamma_x(t)) \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_1}} \right)^{a_1} \dots \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} \times \phi_t^* (dy^{j_1})_{a_1} \dots \phi_t^* (dy^{j_q})_{b_q} \\ &= T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} (\gamma_x(t)) \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_2}} \right)^{a_2} \dots \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} \times \phi_t^* (dy^{j_2})_{b_2} \dots \phi_t^* (dy^{j_q})_{b_q} \times \frac{\partial x^i}{\partial y^{i_1}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^i} \\ &= T_{kj_2 \dots j_q}^{ki_2 \dots i_p} (\gamma_x(t)) \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_2}} \right)^{a_2} \dots \phi_{t*}^{-1} \left( \frac{\partial}{\partial y^{i_p}} \right)^{a_p} \times \phi_t^* (dy^{j_2})_{b_2} \dots \phi_t^* (dy^{j_q})_{b_q}. \end{aligned}$$

综合公式(2.11-11)和上式, 命题得证. ■

**定理 2.88** 李导数  $\mathcal{L}_X$  有如下运算规则(其中,  $\forall T \in \mathfrak{T}_q^p(M)$ ,  $S \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_a \in \mathfrak{X}^*(M)$ ,  $X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M)$ ; 为了公式简洁, 省略了张量场  $T, S$  的上下角标)

- (1) 线性性:  $\mathcal{L}_X(T + \lambda \cdot S) = \mathcal{L}_X T + \lambda \cdot \mathcal{L}_X S$ ;
- (2) Leibnitz 律:  $\mathcal{L}_X(T \otimes S) = T \otimes \mathcal{L}_X S + (\mathcal{L}_X T) \otimes S$ ;
- (3) 与缩并运算可交换, 即  $C_j^i(\mathcal{L}_X T) = \mathcal{L}_X(C_j^i T)$ ;
- (4)  $\mathcal{L}_{X+Y} T = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_Y T$ ;
- (5) 若  $\psi: M \rightarrow M$  是微分同胚, 则  $\psi_*(\mathcal{L}_X Y^a) = \mathcal{L}_{\psi_* X} \psi_* Y^a$ .

**证明** . (1) 根据定义式(2.11-3)很容易证明线性性.

(2) 根据定义式(2.11-3)和命题2.70, 有

$$\mathcal{L}_X(T \otimes S) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^*(T \otimes S) - T \otimes S}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^*(T) \otimes \Phi_t^*(S) - T \otimes S}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^*(T) \otimes \Phi_t^*(S) - T \otimes \Phi_t^*(S) + T \otimes \Phi_t^*(S) - T \otimes S}{t} \\
&= T \otimes \mathcal{L}_X S + (\mathcal{L}_X T) \otimes S.
\end{aligned}$$

(3) 根据定义式(2.11-3)和命题2.87非常容易证明此命题；留给读者当练习。

(4) 切矢量场  $X^a$  和  $Y^a$  的积分曲线满足方程式(2.10-1)，此方程是线性的，解是可以叠加的。设  $X^a$  和  $Y^a$  诱导的单参数微分同胚群分别是  $\phi_t$  和  $\varphi_t$ ，那么  $X^a + Y^a$  对应的单参数微分同胚群便是两者相加，即  $\phi_t + \varphi_t$ ；故有

$$\mathcal{L}_{X+Y}T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\phi_t + \varphi_t)T - (\phi_0 + \varphi_0)T}{t} = \mathcal{L}_X T + \mathcal{L}_Y T. \quad (2.11-13)$$

需要注意，一般说来  $\mathcal{L}_{f \cdot X}T \neq f \cdot \mathcal{L}_X T$ ， $f \in C^\infty(M)$ ，需用式(4.1-31)来计算。

(5) 依据定理2.80可令  $\tilde{\phi}_t \equiv \psi \circ \phi_t \circ \psi^{-1}$ ，

$$\psi_*(\mathcal{L}_X Y^a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi_* \phi_{-t}^* Y^a - \psi_* Y^a}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\phi}_{-t}^* \psi_* Y^a - \psi_* Y^a}{t} = \mathcal{L}_{\psi_* X} \psi_* Y^a. \quad (2.11-14)$$

对于余切矢量场，也有类似公式

$$\begin{aligned}
\psi^{-1*}(\mathcal{L}_X \omega_a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\psi^{-1*} \phi_t^* \omega_a - \psi^{-1*} \omega_a}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tilde{\phi}_t^* \psi^{-1*} \omega_a - \psi^{-1*} \omega_a}{t} = \mathcal{L}_{\psi_* X} \psi^{-1*} \omega_a.
\end{aligned} \quad (2.11-15)$$

这一规则可推广至一般的张量场。 ■

由定理2.83可知切矢量场的李导数可以表示为，

$$\mathcal{L}_X Y^a = [X, Y]^a, \quad \forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.11-16)$$

利用定义式(2.11-1)以及定理2.88中的 Leibnitz 律，有

$$Y^a \mathcal{L}_X (\omega_a) + (\mathcal{L}_X Y^a) \omega_a = \mathcal{L}_X (Y^a \omega_a) = X(Y^a \omega_a).$$

再利用式(2.11-16)，整理上式后可得任意余切矢量场  $\omega_a \in \mathfrak{X}^*(M)$  李导数公式，

$$(\mathcal{L}_X \omega_a) Y^a = X(\omega_a Y^a) - \omega_a [X, Y]^a, \quad \forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M). \quad (2.11-17)$$

余切矢量场的李导数需要辅助矢量场  $Y^a$  来描述，一般张量的李导数需引入更多辅助场来描述；这多少有些不便。在引入联络后，无需辅助矢量场，表达式更为简洁，见 §4.1.4.4。

由定理2.84可知，对于任意在点  $p \in M$  非零光滑矢量场  $X^a$  都存在适配坐标系  $(U; x^i)$  使得  $X^a|_U = (\frac{\partial}{\partial x^1})^a_p$ ；在适配坐标系上李导数的表达式较为简单，我们以  $(1, 1)$  型张量  $T_b^a$

为例来求出具体表达式. 由定义式(2.11-3)可得张量的分量 $T_j^i$ 的李导数(其中 $t \equiv x^1$ )

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{L}_X T_b^a) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b (dx^i)_a &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi_t^* T_b^a - T_b^a}{t} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b (dx^i)_a \\
 &\stackrel{\frac{2.11-9}{2.11-12}}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left( T_\beta^\alpha(\gamma_p(t)) \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} - T_j^i(p) \right) \\
 &\stackrel{*}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_j^i(\gamma_p(t)) - T_j^i(p)) \\
 &= \left. \frac{\partial T_j^i}{\partial x^1} \right|_p = \mathcal{L}_X(T_j^i|_p).
 \end{aligned} \tag{2.11-18}$$

“ $*$ ”步: 因 $X^a|_U = (\frac{\partial}{\partial x^1})_p^a$ , 在点 $p \in M$ 处有 $y^1 = x_p^1 + t$ ,  $y^k = x_p^k$  ( $1 < k \leq m$ ), 即 $\frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} = \delta_\alpha^i$  和  $\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} = \delta_j^\beta$ . 倒数第二步是因为 $t \equiv x^1$ . 最后一步是因为式(2.11-1). 需注意一般情形下,  $(\mathcal{L}_X T_b^a)(\frac{\partial}{\partial x^j})^b (dx^i)_a = (\mathcal{L}_X T)_j^i \neq \mathcal{L}_X(T_j^i)$ ; 但在适配坐标系下, 两者相等.

## 第二章参考文献

- [1] ARNOLD(阿诺尔德) V. 常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2001 (引用页: 83, 84, 88).
- [2] LEE J M. Introduction to Smooth Manifolds[M]. 2nd ed. US: Springer, 2013. DOI: [10.1007/978-1-4419-9982-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-9982-5) (引用页: 83).
- [3] SPIVAK M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry: Vol. I[M]. 3rd ed. US: Publish or Perish, 1999 (引用页: 73, 83).
- [4] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 61, 70, 73, 75, 83).
- [5] 陈维桓. 微分流形初步[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2001 (引用页: 73, 83).

## 第三章 外微分型式

外微分的现代形式是由法国数学家 Élie Cartan (1869-1951) 提出并发展的一种微分几何中常用方法. 本章主要介绍微分型式场的概念, 以及外微分运算; 继而, 介绍 Frobenius 定理及其外微分表示; 然后介绍流形定向与单位分解, 最后引入流形上的积分概念.

### 3.1 外微分型式场

在 §1.8 中, 我们已经引入了线性空间  $V$  中外代数的概念; 那里只是针对一个特定空间  $V$  (或其对偶空间  $V^*$ ), 而本节我们将这些概念推广到场中. 在 §2.9 中引入了张量场的概念, 微分型式场是全反对称的协变张量场.

**定义 3.1** 设有  $m$  维光滑流形  $M$ , 其上一个  $C^\infty$  全反对称  $r$  阶协变张量场称为流形  $M$  上的一个  $r$  次外微分型式场, 简称为外型式场; 也称为外微分式.

上面已将 §1.8.2.5 中“型式”定义 1.103 推广到了场. 在不引起误解时, 可以省略前缀“外”字. 此场自然是构建在余切丛  $T^*M$  上的, 对于点  $x \in M$ , 有局部坐标系  $(U; x^i)$ ; 仿照式 (1.8-49),  $r$  型式场有如下表达式

$$\omega_{a_1 \dots a_r}|_U = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r}, \quad \text{规定 } \{\mu\} \text{ 序关系} \quad (3.1-1a)$$

$$= \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r}. \quad \text{不规定 } \{\mu\} \text{ 序关系} \quad (3.1-1b)$$

上面公式中,  $\omega_{a_1 \dots a_r}$  和  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$  的下标是全反对称的, 即交换其中任意两个指标都会产生一个负号. 很明显, 当  $r > m$  时, 外微分式恒为零 (为什么?).

我们将  $M$  上  $r$  次全体光滑外微分型式场的集合记为  $A^r(M)$ . 为方便起见, 规定  $M$  上全体光滑函数场是 0 次微分型式场, 即  $A^0(M) = C^\infty(M)$ ; 通常的 1 次微分式便是 1 次外微分型式场  $A^1(M)$  或  $\mathfrak{X}^*(M)$ .

微分型式场自然也可以看成多重线性函数, 也有类似于公式 (1.8-56) 和 (1.8-57) 的求值公式, 请读者自行写出表达式.

可将 §2.9 中定义的张量间的加法和数量乘法, 以及  $C^\infty(M)$ -乘法直接运用到微分型式场 (微分型式场只是张量场的特例, 自然可直接运用这些运算). 除此之外, 还可仿照 §1.8.2 逐

点定义外积, 使

$$A(M) = \bigoplus_{r=0}^m A^r(M) \quad (3.1-2)$$

成为外代数; 一般说来它是无穷维的.

很容易把定义2.59 (不需要映射是微分同胚的) 用到微分型式场上, 所拉回的映射是同阶的外型式场.

**定理 3.2** 设有光滑流形  $M$  和  $N$ , 维数分别是  $m$  和  $n$ ; 流形间存在光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$ , 拉回映射  $\phi^*: A^r(N) \rightarrow A^r(M)$  ( $0 \leq r \leq \min(m, n)$ ) 是线性的, 且与外积可交换, 即

$$\phi^*(\alpha \wedge \beta) = (\phi^*\alpha) \wedge \phi^*\beta, \quad \forall \alpha \in A^p(N), \beta \in A^q(N), \quad 0 \leq p+q \leq \min(m, n).$$

**证明** . 设点  $x \in M$ , 有局部坐标系  $(U; x^i)$ ; 点  $y = \phi(x) \in N$ , 有局部坐标系  $(V; y^i)$ .

$$\begin{aligned} \phi^*(\alpha_{a_1 \dots a_p} \wedge \beta_{b_1 \dots b_q}) &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \phi^*(\alpha_{[a_1 \dots a_p} \beta_{b_1 \dots b_q]}) \\ &= \frac{(p+q)!}{p!q!} \phi^*(a_{j_1 \dots j_p} b_{k_1 \dots k_q} (dy^{j_1})_{[a_1} \dots (dy^{j_p})_{a_p} (dy^{k_1})_{b_1} \dots (dy^{k_q})_{b_q]}) \\ &= \frac{1}{p!q!} a_{j_1 \dots j_p} b_{k_1 \dots k_q} \delta_{i_1 \dots i_p l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_p k_1 \dots k_q} \phi^*((dy^{i_1})_{a_1} \otimes \dots \otimes (dy^{i_p})_{a_p} \otimes (dy^{l_1})_{b_1} \otimes \dots \otimes (dy^{l_q})_{b_q}) \\ &= \frac{1}{p!q!} a_{j_1 \dots j_p} b_{k_1 \dots k_q} \delta_{i_1 \dots i_p l_1 \dots l_q}^{j_1 \dots j_p k_1 \dots k_q} \frac{\partial y^{i_1}}{\partial x^{\pi_1}} \dots \frac{\partial y^{i_p}}{\partial x^{\pi_p}} \times \frac{\partial y^{l_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial y^{l_q}}{\partial x^{\sigma_q}} \\ &\quad \times (dx^{\pi_1})_{a_1} \otimes \dots \otimes (dx^{\pi_p})_{a_p} \otimes (dx^{\sigma_1})_{b_1} \otimes \dots \otimes (dx^{\sigma_q})_{b_q} \\ &= \left( \frac{1}{p!} a_{j_1 \dots j_p} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\pi_1}} \dots \frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{\pi_p}} (dx^{\pi_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\pi_p})_{a_p} \right) \\ &\quad \wedge \left( \frac{1}{q!} b_{k_1 \dots k_q} \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{\sigma_1}} \dots \frac{\partial y^{k_q}}{\partial x^{\sigma_q}} (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_q})_{b_q} \right) \\ &= (\phi^* \alpha_{a_1 \dots a_p}) \wedge \phi^* \beta_{b_1 \dots b_q}. \end{aligned}$$

证明过程需参阅式(1.8-50)、(2.5-6)和式(3.1-1). ■

证明过程中, 我们还得到了一个常用公式,

$$\phi^* \alpha_{a_1 \dots a_p} |_U = \left( \frac{1}{p!} \alpha_{j_1 \dots j_p} \circ \phi \right) \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\pi_1}} \dots \frac{\partial y^{j_p}}{\partial x^{\pi_p}} \cdot (dx^{\pi_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\pi_p})_{a_p}. \quad (3.1-3)$$

## 3.2 外微分

本节介绍微分型式场上的重要运算——外微分.

**定理 3.3** 设  $M$  是  $m$  维光滑流形, 则存在唯一的映射  $d: A(M) \rightarrow A(M)$ , 使得  $d(A^r(M)) \subset A^{r+1}(M)$ , 并且满足如下条件:



- (1)  $\mathbb{R}$ -线性性:  $\forall \alpha, \beta \in A^r(M), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ , 有  $d(\alpha + \lambda \cdot \beta) = d\alpha + \lambda \cdot d\beta$ ;
- (2) 准 Leibnitz 律:  $\forall \alpha \in A^r(M)$ , 有  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-)^r \alpha \wedge d\beta$ ;
- (3)  $\forall f \in A^0(M) \equiv C^\infty(M)$ ,  $df$  是  $f$  的普通微分;
- (4)  $\forall \omega \in A^r(M)$ ,  $d(d\omega) = 0$ .

满足上面条件的映射“ $d$ ”称为外微分.

我们稍后证明此定理, 先叙述一些必要信息. 为令公式表述简洁, 叙述此定理时未使用抽象指标记号. 这个定理是流形  $M$  的整体描述, 我们需要一个局部性定理, 才能得到局部坐标系中的外微分表达式.

**引理 3.4** 假设满足上述四个条件的外微分  $d$  存在; 如果  $\alpha, \beta \in A(M)$ , 并且在开子集  $U \subset M$  上有  $\alpha|_U = \beta|_U$ , 则必然有  $d\alpha|_U = d\beta|_U$ .

**证明.** 因并未指定  $\alpha, \beta$  的阶, 故仍旧不使用抽象指标记号.

利用条件 (1) (即线性性), 令  $\lambda = 1, \alpha = 0, \beta = 0$ , 则有  $d(0+0) = d(0) + d(0) \Rightarrow d(0) = 2d(0) \Rightarrow d(0) = 0$ ; 这说明映射  $d$  将零微分型式场映射为零标量场.

由条件 (1) 可知, 引理等价于证明  $d(\alpha - \beta)|_U = 0$ ; 因此只需证明: 若  $\omega \in A(M)$  且  $\omega|_U = 0$ , 则  $d\omega|_U = 0$ .

任取一点  $p \in U$ , 因流形是局部紧致的, 所以存在  $p$  点开邻域  $V$  使得  $\bar{V}$  紧致, 并且有  $p \in V \subset \bar{V} \subset U$ ; 令  $h \in C^\infty(M)$  是满足命题 2.23 中条件的标量场; 则有  $h \cdot \omega \in A(M)$  且  $h \cdot \omega = 0$  (这两式是针对整个流形  $M$  而言). 将外微分作用在此式上, 并利用准 Leibnitz 律 (条件 (2)) 和条件 (3), 有 (需注意: 截止到此处, 外微分  $d$  只能作用在流形  $M$  上的型式场, 不能作用在局部邻域  $U$  上的型式场, 即  $d_U(\omega|_U)$  意义不明)

$$0 = d(h \cdot \omega) = (dh) \cdot \omega + h \cdot d\omega.$$

因  $h$  限制在  $V$  上是恒为 1 的, 而  $\omega|_V = 0$ ; 所以将上式限制在  $V$  上取值时, 可以得到  $(d\omega)|_V = 0$ . 又因  $p$  点取值的任意性, 所以必然可得  $(d\omega)|_U = 0$ ; 也就证明了引理. ■

关于局部性定理, 请先参考切矢量场的评注 2.54.  $\forall p \in U$ , 选择点  $p$  的一个足够小邻域  $V$ , 使得  $V \subset \bar{V} \subset U$ ; 取  $\omega \in A(U)$ , 根据命题 2.24 可以将  $\omega$  延拓至整个流形  $M$  上的  $\hat{\omega} \in A(M)$ , 并且有  $\omega|_V = \hat{\omega}|_V$ . 根据局部性定理, 我们可以将  $d\omega$  在  $p \in U$  点的局部值定义为

$$(d\omega)(p) \stackrel{def}{=} (d\hat{\omega})(p). \quad (3.2-1)$$

定义号“ $\stackrel{def}{=}$ ”右端是  $A(M)$  中的型式场, 本来就有意义. 需要注意的是, 这个定义与开集  $V$  选取无关; 可以将  $V$  换成任意其它开集  $V'$ , 只要满足  $V' \subset \bar{V'} \subset U$  即可; 证明过程与上面完全相同. 也和  $\hat{\omega}$  的选取无关, 可以将  $\hat{\omega}$  换成任意  $\tilde{\omega}$ , 只需满足  $\omega|_V = \hat{\omega}|_V = \tilde{\omega}|_V$  即可. 因此, 如果  $d|_M$  是流形  $M$  上的外微分算子, 那么通过式 (3.2-1) 可以定义出局部开集  $U$  中的外微分算子  $d|_U$ , 而且  $d|_U$  同样具有定理 3.3 中所陈述的四条性质.

下面开始证明定理3.3: 先解决外微分的存在性问题, 自然是寻找符合定理中四个条件的外微分定义. 为此, 先回顾一下数学分析中的(一元)二次普通微分  $d(dx) = 0$ ; 因  $x$  是自变量, 所以  $dx$  是不依赖于  $x$  的任意数, 那么对其再次求普通微分时自然为零. 多元微分学中, 不同自变量  $x^\mu$  是相互独立的(例如  $x^1$  独立于  $x^2$ ); 那么,  $dx^\mu$  是不依赖于  $x^\mu$  以及其它  $x^\nu$  ( $\mu \neq \nu$ ) 的任意数, 自然也有  $d(dx^\mu) = 0$ .

虽然  $d(dx) = 0$ , 但标量函数  $f(x)$  的两次普通微分一般是不为零的, 有  $d^2f = f''(x)dx^2$ ; 可见普通微分算符不满足条件(4)(但满足条件(3))不能当成外微分算符定义. 其实略加修改, 便可满足条件(4); 考虑多元标量函数场  $f$ , 把外积“ $\wedge$ ”引入到  $dx$   $dx$  之间,

$$\begin{aligned} d_c(d_a f) &\equiv d_c \left( \frac{\partial f}{\partial x^\mu} (dx^\mu)_a \right) \stackrel{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} (dx^\sigma)_c \wedge (dx^\mu)_a + \frac{\partial f}{\partial x^\mu} d_c(dx^\mu)_a \\ &\stackrel{d \circ dx = 0}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^\mu \partial x^\sigma} (dx^\sigma)_c \wedge (dx^\mu)_a = 0. \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

上式倒数第二步用的是自变量二次普通微分恒为零( $d(dx) = 0$ )<sup>1</sup>; 最后一步用到了标量函数对偏导数具有对称性, 而外积有反对称性, 求和为零(展开即可验证); 对于标量函数场, 这样定义的算符满足条件(4). 我们将上述定义推广到一般情形; 设流形  $M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ , 微分型式场  $\omega$  有局部表达式(3.1-1), 则可定义它的外微分局部表达式为,

$$(d\omega_{ba_1 \dots a_r})|_U \stackrel{def}{=} \frac{1}{r!} d_b(\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}) \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \quad (3.2-3)$$

易见, 这个局部定义满足第(1)<sup>2</sup>、(3)条.

首先, 验证式(3.2-3)满足条件(4); 为验证此条件, 我们计算一般外型式场的两次外微分, (使公式简洁, 下面诸式皆省略下标“ $|_U$ ”)

$$\begin{aligned} d_c d_b(\alpha_{a_1 \dots a_r}) &= \frac{1}{r!} d_c \left( \frac{\partial \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\rho} (dx^\rho)_b \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \right) \\ &= \frac{1}{r!(r+1)!} \frac{\partial^2 \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} (dx^\sigma)_c \wedge (dx^\rho)_b \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} = 0. \end{aligned}$$

与(3.2-2)同样的理由, 上式最后一步为零; 这样便验证了定义(3.2-3)符合条件(4).

其次, 验证式(3.2-3)满足第(2)条,

$$\begin{aligned} &d_c(\alpha_{a_1 \dots a_r} \wedge \beta_{b_1 \dots b_s}) \\ &= \frac{1}{r!s!} d_c(\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} \beta_{\sigma_1 \dots \sigma_s} (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \wedge (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_s})_{b_s}) \\ &= \frac{1}{r!s!} (d_c(\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r}) \beta_{\sigma_1 \dots \sigma_s} + \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} d_c(\beta_{\sigma_1 \dots \sigma_s})) \\ &\quad \wedge ((dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \wedge (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_s})_{b_s}) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>条件(4)是自变量  $x$  两次普通微分恒为零( $d(dx) = 0$ )的推广; 推广成任何全反对称协变张量场的两次外微分皆为零. 把作为自变量的坐标的两次外微分定义成两次普通微分, 即  $d_c(d_a x^\mu) \stackrel{def}{=} d(dx^\mu) = 0$ , 是为了消除可能存在的循环定义.

<sup>2</sup>当条件(1)中的  $\alpha$  和  $\beta$  不是同阶微分型式场时, 条件(1)是定义, 是无法证明的(至少笔者不知道如何证明)!

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r!s!} d_c(\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r}) \beta_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \wedge ((dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \wedge (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_s})_{b_s}) \\
&\quad + \frac{1}{r!s!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} d_c(\beta_{\sigma_1 \dots \sigma_q}) \wedge ((dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \wedge (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_s})_{b_s}) \\
&= \frac{1}{r!} d_c(\alpha_{\mu_1 \dots \mu_r}) \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r} \wedge \frac{1}{s!} \beta_{\sigma_1 \dots \sigma_q} (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_s})_{b_s} + \\
&\quad (-)^r \frac{1}{r!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_r} (dx^{\mu_1})_c \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} \wedge \frac{1}{s!} d_{a_r}(\beta_{\sigma_1 \dots \sigma_q}) \wedge (dx^{\sigma_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\sigma_s})_{b_s}.
\end{aligned}$$

上式最后一个等号用到了外积的反对称性，产生了  $r$  个负号；最终，上面推导可表示为

$$d_c(\alpha_{a_1 \dots a_r} \wedge \beta_{b_1 \dots b_s}) = (d_c \alpha_{a_1 \dots a_r}) \wedge \beta_{b_1 \dots b_s} + (-)^r \alpha_{ca_1 \dots a_{r-1}} \wedge d_{a_r} \beta_{b_1 \dots b_s}. \quad (3.2-4)$$

式(3.2-3)给出的定义满足四个条件，这便证明了外微分算符的存在性。将  $\alpha$  和  $\beta$  取为一次微分型式场，由式(3.2-4)可得到一个常用公式

$$d_c(\alpha_a \wedge \beta_b) = (d\alpha)_{ca} \wedge \beta_b - \alpha_c \wedge (d\beta)_{ab}. \quad (3.2-5)$$

虽然解决了外微分算子的局部、整体存在性问题（并且局部、整体定义是相容的），但还需证明式(3.2-3)中的定义是唯一的，以及此定义与局部坐标的选取无关。

先证明唯一性。假设另有一个算符  $\bar{d}$  同样满足定理3.3中的四个条件；需要注意，标量函数场  $f$  的普通微分是唯一确定的（这是数学分析中的结论），由条件 (3) 可知  $\bar{d}f = df$ ，也就是两个算符作用在标量场上是相等的。由于微分型式场  $\omega_{a_1 \dots a_r}$  的分量  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}$  及坐标  $x^\mu$  都是标量函数场，即它们属于  $C^\infty(U)$ ；因此，从式(3.2-3)可以看到  $\bar{d}\omega_{ba_1 \dots a_r} = d\omega_{ba_1 \dots a_r}$ ，也就说明了外微分算符的唯一性！

再证，定义(3.2-3)与局部坐标选取无关。设有开子集  $(W; y^i)$ ，并且  $U \cap W \neq \emptyset$ ，那么微分型式场  $\omega$  可有两组相等的表达式，

$$\omega_{a_1 \dots a_r}|_{U \cap W} = \frac{1}{r!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r}, \quad (3.2-6)$$

$$= \frac{1}{r!} \tilde{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_r}(y) (dy^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^{\mu_r})_{a_r}. \quad (3.2-7)$$

下面推导过程中，注意利用关系式(2.4-14)和(2.4-15)，以及式(2.4-20)；不再单独提示。对式(3.2-7)取外微分，

$$\begin{aligned}
d_b(\omega_{a_1 \dots a_r}) &= \frac{1}{r!} d_b(\tilde{\omega}_{\mu_1 \dots \mu_r}) \wedge (dy^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^{\mu_r})_{a_r} \\
&= \frac{1}{r!} d_b \left( \omega_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{\mu_r}} \right) \wedge (dy^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^{\mu_r})_{a_r} \\
&= \frac{1}{r!} \left( d_b(\omega_{j_1 \dots j_r}) \times \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{\mu_r}} + \omega_{j_1 \dots j_r} \frac{\partial^2 x^{j_1}}{\partial y^{\mu_1} \partial y^\sigma} \times \right. \\
&\quad \left. (dy^\sigma)_b \frac{\partial x^{j_2}}{\partial y^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{\mu_r}} + \dots \right) \wedge (dy^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^{\mu_r})_{a_r}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{r!} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_r}}{\partial y^{\mu_r}} \times d_b(\omega_{j_1 \cdots j_r}) \wedge (dy^{\mu_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (dy^{\mu_r})_{a_r} \\
&= \frac{1}{r!} d_b(\omega_{j_1 \cdots j_r}) \wedge (dx^{j_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (dx^{j_r})_{a_r}.
\end{aligned}$$

上面推导中用到了坐标  $x^j$  (标量场) 二阶偏导是对称的, 且外积 “ $\wedge$ ” 是反对称的, 所以对坐标的二次偏导数求和之后都是零. 最后一个等号显示外微分运算与坐标选取无关, 具有形式不变性! 至此, 定理3.3证毕. ■

**注 3.5** 此定理表明, 在光滑流形上, 通过外微分运算能够把一个光滑全反对称协变张量场变成高一阶的光滑反对称协变张量场.

如果对一般的切向量场, 或混合张量场, 或者非全反对称 (只有部分指标反对称或根本没有任何对称性) 的协变张量场进行微分运算, 进而得到协变阶数增加一阶的光滑张量场; 仅有微分结构 (即相容的坐标图册) 是不够的, 还需附上联络或者度规结构. 但全反对称协变张量场不需要这些结构便能进行微分运算.

下面给出外微分运算的一些性质.

**定理 3.6** 对于一次微分型式场  $\omega_a$  和任意切向量场  $X^a, Y^b$ , 有如下重要公式,

$$(d_a \omega_b) X^a Y^b = X(\omega_b Y^b) - Y(\omega_b X^b) - \omega_b [X, Y]^b. \quad (3.2-8)$$

**证明** . 因式(3.2-8)两边对于  $\omega_a$  是线性的, 所以不妨假设它是单项式, 即  $\omega_a = g d_a f$ , 其中  $f, g \in C^\infty(M)$ ; 因此,  $d_a \omega_b = d_a g \wedge d_b f$ . 直接计算式(3.2-8)等号左端, 有

$$LHS = (d_a g \wedge d_b f) X^a Y^b = (d_a g) d_b f X^a Y^b - (d_b g) d_a f X^a Y^b = X(g) Y(f) - X(f) Y(g).$$

再计算式(3.2-8)等号右端,

$$\begin{aligned}
RHS &= X(g d_b f Y^b) - Y(g d_b f X^b) - g d_b f [X, Y]^b \\
&= X(g Y(f)) - Y(g X(f)) - g [X, Y](f) = X(g) \cdot Y(f) - X(f) \cdot Y(g).
\end{aligned}$$

综合以上两式, 定理得证. 更高次微分型式场的相关公式表达式十分复杂, 需要更多的辅助切向量场; 在引入联络后有较为简洁的表达式, 见 §4.1.4.2. ■

之前, 我们证明了公式(2.5-7) (即  $\phi^*(df)_a = d_a(\phi^* f) = d_a(f \circ \phi)$ ); 此公式说明外微分与拉回映射可交换, 这个结论是以推广至一般情形.

**定理 3.7** 设光滑流形  $M$  和  $N$  的维数分别是  $m$  和  $n$ , 两者间存在光滑映射  $\phi: M \rightarrow N$ , 其诱导映射是  $\phi^*: A^r(N) \rightarrow A^r(M)$ , 其中  $0 \leq r < \min(m, n)$ . 则  $\forall \omega_{a_1 \cdots a_r} \in A^r(N)$  有  $\phi^*(d_b \omega_{a_1 \cdots a_r}) = d_b(\phi^* \omega_{a_1 \cdots a_r})$ .

**证明** . 定理中对微分型式场阶数的要求保证其外微分不为零. 外微分有局部性, 其局部坐标表达式为式(3.2-3), 由于这个式子具有坐标变换不变性, 可以看成整体上皆有意义的定义

式. 首先将其看成流形  $N$  上的外微分 (有局部坐标系  $(V; y)$ ), 再将此式拉回到流形  $M$  上 (有局部坐标系  $(U; x)$ , 且  $\phi(U) \subset V$ ).

$$\begin{aligned}\phi^*(d\omega_{ba_1 \dots a_r}) &= \phi^* \left( \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}}{\partial y^\rho} (dy^\rho)_b \wedge (dy^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^{\mu_r})_{a_r} \right) \\ &\stackrel{3.1-3}{=} \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \circ \phi}{\partial y^\rho} \cdot \frac{\partial y^\rho}{\partial x^{j_0}} \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{\mu_r}}{\partial x^{j_r}} \cdot (dx^{j_0})_b \wedge (dx^{j_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{j_r})_{a_r} \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} \circ \phi}{\partial x^{j_0}} \cdot \frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial y^{\mu_r}}{\partial x^{j_r}} \cdot (dx^{j_0})_b \wedge (dx^{j_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{j_r})_{a_r}.\end{aligned}$$

再对式(3.1-3)求外微分, 有

$$\begin{aligned}d_b(\phi^*\omega_{a_1 \dots a_r}) &= d_b \left( \frac{1}{r!} (\omega_{j_1 \dots j_r} \circ \phi) \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\pi_1}} \dots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{\pi_r}} \cdot (dx^{\pi_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\pi_r})_{a_r} \right) \\ &= \frac{1}{r!} \frac{\partial \omega_{j_1 \dots j_r} \circ \phi}{\partial x^{\pi_0}} \cdot \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{\pi_1}} \dots \frac{\partial y^{j_r}}{\partial x^{\pi_r}} \cdot (dx^{\pi_0})_b \wedge (dx^{\pi_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\pi_r})_{a_r}.\end{aligned}$$

上式最后一步省略了  $\frac{\partial^2 y^j}{\partial x^\pi \partial x^\sigma} (dx^\pi)_a \wedge (dx^\sigma)_b = 0$  (读者应该能看出此式为何为零吧?) 这一步. 综合以上两式可见, 外微分与拉回映射可交换. ■

**定义 3.8** 对于  $\omega \in A^r(M)$ , 若  $d\omega = 0$ , 则称  $\omega$  是闭的 (closed). 若存在  $\sigma \in A^{r-1}(M)$  使得  $\omega = d\sigma$ , 则称  $\omega$  是恰当的 (exact).

很明显, 如果微分型式场  $\omega$  是恰当的, 那么它必然是闭的; (整体上来说) 反之未必. 但我们有如下定理说明局部上是闭的, 则它必然是局部上恰当的.

**定理 3.9** (Poincaré 引理) 设  $U = B_0(a)$  是  $\mathbb{R}^m$  中以原点为中心、 $a$  为半径的球形开邻域 (可弱化为星形开邻域); 设  $\omega \in A^r(U)$  且  $d\omega = 0$ , 则存在  $\sigma \in A^{r-1}(U)$  使得  $\omega = d\sigma$ .

**证明.** 因  $U$  是  $\mathbb{R}^m$  中开集, 可假定它由一个坐标域覆盖; 设  $\omega$  的局部坐标表达式为,

$$\omega_{a_1 \dots a_r} = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r} (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_r}. \quad (3.2-9)$$

证明过程需要利用一个具有技巧性的积分, 定义如下映射  $I: A^r(U) \rightarrow A^{r-1}(U)$ ,

$$\begin{aligned}I_r(\omega)_{a_1 \dots a_{r-1}} &\stackrel{def}{=} \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 t^{r-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx) dt \right) \times \sum_{i=1}^r (-)^{i-1} x^{\mu_i} \times \\ &\quad \times (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (\widehat{dx^{\mu_i}}) \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}}.\end{aligned} \quad (3.2-10)$$

其中脱字符 $\widehat{\phantom{x}}$ 表示没有这个基矢 ( $\widehat{dx^{\mu_i}}$ ); 脱字符下的基矢不再占用抽象指标记号. 需要证明此映射有如下性质,

$$d_b(I_r(\omega)_{a_1 \dots a_{r-1}}) + I_{r+1}(d\omega)_{ba_1 \dots a_{r-1}} = \omega_{ba_1 \dots a_{r-1}}. \quad (3.2-11)$$

直接计算便可证明；先计算，

$$\begin{aligned} d_b(I_r(\omega)_{a_1 \dots a_{r-1}}) &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 t^{r-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx) dt \right) \cdot r \cdot (dx^{\mu_1})_b \wedge (dx^{\mu_2})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} + \\ &\quad \sum_{\mu_0 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 t^r \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx)}{\partial x^{\mu_0}} dt \right) \sum_{i=1}^r (-)^{i-1} x^{\mu_i} (dx^{\mu_0})_b \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (\widehat{dx^{\mu_i}}) \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} \end{aligned}$$

借用式(3.2-3)可以得到

$$\begin{aligned} I_{r+1}(d\omega)_{ba_1 \dots a_{r-1}} &= \sum_{\mu_0 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 t^r \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx)}{\partial x^{\mu_0}} dt \right) \times \sum_{i=0}^r (-)^i x^{\mu_i} \times \\ &\quad (dx^{\mu_0})_b \wedge (dx^{\mu_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (\widehat{dx^{\mu_i}}) \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} \end{aligned}$$

上两式求和，有

$$\begin{aligned} &d_b(I_r(\omega)_{a_1 \dots a_{r-1}}) + I_{r+1}(d\omega)_{ba_1 \dots a_{r-1}} \\ &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 t^{r-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx) dt \right) \cdot r \cdot (dx^{\mu_1})_b \wedge (dx^{\mu_2})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} \\ &\quad + \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 t^r \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx)}{\partial x^{\mu_0}} dt \right) \times x^{\mu_0} (dx^{\mu_1})_b \wedge (dx^{\mu_2})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} \\ &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \left( \int_0^1 \frac{d(t^r \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(tx))}{dt} dt \right) (dx^{\mu_1})_b \wedge (dx^{\mu_2})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} \\ &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_r} \omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x) (dx^{\mu_1})_b \wedge (dx^{\mu_2})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{\mu_r})_{a_{r-1}} = \omega_{ba_1 \dots a_{r-1}}. \end{aligned}$$

这便证明了式(3.2-11). 当  $\omega$  为闭型式时，也就是  $d\omega = 0$  时，由式(3.2-11)可得  $\omega_{ba_1 \dots a_{r-1}} = d_b(I_r(\omega)_{a_1 \dots a_{r-1}})$ ，这说明  $\omega$  是恰当的；其中  $\sigma = I_r(\omega)$ . ■

**注 3.10** 从 Poincaré 引理的证明过程来看（见式(3.2-10)），只有微分型式场  $\omega$  的分量  $\omega_{\mu_1 \dots \mu_r}(x)$  不为零时才能使得积分后的式(3.2-10)不为零；如果  $\omega$  的分量为零，那么定理中的  $\sigma$  也为零.

### 3.3 Frobenius 定理

在 §2.10 中，已经指出流形上切向量场与其积分曲线（单参数可微变换群）有一一对应关系，这其实是在说单个切向量场是否可积；本节将讲述多个切向量场是否可积的问题，由常微分方程组过渡到偏微分方程组。我们将省略定理证明过程，可参考文献 [1]<sup>§9</sup>、[3]<sup>Ch. 6</sup>、[5]<sup>§1.4</sup> 或其它类似书籍。需要事先声明，本节所叙述的定理只在局部成立；关于 Frobenius 定理的大范围（整体）描述可参阅 [3]<sup>§6.6-6.7</sup>。

设有一阶偏微分方程组,

$$\frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} = f_i^\alpha(x^1, \dots, x^m; y^1, \dots, y^n), \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.3-1)$$

假定  $f_i^\alpha(x^j; y^\beta)$  是定义在区域  $D = U \times V$  上的  $C^r$  阶连续可微函数, 其中  $U$  是  $\mathbb{R}^m$  开凸子集,  $V$  是  $\mathbb{R}^n$  开凸子集; 并且这两个子集的边界 ( $\partial U$  和  $\partial V$ ) 是  $C^{r-1}$  阶连续可微的, 除了有限个测度为零的不可微子区域.

**定理 3.11** 对于任意给定初值  $(x_0^1, \dots, x_0^m; y_0^1, \dots, y_0^n) \in D$ , 方程组(3.3-1)在点  $(x_0^1, \dots, x_0^m) \in U$  的一个邻域  $\tilde{U}$  内有连续可微解  $y^\alpha = y^\alpha(x^1, \dots, x^m)$ , 并且满足初始条件  $y^\alpha(x_0^1, \dots, x_0^m) = y_0^\alpha$  (其中  $1 \leq \alpha \leq n$ ) 的充分条件是, 在区域  $D$  上下述恒等式成立,

$$\frac{\partial f_i^\alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial x^i} = \sum_{\sigma=1}^n \left( \frac{\partial f_j^\alpha}{\partial y^\sigma} f_i^\sigma - \frac{\partial f_i^\alpha}{\partial y^\sigma} f_j^\sigma \right), \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (3.3-2)$$

此时简称该方程组完全可积; 并且该解是唯一的. 反之, 如果假设方程组(3.3-1)解存在, 那么条件(3.3-2)也是其必要条件 (即推论) 之一.

需要提醒读者注意, 此定理在叙述中省略了区域  $D$  的拓扑性质 (已在定理前给出), 这些性质也是解存在的充分条件. 只有单独一个条件(3.3-2)无法保证方程组(3.3-1)解的存在, 仍需拓扑条件、初边值条件等.

**例 3.12** 令定理3.11中的  $n=1, m=2$ , 即方程(3.3-1)为

$$\partial_x u = f(x, y; u), \quad \partial_y u = g(x, y; u). \quad (3.3-3)$$

注意有两个方程, 一个未知量  $u$ ; 但方程组是确定的, 见 §1.2.2. 解存在性条件(3.3-2)只有一个  $\partial_x g - \partial_y f = g \partial_u f - f \partial_u g$ , 其它全部为  $0=0$  的恒等式; 如果假设  $f, g$  与  $u$  无关, 则上述解存在性条件变为  $\partial_x g - \partial_y f = 0$ . ■

**例 3.13** 将例题3.12稍微改变一下表述方式, 令

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -u \\ u & 0 \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} g \\ -f \end{pmatrix}. \quad (3.3-4)$$

则例3.12中方程变为

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} F_{ji} = J_i. \quad (3.3-5)$$

假设  $f, g$  与  $u$  无关, 则解存在性条件是  $\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} J_i = \partial_x g - \partial_y f = 0$ . ■

**例 3.14** 令

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_i = \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}. \quad (3.3-6)$$

其中  $J_i$  与  $u_i$  无关. 则有如下方程

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} F_{ji} = J_i \Leftrightarrow \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{J}. \quad (3.3-7)$$

解存在性条件变为  $\sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} J_i = \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . ■

定理3.11是 Frobenius 定理的经典形式; 下面我们用切矢量场以及微分形式场方式再次叙述此定理, 为此需要做些准备.

**定义 3.15** 设光滑流形  $M$  是  $m$  维的. 若对每一点  $p \in M$  都指定切空间  $T_p M$  的一个  $h$  维子空间  $L^h(p) \subset T_p M$ , 则  $L^h = \bigcup_{p \in M} L^h(p)$  构成切丛  $TM$  的一个子丛, 称为  $M$  上的一个  $h$  维分布. 若上述  $L^h$  只在流形  $M$  的某开子集  $U$  上成立, 则称  $L^h$  是  $U$  上的  $h$  维分布.

流形上每点切空间都与流形同维数, 分布的含义便是先在  $T_p U$  找到  $h$  个线性无关的切矢量  $X_1^a(p), \dots, X_h^a(p)$ ; 然后让点  $p$  遍历  $U$ , 这样就有  $h$  个线性无关的切矢量场  $X_1^a, \dots, X_h^a \in \mathfrak{X}(U)$ ; 分布便是由这些切矢量场张成 (为简单起见, 要求这些切矢量场是光滑的), 记为

$$L^h|_U \equiv \text{Span}\{X_1^a, \dots, X_h^a\}. \quad (3.3-8)$$

需提醒一下:  $\text{Span}$  的组合系数是  $C^\infty(M)$ . 切矢量场能够进行非退化  $C^\infty(U)$  函数变换 (包括  $\mathbb{R}$ -线性变换, 见(2.8-3)式后论述),

$$Y_\alpha^a = c_\alpha^\beta X_\beta^a, \quad \forall c_\alpha^\beta \in C^\infty(U) \text{ 且 } \det(c_\alpha^\beta) \neq 0. \quad (3.3-9)$$

这  $h$  个切矢量  $Y_\alpha^a$  仍是线性无关的; 此时, 分布  $L^h|_U$  也可记为,

$$L^h|_U \equiv \text{Span}\{Y_1^a, \dots, Y_h^a\}. \quad (3.3-10)$$

如果光滑流形  $M$  上存在  $h$  个处处线性无关的光滑切矢量场, 那么在  $U$  上就存在一个  $h$  维光滑分布. 反过来,  $U$  上存在一个  $h$  维光滑分布, 那么在  $M$  上未必存在  $h$  个处处线性无关的光滑切矢量场. 典型的例子便是二维球面  $S^2$  上的光滑切矢量场必有奇点, 因此  $S^2$  整体上不可能存在两个处处线性无关的切矢量场; 然而  $S^2$  的局部上的切空间场显然是个 2 维分布. 虽然在整个流形 (或者称之为大范围情形) 两者并不等价, 但在局部开子集  $U$  上, 两者是等价的, 即一个  $h$  维光滑分布等价于存在  $h$  个处处线性无关的光滑切矢量场.

**定义 3.16** 设  $L^h$  是定义在开子集  $U \subset M$  上的光滑分布, 如果有包含映射  $\iota: N \rightarrow U$  对每一点  $p \in N$  有  $\iota_*(T_p N) \subset L^h(\iota(p))$ , 则称  $(\iota, N)$  是光滑分布  $L^h$  的一个积分流形.

若  $\forall q \in U$ , 都有分布  $L^h$  的一个  $h$  维积分流形经过它, 则称分布  $L^h$  是完全可积的.

由于包含映射一定是嵌入映射, 那么必然是单射; 同时流形  $N$  的维数不可能超过  $h$ . 积分流形只要求  $\forall p \in N$  可积, 完全积分流形要求  $\forall q \in U$  可积.

当  $h = 1$  时,  $L^1$  分布便是  $U$  上的切矢量场; 很明显, 分布是切矢量场向高维空间的推广; 矢量场的积分曲线正是它作为分布时的积分流形. 定理2.84阐述了任意切矢量场 (在坐



标变换后) 都可以表示成  $X^a|_U = (\frac{\partial}{\partial x^1})^a$ , 即其积分曲线是  $x^1$ -参数曲线, 在此条曲线上只有自变量  $x^1$  是变化的, 其它自变量  $x^i (2 \leq i)$  都是常数. 一个自然的问题是定理2.84能否推广到高维, 即是否存在局部坐标系使得  $L^h = \text{Span}\{(\frac{\partial}{\partial x^1})^a, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^h})^a\}$ ; 这便是 Frobenius 定理.

**定义 3.17** 设  $L^h$  是定义在开子集  $U \subset M$  上的光滑分布. 若  $\forall p \in U$ , 存在  $p$  点一个开邻域  $p \in V \subset U$ , 以及  $h$  个光滑切矢量场  $X_1^a, \dots, X_h^a \in \mathfrak{X}(V)$  使得  $L^h = \text{Span}\{X_1^a, \dots, X_h^a\}$ ; 并且这些光滑切矢量场满足封闭条件  $[X_\alpha, X_\beta]^a = c_{\alpha\beta}^\gamma X_\gamma^a$ , 其中  $c_{\alpha\beta}^\gamma \in C^\infty(V)$ 、 $1 \leq \alpha, \beta \leq h$ , 则称  $L^h$  满足 **Frobenius 条件**.

**定理 3.18** (Frobenius 定理) 设  $L^h$  是定义在开子集  $U \subset M$  上的光滑分布, 如果  $L^h$  满足 Frobenius 条件, 则  $\forall p \in U$ , 存在局部坐标系  $(V; x^i)$  使得  $p \in V \subset U$ , 并且

$$L^h = \text{Span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^a, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x^h}\right)^a\right\}. \quad (3.3-11)$$

$L^h$  有如此表述形式, 自然是完全可积的.

定理3.18告诉我们, 开子集  $V$  中的坐标面  $\{(x^1, \dots, x^m) : x^{h+1} = \text{const}, \dots, x^m = \text{const}\}$  是分布  $L^h$  的  $h$  维积分流形. 此定理的逆也成立, 即

**定理 3.19** 如果  $L^h$  完全可积, 则  $L^h$  必然满足 Frobenius 条件.

### 3.4 Frobenius 定理的外型式表述

§3.3中是 Frobenius 定理的经典描述方式, 本节用外型式场方式再次表述此定理. 同 §3.3表述类似, 通过包含映射  $\iota$  将  $n$  维子流形  $N$  嵌入到  $m$  流形  $M$  中, 且  $n < m$ ; 我们需要用到拉回映射来表述  $(\iota, N)$  是积分流形这一概念, 因  $N$  的维数小于  $M$  的维数, 所以从  $M$  拉回到  $N$  的一次外型式场  $\iota^*(\omega^i)_a, \forall (\omega^i)_a \in \mathfrak{X}^*(M), 1 \leq i \leq m$  中必然有些为零.

定义在  $m$  维光滑流形  $M$  的开子集  $U$  上的  $r$  个一次外微分型式场

$$(\omega^\alpha)_a = 0; \quad \text{其中 } (\omega^\alpha)_a \in \mathfrak{X}^*(U), \quad 1 \leq \alpha \leq r. \quad (3.4-1)$$

称为  $U$  上的 **Pfaff 方程组**. 内指标标记微分式的个数. 这里的  $(\omega^\alpha)_a = 0$  不是指一次外微分式为恒零元, 恒零元是指  $\forall v^a \in \mathfrak{X}(U)$  有  $(\omega^\alpha)_a v^a = \langle (\omega^\alpha)_a, v^a \rangle = 0$ . 而 Pfaff 方程(3.4-1)是指寻找子流形  $(\iota, N)$  使得

$$\iota^*((\omega^\alpha)_a) = 0; \quad \text{其中包含映射 } \iota : N \rightarrow U. \quad (3.4-2)$$

或者说  $(\omega^\alpha)_a$  在子流形  $N$  上的限制为零. 满足上述条件的映射  $\iota$  和流形  $N$  未必存在, 其存在性条件就是 Frobenius 条件.

先看一个例子. 若  $r = 1$ , 在二维流形上, Pfaff 方程是

$$(\omega)_a = P(x, y)(dx)_a + Q(x, y)(dy)_a = 0, \quad P, Q \in C^\infty(U). \quad (3.4-3)$$

当  $Q \neq 0$  时, 上述方程等价于 (直接去掉抽象指标号)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \quad (3.4-4)$$

这是通常的常微分方程式. 它完全可积条件是 (可查阅微积分或常微分方程书籍)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (3.4-5)$$

在  $U$  上处处成立.

在光滑流形  $M$  上开子集  $U$  的一次微分式(3.4-1)在各点的线性无关个数未必相同, 这给研究带来诸多不便. 下面, 我们只研究  $U$  上各点线性无关的一次微分式  $((\omega^\alpha)_a)$  个数均为相同常数的情形, 此常数称为 Pfaff 方程组的秩. 我们不妨假设它的秩是  $r$ . 到目前为止, 积分流形的定义仍旧模糊, 下述命题有助于清晰化此概念.

**命题 3.20** 给定  $m$  维光滑流形  $M$ , 定义在开子集  $U \subset M$  上的秩为  $r$  的 Pfaff 方程组在局部上等价于  $h(= m - r)$  维光滑分布  $L^h$ .

**证明.** 需要提醒读者这个命题只在局部成立. 我们先从分布导出 Pfaff 方程组.

假设点  $p \in V \subset U$  邻域有局部坐标系  $(V; x^i)$  (进一步缩小开集  $U$  的主要目的是: 缩小后的  $p$  点开邻域  $V$  可用一个坐标域覆盖),  $h(= m - r)$  维光滑分布  $L^h$  可用  $V$  上处处线性无关的光滑切向量场来张成, 即

$$L^h|_V = \text{Span} \{(v_{r+1})^a, \dots, (v_m)^a\}. \quad (3.4-6)$$

将此  $h$  个切向量场延拓至  $m$  个在  $V$  上处处线性无关的切向量场, 假设这些切向量场的局部展开式为

$$(v_i)^a = \sum_{j=1}^m v_i^j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a = \sum_{\alpha=1}^r v_i^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)^a + \sum_{\mu=r+1}^m v_i^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.4-7)$$

因为分布  $L^h$  要有  $h$  个处处线性无关的切向量场, 故不妨假设展开系数  $\det(v_\lambda^\mu) \neq 0$ , 其中  $r < \mu, \lambda \leq m$ . 其逆记为  $b_\lambda^{\mu'}$ , 即  $v_\mu^\mu b_\lambda^{\mu'} = \delta_\lambda^\mu$ ; 将逆矩阵乘在式(3.4-7)上, 有

$$\begin{aligned} (u_\lambda)^a &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mu'=r+1}^m b_\lambda^{\mu'} (v_{\mu'})^a = \sum_{\alpha=1}^r b_\lambda^{\mu'} v_{\mu'}^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)^a + \sum_{\mu, \mu'=r+1}^m b_\lambda^{\mu'} v_{\mu'}^\mu \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a \\ &= - \sum_{\alpha=1}^r l_\lambda^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)^a + \left( \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \right)^a, \quad \text{其中 } l_\lambda^\alpha \equiv - \sum_{\mu'=r+1}^m b_\lambda^{\mu'} v_{\mu'}^\alpha. \end{aligned} \quad (3.4-8)$$

显然  $l_\lambda^\alpha \in C^\infty(U)$ , 所以仍然有

$$L^h|_V = \text{Span} \{(u_{r+1})^a, \dots, (u_m)^a\}. \quad (3.4-9)$$

补上  $r$  个切基矢  $(u_\alpha)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^a$ , 其中  $1 \leq \alpha \leq r$ ; 这样切标架场  $\{(u_1)^a, \dots, (u_m)^a\}$  便构成了  $V$  上的切基矢场. 容易验证与  $\{u^a\}$  对偶的余切标架场是

$$(\theta^\alpha)_a = (dx^\alpha)_a + \sum_{\mu=r+1}^m l_\mu^\alpha (dx^\mu)_a, \quad (\theta^\lambda)_a = (dx^\lambda)_a; \quad 1 \leq \alpha \leq r, \quad r < \lambda \leq m. \quad (3.4-10)$$

由上式可见,  $h$  维光滑分布  $L^h$  可以导出  $r(=m-h)$  个 Pfaff 方程组  $(\theta^\alpha)_a = (dx^\alpha)_a + \sum_{\mu=r+1}^m l_\mu^\alpha (dx^\mu)_a$ , 其系数  $l_\mu^\alpha$  是由分布  $L^h$  基矢场的展开系数决定的.

反之. 假设先给定秩为  $r$  的 Pfaff 方程组  $(\omega^\alpha)_a$ , 其中  $1 \leq \alpha \leq r$ . 在每一点  $p \in V$  最多的线性无关微分型式场自然是  $m$  个, 我们将  $r$  个一次外微分式延拓到  $m$  个处处相互独立的外微分式, 并在局部坐标系展开, 有

$$(\omega^i)_a = \sum_{k=1}^m \omega_k^i (dx^k)_a = \sum_{\beta=1}^r \omega_\beta^i (dx^\beta)_a + \sum_{\nu=r+1}^m \omega_\nu^i (dx^\nu)_a, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.4-11)$$

同理, 不妨假设  $\det(\omega_\beta^\alpha) \neq 0$ , 其中  $1 \leq \alpha, \beta \leq r$ ; 这个方阵自然有逆  $b_\alpha^\gamma$ , 即  $\omega_\beta^\alpha b_\alpha^\gamma = \delta_\beta^\gamma$ , 其中  $1 \leq \gamma \leq r$ . 将逆矩阵乘在式(3.4-11)上, 有

$$\begin{aligned} (\varphi^\gamma)_a &\stackrel{def}{=} \sum_{\alpha=1}^r b_\alpha^\gamma (\omega^\alpha)_a = \sum_{\alpha, \beta=1}^r b_\alpha^\gamma \omega_\beta^\alpha (dx^\beta)_a + \sum_{\nu=r+1}^m b_\alpha^\gamma \omega_\nu^\alpha (dx^\nu)_a \\ &= (dx^\gamma)_a + \sum_{\nu=r+1}^m c_\nu^\gamma (dx^\nu)_a, \quad \text{其中 } c_\nu^\gamma \equiv b_\alpha^\gamma \omega_\nu^\alpha. \end{aligned} \quad (3.4-12)$$

由于乘的是可逆矩阵, 所以  $(\varphi^\gamma)_a$  和  $(\omega^\gamma)_a$  是等价的.  $(\varphi^\gamma)_a (1 \leq \gamma \leq r)$  在  $V$  上是处处线性无关的, 我们可以补上  $h = (m-r)$  个余切矢量场  $(\varphi^\lambda)_a = (dx^\lambda)_a (r < \lambda \leq m)$ , 这样  $m$  个  $\{(\varphi^1)_a, \dots, (\varphi^m)_a\}$  便构成了  $\mathfrak{X}^*(V)$  的基矢场. 容易求出与其对偶的切标架场  $\{(X_1)^a, \dots, (X_m)^a\}$  是 (其中  $1 \leq \alpha \leq r, \quad r < \lambda \leq m$ )

$$(X_\alpha)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)^a, \quad (X_\lambda)^a = \left(\frac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)^a - \sum_{\beta=1}^r c_\lambda^\beta \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right)^a. \quad (3.4-13)$$

上式说明, 从秩为  $r$  的 Pfaff 方程组  $(\omega^\alpha)_a$  出发, 可以找到一个  $h$  维光滑分布

$$L^h|_V = \text{Span}\{(X_{r+1})^a, \dots, (X_m)^a\}. \quad (3.4-14)$$

其系数  $c_\lambda^\beta$  是由 Pfaff 方程组  $(\omega^\alpha)_a$  的展开系数决定的.

最终可以看到, 秩为  $r$  的 Pfaff 方程组与  $h(=m-r)$  维的分布  $L^h$  是相互确定、相互伴随的. 这说明, 当给定一个 Pfaff 方程组时, 便同时给出了一个光滑分布; 反之也正确. ■

取  $L^h|_V = \text{Span}\{(v_{r+1})^a, \dots, (v_m)^a\}$  和  $(\omega^\alpha)_a (1 \leq \alpha \leq r)$  是命题3.20中相互伴随的分布  $L^h$  和一次外型式场. 因两者是相互对偶的,  $\forall X^a \in L^h|_V$  必然有  $(\omega^\alpha)_a X^a = 0$ . 按照 §3.3中论述, 假设光滑分布  $L^h|_V$  的积分流形是  $(\iota, N)$  (见定义3.16); 其中包含映射  $\iota$  的定

义是  $\iota: N \rightarrow V \subset U \subset M$ . 此时虽然  $TN$  中的切矢量场与  $L^h|_V$  是同构的, 但需要用包含映射推前到  $TV$  中才能与  $V$  中的余切矢量场 (即一次外型式场)  $(\omega^\alpha)_a \in \mathfrak{X}^*(V)$  作用.  $\forall u^a \in TN \cong L^h|_V$ , 必然有

$$(\omega^\alpha)_a(\iota_* u^a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\iota^*(\omega^\alpha)_a)(u^a) = 0. \quad (3.4-15)$$

本节开头说过, Pfaff 方程组是在寻找一个子流形  $(\iota, N)$  使得  $\iota^*(\omega^\alpha)_a = 0$  成立, 从上式可以看到: 命题3.20中描述的、与 Pfaff 方程组(3.4-1)伴随的光滑分布  $L^h$  的积分流形  $(\iota, N)$  就满足此要求.  $\iota^*(\omega^\alpha)_a$  在子流形  $N$  的切空间上式恒零元, 在  $N$  外的空间不是恒零元.

我们再大致叙述一下这一过程: ① 给定  $m$  维光滑流形  $M$  的一个开子集  $U$  (根据需要可适当将其缩小至  $V$ ); ② 给定开子集  $U$  上秩为  $r$  的 Pfaff 方程组(3.4-1) (即  $r$  个余切矢量场); ③ 通过命题3.20中论述的方法找到与 Pfaff 方程组(3.4-1)相互伴随的光滑分布  $L^h$ , 分布维数是  $h = m - r$ ; ④ 光滑分布  $L^h$  会对应一个积分流形  $(\iota, N)$ , 见定义3.16, 这个积分流形中的切矢量场满足式(3.4-15), 同时我们也把这个积分流形称为 Pfaff 方程组(3.4-1)的积分流形; ⑤ 积分流形  $(\iota, N)$  的存在性条件就是下面叙述的 Frobenius 定理.

在叙述 Frobenius 定理之前, 先看一下 Pfaff 方程组与一般偏微分方程组的关系. 给定一般的一阶偏微分方程组,

$$\frac{\partial y^\alpha(x)}{\partial x^i} = f_i^\alpha(x^1, \dots, x^m; y^1, \dots, y^n), \quad 1 \leq \alpha \leq n, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (3.4-16)$$

其中  $f_i^\alpha$  是自变量的光滑函数. 上式可改写为开子集  $U \times V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  的 Pfaff 方程组

$$(\omega^\alpha)_a = (dy^\alpha)_a - \sum_{i=1}^m f_i^\alpha(x, y)(dx^i)_a, \quad 1 \leq \alpha \leq n. \quad (3.4-17)$$

如果方程组(3.4-16)有解  $y^\alpha = g^\alpha(x^1, \dots, x^m)$ , 那么构建映射  $\iota: U \rightarrow U \times V$  为

$$\iota(x^1, \dots, x^m) = (x^1, \dots, x^m; g^1(x), \dots, g^n(x)). \quad (3.4-18)$$

可以看出  $(\iota, U)$  是  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  的嵌入子流形. 式(3.4-17)中描述的 Pfaff 方程组是流形  $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$  中开子集  $U \times V$  上的余切矢量场, 可用映射  $\iota$  将其拉回至  $U$  中,

$$\iota^*((\omega^\alpha)_a) = (dg^\alpha(x))_a - f_i^\alpha(x, g(x))(dx^i)_a = \left( \frac{\partial g^\alpha(x)}{\partial x^i} - f_i^\alpha(x, g(x)) \right) (dx^i)_a. \quad (3.4-19)$$

因为  $g^\alpha(x^1, \dots, x^m)$  是方程组(3.4-16)的解, 所以显然有  $\iota^*((\omega^\alpha)_a) = 0$ ; 符合上面的论述.

**定理 3.21** 设式(3.4-1)是定义在开子集  $U \subset M$  上的秩为  $r$  的 Pfaff 方程组, 则它完全可积的充分必要条件是: 满足下述条件之一即可 (其中  $1 \leq \alpha \leq r$ )

$$(d\omega^\alpha)_{ab} = \sum_{\beta=1}^r (\phi_\beta^\alpha)_a \wedge (\omega^\beta)_b, \quad (3.4-20a)$$

$$0 = (d\omega^\alpha)_{ab} \wedge (\omega^1)_{c_1} \wedge (\omega^2)_{c_2} \cdots \wedge (\omega^r)_{c_r}, \quad (3.4-20b)$$

$$(\omega^\alpha)_a = \sum_{\beta=1}^r g_\beta^\alpha(x^1, \dots, x^r) \cdot (dx^\beta)_a, \quad \text{存在 } g_\beta^\alpha(x^1, \dots, x^r) \in C^\infty(V). \quad (3.4-20c)$$

式(3.4-20)称为 Frobenius 条件. 条件(3.4-20a)要求  $\forall p \in U$  存在点  $p$  的开邻域  $V \subset U$  使得存在  $r^2$  个  $(\phi_\beta^\alpha)_a \in \mathfrak{X}^*(V)$  满足式(3.4-20a). 条件(3.4-20c)是指存在  $g_\beta^\alpha(x^1, \dots, x^r) \in C^\infty(V)$  和局部坐标系  $\{x\}$  使得式(3.4-20c)成立即可.

**证明.** 定理证明可参考文献 [3]<sup>§7.14-7.17</sup>、[5]<sup>§3.2</sup> 或其它类似书籍.

简单论述一下几个 Frobenius 条件的等价性. 通过定理1.105极易证明条件(3.4-20a)与条件(3.4-20b)的等价性.

直接对条件(3.4-20c)取外微分运算可得到条件(3.4-20a); 这是说如果条件(3.4-20c)成立, 那么 Pfaff 方程组完全可积. 反之, 如果那么 Pfaff 方程组完全可积, 从定理3.18可知存在开子集  $V$  中的坐标面  $\{(x^1, \dots, x^m) : x^{r+1} = \text{const}, \dots, x^m = \text{const}\}$  是分布  $L^h$  的  $h$  维积分流形. 在此坐标系下, Pfaff 方程中的一次外微分型式场只能表示为

$$(\omega^\alpha)_a = \sum_{\beta=1}^r g_\beta^\alpha(x^1, \dots, x^r) \cdot (dx^\beta)_a, \quad g_\beta^\alpha(x^1, \dots, x^r) \in C^\infty(V). \quad (3.4-21)$$

这就是条件(3.4-20c). ■

在本节开头, 我们描述了二维平面上的一个例子, 下面把它拓展到  $\mathbb{R}^3$  中.

**例 3.22** 取  $r = 1$ , 在  $\mathbb{R}^3$  的凸开子集  $U$  上, 给定 Pfaff 方程

$$(\omega)_a = P(x, y, z)(dx)_a + Q(x, y, z)(dy)_a + R(x, y, z)(dz)_a, \quad P, Q, R \in C^\infty(U). \quad (3.4-22)$$

通过式(3.4-20b), 很容易得到上述方程的完全可积条件, 先计算其外微分

$$d_b(\omega)_a = (dP)_b \wedge (dx)_a + (dQ)_b \wedge (dy)_a + (dR)_b \wedge (dz)_a. \quad (3.4-23)$$

然后与  $(\omega)_c$  作外积,

$$d_b(\omega)_a \wedge (\omega)_c = (dP)_b \wedge (dx)_a \wedge (\omega)_c + (dQ)_b \wedge (dy)_a \wedge (\omega)_c + (dR)_b \wedge (dz)_a \wedge (\omega)_c.$$

将此式展开可得 Frobenius 条件, 计算过程留给读者完成,

$$P \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0. \quad (3.4-24)$$

需要更深入了解 Frobenius 定理的读者可参考文献 [4]<sup>Ch.8</sup>; 那里给出了更多(物理、力学)的例题(约 30 道例题), 以及更加详尽、全面地描述.

## 3.5 流形定向与带边流形

### 3.5.1 流形定向

在  $\mathbb{R}^3$  中的直角坐标系可以分为左手和右手两种, 这称为坐标系的定向; 定向概念可以向高维空间推广, 但三维空间中直观的左手或右手定则很难推广. 设  $\mathbb{R}^3$  中有两个原点重合的、正交归一坐标系  $\mathbf{e}_i$  和  $\mathbf{f}_i$ , 联系这个坐标系的是一个实正交矩阵, 即  $\mathbf{f}_i = a_i^j \mathbf{e}_j$ ; 这个矩阵的行列式  $\det(a_i^j) = \pm 1$ , 当其值为  $+1$  时, 我们称两个坐标系是定向相同的, 否则是定向相反的. 这个方式可以推广到高维.

设  $V$  是  $m$  维向量空间, 有两组基矢  $(e_i)^a$  和  $(\epsilon_i)^a$  (一般不要求它们正交归一), 联系它们的是一个非奇异  $m \times m$  矩阵  $A$ , 即  $(\epsilon_i)^a = A_i^j (e_j)^a$ ; 当  $\det(A) > 0$  时, 我们称两组基矢量定向相同, 当  $\det(A) < 0$  时, 我们称两组基矢量定向相反; 也就是行列式的正负将所有基矢组分为两个等价类, 此时可称其一为右手的, 另一个为左手的. 需要注意, 向量空间的变换矩阵  $A$  是常数矩阵, 它的行列式只能大于或者小于零; 这一方式可以推广至微分流形的切空间 (一类向量空间), 但流形切空间是逐点不同的.

**定义 3.23** 设  $M$  是  $m$  维光滑流形, 其相互容许的坐标卡集合  $\{(U, \varphi; x^i), (V, \psi; y^i), \dots\}$  构成流形  $M$  的开覆盖; 如果当  $U \cap V \neq \emptyset$  时, 坐标变换  $\psi \circ \varphi^{-1}: \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  的 Jacobi 行列式  $\det(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}) > 0$ , 则称  $M$  是**可定向**的光滑流形; 满足 Jacobi 行列式大于零的两个坐标卡  $(U, \varphi)$  和  $(V, \psi)$  称为**定向相符的**或**同向的**; 由定向相符的坐标卡组成的极大坐标卡集合 (也就是微分结构) 称为流形  $M$  的一个**定向**.

上面的定义大意是, 先在流形  $M$  取一个开覆盖集合 (同时取定坐标系), 当点  $p \in U \cap V \neq \emptyset$  时,  $p$  点有两个坐标系<sup>3</sup>; 在  $p$  点切空间便有两组基矢量  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$  和  $\{(\frac{\partial}{\partial y^i})^a\}$ , 这两组基矢量坐标变换的 Jacobi 行列式 (取式(2.4-20)中逆变部分即可) 肯定不是零; 当  $p$  在流形  $M$  上移动时, 此行列式的正负可能逐点不同, 也就是有的点是正的, 有的点是负的. 如果能够通过调节坐标取向 (比如令  $y^1 = -y^1$ ) <sup>4</sup> 可以令所有点 Jacobi 行列式都大于零, 则流形  $M$  是可定向的; 否则就是不可定向的, 典型例子是 Möbius 带.

上面定义是由切空间来描述的, 这个定义能很好地退化到  $\mathbb{R}^3$  中的定义; 更为常用的定义是由余切空间来描述, 此时会用到外微分型式场. 先给出定义3.23的对偶定义,

**定义 3.24** 如果  $m$  阶光滑流形  $M$  上存在一个连续的、处处非零的  $m$  阶外微分型式场  $\omega$ , 则称  $M$  是**可定向**的光滑流形;  $\omega$  称为流形  $M$  的**定向**. 反之, 流形  $M$  不可定向.

下面来分析两个定义的等价性. 假设  $M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  且  $U \cap V \neq \emptyset$ ,

<sup>3</sup>单独一个开子集  $(U; x^i)$  内, 定向是确定的, 或者说不存在定向问题. 因为  $U$  是能够被一个坐标系覆盖住, 定向一定存在且相符合; 如果非要讨论定向, 可取恒等坐标变换, 那么 Jacobi 行列式为  $+1$ .

<sup>4</sup>比如通过调节坐标取向已将开子集  $U$  和  $V$  调整成定向相符. 而  $V \cap W \neq \emptyset$ , 此时  $V$  中坐标必须和  $U$  中一致, 不能再调整  $V$  的坐标与  $W$  定向相符合, 只能调整  $W$  的坐标与  $V$  定向相符合; 以此类推.

在  $U \cap V$  上满足定义3.24中的外微分型式场  $\omega$  可用局部坐标表示为

$$\begin{aligned}\omega_{a_1 \dots a_m} &= h(x) \cdot (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} = f(y) \cdot (dy^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^m)_{a_m} \\ &= f(y) \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}.\end{aligned}\quad (3.5-1)$$

定义3.24中还要求  $h(x)$  和  $f(y)$  是连续的、处处非零的, 那么必然有  $h(x) > 0$  或  $h(x) < 0$ , 不存在任何一个开子集  $U$ , 其上的  $h(x)$  可变正负号;  $f(y)$  也如此. 不妨假设  $h > 0$  且  $f > 0$ , 如果任何一个小于零 (比如  $f < 0$ ), 只需令坐标取负号 ( $y^1 = -y^1$ , 其它坐标不变), 然后新的系数大于零了 ( $-f(y) > 0$ ). 因  $h > 0$  且  $f > 0$ , 故由式(3.5-1)可知坐标变换产生的 Jacobi 行列式  $J' = \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)}$  处处大于零;  $J'$  是定义3.23中 Jacobi 行列式  $J$  的逆, 即  $J' = J^{-1}$ ; 可见  $J > 0$  等价于  $J' > 0$ . 这便说明了两个定义是等价的.

如果  $h(x)$  可变正负号, 那么  $f(y)$  也是可变正负号的, 那么不能得出 Jacobi 行列式  $J' > 0$  了, 定义3.24也就不等价于定义3.23了. 即便只有一个点  $p \in U$  为零, 其它点都大于零, 那么  $p$  点的  $J'$  的正负号也是不能确定的.

我们要求  $\omega$  是  $m$  阶的, 而流形  $M$  也是  $m$  阶的; 由此可知流形  $M$  上任意两个连续且处处非零的  $m$  阶外微分型式场  $\omega$  和  $\omega'$  只相差一个非零倍数, 即  $\omega' = c \cdot \omega$ , 其中  $c \in C^0(M)$ . 因为  $c$  连续, 所以要么  $c > 0$  要么  $c < 0$ , 在任何点都有  $c \neq 0$ . 由此可知, 定向只有两种, 可称为左手定向或右手定向.

外微分型式场  $\omega$  与局部坐标系  $(U; x)$  定向相符合或者说同向是指式(3.5-1)中  $h(x) > 0$ ; 如果  $h(x) < 0$  则称定向相反.

有了定向概念之后, 我们只考虑可定向的流形.

### 3.5.2 带边流形

定义2.5中的开集不包含边界, 比如包含边界的实心立方体在此定义下便不是流形; 为了更好地描述现实中的物体, 需要给出带边流形的定义. 引入记号,

$$\mathbb{R}_+^m \equiv \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m | x^1 \geq 0\}, \quad (3.5-2)$$

$$\partial \mathbb{R}_+^m \equiv \{(x^1, \dots, x^m) \in \mathbb{R}^m | x^1 = 0\} = \mathbb{R}^{m-1} \times \{0\}. \quad (3.5-3)$$

如果局部坐标是从  $x^0$  开始的, 则把上两式中的  $x^1 \geq 0$  换成  $x^0 \geq 0$ , 及  $x^1 = 0$  换成  $x^0 = 0$ . 很明显  $\mathbb{R}_+^m$  是  $\mathbb{R}^m$  的子集, 如果用  $\mathbb{R}^m$  中标准拓扑的定义来看,  $\mathbb{R}_+^m$  不是开子集. 我们采用如下策略: 使用诱导拓扑 (见定义1.3) 定义  $\mathbb{R}_+^m$  中的开集. 此时  $\mathbb{R}_+^m$  本身便是诱导拓扑下的开集;  $\partial \mathbb{R}_+^m$  称为  $\mathbb{R}_+^m$  的**边界**,  $i(\mathbb{R}_+^m) = \mathbb{R}_+^m - \partial \mathbb{R}_+^m$  称为  $\mathbb{R}_+^m$  的**内部**.

只需把定义2.5中的  $\mathbb{R}^m$  换成  $\mathbb{R}_+^m$  便可得到**带边流形**定义, 就不再重复叙述了. 有了带边流形定义, 定义2.5中的流形可称为无边流形, 以示区分.

在带边流形定义中, 若有局部坐标  $(U, \phi)$  将点  $p \in U$  映射到  $\partial \mathbb{R}_+^m$ , 即  $\phi(p) \in \partial \mathbb{R}_+^m$ , 则称点  $p$  为流形  $M$  的**边界点**, 所有这样的点构成的集合记为  $\partial M$ .

**定理 3.25** 设  $M$  是  $m$  为光滑带边流形, 且  $\partial M \neq \emptyset$ . 那么可由  $M$  的微分结构  $\mathcal{A}$  诱导出  $\partial M$  上的微分结构  $\widetilde{\mathcal{A}}$ , 使得  $\partial M$  成为  $m-1$  维光滑无边流形. 此时包含映射  $(\iota, \partial M)$  是  $M$  的正则嵌入闭子流形. 如果  $M$  是可定向的, 那么  $\partial M$  也是可 (诱导) 定向的.

上述定理证明可参阅 [5]§3.4 定理 4.1.

超曲面的诱导定向见 §7.5.2.

### 3.6 单位分解定理

单位分解是近代数学中才产生的一个概念, 它可将局部拼接成整体. 我们将略去定理的证明, 可参考陈省身和陈维桓 [5, §3.3] 的著作; 文献 [2]§16 提供了一份较易理解的证明, 它只讨论了  $\mathbb{R}^n$  空间问题, 没有讨论一般流形.

**定义 3.26** 设光滑流形  $M$  上存在实函数  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , 函数  $f$  的**支撑集** (support set) 是指使  $f$  取非零值的点集的闭包, 记作  $\text{supp} f \equiv \overline{\{p | f(p) \neq 0, \forall p \in M\}}$ .

如果  $x \notin \text{supp} f$ , 那么  $x$  必然有一邻域使得函数  $f$  在该邻域内恒为零.

**定义 3.27** 设  $\Sigma$  是光滑流形  $M$  的一个开覆盖; 如果  $M$  的任意一个紧致子集只与  $\Sigma$  中有限个成员相交, 则  $\Sigma$  是  $M$  的**局部有限开覆盖**.

**定理 3.28** (单位分解定理) 设  $\Sigma$  是光滑流形  $M$  的一个开覆盖, 则在  $M$  上存在一族光滑函数  $\{g_\alpha\}$ , 满足如下条件:

- (1) 对每一个  $\alpha$ ,  $0 \leq g_\alpha \leq 1$ , 支撑集  $\text{supp} g_\alpha$  是紧致的, 并且有开集  $W_i \in \Sigma$  使得  $\text{supp} g_\alpha \subset W_i$ ;
- (2)  $\forall p \in M$ , 存在  $p$  点的邻域  $U$ , 它只与有限多个支撑集  $\text{supp} g_\alpha$  相交;
- (3)  $\sum_\alpha g_\alpha = 1$ .

条件 (2) 一般称为局部有限性; 这说明条件 (3) 左边的  $g_\alpha$  只有有限个不为零, 故和式是平凡收敛的. 函数族  $\{g_\alpha\}$  称为从属于开覆盖  $\Sigma$  的**单位分解**.

### 3.7 流形上的积分

在数学分析中讲述过重积分定义与计算, 以及重积分有变量替换定理, 设  $\Omega$  和  $\Omega'$  是  $\mathbb{R}^m$  中的开集, 且有微分同胚映射  $\phi: \Omega' \rightarrow \Omega$ . 如果标量函数  $f$  在其定义域是连续的, 则有

$$\int_{\Omega} f(x) dx^1 \cdots dx^m = \int_{\Omega'} f \circ \phi(y) \left| \frac{\partial(x^1, \cdots, x^m)}{\partial(y^1, \cdots, y^m)} \right| dy^1 \cdots dy^m. \quad (3.7-1)$$

变量替换后出现了坐标变换的 Jacobi 行列式的绝对值, 这是多重积分中的基本定理. 下面我们会把积分定义推广到流形上, 关键问题是如何进行大范围的、与局部坐标选取无关的处理; 积分是联系局部与整体的有力工具, 在数学、物理上都有着重要应用.



设  $M$  是  $m$  维的、已定向的、 $C^\infty$  微分流形. 设  $\omega \in A^m(M)$ , 则  $\omega$  的支撑集定义为

$$\text{supp}\omega = \overline{\{p \in M | \omega(p) \neq 0\}}. \quad (3.7-2)$$

我们将积分学的讨论限制在有紧致支撑集的外微分型式场, 要定义的积分是一个线性映射, 即  $\int : A^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ .

先从简单情形开始, 假定用一个坐标域就能覆盖住流形  $M$ , 并设其坐标为  $(M, \varphi; x^i)$ . 这样  $\omega$  的紧致支撑集自然是  $M$  的子集; 假设有局部坐标表达 (在此例中局部即整体)

$$\omega_{a_1 \dots a_m} = f(x)(dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}, \quad f(x) \in C^\infty(M). \quad (3.7-3)$$

在数学分析中, 标量函数  $f(x)$  的黎曼积分早有定义, 并且是一个有限实数; 在此处, 我们可以直接将流形  $M$  上外微分型式场  $\omega$  的积分定义成黎曼积分, 即

$$\int_M \omega \equiv \int_M f(x)(dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\varphi(M)} (f \circ \varphi^{-1}) dx^1 \dots dx^m. \quad (3.7-4)$$

下面需要验证, 这个定义与局域坐标卡选取无关, 设  $(M, \psi; y^i)$  是此流形的另一套坐标系,  $\omega$  表达式变为

$$\omega_{a_1 \dots a_m} = g(y)(dy^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy^m)_{a_m} = g(y) \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}. \quad (3.7-5)$$

由不同坐标系下的不同表达式(3.7-3)和(3.7-5), 可说明有下式成立

$$f \circ \varphi^{-1} = (g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)}. \quad (3.7-6)$$

因坐标卡  $\psi$  和  $\varphi$  是  $M$  上定向相符合的, 所以坐标变换的 Jacobi 行列式处处为正, 即

$$\frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} > 0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial(x^1, \dots, x^m)}{\partial(y^1, \dots, y^m)} > 0. \quad (3.7-7)$$

有了这些准备, 容易验证积分定义与局部坐标卡无关,

$$\begin{aligned} \int_M \omega &= \int_{\psi(M)} (g \circ \psi^{-1}) dy^1 \dots dy^m = \int (g \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1}) \frac{\partial(y^1, \dots, y^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} dx^1 \dots dx^m \\ &= \int_{\varphi(M)} (f \circ \varphi^{-1}) dx^1 \dots dx^m. \end{aligned} \quad (3.7-8)$$

从上式可以看出, 如果两个坐标卡定向不同, Jacobi 行列式会产生一个额外的负号. 从上式还可以看出,  $m$  阶外微分型式场的积分定义与式(3.7-1)相符合. 如果不是, 比如是一个二阶对称张量场, 那么积分定义都成问题; 当作变量替换时, 二阶张量场无法由自身变换产上一个 Jacobi 行列式, 也就无法与基本定理(3.7-1)相符合. 微分流形中的积分定义 (以及其它任何定义、公理等) 原则上应能退化到  $\mathbb{R}^m$  中的积分定义 (以及相应定义、公理等), 除了  $m$  阶外型式场 (标量函数场与其同构), 其它张量场都很难给出积分定义.

下面考虑一般情形, 设微分流形  $M$  有定向相符合的坐标卡开覆盖集合  $(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^i)$ ;  $m$  阶外微分型式场  $\omega \in A^m(M)$  的局部坐标表达式为

$$\omega_{a_1 \dots a_m}|_{U_\alpha} = f_\alpha(dx_\alpha^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx_\alpha^m)_{a_m}, \quad f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha). \quad (3.7-9)$$

根据单位分解定理3.28, 在  $M$  上有从属于  $\{U_\alpha\}$  的单位分解  $\{h_\alpha\}$ , 其中  $\text{supp} h_\alpha \subset U_\alpha$ ,  $h_\alpha \in C^\infty(M)$ ,  $\sum_\alpha h_\alpha = 1$ ,  $1 \geq h_\alpha \geq 0$ , 所以有

$$\omega = \omega \cdot \sum_\alpha h_\alpha = \sum_\alpha h_\alpha \cdot \omega, \quad (3.7-10)$$

需注意, 上式中的“ $\cdot$ ”就是普通的乘法, 不是复合映射. 因  $\text{supp} \omega$  是紧致的, 所以上式右端只有有限项非零, 即上式右端平凡收敛.

$$\int_M \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_M \sum_\alpha h_\alpha \cdot \omega = \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} ((h_\alpha \cdot f_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}) dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m. \quad (3.7-11)$$

自然需要验证这个定义与局坐标系选取无关, 以及与单位分解选取无关. 设  $(V_\lambda, \psi_\lambda; y_\lambda^i)$  是  $M$  的另一个定向相符合的坐标卡集合, 同时它也是  $M$  的局部有限开覆盖, 再设  $\{g_\lambda\}$  是从属于  $\{V_\lambda\}$  的单位分解; 同时假定  $\{U_\alpha\}$  与  $\{V_\lambda\}$  的定向相符合.  $m$  阶外微分型式场  $\omega \in A^m(M)$  在  $\{V_\lambda\}$  中的局部坐标表达式为

$$\omega_{a_1 \dots a_m}|_{V_\lambda} = w_\lambda(dy_\lambda^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dy_\lambda^m)_{a_m}, \quad w_\lambda \in C^\infty(V_\lambda). \quad (3.7-12)$$

当  $U_\alpha \cap V_\lambda \neq \emptyset$  时, 两个坐标系定向是相符合的, 仿照式(3.7-6)可得其坐标变换

$$f_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} = (w_\lambda \circ \psi_\lambda^{-1}) \circ (\psi_\lambda \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot \frac{\partial(y_\lambda^1, \dots, y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)}. \quad (3.7-13)$$

由于  $\{h_\alpha\}$  和  $\{g_\lambda\}$  是单位分解, 所以有

$$\left( \sum_\alpha h_\alpha \right) \Big|_{V_\lambda} = 1, \quad \left( \sum_\lambda g_\lambda \right) \Big|_{U_\alpha} = 1. \quad (3.7-14)$$

我们来计算积分定义(3.7-11)右端的表达式,

$$\begin{aligned} & \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} ((h_\alpha \cdot f_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \\ &= \sum_\alpha \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha)} \left( \sum_\lambda g_\lambda \circ \varphi_\alpha^{-1} \right) \cdot ((h_\alpha \cdot f_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \\ &= \sum_{\alpha\lambda} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda)} ((g_\lambda \cdot h_\alpha \cdot f_\alpha) \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \\ &= \sum_{\alpha\lambda} \int_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda)} \left( (g_\lambda \cdot h_\alpha \cdot w_\lambda \circ \psi_\lambda^{-1}) \circ (\psi_\lambda \circ \varphi_\alpha^{-1}) \cdot \frac{\partial(y_\lambda^1, \dots, y_\lambda^m)}{\partial(x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^m)} \right) \cdot dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\alpha\lambda} \int_{\psi_\lambda(U_\alpha \cap V_\lambda)} ((g_\lambda \cdot h_\alpha \cdot w_\lambda) \circ \psi_\lambda^{-1}) \cdot dy_\lambda^1 \cdots dy_\lambda^m \\
&= \sum_{\lambda} \int_{\psi_\lambda(V_\lambda)} ((g_\lambda \cdot w_\lambda) \circ \psi_\lambda^{-1}) \cdot dy_\lambda^1 \cdots dy_\lambda^m
\end{aligned}$$

证明过程请参考定义式(2.4-2). 上面这个长式推导说明积分定义3.7-11与局部坐标选取以及从属单位分解选取无关; 即此定义是大范围的(或整体的). 除此以外, 还需验证本节开头提到的: 积分是一个线性映射,

$$\begin{aligned}
\int_M (\omega + k \cdot \eta) &= \sum_{\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} ((h_{\alpha} \cdot (\omega_{\alpha} + k \cdot \eta_{\alpha})) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \cdot dx_{\alpha}^1 \cdots dx_{\alpha}^m \\
&= \sum_{\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} ((h_{\alpha} \cdot \omega_{\alpha}) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \cdot dx_{\alpha}^1 \cdots dx_{\alpha}^m + \sum_{\alpha} \int_{\varphi_{\alpha}(U_{\alpha})} ((h_{\alpha} \cdot k \cdot \eta_{\alpha}) \circ \varphi_{\alpha}^{-1}) \cdot dx_{\alpha}^1 \cdots dx_{\alpha}^m \\
&= \int_M \omega + k \cdot \int_M \eta.
\end{aligned}$$

其中  $k \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_{\alpha}$  和  $\eta_{\alpha}$  分别是外型式场  $\omega$  和  $\eta$  的分量指标; 这便验证了积分是线性映射.

下面叙述 Stokes–Cartan 定理, 这是流形论积分学中一个极为重要的定理, 现在所用表述形式是由 Cartan 给出并证明的,

**定理 3.29** 设  $M$  是  $m$  维、已定向、带边光滑流形,  $\omega \in A^{m-1}(M)$ , 则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega. \quad (3.7-15)$$

其中  $\partial M$  是带边流形  $M$  的边界, 具有从  $M$  诱导的定向. 映射  $\iota: \partial M \rightarrow M$  是包含映射, 使  $(\iota, \partial M)$  成为  $M$  的正则嵌入闭子流形.

**证明.** 证明过程可参考任一本黎曼几何教材, 比如文献 [5]<sup>§3.4</sup> 或 [3]<sup>§8.6</sup>. 需要注意  $\omega \in A^{m-1}(M)$  是  $m$  维光滑流形  $M$  上的  $m-1$  阶外微分型式场, 无论是在流形  $M$  上, 还是在  $\partial M$  上, 积分定义都略显含混; 需要用包含映射将其拉回到  $\partial M$  上, 使其成为  $\partial M$  上的外微分型式场, 然后才有良性积分定义. ■

**例 3.30** 设  $M$  是  $\mathbb{R}^2$  上有界开子集的闭包, 其边界是  $C^r(r > 0)$  简单闭曲线.  $\omega_b = f(dx)_b + g(dy)_b$  是  $M$  上的 1 型式场; 其外微分是  $d_a \omega_b = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})(dx)_a \wedge (dy)_b$ , 由 Stokes–Cartan 定理(3.7-15)可得

$$\int_M d_a \omega_b = \iint_M \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) (dx)_a \wedge (dy)_b = \int_{\partial M} (f dx + g dy). \quad (3.7-16)$$

这是经典的 Green 公式.

**例 3.31** 设  $M$  是  $\mathbb{R}^3$  上有界开子集的闭包, 其边界是  $C^r(r > 0)$  简单闭曲面  $S$ .  $\omega_{ab}$  是  $M$  上的 2 次型式场, 其表达式

$$\omega_{ab} = P(dy)_a \wedge (dz)_b + Q(dz)_a \wedge (dx)_b + R(dx)_a \wedge (dy)_b. \quad (3.7-17)$$

$$d_c \omega_{ab} = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) (dx)_c \wedge (dy)_a \wedge (dz)_b. \quad (3.7-18)$$

上面同时给出了  $\omega_{ab}$  的外微分表达式. 由 Stokes–Cartan 定理(3.7-15)可得

$$\iiint_M \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) (dx)_c \wedge (dy)_a \wedge (dz)_b = \oint_S (P dy dz + Q dz dx + R dx dy).$$

这是经典的高斯散度公式.

### 第三章参考文献

- [1] ARNOLD V I. Geometrical Method in the theory of Ordinary Differential Equations [M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1983 (引用页: 100).
- [2] MUNKRES J R. Analysis On Manifolds[M]. US: CRC Press, 1997 (引用页: 110).
- [3] SPIVAK M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry: Vol. I[M]. 3rd ed. US: Publish or Perish, 1999 (引用页: 100, 107, 113).
- [4] Von WESTENHOLZ C. Differential Forms in Mathematical Physics[M]. US: Elsevier Science, 1978 (引用页: 107).
- [5] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 100, 107, 110, 113).

## 第四章 联络与曲率

联络是微分流形上非常重要的几何概念，起源于二维曲面几何上的平行移动，一直到 1917 年才由 Levi-Civita 给出较为确切的描述，与黎曼几乎没有任何关系。现在联络概念已推广到纤维丛上，而在这里，我们只讨论切丛上的联络，其实质是定义在切向量场（切丛的截面）上的一种方向导数；并由此产生一种新的微分法则，即所谓的“协变微分”（或共变微分）。现今所用联络定义是由 Koszul 精确化的，同时他引入了符号  $\nabla$  或  $D$  来表示联络。有了仿射联络，便可定义黎曼曲率张量，它是微分几何中的核心概念。我们还讨论了一般标架场上的曲率型式。

### 4.1 仿射联络

**定义 4.1** 设  $M$  是一个  $m$  维光滑流形，其上的  $\nabla_a$ （或用  $D_a$ ）是一个映射，它将  $M$  上任意  $(r, s)$  型张量场映射为一个  $(r, s+1)$  型张量场。下面式子中  $X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $K \in \mathfrak{T}_s^r(M)$ ,  $L \in \mathfrak{T}_q^p(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . 记  $X^a \nabla_a \equiv \nabla_X$ . 若  $\nabla_a$  满足如下条件：

- (1)  $\mathbb{R}$ -线性： $\nabla_a(K + \lambda \cdot L) \stackrel{def}{=} \nabla_a K + \lambda \cdot \nabla_a L$ ;
- (2) 加法： $(f \cdot X^b + Y^b) \nabla_b K \stackrel{def}{=} f \cdot (X^b \nabla_b K) + Y^b \nabla_b K$ ;
- (3) 标量场： $\nabla_X(f) \stackrel{def}{=} X(f)$ ;
- (4) Leibniz 法则： $\nabla_X(K \otimes L) \stackrel{def}{=} (\nabla_X K) \otimes L + K \otimes \nabla_X L$ ;
- (5)  $\nabla_X$  与缩并运算  $C_\times^\times$  可交换，即  $C_\times^\times(\nabla_X K \cdots) \stackrel{def}{=} \nabla_X(C_\times^\times K \cdots)$ .

则称  $\nabla_a$ （或  $D_a$ ）是光滑流形  $M$  上的一个**仿射联络**，或**协变导数**。仿射联络专指切丛上的联络。定义了仿射联络的光滑流形  $(M, \nabla_a)$  被称为**仿射联络空间**。

**注 4.2** 由陈省身和陈维桓 [1, §4.1] 定理 1.1 可知仿射联络必然存在，而且不止一个。

**注 4.3** 依定义，仿射联络  $\nabla_X$  将  $(r, s)$  型张量场映射为一个  $(r, s)$  型张量场。

**注 4.4** 为避免抽象指标不匹配，算符  $\nabla_X$  的下指标  $X$  不附加抽象指标，即不写成  $\nabla_{X^a}$ 。

**注 4.5** 前三条是最基本的，最后两条是在前几条基础上的附加原则。其中 Leibniz 律是为了把联络应用到高阶张量而引入的。

我们进一步解释条目 (3)，联络作用在标量函数上，有

$$X^a \nabla_a f = X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a (dx^j)_a \frac{\partial f}{\partial x^j} = X^a (df)_a \Rightarrow \nabla_a f = (df)_a. \quad (4.1-1)$$

由此可知不同的联络  $\nabla_a, D_a$  作用在标量场上皆相等，即  $\nabla_a f = (df)_a = D_a f$ 。这个条目其实在说：任何推广后的“导数”算符都必须能退化到普通微积分中的导数。

#### 4.1.1 联络系数

为讨论联络系数，先要叙述一个命题，一般称之为**局部性定理**。

**命题 4.6** 设有仿射联络空间  $(M, \nabla_a)$ ，则联络  $\nabla_a$  具有如下局部性质：设  $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(M)$ ，则如果存在  $M$  的开集  $U$  使得  $X_1|_U = X_2|_U, Y_1|_U = Y_2|_U$ ，那么必然有  $(\nabla_{X_1} Y_1)|_U = (\nabla_{X_2} Y_2)|_U$ 。

**证明**。很明显只要证明  $\nabla_{X_1} Y_1|_U = \nabla_{X_1} Y_2|_U$  及  $\nabla_{X_1} Y_1|_U = \nabla_{X_2} Y_1|_U$  便能证明命题了；而且两者证明非常相似，只需证明其一即可。

因流形  $M$  有局部紧致性，所以  $\forall p \in U$  都存在开子集  $V$  和紧致集  $\bar{V}$  使得  $\forall p \in V \subset \bar{V} \subset U$ 。依命题2.23，存在  $C^\infty$  函数  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  使得  $0 \leq h \leq 1$ ，且  $h|_V = 1, h|_{M-U} = 0$ ；因此有  $h \cdot (Y_1 - Y_2) \equiv 0$  在整个流形  $M$  上成立；由定义4.1中 Leibniz 律可得联络  $\nabla_a$  作用在此式的结果为

$$0 = X_1^a \nabla_a (h \cdot (Y_1 - Y_2)) = (\nabla_{X_1} h) \cdot (Y_1 - Y_2) + h \cdot \nabla_{X_1} (Y_1 - Y_2).$$

将此式限制在  $p \in V$  上，便可得到（注  $h|_V = 1, Y_1|_V = Y_2|_V$ ）

$$0 = \nabla_{X_1} (Y_1 - Y_2)|_p \Rightarrow (\nabla_{X_1} Y_1)(p) = (\nabla_{X_1} Y_2)(p).$$

因点  $p$  的任意性，可得  $\nabla_{X_1} Y_1|_U = \nabla_{X_1} Y_2|_U$ ，进而可证明命题。 ■

关于局部性定理的理解，请先参考切向量场的评注2.54。读者需要注意，定义4.1是针对整体流形  $M$  而言；一般说来不能用一个坐标域覆盖住  $M$ ，目前我们不知道把定义在整个流形  $M$  上的仿射联络  $\nabla_a$  作用在局部坐标系上具体会是什么样子。局部性定理说：只要  $X_1|_U = X_2|_U, Y_1|_U = Y_2|_U$ ，那么必然有  $(\nabla_{X_1} Y_1)|_U = (\nabla_{X_2} Y_2)|_U$ 。换句话说仿射联络的计算只需要知道切向量场的局部性状即可，无需知道  $p$  点开邻域  $V$  外的性状；这和微积分中的“导数运算”完全一致。这也就说明只需要一个坐标域就能解决仿射联络的局部表示，无需多个坐标域结合使用，这与积分不同；流形上的积分（见 §3.7）需要用到单位分解定理来处理多个坐标域的情形。现在假设  $(U; x^i)$  是  $M$  的一个局部坐标系，根据仿射联络定义可以得到  $(\frac{\partial}{\partial x^i})^b \nabla_b (\frac{\partial}{\partial x^j})^a \in \mathfrak{X}(U)$ ，故可定义

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \nabla_b \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ji}^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a \Leftrightarrow \nabla_b \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{ji}^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a (dx^i)_b. \quad (4.1-2)$$

其中  $\Gamma_{ji}^k \in C^\infty(U)$  被称为仿射联络  $\nabla_a$  在自然基底场  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$  下的**联络系数**；需注意它的两个下标不能随意交换，即一般情况下  $\Gamma_{ji}^k \neq \Gamma_{ij}^k$ 。

设  $\nabla_a$  是  $M$  上的一个仿射联络，再设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  是  $M$  的两个局部坐标系，并且  $U \cap V \neq \emptyset$ ；那么依定义(4.1-2)，联络  $\nabla_a$  便有两个联络系数  $\Gamma_{ji}^k(x)$  和  $\Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y)$ 。在  $U \cap V$  上显然有

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y^\alpha} = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (4.1-3)$$

因此，

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a = \Gamma_{ji}^k(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a = \Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} \left( \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right)^a.$$

而上式左端还可以表示为

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left[ \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a \right] &= \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left[ \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \right] + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \nabla_{\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a \right] \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^i \partial x^j} + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \left( \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right)^a. \end{aligned}$$

结合上两式，有

$$\Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} = \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) + \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^j \partial x^i} \quad (4.1-4a)$$

$$= \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) - \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^k}{\partial y^\beta \partial y^\alpha}. \quad (4.1-4b)$$

上式是联络系数的基本关系式。式(4.1-4a)到(4.1-4b)可以这样验证，设坐标  $y$  是  $x$  函数，而  $x$  是  $z$  函数，求如下导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial z^A \partial z^B} &= \frac{\partial}{\partial z^A} \left( \frac{\partial y^\rho}{\partial z^B} \right) = \frac{\partial}{\partial z^A} \left( \frac{\partial y^\rho}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial z^B} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z^A} \left( \frac{\partial y^\rho}{\partial x^i} \right) \frac{\partial x^i}{\partial z^B} + \frac{\partial y^\rho}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^A \partial z^B} = \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial x^i}{\partial z^A} \frac{\partial x^j}{\partial z^B} + \frac{\partial y^\rho}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial z^A \partial z^B}. \end{aligned} \quad (4.1-5)$$

令  $z \equiv y$ ，则上式最左端恒为零，最右端的式子便可证明(4.1-4)。

从式(4.1-4)可以看到  $\Gamma_{ij}^k$  不满足张量分量变换公式(2.4-20)，所以它不是张量。我们人为约定它们在局部坐标  $(U; x^i)$  的抽象指标表达式为

$$\Gamma_{ab}^c = \Gamma_{ij}^k (dx^i)_a (dx^j)_b \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^c; \quad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ab}^c \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b (dx^k)_c. \quad (4.1-6)$$

再次强调，虽然有抽象指标记号，但不是张量。

上面从联络得到了联络系数。反之，在  $m$  维光滑流形  $M$  的每个局部开集  $(U; x^i)$  中给定  $m^3$  个光滑函数  $\Gamma_{ji}^k \in C^\infty(U)$ ，且在坐标变换时这些系数满足式(4.1-4)；那么在  $M$  上存

在唯一的仿射联络与之相对应. 证明如下, 设  $M$  有开子集  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  且  $U \cap V \neq \emptyset$ ,  $\forall v^b \in \mathfrak{X}(U \cap V)$ , 设  $v^b|_{U \cap V} = v^i(\frac{\partial}{\partial x^i})^b = v^\alpha(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^b$ , 令

$$\nabla_a v^b|_U \stackrel{\text{def}}{=} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma_{kj}^i(x) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_a, \quad (4.1-7)$$

下面证明式(4.1-7)的定义与局部坐标系选取无关, 即在坐标变化下上式的形式协变,

$$\begin{aligned} (\nabla_a v^b|_U)|_{U \cap V} &= \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^k \Gamma_{kj}^i(x) \right) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_a \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \left( v^\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \right) + v^\mu \frac{\partial x^k}{\partial y^\mu} \Gamma_{kj}^i(x) \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right)^b \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} (dy^\beta)_a \\ &\stackrel[4.1-5]{4.1-4a} \left( \frac{\partial v^\rho}{\partial y^\nu} + v^\mu \Gamma_{\mu\nu}^\rho(y) \right) \left( \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right)^b (dy^\nu)_a = (\nabla_a v^b|_V)|_{U \cap V}. \end{aligned}$$

这说明定义式(4.1-7)是大范围(整个流形  $M$ )适用的. 不难验证式(4.1-7)的定义满足切矢量场的联络定义4.1中前三条(把  $K, L$  取为切矢量场); 再赋予后两条属性后, 式(4.1-7)是一个仿射联络.

**注 4.7** 上面论述说明: 在满足式(4.1-4)的前提下, 仿射联络与联络系数相互唯一确定.

**注 4.8** 当用分量语言(即 §1.9中说的第二种表述方式)来描述矢量(或张量)的协变导数时, 有可能造成一种误解: 协变导数只对张量分量有定义, 对自然基矢没有定义, 即  $\nabla_a(\frac{\partial}{\partial y^\rho})^b$  无法定义. 这显然是不正确的, 自然基矢的协变导数就是式(4.1-2).

### 4.1.2 张量场协变导数

式(4.1-2)给出了自然坐标基矢的协变导数定义, 可从此式导出自然坐标对偶基矢的协变导数计算公式; 从计算下式开始,

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \nabla_b \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a (dx^k)_a \right] = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \nabla_b [\delta_j^k] = \frac{\partial \delta_j^k}{\partial x^i} = 0. \quad (4.1-8)$$

上式左端还可利用 Leibnitz 律展开, 有

$$\left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \nabla_b \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a (dx^k)_a \right] = \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (dx^k)_a \right] + \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right] (dx^k)_a.$$

综合以上两式, 有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} (dx^k)_a = -\Gamma_{ji}^k (dx^j)_a \Leftrightarrow \nabla_b (dx^k)_a = -\Gamma_{ji}^k (dx^j)_a (dx^i)_b. \quad (4.1-9)$$

这是与式(4.1-2)同等重要的一个计算公式.



## 4.1.2.1 普通导数算符

给定  $m$  维仿射联络空间  $(M, \nabla_a)$  的局部坐标系  $(U; x^i)$ , 引入一个常用记号.  $T_{ij}^k$  表示张量  $T_{ab}^c$  在自然坐标基底下的分量, 用逗号 “,” 表示其在坐标域  $\{x\}$  上的偏导数, 即

$$T_{ij,l}^k \equiv \frac{\partial T_{ij}^k}{\partial x^l}. \quad (4.1-10)$$

我们把偏导数  $\partial_a \equiv d_a$  用抽象指标表示为

$$\partial_a \equiv d_a = (dx^j)_a \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (4.1-11)$$

微积分中, 同一坐标域内两个偏导数次序可交换; 这条原则在此变成 (下式中第一条): 在坐标域  $(U; x^i)$  内偏导数  $\partial_a$  满足如下规则,

$$\partial_a \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \right] = 0, \quad \partial_a [(dx^i)_b] = 0; \quad 1 \leq i \leq m. \quad (4.1-12)$$

上式中第二条可以这样证明,

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_a (\delta_i^j) = \partial_a \left( \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_b \right) = (dx^j)_b \partial_a \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \right] + \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \partial_a [(dx^j)_b] \\ \Rightarrow 0 &= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \partial_a [(dx^j)_b] \Rightarrow \partial_a [(dx^j)_b] = 0. \end{aligned}$$

由此可得在局部坐标域  $(U; x^i)$  内张量场的偏导数为

$$\partial_a T_b^c = \partial_a \left[ T_j^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^c (dx^j)_b \right] = T_{j,i}^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^c (dx^j)_b (dx^i)_a. \quad (4.1-13)$$

在坐标域  $(U; x^i)$  内, 算符  $\partial_a$  满足仿射联络4.1的各条性质. 联络不能只在一个坐标域内成立, 在进行坐标变换时, 联络形式必须是协变的 (不同坐标系下, 数学表达式 “长得一样” 才行). 再给  $M$  的另一个局部坐标系  $(V; y^\alpha)$ , 并且  $U \cap V \neq \emptyset$ , 那么对  $V$  中自然坐标基矢的偏导数是,

$$\begin{aligned} \partial_a \left[ \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^b \right] &= \partial_a \left[ \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^b \right] = (dx^j)_a \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^b \times \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \\ &= (dx^j)_a \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^b \times \frac{\partial \delta_j^k}{\partial y^\alpha} = 0. \end{aligned} \quad (4.1-14)$$

最后一步用到了常数的任何偏导数都为零这一性质.  $\forall v^b \in \mathfrak{X}(U \cap V)$ , 计算其偏导数

$$\begin{aligned}
 \partial_a(v^b|_V) &= (dx^j)_a \frac{\partial}{\partial x^j} \left[ v^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^b \right] = \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^b (dx^j)_a \frac{\partial}{\partial x^j} \left( v^i \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^b (dx^j)_a \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} + v^i \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \right) \\
 &= \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_a \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^b (dx^j)_a \times v^i \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \\
 &= \partial_a(v^b|_U) + \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^b (dx^j)_a \times v^i \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i}.
 \end{aligned} \tag{4.1-15}$$

上面给出了详尽的计算过程. 一般说来  $\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^j \partial x^i} \neq 0$ , 所以  $\partial_a v^b$  在坐标变换时不具有协变属性. 因此可以得到结论:  $\partial_a$  不是联络.

虽然  $\partial_a$  不是联络, 但是在局部坐标域  $(U; x^i)$  上, 当作用在标量函数场  $f$  上时, 它们是相同的, 即  $\partial_a f = \nabla_a f = d_a f$ . 其实, 几乎所有能称上“导数”的算符, 作用在标量场上时所得结果必须与微积分中的结果相同; 否则这种算符不能称为“导数”.

#### 4.1.2.2 协变导数算符

有了联络系数, 逆变切矢场和协变矢量的协变导数的分量表示 (计算过程见后面)

$$\nabla_a X^b = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_a \left( \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i \right) \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_a X^i_{;j}. \tag{4.1-16}$$

$$\nabla_a \omega_b = (dx^j)_a (dx^i)_b \left( \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \omega_k \Gamma_{ij}^k \right) \equiv (dx^j)_a (dx^i)_b \omega_{i;j}. \tag{4.1-17}$$

上两式最后的恒等号“ $\equiv$ ”定义了: 用分号“ $;$ ”代表协变导数. 即有

$$X^i_{;j} \equiv \frac{\partial X^i}{\partial x^j} + X^k \Gamma_{kj}^i = X^i_{,j} + X^k \Gamma_{kj}^i, \quad \omega_{i;j} \equiv \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \omega_k \Gamma_{ij}^k = \omega_{i,j} - \omega_k \Gamma_{ij}^k. \tag{4.1-18}$$

下面给出式(4.1-16)的计算过程,

$$\begin{aligned}
 \nabla_a X^b &= \nabla_a \left[ X^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \right] \stackrel{4.1(4)}{=} [\nabla_a X^i] \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b + X^i \nabla_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b \\
 &\stackrel{4.1(3)}{=} \stackrel{4.1-2}{\frac{\partial X^i}{\partial x^j} (dx^j)_a} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b + X^k \Gamma_{kj}^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b (dx^j)_a.
 \end{aligned} \tag{4.1-19}$$

整理之后便是式(4.1-16). 式(4.1-17)的计算类似, 留给读者当练习.

有逆变与协变矢量的协变导数容易推广到高阶张量, 下面给出  $(1, 2)$  型张量的协变导数计算公式 (推导过程并不复杂, 请读者自行完成),

$$\nabla_a T^b_{cd} = \partial_a T^b_{cd} + \Gamma_{ea}^b T^e_{cd} - \Gamma_{ca}^e T^b_{ed} - \Gamma_{da}^e T^b_{ce}. \tag{4.1-20}$$

更高阶张量的协变导数公式, 请读者自行写出, 需注意系数的正负号.

在式(4.1-7)中, 我们已经证明了  $\nabla_a X^b$  的分量表达式在坐标系变换时具有协变性, 再结合  $\nabla_a X^b$  表达式形式可以断定它是一个  $(1, 1)$  型张量; 与此类似也可证明式(4.1-17)是一个  $(0, 2)$  型张量; 对更高阶张量场 (比如(4.1-20)) 也可作类似证明. 这些便验证了联络  $\nabla_a$  把  $(r, s)$  型张量场映射为  $(r, s+1)$  型张量场.

**例 4.9** 注4.2中说切丛上的联络不止一个, 现设切丛  $TM$  上有两个不同的仿射联络  $\nabla_a$  和  $D_a$ , 与它们相对应的联络系数分别是  $\Gamma_{ab}^c$  和  $\tilde{\Gamma}_{ab}^c$ . 由评注4.7可知, 在满足式(4.1-4)的前提下, 联络和联络系数相互唯一确定; 所以不同联络是指其对应的联络系数不同. 取流形  $M$  的局部坐标系  $(U; x)$ , 直接计算, 有

$$(\nabla_a - D_a)X^b = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)^b (dx^j)_a X^k \left(\Gamma_{kj}^i - \tilde{\Gamma}_{kj}^i\right) = X^c \left(\Gamma_{ca}^b - \tilde{\Gamma}_{ca}^b\right) \equiv X^c \Xi_{ca}^b. \quad (4.1-21)$$

虽然联络系数不是张量, 但由上式, 利用定理2.67容易证明  $\Xi_{ca}^b$  是  $(1, 2)$  型张量.

### 4.1.3 挠率

**定义 4.10** 设  $(M, \nabla_a)$  是  $m$  维仿射空间, 定义挠率张量  $T_{bc}^a$ ,

$$T_{bc}^a X^b Y^c \stackrel{def}{=} \nabla_X Y^a - \nabla_Y X^a - [X, Y]^a, \quad \forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M). \quad (4.1-22)$$

用推论2.68可证明  $T_{bc}^a$  是一张量场, 请读者补齐. 它关于下标反对称, 在局部坐标系的分量表达式为

$$T_{jk}^i = T_{bc}^a \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)^b \left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)^c (dx^i)_a = \Gamma_{kj}^i - \Gamma_{jk}^i. \quad (4.1-23)$$

当联络系数  $\Gamma_{kj}^i$  关于下标对称时, 挠率恒为零. 反之, 若  $T_{bc}^a \equiv 0$ , 则  $\Gamma_{kj}^i$  关于下标对称.

**定义 4.11** 设  $(M, \nabla_a)$  是仿射空间, 如果挠率  $T_{bc}^a$  恒为零, 则称  $\nabla_a$  为**无挠联络**.

**注 4.12** 当联络有挠时, 联络系数  $\Gamma_{jk}^i$  有  $m^3$  个; 无挠时, 系数有  $\frac{1}{2}m^2(m+1)$  个.

给定流形  $(M, \nabla_a)$  上标量场  $f$ , 有

$$\nabla_a \nabla_b f = \partial_a \nabla_b f - \Gamma_{ba}^c \nabla_c f = \partial_a \partial_b f - \Gamma_{ba}^c \partial_c f. \quad (4.1-24)$$

由此, 得

$$\nabla_a \nabla_b f - \nabla_b \nabla_a f = -(\Gamma_{ba}^c - \Gamma_{ab}^c) \nabla_c f = -T_{ab}^c \nabla_c f. \quad (4.1-25)$$

上式是协变导数对易子作用在标量场计算公式. 此式也可当成挠率的定义式.

### 4.1.4 无挠联络的优点

给定仿射空间  $(M, \nabla_a)$ , 其联络无挠, 则其联络系数的下指标是对称的, 会给表达式带来诸多好处. 本节中,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega \in A^r(M)$ ,  $T_{ab} \in \mathfrak{T}_2^0(M)$ . 所有证明留给读者当练习.

#### 4.1.4.1 协变导数的简化

反对称化操作可令（无挠）协变导数退化为偏导数，

$$\nabla_{[b}T_{cd]} = \partial_{[b}T_{cd]}, \quad (4.1-26)$$

$$\nabla_{[a}\partial_{b]}f = \partial_{[a}\partial_{b]}f = 0, \quad \nabla_{[a}\nabla_b T_{cd]} = \partial_{[a}\partial_b T_{cd]} = 0. \quad (4.1-27)$$

需注意，上式必须是协变张量，不能有逆变部分。张量的协变指标可以是任意多个，协变导数也可以是任意多个。

#### 4.1.4.2 外微分

联络无挠时，式(3.2-3)与下式等价，

$$d\omega_{ba_1 \dots a_r} = (r+1)\nabla_{[b}\omega_{a_1 \dots a_r]}. \quad (4.1-28)$$

这个式子更好用一些；但式(3.2-3)是最基本的定义。

#### 4.1.4.3 矢量场对易子

两个矢量场的对易子为

$$[X, Y]^a = X^k \frac{\partial Y^j}{\partial x^k} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a - Y^k \frac{\partial X^j}{\partial x^k} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a = X^b \nabla_b Y^a - Y^b \nabla_b X^a. \quad (4.1-29)$$

对易子的基本表示是第一个等号后的  $\partial$  表示；只有  $\nabla_a$  无挠时，第二个等号才成立。

#### 4.1.4.4 李导数

李导数定义并不需要联络，但当联络无挠时会有更方便的表示。矢量场的李导数可由式(4.1-29)来表示（见式(2.11-16)）。与式(2.11-17)对应的余切矢量场表达式为，

$$\mathcal{L}_X \omega_b = X^c \nabla_c \omega_b + \omega_c \nabla_b X^c = X^c \partial_c \omega_b + \omega_c \partial_b X^c. \quad (4.1-30)$$

$$\mathcal{L}_X T_{bc}^a = X^e \nabla_e T_{bc}^a - T_{bc}^e \nabla_e X^a + T_{ec}^a \nabla_b X^e + T_{be}^a \nabla_c X^e, \quad (4.1-31)$$

$$= X^e \partial_e T_{bc}^a - T_{bc}^e \partial_e X^a + T_{ec}^a \partial_b X^e + T_{be}^a \partial_c X^e. \quad (4.1-32)$$

上面第二式为 (1, 2) 型张量场的李导数；易将这个表达式推广到高阶张量。

由于李导数很重要，下面再给出几个关于李导数的公式，

$$\mathcal{L}_X(\omega_{ba_2 \dots a_r} Y^b) - (\mathcal{L}_X \omega_{ba_2 \dots a_r}) Y^b = \omega_{ba_2 \dots a_r} [X, Y]^b. \quad (4.1-33)$$

$$\mathcal{L}_X \omega_{a_1 \dots a_r} = d_{a_1}(\omega_{ba_2 \dots a_r} X^b) + (d\omega)_{ba_1 \dots a_r} X^b. \quad (4.1-34)$$

$$\mathcal{L}_X(d\omega)_{ba_1 \dots a_r} = d_b \mathcal{L}_X \omega_{a_1 \dots a_r}. \quad (4.1-35)$$

$$\mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]}. \quad \text{此式可作用在任意张量场上} \quad (4.1-36)$$

$$\mathcal{L}_X(\omega \wedge \psi) = (\mathcal{L}_X \omega) \wedge \psi + \omega \wedge \mathcal{L}_X \psi, \quad \forall \omega \in A^r(M), \psi \in A^s(M). \quad (4.1-37)$$

## 4.1.4.5 无挠联络系数为零的局部坐标系

当联络无挠时,  $\forall p \in M$  存在局部坐标系使得  $p$  点联络系数为零. 设流形有局部坐标  $(U; x^i)$ , 联络系数  $\Gamma_{ij}^k$  不为零, 令

$$y^k = x^k + \frac{1}{2} \Gamma_{ij}^k(p) (x^i - x^i(p)) (x^j - x^j(p)), \quad (4.1-38)$$

那么有

$$\left. \frac{\partial y^k}{\partial x^l} \right|_p = \delta_l^k, \quad \left. \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^l \partial x^n} \right|_p = \frac{1}{2} \Gamma_{ln}^k(p) + \frac{1}{2} \Gamma_{ni}^k(p) = \Gamma_{ln}^k(p). \quad (4.1-39)$$

如果联络有挠, 上面第二式是不成立的. 显然, 矩阵  $\frac{\partial y^k}{\partial x^l}$  在  $p$  点附近的小邻域内是非退化的, 式(4.1-38)给出  $p$  点的一个局部坐标变换. 由(4.1-4a)得到在坐标系  $\{y\}$  下的新联络系数  $\Gamma_{ji}^k(p) = 0$ . 需注意, 此式只在  $p$  点成立; 哪怕离开  $p$  一点儿,  $\Gamma_{ji}^k$  也可能不为零.

## 4.1.5 平行移动

仿射联络的几何意义便是平行移动; 平行移动在二维曲面论中有着极为清晰的图像(高维空间只有公式, 没有图像), 可参阅文献 [2]<sup>§6.5</sup>. 反之, 由平行移动出发也可以给仿射联络一个清晰定义, 可参阅 [3] 第一章的附录. 下面给出相应定义,

**定义 4.13** 给定  $m$  维仿射空间  $(M, \nabla_a)$ ,  $\gamma : [r_1, r_2] \rightarrow M$  是流形  $M$  中的一条光滑曲线,  $T^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$  是曲线  $\gamma(t)$  的切矢.  $\forall Y^a \in \mathfrak{X}(\gamma(t))$ , 如果沿曲线  $\gamma(t)$  上有

$$T^b \nabla_b Y^a \equiv \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y^a = 0, \quad (4.1-40)$$

那么, 称切矢场  $Y^a$  沿曲线  $\gamma(t)$  是平行的, 或称  $Y^a$  是沿曲线  $\gamma(t)$  的平行切矢量场.

可以认为  $Y^a(t)$  只在  $\gamma(t)$  上才有意义, 在此条曲线之外(即  $M - \gamma(t)$  上)没有定义. 需注意,  $\nabla_b Y^a(t)$  本身没有定义, 因为这个导数需要  $Y^a$  在  $M - \gamma(t)$  上值; 但  $T^b \nabla_b Y^a(t)$  是有良定义的, 它只需要知道  $\gamma(t)$  上的  $Y^a$  值即可. 还有一点需要澄清, 真正切于曲线  $\gamma(t)$  的矢量只有两个方向, 即  $\pm(\frac{\partial}{\partial t})^a$ ; 而  $Y^a(t)$  是切于流形  $M$  的, 它可能切于  $\gamma(t)$ , 也可能不切于  $\gamma(t)$ , 但上面定义中的  $Y^a(t)$  都是在曲线  $\gamma(t)$  上取值.

继续沿用上面定义4.13中的符号, 设曲线  $\gamma(t)$  的局部坐标参数表达式为  $\{x^i(t)\}$ , 矢量场  $Y^a$  在此曲线上的分量表达式为  $Y^a = Y^i(t)(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$ ; 由式(4.1-16)有

$$T^b \nabla_b Y^a = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \left( \frac{dY^i(t)}{dt} + \frac{dx^j(t)}{dt} Y^k(t) \Gamma_{kj}^i(t) \right). \quad (4.1-41)$$

本小节最后给出测地线定义,

**定义 4.14** 如果仿射空间  $(M, \nabla_a)$  中曲线  $\gamma(t)$  沿自身切线平行, 即  $T^b \nabla_b T^a = 0$ , 则称其为仿射空间  $M$  的测地线. 参数  $t$  为该曲线的仿射参数.

## 4.2 黎曼曲率张量

**定义 4.15** 设  $(M, \nabla_a)$  是  $m$  维仿射空间, 定义张量  $R_{cab}^d$ ,

$$R_{cab}^d X^a Y^b Z^c \stackrel{\text{def}}{=} \nabla_X \nabla_Y Z^d - \nabla_Y \nabla_X Z^d - \nabla_{[X, Y]} Z^d, \quad \forall X^a, Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(M). \quad (4.2-1)$$

由上式定义的  $(1, 3)$  型张量场  $R_{cab}^d$  是黎曼曲率张量.

**注 4.16** 我们已经约定  $(1, 3)$  型黎曼张量上指标降下来后放在第一个位置, 以后为了节省角标空间, 很多时候将  $R_{cab}^d$  写成  $R_{cab}^d$ . 上指标降下位置没有特别意义, 完全是人为规定; 不同文献的习惯未必相同, 读者需小心.

我们来看一下  $(1, 3)$  型黎曼张量定义可以怎样变化,

$$\begin{aligned} R_{cab}^d X^a Y^b Z^c &= X^a \nabla_a (Y^b \nabla_b Z^d) - Y^b \nabla_b (X^a \nabla_a Z^d) - [X, Y]^e \nabla_e Z^d \\ &\stackrel{(4.1-22)}{=} X^a (\nabla_a Y^b) \nabla_b Z^d + X^a Y^b \nabla_a \nabla_b Z^d - Y^b (\nabla_b X^a) \nabla_a Z^d - X^a Y^b \nabla_b \nabla_a Z^d \\ &\quad + [T_{bf}^e X^b Y^f - X^b \nabla_b Y^e + Y^b \nabla_b X^e] \nabla_e Z^d \\ &= X^a Y^b (\nabla_a \nabla_b Z^d - \nabla_b \nabla_a Z^d) + T_{ab}^e X^a Y^b \nabla_e Z^d. \end{aligned}$$

因矢量  $X^a, Y^b$  的任意性, 由上式可得,

$$\nabla_a \nabla_b Z^d - \nabla_b \nabla_a Z^d = R_{cab}^d Z^c - T_{ab}^e \nabla_e Z^d. \quad (4.2-2)$$

由式(4.2-2)、式(4.1-25)及 Leibniz 律, 经计算 (留给读者) 可以得到

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = -R_{cab}^e \omega_e - T_{ab}^e \nabla_e \omega_c, \quad (4.2-3)$$

$$\nabla_a \nabla_b S_{\cdot c}^d - \nabla_b \nabla_a S_{\cdot c}^d = +R_{\cdot eab}^d S_{\cdot c}^e - R_{cab}^e S_{\cdot e}^d - T_{ab}^e \nabla_e S_{\cdot c}^d. \quad (4.2-4)$$

从式(4.2-4), 不难将协变导数对易子推广到高维张量, 需注意系数的正负号; 上述双联络对易子公式一般称为 Ricci 恒等式.

**注 4.17** 由协变导数对易子公式(4.1-25)、(4.2-2)、(4.2-3)和(4.2-4) 易得: 协变导数对易子公式完全由黎曼曲率和挠率确定. 当联络无挠时, 所有公式右端有关挠率项消失.

**注 4.18** 已知联络  $\nabla_a$  作用在张量积上遵循 Leibniz 法则, 经计算可以确定双联络对易子  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$  也遵循 Leibniz 法则, 即对  $M$  上任意两个张量场  $K_{\cdot\cdot\cdot}, L_{\cdot\cdot\cdot}$  有  $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(K_{\cdot\cdot\cdot} \otimes L_{\cdot\cdot\cdot}) = [(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)K_{\cdot\cdot\cdot}] \otimes L_{\cdot\cdot\cdot} + K_{\cdot\cdot\cdot} \otimes (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)L_{\cdot\cdot\cdot}$ .

### 4.2.1 曲率局部坐标分量表示

黎曼曲率在局部坐标表达式, 由式(4.2-1)得

$$R_{jln}^i = R_{cab}^d \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^n} \right)^b \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^c (dx^i)_d$$

$$\begin{aligned}
&= (dx^i)_d \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^d - (dx^i)_d \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^d - (dx^i)_d \nabla_{[\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^n}]} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^d \\
&= (dx^i)_d \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^l}} \left( \Gamma_{jn}^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^d \right) - (dx^i)_d \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^n}} \left( \Gamma_{jl}^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^d \right) \\
&= \partial_l \Gamma_{jn}^i - \partial_n \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{jn}^k \Gamma_{kl}^i - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{kn}^i \quad (4.2-5)
\end{aligned}$$

可以得到里奇曲率的表达式（为了对比黎曼与里奇曲率将其写在这里，定义见(5.2-9)），

$$R_{jn} = R_{jkn}^k = \partial_k \Gamma_{jn}^k - \partial_n \Gamma_{jk}^k + \Gamma_{jn}^k \Gamma_{kl}^l - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{kn}^l. \quad (4.2-6)$$

这两个表达式适用于有挠或无挠联络，要小心  $\Gamma$  下标的顺序。

#### 4.2.2 证明黎曼曲率是张量之一

从曲率的定义4.15与局部坐标无关，我们用推论2.68来证明它是  $(1, 3)$  型张量：只需验证它对三个切矢量是  $C^\infty(M)$  线性的即可。  $\forall f \in C^\infty(M)$  有

$$\begin{aligned}
R_{cab}^d(f \cdot X^a)Y^bZ^c &= \nabla_{f \cdot X} \nabla_Y Z^d - \nabla_Y \nabla_{f \cdot X} Z^d - \nabla_{[f \cdot X, Y]} Z^d \\
&\stackrel{(2.8-13)}{\stackrel{4.1}{=}} f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z^d - \nabla_Y (f \cdot \nabla_X Z^d) - \nabla_{(f[X, Y] - Y(f) \cdot X)} Z^d \\
&= f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z^d - (Y(f)) \cdot \nabla_X Z^d - f \cdot \nabla_Y \nabla_X Z^d - f \cdot \nabla_{[X, Y]} Z^d + (Y(f)) \cdot \nabla_X Z^d \\
&= f \cdot R_{cab}^d X^a Y^b Z^c.
\end{aligned}$$

接着验证，

$$\begin{aligned}
R_{cab}^d X^a (f \cdot Y^b) Z^c &= \nabla_X \nabla_{f \cdot Y} Z^d - \nabla_{f \cdot Y} \nabla_X Z^d - \nabla_{[X, f \cdot Y]} Z^d \\
&= - (R_{cba}^d (f \cdot Y^b) X^a Z^c) = -f \cdot (R_{cba}^d Y^b X^a Z^c) = f \cdot R_{cab}^d X^a Y^b Z^c.
\end{aligned}$$

验证最后一个位置，

$$\begin{aligned}
R_{cab}^d X^a Y^b (f \cdot Z^c) &= \nabla_X \nabla_Y (f \cdot Z^d) - \nabla_Y \nabla_X (f \cdot Z^d) - \nabla_{[X, Y]} (f \cdot Z^d) \\
&= f \cdot \nabla_X \nabla_Y Z^d + X(f) \cdot \nabla_Y Z^d + X(Y(f)) \cdot Z^d + Y(f) \cdot \nabla_X Z^d \\
&\quad - f \cdot \nabla_Y \nabla_X Z^d - Y(f) \cdot \nabla_X Z^d - Y(X(f)) \cdot Z^d - X(f) \cdot \nabla_Y Z^d \\
&\quad - [X, Y](f) \cdot Z^d - f \cdot \nabla_{[X, Y]} Z^d \\
&= f \cdot R_{cab}^d X^a Y^b Z^c.
\end{aligned}$$

它对三个位置均有  $C^\infty(M)$  线性，它是  $(1, 3)$  型张量。

#### 4.2.3 证明黎曼曲率是张量之二

鉴于这个张量的重要性，我们从局部坐标的分量语言再次证明它与局部坐标图选取无关，即在坐标变换时按四重线性变换规律变换（或者说具有形式协变性）。

设仿射空间  $(M, \nabla_a)$  中有两个相互容许的坐标图  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$ , 且  $U \cap V \neq \emptyset$ ; 那么在  $U \cap V$  上有式(4.1-4a)成立, 我们将利用此式来证明命题. 首先将此式两边求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ji}^k(x)}{\partial x^n} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} + \Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^k \partial x^n} &= \frac{\partial^3 y^\rho}{\partial x^j \partial x^i \partial x^n} + \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^n} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \\ &+ \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^n} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^n} \frac{\Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y)}{\partial y^\gamma}. \end{aligned}$$

将上式中的指标  $i$  和  $n$  互换得到新式子, 并用上式减新式得

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Gamma_{ji}^k(x)}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma_{jn}^k(x)}{\partial x^i} \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} + \Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^k \partial x^n} - \Gamma_{jn}^k(x) \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^k \partial x^i} &= \\ \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^n} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) - \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^n} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^n} \left( \frac{\Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y)}{\partial y^\gamma} - \frac{\Gamma_{\beta\gamma}^\rho(y)}{\partial y^\alpha} \right). \end{aligned} \quad (4.2-7)$$

将式(4.2-7)中等号左端的两项用式(4.1-4a)代换, 经运算得

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^k \partial x^n} - \Gamma_{jn}^k(x) \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^k \partial x^i} \\ &= \Gamma_{ji}^k(x) \left( \Gamma_{kn}^l(x) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^l} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^n} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \right) - \Gamma_{jn}^k(x) \left( \Gamma_{ki}^l(x) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^l} - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \right) \\ &= \frac{\partial y^\rho}{\partial x^l} (\Gamma_{ji}^k(x) \Gamma_{kn}^l(x) - \Gamma_{jn}^k(x) \Gamma_{ki}^l(x)) - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^n} \Gamma_{ji}^k(x) \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^k} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{jn}^k(x) \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y). \end{aligned}$$

将式(4.2-7)中等号右端的前两项用式(4.1-4a)代换, 经运算得

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^n} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) - \frac{\partial^2 y^\beta}{\partial x^j \partial x^i} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^n} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \times \\ &\left( \Gamma_{jn}^l(x) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^l} - \frac{\partial y^\xi}{\partial x^j} \frac{\partial y^\zeta}{\partial x^n} \Gamma_{\xi\zeta}^\beta(y) \right) - \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^n} \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \left( \Gamma_{ji}^l(x) \frac{\partial y^\beta}{\partial x^l} - \frac{\partial y^\xi}{\partial x^j} \frac{\partial y^\zeta}{\partial x^i} \Gamma_{\xi\zeta}^\beta(y) \right) \\ &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^l} \Gamma_{jn}^l(x) \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) - \frac{\partial y^\beta}{\partial x^l} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^n} \Gamma_{ji}^l(x) \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \\ &+ \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\xi}{\partial x^j} \frac{\partial y^\zeta}{\partial x^n} (\Gamma_{\beta\zeta}^\rho(y) \Gamma_{\xi\alpha}^\beta(y) - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \Gamma_{\xi\zeta}^\beta(y)). \end{aligned}$$

将上两式带入式(4.2-7)得

$$\begin{aligned} &\left( \frac{\partial \Gamma_{ji}^k(x)}{\partial x^n} - \frac{\partial \Gamma_{jn}^k(x)}{\partial x^i} \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} + \frac{\partial y^\rho}{\partial x^l} (\Gamma_{ji}^k(x) \Gamma_{kn}^l(x) - \Gamma_{jn}^k(x) \Gamma_{ki}^l(x)) \\ &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\xi}{\partial x^j} \frac{\partial y^\zeta}{\partial x^n} (\Gamma_{\beta\zeta}^\rho(y) \Gamma_{\xi\alpha}^\beta(y) - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) \Gamma_{\xi\zeta}^\beta(y)) + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\gamma}{\partial x^n} \left( \frac{\Gamma_{\beta\alpha}^\rho(y)}{\partial y^\gamma} - \frac{\Gamma_{\beta\gamma}^\rho(y)}{\partial y^\alpha} \right). \end{aligned}$$

将此式整理后即有 (参考式(4.2-5))

$$\frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} \cdot R_{jin}^k(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\xi}{\partial x^j} \frac{\partial y^\zeta}{\partial x^n} \cdot R_{\alpha\xi\zeta}^\rho(y). \quad (4.2-8)$$

这便证明了黎曼曲率分量在坐标卡变换下具有协变性.



## 4.2.4 黎曼曲率对称性

本小节在无挠联络情形下证明几个黎曼曲率的对称性. 由式(4.2-2)很容易看出

$$\begin{aligned} R_{cab}^d Z^c &= \nabla_a \nabla_b Z^d - \nabla_b \nabla_a Z^d = -(\nabla_b \nabla_a Z^d - \nabla_a \nabla_b Z^d) = -R_{cba}^d Z^c \\ \Rightarrow R_{cab}^d &= -R_{cba}^d. \end{aligned} \quad (4.2-9)$$

从式(4.2-1)出发, 将  $X^a, Y^b, Z^c$  进行轮换, 有

$$\begin{aligned} &R_{cab}^d X^a Y^b Z^c + R_{abc}^d Y^b Z^c X^a + R_{bca}^d Z^c X^a Y^b \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z^d - \nabla_Y \nabla_X Z^d - \nabla_{[X,Y]} Z^d + \nabla_Y \nabla_Z X^d - \nabla_Z \nabla_Y X^d - \nabla_{[Y,Z]} X^d \\ &\quad + \nabla_Z \nabla_X Y^d - \nabla_X \nabla_Z Y^d - \nabla_{[Z,X]} Y^d \\ &= (\nabla_X (\nabla_Y Z^d - \nabla_Z Y^d) - \nabla_{[Y,Z]} X^d) + (\nabla_Y (\nabla_Z X^d - \nabla_X Z^d) - \nabla_{[Z,X]} Y^d) \\ &\quad + (\nabla_Z (\nabla_X Y^d - \nabla_Y X^d) - \nabla_{[X,Y]} Z^d) \\ &= [X, [Y, Z]]^d + [Y, [Z, X]]^d + [Z, [X, Y]]^d = 0. \end{aligned}$$

上面计算参考了式(4.1-29)以及定理2.56中的 Jacobi 恒等式. 因  $X^a, Y^b, Z^c$  的任意性, 又因上式最后恒为零, 可知黎曼曲率张量有如下关系式 (第一 Bianchi 恒等式或循环恒等式)

$$R_{cab}^d + R_{abc}^d + R_{bca}^d = 0 \xleftrightarrow[1.8-9]{4.2-9} R_{[abc]}^d = 0. \quad (4.2-10)$$

我们从(4.2-2)出发, 对其再次求导, 有

$$\begin{aligned} \nabla_c \nabla_a \nabla_b Z^d - \nabla_c \nabla_b \nabla_a Z^d &= \nabla_c (R_{cab}^d Z^e) = Z^e \nabla_c R_{cab}^d + R_{cab}^d \nabla_c Z^e. \\ \nabla_a \nabla_b \nabla_c Z^d - \nabla_a \nabla_c \nabla_b Z^d &= Z^e \nabla_a R_{ebc}^d + R_{ebc}^d \nabla_a Z^e. \\ \nabla_b \nabla_c \nabla_a Z^d - \nabla_b \nabla_a \nabla_c Z^d &= Z^e \nabla_b R_{eca}^d + R_{eca}^d \nabla_b Z^e. \end{aligned}$$

后两式给出了将  $a, b, c$  轮换后的公式; 将上面三个式子相加并重新组合, 有

$$\begin{aligned} &(\nabla_c \nabla_a \nabla_b Z^d - \nabla_a \nabla_c \nabla_b Z^d) + (\nabla_a \nabla_b \nabla_c Z^d - \nabla_b \nabla_a \nabla_c Z^d) + (\nabla_b \nabla_c \nabla_a Z^d - \nabla_c \nabla_b \nabla_a Z^d) \\ &= Z^e \nabla_c R_{cab}^d + R_{cab}^d \nabla_c Z^e + Z^e \nabla_a R_{ebc}^d + R_{ebc}^d \nabla_a Z^e + Z^e \nabla_b R_{eca}^d + R_{eca}^d \nabla_b Z^e \\ &\xrightarrow{4.2-4} + R_{eca}^d \nabla_b Z^e - R_{bca}^e \nabla_e Z^d + R_{cab}^d \nabla_c Z^e - R_{cab}^e \nabla_e Z^d + R_{ebc}^d \nabla_a Z^e - R_{abc}^e \nabla_e Z^d \\ &= Z^e \nabla_c R_{cab}^d + R_{cab}^d \nabla_c Z^e + Z^e \nabla_a R_{ebc}^d + R_{ebc}^d \nabla_a Z^e + Z^e \nabla_b R_{eca}^d + R_{eca}^d \nabla_b Z^e. \end{aligned}$$

因  $Z^a$  的任意性以及式(4.2-10), 从上式可得

$$\nabla_a R_{ebc}^d + \nabla_b R_{eca}^d + \nabla_c R_{cab}^d = 0 \xleftrightarrow[1.8-9]{4.2-9} \nabla_{[a} R_{|e|bc]}^d = 0. \quad (4.2-11)$$

这是第二 Bianchi 恒等式, 也称为 Bianchi 微分恒等式.

需再次提醒, 本小节的对称性是在无挠联络下证明的. 在引入度规后, 黎曼曲率会有更多对称性, 见定理5.11.

### 4.3 曲率型式

给定  $m$  维仿射联络空间  $(M, \nabla_a)$ , 除了由局部坐标系  $(U; x^i)$  确定的自然基底标架场  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$  外, 还可以使用一般的局部标架场  $\{(e_i)^a\}$ ; 它们是定义在流形  $M$  的某开集  $U$  上的切向量场, 并且对于任意一点  $p \in U$ ,  $(e_i)^a|_p$  是切空间  $T_p M$  的基底. 既然是基矢量, 自然可以用自然标架场来展开,

$$(e_i)^a = A_{\cdot i}^j(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a, \quad A_{\cdot i}^j(x) \in C^\infty(U). \quad (4.3-1)$$

需要变换矩阵  $A$  的行列式  $\det(A) > 0$ , 用以保证标架场  $(e_i)^a$  与  $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a$  定向相同.

现在我们考虑一般的标架变换, 如果  $(\tilde{e}_i)^a$  是另一局部标架, 则存在光滑函数使得

$$(\tilde{e}_i)^a = (e_\mu)^a A_{\cdot i}^\mu, \quad (\tilde{e}^j)_a = (e^\nu)_a B_\nu^{\cdot j}. \quad (4.3-2)$$

矩阵  $A$  和  $B$  的指标在前的是行指标, 在后的是列指标 (不论在上还是在下); 依照定理1.59, 变换矩阵  $A$  和  $B$  是转置逆关系, 即  $B^{-1} = A^T$ . 设有张量  $T_{\cdot b}^a$ , 则有

$$\begin{aligned} T_{\cdot b}^a &= T_{\cdot \nu}^\mu (e_\mu)^a (e^\nu)_b = \tilde{T}_{\cdot j}^i (\tilde{e}_i)^a (\tilde{e}^j)_b = \tilde{T}_{\cdot j}^i (e_\mu)^a A_{\cdot i}^\mu (e^\nu)_b B_\nu^{\cdot j} \\ \Rightarrow T_{\cdot \nu}^\mu &= \tilde{T}_{\cdot j}^i A_{\cdot i}^\mu B_\nu^{\cdot j} \Leftrightarrow T_{\cdot \nu}^\mu A_{\cdot k}^\nu B_\mu^{\cdot n} = \tilde{T}_{\cdot k}^n. \end{aligned} \quad (4.3-3)$$

这是不同标架场下张量分量的变换关系. 基矢场  $(e_\mu)^a$  和  $(\tilde{e}_i)^a$  可以是自然坐标基底, 也可以是一般基底.

#### 4.3.1 联络型式

给定联络  $\nabla_a$  (有挠无挠均可), 在任意基底场  $(e_i)^a$  及其对偶标架场  $(e^i)_a$  中, 与坐标基底场系数(4.1-2)类似, 同样可以定义联络系数 (为区别坐标基底  $\Gamma$ , 此处用小写  $\gamma$ )

$$\begin{aligned} (e_j)^b \nabla_b (e_i)^a &\stackrel{def}{=} \gamma_{ij}^k (e_k)^a \Leftrightarrow \nabla_b (e_i)^a = \gamma_{ij}^k (e^j)_b (e_k)^a \Leftrightarrow \gamma_{ij}^k = (e^k)_a (e_j)^b \nabla_b (e_i)^a \\ \Rightarrow (e_j)^b \nabla_b (e^i)_a &= -\gamma_{kj}^i (e^k)_a \Leftrightarrow \nabla_b (e^i)_a = -\gamma_{kj}^i (e^j)_b (e^k)_a. \end{aligned} \quad (4.3-4)$$

自然坐标基底的无挠联络系数(4.1-2)关于下标是对称的, 即  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ . 然而, 一般基底场  $(e_i)^a$  的联络系数  $\gamma_{ij}^k$  通常不具有这种对称性.

定义联络 1 型式场

$$(\omega_{\cdot j}^k)_a \stackrel{def}{=} \gamma_{ji}^k (e^i)_a \equiv (e^i)_a (e^k)_c (e_i)^b \nabla_b (e_j)^c \equiv (e^k)_c \nabla_a (e_j)^c = - (e_j)^c \nabla_a (e^k)_c. \quad (4.3-5)$$

上指标降下位置是人为约定的. 由上式可导出联络型式的另一种常用表示,

$$\nabla_a (e^i)_b = -(\omega_{\cdot j}^i)_a (e^j)_b, \quad \nabla_a (e_i)^b = +(\omega_{\cdot i}^j)_a (e_j)^b. \quad (4.3-6)$$

### 4.3.2 标架变换

现在考虑在标架变换(4.3-2)下, 联络 1 型式如何变化. 设联络  $\nabla_a$  在标架场  $(\tilde{e}^i)_a$  下的联络系数及联络 1 型式分别为

$$(\tilde{e}_i)^b \nabla_b (\tilde{e}_j)^a = \tilde{\gamma}_{ji}^k (\tilde{e}_k)^a, \quad (\tilde{\omega}_{\cdot j}^k)_a \equiv \tilde{\gamma}_{ji}^k (\tilde{e}^i)_a. \quad (4.3-7)$$

依照定义直接计算

$$\begin{aligned} (\tilde{e}_i)^b \nabla_b (\tilde{e}_j)^a &= \tilde{\gamma}_{ji}^k (\tilde{e}_k)^a \xrightarrow{4.3-2} (\tilde{e}_i)^b \nabla_b (A_{\cdot j}^\nu (e_\nu)^a) = \tilde{\gamma}_{ji}^k (A_{\cdot k}^\rho (e_\rho)^a) \\ &\Rightarrow (e_\nu)^a (\tilde{e}_i)^b \nabla_b A_{\cdot j}^\nu + A_{\cdot j}^\nu A_{\cdot i}^\mu (e_\mu)^b \nabla_b (e_\nu)^a = \tilde{\gamma}_{ji}^k A_{\cdot k}^\rho (e_\rho)^a \\ &\Rightarrow (\tilde{e}_i)^b \nabla_b A_{\cdot j}^\sigma + A_{\cdot j}^\nu A_{\cdot i}^\mu \gamma_{\nu\mu}^\sigma = \tilde{\gamma}_{ji}^k A_{\cdot k}^\sigma, \quad \text{已缩并掉基矢}(e_\nu)^a \\ &\Rightarrow (\tilde{e}^i)_a (\tilde{e}_i)^b \nabla_b A_{\cdot j}^\sigma + A_{\cdot j}^\nu A_{\cdot i}^\mu \gamma_{\nu\mu}^\sigma (\tilde{e}^i)_a = \tilde{\gamma}_{ji}^k A_{\cdot k}^\sigma (\tilde{e}^i)_a, \quad \text{准备缩并基矢}(\tilde{e}_i)^b \\ &\Rightarrow \nabla_a A_{\cdot j}^\sigma + A_{\cdot j}^\nu A_{\cdot i}^\mu \gamma_{\nu\mu}^\sigma (e^\rho)_a B_\rho^i = \tilde{\gamma}_{ji}^k A_{\cdot k}^\sigma (\tilde{e}^i)_a, \quad \text{已把基矢}(\tilde{e}^i)_a \text{表示为}(e^\rho)_a B_\rho^i \end{aligned}$$

把上面最后一式的联络系数变成 1 型式场, 并应用矩阵  $A, B$  互逆, 可以得到,

$$\nabla_a A_{\cdot j}^\sigma + (\omega_{\cdot \nu}^\sigma)_a A_{\cdot j}^\nu = A_{\cdot k}^\sigma (\tilde{\omega}_{\cdot j}^k)_a \Leftrightarrow \tilde{\omega} = A^{-1} dA + A^{-1} \omega A. \quad (4.3-8)$$

最后把公式表示成矩阵型式, 显得较为简洁; 式(4.3-8)是微分几何中非常重要的公式.

### 4.3.3 协变导数

对于任意标量场  $f$ , 有

$$e_i(f) = A_{\cdot i}^j(x) \frac{\partial f}{\partial x^j}, \quad (4.3-9)$$

$$d_a(f) = \frac{\partial f}{\partial x^j} (dx^j)_a = \frac{\partial f}{\partial x^i} A_{\cdot \nu}^i \cdot B_j^\nu (dx^j)_a = [e_\nu(f)](e^\nu)_a. \quad (4.3-10)$$

依照约定, 切矢场作用标量场上时, 去掉抽象指标. 易得一般标架的协变导数,

$$\nabla_a u^c = [e_j(u^i) + u^l \gamma_{lj}^i] (e^j)_a (e_i)^c = [d_a(u^i) + u^l (\omega_{\cdot l}^i)_a] (e_i)^c. \quad (4.3-11)$$

$$\nabla_a \mu_b = [e_j(\mu_k) - \mu_l \gamma_{kj}^l] (e^j)_a (e^k)_b = [d_a(\mu_k) - \mu_l (\omega_{\cdot k}^l)_a] (e^k)_b. \quad (4.3-12)$$

$$\nabla_a T_b^c = [e_j(T_k^i) - T_l^i \gamma_{kj}^l + T_k^l \gamma_{lj}^i] (e^j)_a (e^k)_b (e_i)^c \quad (4.3-13)$$

$$= [d_a(T_k^i) - T_l^i (\omega_{\cdot k}^l)_a + T_k^l (\omega_{\cdot l}^i)_a] (e^k)_b (e_i)^c. \quad (4.3-14)$$

### 4.3.4 Cartan 结构方程

由式(4.1-22)可知,

$$T_{bc}^a (e^i)_a (e_j)^b (e_k)^c = (e^i)_a \nabla_{e_j} (e_k)^a - (e^i)_a \nabla_{e_k} (e_j)^a - (e^i)_a [e_j, e_k]^a$$

$$= \gamma_{kj}^l(e_l)^a(e^i)_a - \gamma_{jk}^l(e_l)^a(e^i)_a - (e^i)_a[e_j, e_k]^a. \quad (4.3-15)$$

依照式(3.2-8)可知上式最后一项可以表示为

$$-(e^i)_a[e_j, e_k]^a = (d_a(e^i)_b)(e_j)^a(e_k)^b - e_j((e^i)_b(e_k)^b) + e_k((e^i)_b(e_j)^b) = (d_a(e^i)_b)(e_j)^a(e_k)^b,$$

带回(4.3-15), 得

$$\begin{aligned} T_{bc}^a(e^i)_a(e_j)^b(e_k)^c &= \gamma_{kj}^i - \gamma_{jk}^i + (d_a(e^i)_b)(e_j)^a(e_k)^b \Rightarrow \\ T_{ab}^c(e^i)_c &= \gamma_{kj}^i(e^j)_a(e^k)_b - \gamma_{jk}^i(e^j)_a(e^k)_b + d_a(e^i)_b \Rightarrow \\ T_{ab}^c(e^i)_c &= (\omega_{\cdot k}^i)_a(e^k)_b - (e^j)_a(\omega_{\cdot j}^i)_b + d_a(e^i)_b. \end{aligned} \quad (4.3-16)$$

由此, 可得

$$d_a(e^i)_b - (e^j)_a \wedge (\omega_{\cdot j}^i)_b = T_{ab}^c(e^i)_c = \frac{1}{2} T_{jk}^i(e^j)_a \wedge (e^k)_b. \quad (4.3-17)$$

这是 Cartan **第一结构方程**.

由黎曼曲率的定义(4.2-1), 可得

$$\begin{aligned} R_{cab}^d(e_i)^a(e_j)^b(e_k)^c &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} (e_k)^d - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i} (e_k)^d - \nabla_{[e_i, e_j]} (e_k)^d \\ &= \nabla_{e_i} (\gamma_{kj}^p(e_p)^d) - \nabla_{e_j} (\gamma_{ki}^p(e_p)^d) - [e_i, e_j]^c \gamma_{kl}^p(e^l)_c (e_p)^d \\ &= (e_p)^d e_i (\gamma_{kj}^p) + \gamma_{kj}^p \gamma_{pi}^n (e_n)^d - (e_p)^d e_j (\gamma_{ki}^p) - \gamma_{ki}^p \gamma_{pj}^n (e_n)^d - (e^l)_c [e_i, e_j]^c \gamma_{kl}^p (e_p)^d. \end{aligned}$$

对上式两边缩并  $(e^n)_d$ , 得

$$R_{kij}^n = e_i(\gamma_{kj}^n) - e_j(\gamma_{ki}^n) + \gamma_{kj}^l \gamma_{li}^n - \gamma_{ki}^l \gamma_{lj}^n - (e^l)_c [e_i, e_j]^c \gamma_{kl}^n. \quad (4.3-18)$$

注意  $e_i(\gamma_{kj}^n)$  是切矢场  $e_i$  作用在标量函数场  $\gamma_{kj}^n$  上. 依照式(3.2-8)上式最后一项可表示为

$$- [ \gamma_{kl}^n(e^l) ]_c [e_i, e_j]^c = d_a(\omega_{\cdot k}^n)_b (e_i)^a (e_j)^b - e_i(\gamma_{kj}^n) + e_j(\gamma_{ki}^n). \quad (4.3-19)$$

将上式带入(4.3-18), 得

$$R_{kij}^n = +\gamma_{kj}^l \gamma_{li}^n - \gamma_{ki}^l \gamma_{lj}^n + [d_a(\omega_{\cdot k}^n)_b](e_i)^a (e_j)^b \Leftrightarrow \quad (4.3-20)$$

$$\frac{1}{2} R_{kij}^n (e^i)_a \wedge (e^j)_b = d_a(\omega_{\cdot k}^n)_b + (\omega_{\cdot l}^n)_a \wedge (\omega_{\cdot k}^l)_b. \quad (4.3-21)$$

这是 Cartan **第二结构方程**. 两个结构方程是型式理论基础, 它们适用于有挠或无挠联络.

**定义 4.19** 定义联络  $\nabla_a$  在局部标架场  $(e_i)^a$  下的**挠率型式**与**曲率型式**如下,

$$(\Omega^i)_{ab} \stackrel{def}{=} d_a(e^i)_b - (e^j)_a \wedge (\omega_{\cdot j}^i)_b, \quad (4.3-22)$$

$$(\Theta^i_{\cdot j})_{ab} \stackrel{def}{=} d_a(\omega_{\cdot j}^i)_b + (\omega_{\cdot l}^i)_a \wedge (\omega_{\cdot j}^l)_b. \quad (4.3-23)$$

它们都是 2 型式场。由此自然可以得到，

$$(\Omega^i)_{ab} = \frac{1}{2} T_{jk}^i (e^j)_a \wedge (e^k)_b = T_{jk}^i (e^j)_a (e^k)_b, \quad (4.3-24)$$

$$(\Theta^i)_{ab} = \frac{1}{2} R_{jkl}^i (e^k)_a \wedge (e^l)_b = R_{jkl}^i (e^k)_a (e^l)_b. \quad (4.3-25)$$

则两个结构方程可以表示为

$$d_a(e^i)_b = (e^j)_a \wedge (\omega_{.j}^i)_b + (\Omega^i)_{ab}, \quad (4.3-26a)$$

$$d_a(\omega_{.j}^i)_b = (\omega_{.l}^i)_a \wedge (\omega_{.l}^i)_b + (\Theta^i)_{ab}. \quad (4.3-26b)$$

这是两个结构方程的常用形式。

下两式分别称为联络的第一、第二 Bianchi 恒等式。

**定理 4.20** 挠率形式和曲率形式满足下式（有挠、无挠联络均适用），

$$d_c(\Omega^i)_{ab} = (e^j)_c \wedge (\Theta^i)_{ab} - (\Omega^j)_{ca} \wedge (\omega_{.j}^i)_b, \quad (4.3-27a)$$

$$d_c(\Theta^i)_{ab} = (\omega_{.j}^i)_c \wedge (\Theta^i)_{ab} - (\Theta^j)_{ca} \wedge (\omega_{.k}^i)_b. \quad (4.3-27b)$$

**证明** . 对式(4.3-26a)再取外微分，有（见式(3.2-5)）

$$\begin{aligned} 0 &= d_c d_a(e^i)_b = (d_c(e^j)_a) \wedge (\omega_{.j}^i)_b - (e^j)_c \wedge (d_a(\omega_{.j}^i)_b) + d_c(\Omega^i)_{ab} \Rightarrow \\ d_c(\Omega^i)_{ab} &= -[(e^l)_c \wedge (\omega_{.l}^j)_a + (\Omega^j)_{ca}] \wedge (\omega_{.j}^i)_b + (e^j)_c \wedge [(\omega_{.j}^l)_a \wedge (\omega_{.l}^i)_b + (\Theta^i)_{ab}] \\ &= (e^j)_c \wedge (\Theta^i)_{ab} - (\Omega^j)_{ca} \wedge (\omega_{.j}^i)_b. \end{aligned}$$

这便是第一式。再对(4.3-26b)取外微分，有

$$\begin{aligned} 0 &= d_c d_a(\omega_{.j}^i)_b = [d_c(\omega_{.j}^l)_a] \wedge (\omega_{.l}^i)_b - (\omega_{.j}^l)_c \wedge [d_a(\omega_{.l}^i)_b] + d_c(\Theta^i)_{ab} \Rightarrow \\ d_c(\Theta^i)_{ab} &= -[(\omega_{.j}^p)_c \wedge (\omega_{.p}^l)_a + (\Theta^l)_{ca}] \wedge (\omega_{.j}^i)_b + (\omega_{.j}^l)_c \wedge [(\omega_{.l}^p)_a \wedge (\omega_{.p}^i)_b + (\Theta^i)_{ab}] \\ &= (\omega_{.j}^l)_c \wedge (\Theta^i)_{ab} - (\Theta^l)_{ca} \wedge (\omega_{.l}^i)_b. \end{aligned}$$

这便是第二式。 ■

**定理 4.21** 联络无挠时，式(4.3-27)分别是通常的第一、第二 Bianchi 恒等式。

**证明** . 联络无挠等价于  $(\Omega^i)_{ab} \equiv 0$ ，故式(4.3-27a)变为

$$0 = (e^j)_c \wedge (\Theta^i)_{ab} \xrightarrow{4.3-25} \frac{1}{2} R_{jkl}^i (e^j)_c \wedge (e^k)_a \wedge (e^l)_b \xrightarrow{1.8-58} R_{[jkl]}^i = 0. \quad (4.3-28)$$

这是第一 Bianchi 恒等式，与式(4.2-10)相同。

应用无挠联络的式(4.3-26a)，直接计算式(4.3-27b)，

$$0 = d_c(\Theta^i)_{ab} - (\omega_{.j}^i)_c \wedge (\Theta^i)_{ab} + (\Theta^j)_{ca} \wedge (\omega_{.k}^i)_b$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} d_c(R_{jpn}^i) \wedge (e^p)_a \wedge (e^n)_b + \frac{1}{2} R_{jkn}^i [d_c(e^k)_a] \wedge (e^n)_b \\
&\quad - \frac{1}{2} R_{jsk}^i (e^s)_c \wedge d_a(e^k)_b + \frac{1}{2} (-R_{kpn}^i \gamma_{js}^k + R_{jsp}^k \gamma_{kn}^i) (e^s)_c \wedge (e^p)_a \wedge (e^n)_b \\
&= \frac{1}{2} (e^s)_c \wedge (e^p)_a \wedge (e^n)_b [e_s(R_{jpn}^i) + R_{jkn}^i \gamma_{sp}^k - R_{jsk}^i \gamma_{pn}^k - R_{kpn}^i \gamma_{js}^k + R_{jsp}^k \gamma_{kn}^i] \\
&\stackrel{*}{=} \frac{1}{2} (e^s)_c \wedge (e^p)_a \wedge (e^n)_b [e_s(R_{jpn}^i) + R_{jkn}^i (\gamma_{sp}^k + \gamma_{ps}^k) \\
&\quad - R_{jkn}^i \gamma_{ps}^k - R_{jsk}^i \gamma_{pn}^k - R_{kpn}^i \gamma_{js}^k + R_{jsp}^k \gamma_{kn}^i] \\
&= \frac{1}{2} (e^s)_c \wedge (e^p)_a \wedge (e^n)_b [e_s(R_{jpn}^i) - R_{jkn}^i \gamma_{ps}^k - R_{jsk}^i \gamma_{pn}^k - R_{kpn}^i \gamma_{js}^k + R_{jsp}^k \gamma_{kn}^i].
\end{aligned}$$

在“\*”步中作了一个技巧性处理：先加减  $R_{jkn}^i \gamma_{ps}^k$  项，然后  $R_{jkn}^i \gamma_{ps}^k$  和  $R_{jkn}^i \gamma_{sp}^k$  组成红色圆括号内的项；红色括号内的两项关于下标  $s$  和  $p$  对称，而方括号外面是外微分式（关于  $s$  和  $p$  反对称），所以这一项消失了。这样处理之后才能得到我们想要的结果，这一处理在证明过程中必不可少。利用式(1.8-58)继续计算有

$$\begin{aligned}
0 &= e_{[s}(R_{j|p]n}^i) - R_{jk[n}^i \gamma_{ps]}^k - R_{j[s|k]}^i \gamma_{pn]}^k - R_{k[pn]}^i \gamma_{j|s]}^k + R_{j[sp]}^k \gamma_{|k|n]}^i \xrightarrow[1.8-9]{4.2-9} \\
0 &= e_s(R_{jpn}^i) + e_p(R_{jns}^i) + e_n(R_{jsp}^i) \\
&\quad - R_{jkn}^i \gamma_{ps}^k - R_{jkp}^i \gamma_{sn}^k - R_{jks}^i \gamma_{np}^k - R_{jsk}^i \gamma_{pn}^k - R_{jpk}^i \gamma_{ns}^k - R_{jnk}^i \gamma_{sp}^k \\
&\quad - R_{kpn}^i \gamma_{js}^k - R_{kns}^i \gamma_{jp}^k - R_{ksp}^i \gamma_{jn}^k + R_{jsp}^k \gamma_{kn}^i + R_{jpn}^k \gamma_{ks}^i + R_{jns}^k \gamma_{kp}^i \\
&= + e_s(R_{jpn}^i) + R_{jpn}^k \gamma_{ks}^i - R_{kpn}^i \gamma_{js}^k - R_{jkn}^i \gamma_{ps}^k - R_{jpk}^i \gamma_{ns}^k \\
&\quad + e_p(R_{jns}^i) + R_{jns}^k \gamma_{kp}^i - R_{kns}^i \gamma_{jp}^k - R_{jks}^i \gamma_{np}^k - R_{jnk}^i \gamma_{sp}^k \\
&\quad + e_n(R_{jsp}^i) + R_{jsp}^k \gamma_{kn}^i - R_{ksp}^i \gamma_{jn}^k - R_{jkp}^i \gamma_{sn}^k - R_{jsk}^i \gamma_{pn}^k.
\end{aligned}$$

由此式，参考式(4.3-13)可得第二 Bianchi 恒等式

$$R_{jpn;s}^i + R_{jns;p}^i + R_{jsp;n}^i = 0 \Leftrightarrow \nabla_a R_{ebc}^d + \nabla_b R_{eca}^d + \nabla_c R_{eab}^d = 0. \quad (4.3-29)$$

与式(4.2-11)相同. ■

本节的型式理论摆脱了局部自然坐标，具有普适性。

**注 4.22** 抽象指标记号的优势在于协变导数计算以及缩并计算的清晰性。它的劣势在曲率型式理论中体现明显：角标、符号过于繁杂；使公式显得十分笨重。

## 第四章参考文献

- [1] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 115).
- [2] 陈维桓. 微分几何[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2017 (引用页: 123).
- [3] 伍鸿熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014 (引用页: 123).

## 第五章 黎曼几何

截止到目前，在微分流形中还没有引入度规这个结构；即便如此也定义了联络、黎曼曲率、测地线等等重要几何量。从本章开始引入度规结构，这使得微分几何内容更加丰富；一件很重要的事：可以定义曲线长度了。

### 5.1 黎曼流形

#### 5.1.1 黎曼流形定义

**定义 5.1** 给  $m$  维  $C^\infty$  微分流形  $M$  指定一个处处非退化、光滑、对称  $(0,2)$  型张量场  $g$  后，称  $(M, g)$  为广义黎曼流形， $g$  称为其度规或基本度量或黎曼结构。

**注 5.2** 陈省身和陈维桓 [7, §5.1] 中的定理 1.1 表明光滑流形必存在正定的黎曼度规。此定理后面的“注记”说明非正定的度规未必存在。

**注 5.3** 与 §2.1.2 类似，指定度规后，可以将点  $p \in M$  切空间的切矢量与余切空间的对偶矢量作认同，即它们是同一矢量的不同表现形式。度规  $g$  的抽象指标记号也与该节相同。

黎曼流形专指正定度规情形；广义黎曼流形指度规特征值可能是不定的，即有正有负。广义黎曼流形还被称为半黎曼流形 (Semi-Riemannian) 或伪黎曼流形 (Pseudo-Riemannian, 也被翻译成“赝”或“准”)。

**定义 5.4** 给定  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ ， $\nabla_a$  是  $M$  上的仿射联络，如果有  $\nabla_a g_{bc} = 0$ ，则称仿射联络  $\nabla_a$  为黎曼流形的容许联络。

下面我们导出容许联络的一个常用表达式， $\forall X^a, Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,

$$\begin{aligned}\nabla_X(g_{ab}Y^aZ^b) &= (\nabla_X g_{ab})Y^aZ^b + g_{ab}(\nabla_X Y^a)Z^b + g_{ab}Y^a\nabla_X(Z^b) \\ &\xrightarrow{\nabla_a g_{bc}=0} X(g_{ab}Y^aZ^b) = g_{ab}(\nabla_X Y^a)Z^b + g_{ab}Y^a\nabla_X(Z^b).\end{aligned}\tag{5.1-1}$$

**定理 5.5** 给定  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ ，则在  $M$  上存在唯一的无挠容许联络，称为黎曼流形的 Levi-Civita 联络。

**证明** . 设  $\nabla_a$  是  $M$  上的无挠、容许、仿射联络, 在局部坐标  $(U; x^i)$  下, 有

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \Rightarrow \partial_a g_{bc} = \Gamma_{ba}^e g_{ec} + \Gamma_{ca}^e g_{be}. \quad (5.1-2)$$

将上式进行指标轮换,

$$\partial_b g_{ca} = \Gamma_{cb}^e g_{ea} + \Gamma_{ab}^e g_{ce}, \quad -\partial_c g_{ab} = -\Gamma_{ac}^e g_{eb} - \Gamma_{bc}^e g_{ae}.$$

上面三式相加, 得

$$\Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{ce} \left( \frac{\partial g_{ae}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{eb}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^e} \right) \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right), \quad (5.1-3a)$$

$$\Gamma_{dab} = g_{dc} \Gamma_{ab}^c = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{db}}{\partial x^a} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right) \Leftrightarrow \Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (5.1-3b)$$

式(5.1-3b)为局部坐标系下的第一类 Christoffel 记号 (给出了抽象指标及分量表示方式); 第一类 Christoffel 记号用的较少. 式(5.1-3a)为局部坐标系下的第二类 Christoffel 记号 (给出了抽象指标及分量表示方式), 简称 (第二类) 克氏符, 第二类克氏符与度规号差无关. 由此可见无挠容许联络系数由度规唯一确定. 需注意, 两个克氏符都不是张量, 所以上指标降下位置是人为约定的, 没有特别意义.

反过来, 给定联络系数(5.1-3a), 经计算不难确定它满足式(4.1-4)的变换关系; 由注解4.7可知, 这相当于在流形  $M$  上定义一个联络  $\nabla_a$ . 通过计算不难确定由式(5.1-3a)定义的联络是无挠、容许、仿射联络. ■

**一般仿射联络** 在例4.9中, 我们指出两个仿射联络系数差是张量场; 现在有了一个特殊的联络——Levi-Civita 联络, 我们再次讨论此问题. 设  $\nabla_a$  是流形  $M$  的 Levi-Civita 联络, 它与度规场  $g_{bc}$  相容, 即  $\nabla_a g_{bc} = 0$ ; 再设一无挠、仿射联络  $\overset{\circ}{\nabla}_a$ , 它与度规  $g_{ab}$  不相容. 设两者关系是:

$$\nabla_a v^c = \overset{\circ}{\nabla}_a v^c + C_{ea}^c v^e. \quad (5.1-4)$$

由例4.9的分析可知  $C_{ea}^c$  是张量场; 与第一类克氏符相似, 我们约定它的上指标降在第一个位置. 由两个联络的关系可以得到

$$\overset{\circ}{\nabla}_a g_{bc} - C_{ba}^e g_{ec} - C_{ca}^e g_{be} = \nabla_a g_{bc} = 0. \quad (5.1-5)$$

仿照定理5.5中导出克氏符的操作, 进行指标轮换后相加减, 可得

$$C_{ab}^c = \frac{1}{2} g^{cf} \left( \overset{\circ}{\nabla}_a g_{fb} + \overset{\circ}{\nabla}_b g_{fa} - \overset{\circ}{\nabla}_f g_{ab} \right). \quad (5.1-6)$$

切向量场  $v^c$  的两次导数是

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_a \overset{\circ}{\nabla}_b v^c &= \overset{\circ}{\nabla}_a (\nabla_b v^c - C_{eb}^c v^e) = \overset{\circ}{\nabla}_a \nabla_b v^c - v^e \overset{\circ}{\nabla}_a C_{eb}^c - C_{eb}^c \overset{\circ}{\nabla}_a v^e \\ &= \nabla_a \nabla_b v^c - C_{fa}^c \nabla_b v^f - C_{eb}^c \nabla_a v^e + C_{ba}^f \nabla_f v^c + C_{eb}^c C_{fa}^e v^f - v^e \overset{\circ}{\nabla}_a C_{eb}^c \\ &\Rightarrow \overset{\circ}{\nabla}_{[a} \overset{\circ}{\nabla}_{b]} v^c = \nabla_{[a} \nabla_{b]} v^c - C_{f[a}^c \nabla_{b]} v^f - C_{e[b}^c \nabla_{a]} v^e + C_{e[b}^c C_{a]}^e v^f - v^e \overset{\circ}{\nabla}_{[a} C_{b]}^c. \end{aligned} \quad (5.1-7)$$



上式中“ $\Rightarrow$ ”这一步是对下标  $ab$  取反对称操作, 并利用了  $\overset{\circ}{\nabla}_a$  是无挠的 (即  $C_{[ab]}^c = 0$ ). 由上式最后一步, 参考式(4.2-2) ( $\nabla_{[a}\nabla_{b]}Z^d = \frac{1}{2}R_{cab}^d Z^c$ ,  $R_{cab}^c$  是  $\nabla_a$  的黎曼曲率); 并注意到  $v^c$  的任意性, 经计算可得两个黎曼曲率间的关系:

$$\overset{\circ}{R}_{eab}^c = R_{eab}^c - 2\overset{\circ}{\nabla}_{[a}C_{b]e}^c - 2C_{f[a}^c C_{b]e}^f = R_{eab}^c - 2\nabla_{[a}C_{b]e}^c + 2C_{f[a}^c C_{b]e}^f. \quad (5.1-8)$$

其中  $\overset{\circ}{R}_{eab}^c$  是  $\overset{\circ}{\nabla}_a$  的黎曼曲率, 即  $\overset{\circ}{\nabla}_{[a}\overset{\circ}{\nabla}_{b]}Z^d = \frac{1}{2}\overset{\circ}{\nabla}R_{cab}^d Z^c$ .

**注 5.6** 约定: 如无特殊声明, 在此以后所用联络皆是 Levi-Civita 联络.

### 5.1.2 曲线长度

给定  $m$  维广义黎曼流形流形  $(M, g)$ , 其任一点的切空间便是通常的线性空间, 依照推论1.75, 其度规有式(1.5-16)的形式且没有非零分量 (因非退化).

**定义 5.7** 给定光滑广义黎曼流形  $(M, g)$ , 如果其每点切空间的度规特征值 (即式(1.5-16)) 只有一个负号, 其余皆为正号 (本书使用度规符号是  $(-+\cdots+)$ , 其它文献可能与此整体差一负号), 则称  $M$  为广义**闵可夫斯基流形**. 此度规称为广义**洛伦兹度规**或者广义**闵可夫斯基度规**. 当没有“广义”两个字时, 专指**四维闵可夫斯基流形** (或其子流形), 洛伦兹度规的符号是  $(-+++)$ .

当度规场是非退化时, 那么流形  $M$  度规场特征值的正负号逐点相同. 如果度规场特征值会改变, 比如  $M$  上有点  $p$  和  $q$ , 其中  $p$  点度规是正定的, 而  $q$  点度规是  $(-+\cdots+)$ ; 那么肯定存在一点  $O$ , 此点的度规场特征值为零, 因而退化, 矛盾!

**定义 5.8** 给定  $m$  维广义闵可夫斯基流形  $(M, g)$ ,  $\forall X^a \in \mathfrak{X}(M)$ ; 如果  $X^a$  在任意坐标下的每个分量都为零, 则称为**零矢量** (Zero Vector); 如果  $g_{ab}X^aX^b < 0$ , 则称为**类时矢量**; 如果  $g_{ab}X^aX^b > 0$ , 则称为**类空矢量**; 如果  $g_{ab}X^aX^b = 0$  且  $X^a$  不是零矢量, 则称为**零模矢量** (Null Vector).

**定义 5.9** 给定**四维闵可夫斯基流形**  $(M, g)$ ,  $\forall X^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 如果  $X^a$  是零模矢量 (Null Vector), 也可称之为**类光矢量**; 我们不在**非四维闵氏流形**上使用类光矢量这一词语.

在古典微分几何  $\mathbb{R}^3$  中, 分段光滑曲线  $\mathbf{r}(t)$  弧长被定义为

$$s = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}} dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}. \quad (5.1-9)$$

其中点  $t_i$  是分段点; 由于曲线的导数可正可负, 所以加了绝对值; 弧长参数  $s$  被称为**自然参数**. 这个定义可以推广到广义黎曼流形中.

设广义黎曼流形  $(M, g)$  中有分段光滑曲线  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ , 曲线  $\gamma(t)$  的切矢量是  $\left(\frac{d}{dt}\right)_\gamma^a$  (见式(2.4-8)), 微分流形中的内积需要用度规来描述. 曲线  $\gamma(t)$  弧长的定义为

$$L(\gamma) \stackrel{def}{=} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\left| g_{ab} \left(\frac{d}{dt}\right)_\gamma^a \left(\frac{d}{dt}\right)_\gamma^b \right|} dt. \quad (5.1-10)$$

因度规可能是不定的, 故上式中加了绝对值. 如果度规是正定的, 即式(1.5-16)中特征值全部是 +1, 则没有必要加这个绝对值.

对于正定度规而言, 式(5.1-10)是个良定义, 对于不定度规而言要复杂一些. 比如对于广义闵氏时空中曲线可能一段类时, 与其毗邻的一段变成类空曲线; 虽然这种不伦不类曲线的线长(从数学角度)可以采取分段方式用式(5.1-10)来定义, 但是这种不伦不类的曲线长度在物理上貌似没有什么意义. 所以, 我们约定式(5.1-10)仅限于正定度规或者广义闵氏度规; 当是后者时, 整条曲线必须是类时或类空或零模的, 不能是不伦不类的. 当讨论物理问题时, 我们不去涉及其它类型度规的曲线线长了, 这样可以避免不必要的麻烦.

很明显, 如果曲线是零模的, 那么线长恒为零.

设流形  $M$  有局域坐标系  $(U; x^i)$ , 分段光滑曲线  $\gamma(t)$  的分段  $[t_i, t_{i+1}]$  完全落在一个坐标域内(如果不是, 增加分段即可); 那么式(5.1-10)在局部坐标系的表示为

$$L(\gamma) = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{\left| g_{jk} \frac{dx^j \circ \gamma}{dt} \frac{dx^k \circ \gamma}{dt} \right|} dt = \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{|g_{jk} dx^j dx^k|}. \quad (5.1-11)$$

其中包括度规分量  $g_{jk} = \left[ g_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^b \right] \Big|_{\gamma(t)}$  在内的所有量必须在曲线  $\gamma(t)$  上取值. 曲线线长公式中被积分部分

$$ds^2 \equiv g_{jk} dx^j dx^k, \quad (5.1-12)$$

一般称为**线元**. 虽然是平方形式, 但线元可正可负. 可见给出线元就相当于给出了局部坐标系  $(U; x^i)$  下的度规场, 线元无非是度规场的一种记号而已.

**例 5.10** 在流形  $\mathbb{R}^2$  中, 给定线元

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + t dx^2 + 4 dt dx. \quad (5.1-13)$$

我们来读取度规场信息, 在坐标系  $\{t, x\}$  下的度规分量是  $g_{tt} = -x^2$ ,  $g_{xx} = t$ ,  $g_{tx} = g_{xt} = 2$ . 度规可用抽象指标记号表示为

$$g_{ab} = -x^2 (dt)_a (dt)_b + t (dx)_a (dx)_b + 2(dt)_a (dx)_b + 2(dx)_a (dt)_b. \quad (5.1-14)$$

请读者熟悉从线元读取度规信息的方式、方法.

为简单起见, 我们下面只讨论曲线属性不变的一段  $[r_1, r_2]$ , 然后拼接所有分段即可. 如果曲线  $\gamma(t)$  重参数化为  $\tilde{\gamma}(u)$ , 其中  $u = u(t)$ , 变换  $u(t)$  是单调的(见59页定义2.16后的讨论), 即  $\frac{dt}{du} > 0$  或  $\frac{dt}{du} < 0$ ; 那么曲线线长公式(5.1-10)是不变的,

$$L(\tilde{\gamma}) = \int_{u(r_1)}^{u(r_2)} \sqrt{\left| g_{ab} \left( \frac{d}{du} \right)^a \left( \frac{d}{du} \right)^b \right|} du = \int_{u(r_1)}^{u(r_2)} \sqrt{\left| g_{ab} \left( \frac{d}{dt} \right)^a \left( \frac{d}{dt} \right)^b \right| \left| \frac{dt}{du} \right|} \cdot du. \quad (5.1-15)$$

不论  $\frac{dt}{du} > 0$  还是  $\frac{dt}{du} < 0$ , 带入上式后都会得到弧长公式在形式上是不变的, 即与重参数化无关, 或者说在重参数化后曲线线长不变.

如果我们将曲线  $\gamma(t)$  参数  $t$  选为线长  $s$ , 那么从上式可以看到必有

$$\sqrt{\left| g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^a \left( \frac{d}{ds} \right)^b \right|_{\gamma(s)}} = 1. \quad (5.1-16)$$

也就是当光滑曲线  $\gamma$  的参数是弧长  $s$  时, 其切线切矢量  $(\frac{d}{ds})^a$  的长度是 1.

### 5.1.3 黎曼流形之积

设  $(M, g)$  和  $(N, h)$  是两个广义黎曼流形, 维数分别是  $m$  和  $n$ ; 两者笛卡尔积是  $M \times N$ ,  $\forall (p, q) \in M \times N$ , 其中  $p \in M, q \in N$ . 有自然投影  $\pi_M : M \times N \rightarrow M$ ,  $\pi_N : M \times N \rightarrow N$ , 定义如下映射  $\alpha : M \rightarrow M \times N$ ,  $\beta : N \rightarrow M \times N$  (下式中  $p \in M, q \in N$  是任取的, 取定后固定不变),

$$\alpha(x) = (x, q), \quad \forall x \in M; \quad \beta(y) = (p, y), \quad \forall y \in N. \quad (5.1-17)$$

显然有  $\pi_M \circ \alpha = \text{id} : M \rightarrow M$  和  $\pi_N \circ \beta = \text{id} : N \rightarrow N$ .  $\alpha$  和  $\beta$  相当于包含映射, 自然是正则嵌入的.

假设  $T_p M$  的局部坐标系是  $\{x^i\}$ , 对应的自然坐标基矢量是  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$ ;  $T_p N$  的局部坐标系是  $\{y^\alpha\}$ , 对应的自然坐标基矢量是  $\{(\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^a\}$ ; 那么,  $T_p(M \times N)$  的局部坐标系是  $\{x^i, y^\alpha\}$ , 对应的自然坐标基矢量是  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a, (\frac{\partial}{\partial y^\alpha})^a\}$ ; 很明显坐标  $x$  与  $y$  相互独立. 切映射  $\alpha_{p*} : T_p M \rightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$  产生的基矢映射关系为,

$$\alpha_{p*} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \Big|_p = \frac{\partial x^k}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a + \frac{\partial y^\beta}{\partial x^i} \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \Big|_{(p,q)} \quad (5.1-18)$$

上式最左端的基矢是在流形  $M$  中取值; 最右端基矢是在积流形  $M \times N$  中取值. 与上式类似, 切映射  $\beta_{q*} : T_q N \rightarrow T_{(p,q)}(M \times N)$  产生的基矢映射关系为,

$$\beta_{q*} \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^a \Big|_q = \frac{\partial x^k}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a + \frac{\partial y^\beta}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a = \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^a \Big|_{(p,q)} \quad (5.1-19)$$

上式最左端的基矢是在流形  $N$  中取值; 最右端基矢是在积流形  $M \times N$  中取值.

上两式可以说明  $(\alpha_{p*} T_p M) \cap (\beta_{q*} T_q N) = \mathbf{0}$ , 即两个切空间交集只有零矢量. 而积流形  $M \times N$  的维数是  $m + n$ , 自然它的切空间  $T_{(p,q)}(M \times N)$  维数也如此;  $T_p M$  的维数是  $m$ ,  $T_p N$  的维数是  $n$ ; 由此不难得到

$$T_{(p,q)}(M \times N) = \alpha_{p*} T_p M \oplus \beta_{q*} T_q N, \quad (5.1-20)$$

即积  $M \times N$  的切空间可以表示成  $M$  和  $N$  的切空间 (用映射推前后) 的直和.

$\forall X_M^a, Y_M^b \in T_p M$  和  $\forall X_N^a, Y_N^b \in T_q N$ ; 记

$$X^a = \alpha_{p*} X_M^a \oplus \beta_{q*} X_N^a, \quad Y^b = \alpha_{p*} Y_M^b \oplus \beta_{q*} Y_N^b. \quad (5.1-21)$$

定义积流形  $M \times N$  的度规为

$$G_{ab}X^aY^b \stackrel{def}{=} g_{ab}X_M^aY_M^b + h_{ab}X_N^aY_N^b. \quad (5.1-22)$$

由  $g_{ab}, h_{ab}$  的对称性可以得到  $G_{ab}$  是对称张量；光滑性也可类似得到。下面验证它的非退化性，只需验证  $G_{ab}$  在基矢下的矩阵是非退化的即可；设在给定基矢下  $g$  和  $h$  的矩阵分别是  $g_{ij}$  和  $h_{\alpha\beta}$ ，不难看出  $G_{ab}$  的  $m+n$  维方矩阵是

$$G_{(i\alpha)(j\beta)} = \begin{pmatrix} g_{ij} & 0 \\ 0 & h_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (5.1-23)$$

因  $\det(G_{(i\alpha)(j\beta)}) = \det(g_{ij}) \cdot \det(h_{\alpha\beta})$ ，故  $G_{(i\alpha)(j\beta)}$  非退化性是显然的。这样便证明了  $G_{ab}$  符合广义黎曼度规要求。

显然本节所有结论都可以推广到有限个广义黎曼流形间的笛卡尔积。

## 5.2 曲率张量

在 §4.2 中给出了黎曼曲率张量定义，同时也描述了它的数条性质。在引入度规后，再次研究这个重要的几何量；同时给出几个其它几个曲率的定义与性质。

### 5.2.1 $(0, 4)$ 型黎曼曲率张量

黎曼流形  $(M, g)$  中已指定度规，则可以升降指标，约定其上标降在第一个位置，

$$R_{dcab} \stackrel{def}{=} g_{de}R^e_{cab}. \quad (5.2-1)$$

有了黎曼流形中的克氏符，可求  $(0, 4)$  型黎曼张量的分量表达式，由式(4.2-5)和(5.1-3)得

$$R_{ijkn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{in}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^n} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^n} \right) + \Gamma_{jk}^l \Gamma_{lin} - \Gamma_{jn}^l \Gamma_{lik}. \quad (5.2-2)$$

计算过程并不困难，请读者补齐。由式(5.2-2)可见  $(0, 4)$  型黎曼张量对度规  $g_{ij}$  而言是半线性的，非线性部分只体现在一阶导数上<sup>1</sup>。但此张量还包含度规的逆  $(g^{ij})$ 。

**定理 5.11** 设有  $m$  维光滑黎曼流形  $(M, g)$ ，它的黎曼曲率有如下对称性或反对称性，

$$R_{abcd} = R_{cdab}, \quad (5.2-3)$$

$$R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}, \quad (5.2-4)$$

<sup>1</sup>我们只以  $(0, 4)$  型黎曼张量这个二阶偏导数式子来说明线性、半线性、拟线性、非线性的描述性概念。如果此张量的一阶偏导数和二阶偏导数本身是线性的（没有  $\frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^h \partial x^q} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^l \partial x^p}$ ,  $\frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^h \partial x^q} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ ,  $\frac{\partial^2 g_{jn}}{\partial x^h \partial x^i} g_{kl}$ ,  $\frac{\partial g_{jn}}{\partial x^h} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}$ ,  $\frac{\partial g_{kn}}{\partial x^h} g_{ij}$ ,  $g_{ij} g_{kn}$  等项），并且这些偏导数前的系数是常数或  $x^i$  的函数，那么称为线性。所有不是线性的皆称为非线性，但是非线性内部又可以略作区分。如果最高阶偏导数（此处指二阶偏导数，例如  $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^n}$ ）前的系数是常数或者只是  $x^i$  的函数，那么称为半线性（semi-linear）。如果最高阶偏导数前的系数除了包含  $x^i$ ，还包含  $g_{ij}$  或  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$ ，那么称为拟线性（quasi-linear）。

$$R_{a[bcd]} = 0 \Leftrightarrow R_{[b|a|cd]} = 0 \Leftrightarrow R_{[bc|a|d]} = 0 \Leftrightarrow R_{[bcd]a} = 0, \quad (5.2-5)$$

$$R_{ab[cd;e]} = 0, \quad (5.2-6)$$

$$R_{[abcd]} = 0. \quad (5.2-7)$$

**证明** . 由于已经证明过黎曼曲率的分量表达式是坐标卡变换协变的 (见 §4.2.3), 所以可以由式(5.2-2)的对称性直接得到式(5.2-3).

式(4.2-9)已经证明了式(5.2-4)中的后半部分; 借用式(5.2-3)可证式(5.2-4)前半部分.

接下来是第一、第二 Bianchi 恒等式 (已由式(4.2-10)和(4.2-11)证明).

下面证明式(5.2-7); 由式(1.8-21)和式(1.8-25)可得

$$\begin{aligned} 24 \cdot R_{[abcd]} &= \delta_{abcd}^{ijkl} R_{ijkl} = \left( -\delta_a^l \cdot \delta_{bcd}^{ijk} + \delta_b^l \cdot \delta_{acd}^{ijk} - \delta_c^l \cdot \delta_{abd}^{ijk} + \delta_d^l \cdot \delta_{abc}^{ijk} \right) R_{ijkl} \\ &= -R_{[bcd]a} + R_{[acd]b} - R_{[abd]c} + R_{[abc]d} = 0. \end{aligned}$$

上式最后一步用到了第一 Bianchi 恒等式. ■

**例 5.12**  $m$  维黎曼流形  $(M, g)$  中黎曼曲率张量  $R_{abcd}$  的独立取值数目.

**解:** 由式(5.2-3)知可把黎曼曲率  $R_{abcd}$  当成“指标”为  $(ab)$  和  $(cd)$  的矩阵  $R_{(ab)(cd)}$ , 由式(5.2-4)的反对称性可以看出, 每一个“指标”取独立值的数目是:  $\frac{1}{2}m(m-1)$ . 而“指标”为  $(ab)$  和  $(cd)$  是对称的, 所以单由式(5.2-3)和(5.2-4)使张量  $R_{abcd}$  留下的独立分量数目等于  $\frac{1}{2}m(m-1)$  维对称矩阵的独立矩阵元数目, 即  $\frac{1}{2}[\frac{1}{2}m(m-1)][\frac{1}{2}m(m-1)+1]$ . 而全反对称(5.2-7)又给附加上  $m(m-1)(m-2)(m-3)/4!$  个限制, 最终黎曼曲率张量  $R_{abcd}$  留下的独立分量数目等于

$$\begin{aligned} C_m &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{2}m(m-1) \right] \left[ \frac{1}{2}m(m-1) + 1 \right] - \frac{1}{4!}m(m-1)(m-2)(m-3) \\ &= \frac{1}{12}m^2(m^2-1). \end{aligned} \quad (5.2-8)$$

需要强调的是, 上述独立分量个数只是代数意义上的, 由于还有第二 Bianchi 微分恒等式, 独立分量数目还会减少. ■

当维数  $m=1$  时  $C_1=0$ , 这说明曲线的内秉曲率  $R_{1111}$  恒为零. 当曲线嵌入到高维空间中, 可以有非零的外曲率, 但这不是内蕴性质.

当维数  $m=2$  时  $C_2=1$ , 只有一个独立的分量, 本质上是高斯曲率.

当维数  $m=3$  时  $C_3=6$ ,  $m=4$  时  $C_4=20$ .

### 5.2.2 Ricci 曲率、标量曲率

定义 Ricci 曲率张量  $R_{cb}$  和标量曲率  $R$ ,

$$R_{cb} \stackrel{def}{=} R_{cab}^a \equiv g^{ad} R_{dcab} = -g^{ad} R_{dcba}. \quad (5.2-9)$$

$$R \stackrel{def}{=} g^{ab} R_{ab}. \quad (5.2-10)$$

从 Ricci 曲率张量定义可以看到：它是一个对称张量。由式(5.2-4)和(5.2-3)可知，

$$\begin{aligned} g^{ab} R_{abcd} &= 0 = g^{cd} R_{abcd}, \\ R_{bd} &= g^{ac} R_{abcd} = -g^{ac} R_{abdc} = -g^{ac} R_{bacd} = +g^{ac} R_{badc}. \end{aligned}$$

所以 Ricci 曲率  $R_{bd}$  本质上是唯一能从  $R_{abcd}$  构造出来的二阶张量。同样，标量曲率本质上也是唯一的，

$$0 = g^{ab} g^{bd} R_{abcd}, \quad R = g^{bd} g^{ac} R_{abcd}.$$

由全反对称性(5.2-7)可得  $\epsilon^{abcd} R_{abcd} = 0$ ；所以，由反对称性构造标量的途径也被否定了。

**例 5.13** 对比 Wald<sup>[5]</sup>和 MTW<sup>[4]</sup>（也是本书习惯）黎曼曲率张量的符号差异。

**解：**MTW 定义可见其书中式 (16.6a)，或者本书的式(4.2-2)及(4.2-3)。Wald 定义见其书中式 (3.2.11)。由于两本书的定义差异，先对比 (0, 4) 型黎曼张量会更方便些。见下两式

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = +^W R_{abcd} \omega^d = +^W R_{cdab} \omega^d, \quad (5.2-11)$$

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = -^M R_{dcab} \omega^d = +^M R_{cdab} \omega^d. \quad (5.2-12)$$

可见 (0, 4) 型黎曼张量定义是相同的。MTW 书中规定 (0, 4) 型黎曼张量的第 1、3 指标收缩后是 Ricci 曲率，Wald 书中规定 (0, 4) 型黎曼张量的第 2、4 指标收缩后是 Ricci 曲率；两种收缩方式本质相同，所以两书中的 Ricci 曲率也是相同的。

从两书相同的 (0, 4) 型黎曼张量出发，对比 (1, 3) 型黎曼张量，

$$+^W R_{cdab} \omega^d = +^W R_{c \cdot ab}^d \omega_d = +^W R_{cab}^d \omega_d, \quad (5.2-13)$$

$$+^M R_{cdab} \omega^d = -^M R_{c \cdot ab}^d \omega_d = -^M R_{cab}^d \omega_d. \quad (5.2-14)$$

对比 (1, 3) 型黎曼张量差异，不需要顾忌协变、逆变之间的排序；由相同 (0, 4) 型变成他们书中各自的 (1, 3) 型后，只需让协变、逆变各排各的。由上两式可见他们的 (1, 3) 型黎曼张量定义相差一个负号。其实对比分量表达式更容易看出异同。

或者这样理解，Wald 书中由  ${}^W R_{cab}^d$  中的  $b, d$  指标收缩得到 Ricci 张量，MTW 书中由  ${}^W R_{cab}^d$  中的  $d, a$  指标收缩得到 Ricci 张量；两种不同的收缩方式会产生一个负号差异，而两书的 (1, 3) 型黎曼张量本身就有有一个负号差异，最终导致两书的 Ricci 张量相同。 ■

### 5.2.3 爱因斯坦张量

定义爱因斯坦张量  $G_{ab}$  为

$$G_{ab} \stackrel{def}{=} R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} R. \quad (5.2-15)$$

其中  $R_{ab}, R$  分别是 Ricci 曲率和标量曲率.

由第二 Bianchi 恒等式(4.2-11)可以证明爱因斯坦张量的一个重要特征. 首先, 利用度规  $g_{ab}$  与联络  $\nabla_c$  相容, 先将式(4.2-11)中的上指标“ $d$ ”降下来, 再对式(4.2-11)两端进行缩并运算, 得

$$\begin{aligned} 0 &= g^{ec} g^{ad} (\nabla_a R_{debc} + \nabla_b R_{deca} + \nabla_c R_{deab}) = g^{ec} (\nabla^a R_{aebc} - \nabla_b R_{ec} + \nabla_c R_{eb}) \\ &= \nabla^a R_{ab} - \nabla_b R + \nabla^e R_{eb} = 2\nabla^a R_{ab} - \nabla_b R. \end{aligned} \quad (5.2-16)$$

上式称为收缩 Bianchi 微分恒等式. 由此式可得如下重要公式 (对爱因斯坦张量求散度),

$$\nabla^a G_{ab} = \nabla^a R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \nabla^a R = 0. \quad (5.2-17)$$

需注意, 上面关于爱因斯坦张量的微分恒等式对任意  $m$  维广义黎曼流形都成立.

### 5.2.4 Weyl 张量

设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 定义 Weyl 张量, 也称为共形张量 (要求  $m \geq 3$ ),

$$\begin{aligned} C_{abcd} \stackrel{def}{=} R_{abcd} - \frac{1}{m-2} (g_{ac} R_{bd} - g_{ad} R_{bc} + g_{bd} R_{ac} - g_{bc} R_{ad}) \\ + \frac{1}{(m-1)(m-2)} (g_{ac} g_{bd} - g_{ad} g_{bc}) R. \end{aligned} \quad (5.2-18)$$

一维、二维流行中无法定义 Weyl 张量.

Weyl 张量有黎曼张量的全部对称性, 见定理5.11. 除此之外, Weyl 张量的迹是零,

$$g^{ac} C_{abcd} = 0. \quad (5.2-19)$$

直接计算即可证明上式. 当只考虑 Weyl 张量与黎曼张量有相同的对称性, 可以得到独立个数相同于黎曼张量独立个数; 但考虑到“指标” $(ab)$  和  $(cd)$  对称性, 上式对独立 Weyl 张量分量个数给出的限制是  $\frac{1}{2}m(m+1)$ , 最终 Weyl 张量独立分量个数是

$$C_m = \frac{1}{12} m^2 (m^2 - 1) - \frac{1}{2} m(m+1) = \frac{1}{12} m(m+1)(m+2)(m-3). \quad (5.2-20)$$

当  $m=3$  时, 独立 Weyl 张量是零; 当  $m=4$  时, 独立 Weyl 张量是  $C_4 = 10$  个.

三维空间中, 黎曼曲率和 Ricci 曲率都有 6 个独立分量, 上面的公式也说明此时独立 Weyl 张量的分量个数是零, 所以 Ricci 曲率代表了全部黎曼曲率, Weyl 张量恒为零.

### 5.2.5 四维流形的曲率

#### 5.2.5.1 黎曼曲率

由式(5.2-8)可知四维黎曼曲率独立分量个数是 20 个. 从定理5.11经过对称性分析, 可将  $R_{abcd}$  指标取为  $(ab)$  和  $(cd)$  的矩阵, 写成表格5.1. 因为此矩阵是对称的, 所以只需写出一半; 同时这个表格忽略了恒为零的分量. 考虑到循环恒等式(4.2-10), 有  $R_{1234} + R_{1342} + R_{1423} = 0$ , 可令  $R_{1234}$  不独立, 已在表中消掉.

表 5.1: 独立黎曼曲率分量

分量 \ 列 行	N=2 (12)	N=3 (13) (23)		N=4 (14) (24) (34)		
(12)	1212	1213	1223	1214	1224	<del>1234</del>
(13)		1313	1323	1314	1324	1334
(23)			2323	2314	2324	2334
(14)				1414	1424	1434
(24)					2424	2434
(34)						3434

### 5.2.5.2 Bianchi 恒等式

此处, 我们只讨论四维流形上的 Bianchi 恒等式(4.2-11)  $R_{ij[kl;s]} = 0$ . 前两个指标  $(ij)$  是对称的, 所以有 6 个可区分; 后三个指标要求  $k \neq l \neq s$  且反对称循环相加, 所以只有  $C_4^3 = 4$  个可区分, 综上, 共有 24 个可区分的 Bianchi 恒等式. 但是由于各种对称性, 下列四个式子是恒为零的 (请读者自行验证), 不能算作方程等式,

$$\begin{aligned} R_{12[34;1]} - R_{13[41;2]} + R_{14[12;3]} &= 0, & R_{23[41;2]} - R_{24[12;3]} + R_{21[23;4]} &= 0, \\ R_{34[12;3]} - R_{31[23;4]} + R_{32[34;1]} &= 0, & R_{41[23;4]} - R_{42[34;1]} + R_{43[41;2]} &= 0. \end{aligned} \quad (5.2-21)$$

这导致 Bianchi 恒等式只有 20 个线性独立.

## 5.3 等距映射

给定两个广义黎曼流形  $(M, g)$  和  $(N, h)$ , 它们的维数分别是  $m$  和  $n$ , 且  $m \leq n$ ; 两个流形间存在光滑浸入映射  $\phi: M \rightarrow N$ .

**定义 5.14** 如果  $g_{ab} = \phi^* h_{ab}$ , 即  $\forall p \in M$ , 以及  $\forall u^a, v^b \in T_p M$  都有

$$g_{ab} u^a v^b = h_{ab} (\phi_* u^a) (\phi_* v^b), \quad (5.3-1)$$

则称  $\phi$  是从  $(M, g)$  到  $(N, h)$  的一个**等距浸入映射**.

等距浸入在局部上必是等距嵌入. 等距浸入不要求两个流形维数相等. 浸入映射  $\phi$  会将  $(N, h)$  中的度规拉回到  $M$  中, 这时  $M$  中有两个度规, 但  $g_{ab}$  未必等于  $\phi^* h_{ab}$ ; 只有两者相等才是等距的.

**定义 5.15** 如果  $\phi$  是等距浸入映射, 再要求  $\phi$  是微分同胚, 那么称  $\phi$  是从  $(M, g)$  到  $(N, h)$  的一个**整体等距同胚映射**.



**定义 5.16** 如果  $\phi$  是等距浸入映射, 再要求  $\phi_*$  是  $T_p M$  到  $T_{\phi(p)} N$  的线性同构, 那么称  $\phi$  是从  $(M, g)$  到  $(N, h)$  的一个**局部等距同构映射**.

局部等距同构映射并不要求整体上是微分同胚, 只要求是切空间的线性同构即可.

**例 5.17** 设  $S^1$  是  $\mathbb{R}^2$  中的单位圆, 指数映射  $\exp \equiv (\cos t, \sin t) : \mathbb{R}^1 \rightarrow S^1$ , 将  $\mathbb{R}^1$  中的非紧致开集映射到  $\mathbb{R}^2$  中的紧致闭子集  $S^1$ . 指数映射  $\exp$  只是切空间的局部等距同构映射, 不是流形上的整体等距同胚映射. 流形  $\mathbb{R}$  和  $S^1$  之间不存在微分同胚映射.

**例 5.18** 设两个黎曼流形  $(M, g)$  和  $(N, h)$  间存在整体等距同胚映射  $\phi : M \rightarrow N$ , 再设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  分别是  $M$  和  $N$  的局部坐标. 依照等距同胚的定义, 参考式(2.5-5), 有

$$g_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b = h_{ab} \left( \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \right) \left( \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b \right) \Leftrightarrow g_{ij} = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} h_{\alpha\beta}. \quad (5.3-2)$$

这便是等距同胚 (或局部等距同构) 在局部坐标系下的具体表示.

### 5.3.1 等距同胚保联络不变

**定理 5.19** 给定两个广义黎曼流形及 Levi-Civita 联络  $(M, \nabla_a, g)$  和  $(N, D_a, h)$ , 它们之间存在局部等距映射  $\phi : M \rightarrow N$ ; 那么,  $\forall p \in M$ , 和  $\forall X^a \in T_p M$ ,  $\forall Y^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 都有

$$\phi_*(\nabla_X Y^a) = D_{\phi_* X}(\phi_* Y^a). \quad (5.3-3)$$

也就是说, 作用在切矢量场上的 Levi-Civita 联络  $\nabla_a$  和  $D_a$  在局部等距映射下形式不变.

**证明.** 设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  分别是  $M$  和  $N$  的局部坐标. 式(5.3-3)左端为

$$\phi_*(\nabla_X Y^a) = \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \right) \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a + (X^i Y^j) \phi_* \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right].$$

式(5.3-3)右端为 (参考式(2.5-5))

$$D_{\phi_* X}(\phi_* Y^a) = X^i \left( \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial Y^j}{\partial y^\alpha} \right) \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a + X^i Y^j \phi_* \left( D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right).$$

综合上面两式, 可知要证明式(5.3-3), 等价于证明

$$\phi_* \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right) = D_{\phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right). \quad (5.3-4)$$

式(5.3-4)左端为

$$\phi_* \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right) = \phi_* \left( \Gamma_{ji}^k(x) \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a \right) = \Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^k} \left( \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right)^a.$$

其中  $\Gamma$  是  $\nabla_a$  的联络系数. 式(5.3-4)右端为

$$D_{\phi_* \frac{\partial}{\partial x^i}} \left( \phi_* \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a \right) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} D_{\frac{\partial}{\partial y^\alpha}} \left( \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a \right)$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial y^\beta} \right)^a \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \right) + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \gamma_{\beta\alpha}^\rho \left( \frac{\partial}{\partial y^\rho} \right)^a.$$

其中  $\gamma$  是  $D_a$  联络系数. 综合上述两式, 要证明式(5.3-4)等价于证明

$$\Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \gamma_{\beta\alpha}^\rho(y). \quad (5.3-5)$$

要证明上式, 需要用到局部等距的定义, 以及式(5.3-2)和它的逆变换 (即下式),

$$h_{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial x^i}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial y^\beta} g_{ij}(x), \quad h^{\alpha\beta}(y) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} g^{ij}(x). \quad (5.3-6)$$

式(5.3-5)右端第二项为 (注意将上式带入)

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \gamma_{\beta\alpha}^\rho(y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} h^{\pi\rho} \left( \frac{\partial h_{\alpha\pi}}{\partial y^\beta} + \frac{\partial h_{\pi\beta}}{\partial y^\alpha} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial y^\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} \frac{\partial y^\pi}{\partial x^l} g^{kl} \left[ \frac{\partial}{\partial y^\beta} \left( \frac{\partial x^o}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^n}{\partial y^\pi} g_{on} \right) + \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \left( \frac{\partial x^o}{\partial y^\pi} \frac{\partial x^n}{\partial y^\beta} g_{on} \right) - \frac{\partial}{\partial y^\pi} \left( \frac{\partial x^o}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^n}{\partial y^\beta} g_{on} \right) \right] \\ &= \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^o} \frac{\partial^2 x^o}{\partial y^\beta \partial y^\alpha} + \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k(x). \end{aligned}$$

上式计算较为冗长, 中间省略了一些步骤, 请读者补齐. 将上式带入式(5.3-5)中, 得

$$\Gamma_{ji}^k(x) \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 y^\rho}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial y^\rho}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^\beta \partial y^\alpha} + \frac{\partial y^\rho}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k(x). \quad (5.3-7)$$

利用式(4.1-5)发现上式是个恒等式, 这样便证明了(5.3-5), 进而(5.3-4), 最终(5.3-3). ■

**注 5.20** 其实还可以更简单地证明. 由于  $\phi$  是微分同胚映射, 那么可以认为两个坐标卡是恒等的, 即  $y^i \equiv x^i$ . 式(5.3-5)立马变成了恒等式.

**命题 5.21** 给定两个黎曼流形及 Levi-Civita 联络  $(M, \nabla_a, g)$  和  $(N, D_a, h)$ , 它们之间存在局部等距映射  $\phi: M \rightarrow N$ ; 那么,  $\forall p \in M$ , 和  $\forall X^a \in T_p M$ ,  $\forall f \in C^\infty(M)$ , 都有

$$\Phi_*(\nabla_X f) = D_{\phi_* X}(\phi^{-1*} f). \quad (5.3-8)$$

也就是说, 作用在标量场上的 Levi-Civita 联络在局部等距映射下不变.  $\Phi_*$  定义与定理 2.69 中的  $\Phi^*$  定义类似, 矢量  $X^a \in T_p M$  需要用  $\phi_*$  推前, 而  $f \in C^\infty(M)$  需要用  $\phi^{-1*}$  拉回到  $C^\infty(N)$ .

**证明.** 式(5.3-8)左端为

$$\Phi_*(\nabla_X f) = \phi^{-1*}(X(f)) = (X^i \circ \phi^{-1}) \cdot \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}.$$

式(5.3-8)右端为

$$D_{\phi_* X}(\phi^{-1*} f) = \phi_* X(\phi^{-1*}(f)) = (X^i \circ \phi^{-1}) \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial y^\alpha} = (X^i \circ \phi^{-1}) \frac{\partial f \circ \phi^{-1}}{\partial x^i}.$$

综合以上两式, 可见命题正确. ■

**命题 5.22** 给定两个黎曼流形及 Levi-Civita 联络  $(M, \nabla_a, g)$  和  $(N, D_a, h)$ , 它们之间存在局部等距映射  $\phi: M \rightarrow N$ ; 那么,  $\forall p \in M$ , 和  $\forall X^a \in T_p M$ ,  $\forall \omega_a \in \mathfrak{X}^*(M)$ , 都有

$$\Phi_*(\nabla_X \omega_a) = D_{\phi_* X}(\phi^{-1*} \omega_a). \quad (5.3-9)$$

也就是说, 作用在协变矢量场上的 Levi-Civita 联络在局部等距映射下不变.

**证明** . 利用命题5.21和定理5.19容易证明本命题.  $\forall Y^a \in \mathfrak{X}(M)$  有

$$\begin{aligned} \Phi_*(\nabla_X(\omega_a Y^a)) &= \Phi_*((\nabla_X \omega_a)Y^a + \omega_a \nabla_X Y^a) \\ &= (\Phi_*(\nabla_X \omega_a))\phi_* Y^a + \phi^{-1*}(\omega_a)D_{\phi_* X}(\phi_* Y^a). \end{aligned}$$

而  $\omega_a Y^a$  本身还是标量场, 还可使用式(5.3-8)操作

$$\begin{aligned} \Phi_*(\nabla_X(\omega_a Y^a)) &= D_{\phi_* X}(\phi^{-1*}(\omega_a Y^a)) = D_{\phi_* X}((\phi^{-1*} \omega_a)(\phi_* Y^a)) \\ &= (D_{\phi_* X}(\phi^{-1*} \omega_a))(\phi_* Y^a) + (\phi^{-1*} \omega_a)(D_{\phi_* X}(\phi_* Y^a)). \end{aligned}$$

综合以上两式, 可证式(5.3-9). ■

综上所述, 局部等距映射保 Levi-Civita 联络 (可作用在任何  $(r, s)$  型张量场上) 不变; 尤其作用在黎曼曲率、Ricci 曲率、标量曲率、Weyl 曲率和爱因斯坦张量上是保形式不变的. 如果把局部等距同构变成整体等距同胚, 上面所有定理仍旧正确.

鉴于黎曼曲率的重要性, 我们还是将其叙述成定理形式,

**定理 5.23** 设有局部等距映射  $\phi: M \rightarrow N$ .  $\forall p \in M$ , 及  $\forall X^a, Y^a, Z^a, W^a \in T_p M$ , 有

$$\Phi_*(R_{dcab}^M X^a Y^b Z^c W^d) = R_{dcab}^N (\phi_* X^a)(\phi_* Y^b)(\phi_* Z^c)(\phi_* W^d). \quad (5.3-10)$$

其中  $R_{dcab}^M$  是  $M$  上的曲率,  $R_{dcab}^N$  是  $N$  上的曲率; 并且  $R_{dcab}^M = \phi^* R_{dcab}^N$ .

**定理 5.24** 设两个广义黎曼流形  $(M, g, \nabla_a)$  和  $(N, h, D_a)$  间存在局部等距同构  $\phi: M \rightarrow N$ . 则  $\gamma(t)$  是  $M$  上测地线的充要条件是  $\tilde{\gamma} \equiv \phi \circ \gamma$  是  $N$  上测地线.

**证明** . 流形  $M$  上测地线是  $\gamma(t)$  (定义见4.14); 它在流形  $N$  中的像曲线是  $\phi \circ \gamma(t)$ . 通过式(2.5-8)可知两条曲线的切矢量关系是 (因  $\phi$  是局部等距, 下式不只在  $t=0$  点成立, 而在整条曲线上成立, 即参数  $t$  可取定义域内所有值)

$$\phi_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(t)} \right)^a = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\phi \circ \gamma(t)} \right)^a. \quad (2.5-8)$$

那么由局部等距保联络不变性可知

$$\phi_* \left( \nabla_{\frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(t)}} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(t)} \right)^a \right) = \nabla_{\phi_* \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(t)}} \phi_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(t)} \right)^a = \nabla_{\frac{d}{dt} \Big|_{\phi \circ \gamma(t)}} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\phi \circ \gamma(t)} \right)^a.$$

上式说明:  $\gamma(t)$  是测地线等价于  $\phi \circ \gamma(t)$  是测地线. ■

### 5.3.2 Killing 向量场

本节初步涉及一点对称性知识, 在第??章将进一步讲述黎曼对称空间. 德国数学家 Wilhelm Killing (1847 - 1923) 给出了广义黎曼流形中的局部等距同构变换无穷小生成元, 即现今被称为 Killing 向量场的知识.

**定义 5.25** 广义黎曼流形  $(M, g)$  上处处非零的光滑切向量场  $\xi^a$  被称为 **Killing 向量场** 是指: 如果  $\xi^a$  诱导出的局部单参数变换群是局部等距同构变换.

设切向量场是  $\xi^a$  诱导出的 (局部) 单参数微分同胚群是  $\phi_t: M \rightarrow M$  (见 §2.10), 由定义 5.16 可知, 局部等距同构是指  $g_{ab} = \phi_t^* g_{ab}$  对任意  $t$  成立.

**定理 5.26**  $\xi^a$  为 Killing 向量场的充要条件是满足如下条件之一即可,

$$(1): \mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0. \quad (5.3-11)$$

$$(2): \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \Leftrightarrow \nabla_{(a} \xi_{b)} = 0 \Leftrightarrow \nabla_a \xi_b = \nabla_{[a} \xi_{b]}. \quad (5.3-12)$$

**证明.** 参考李导数定义(2.11-3)可知局部等距同构等价于  $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ , 这说明条件 (1) 正确. 由下式可以直接得到条件 (2) 也正确, 式(5.3-12)被称为 **Killing 方程**.

$$0 = \mathcal{L}_\xi g_{ab} \stackrel{4.1-31}{=} \xi^c \nabla_c g_{ab} + g_{cb} \nabla_a \xi^c + g_{ac} \nabla_b \xi^c = \nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a. \quad (5.3-13)$$

证明过程中注意广义黎曼流形  $(M, g)$  的 Levi-Civita 联络是无挠、容许联络. ■

将 Killing 方程(5.3-12)的指标收缩, 可得一个常用公式,

$$\nabla_a \xi^a = 0. \quad (5.3-14)$$

#### 5.3.2.1 基本性质

**定理 5.27** 非零  $\xi^a$  是局部开集  $U$  的 Killing 向量场的充分必要条件是: 存在局部坐标系  $(U; x^i)$  使得度规场  $g_{ab}$  的全部分量满足  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} = 0$ , 并且  $\xi^a|_U = (\frac{\partial}{\partial x^1})^a$ .

**证明.** 先证 “ $\Rightarrow$ ”. 由定理 2.84 可知, 对于任意非零 Killing 向量场  $\xi^a$  都存在局部适配坐标系  $(U; x^i)$  使得  $\xi^a|_U = (\frac{\partial}{\partial x^1})^a$ . 因  $\xi^a$  是 Killing 向量场, 故

$$\mathcal{L}_\xi g_{ij} \stackrel{2.11-18}{=} (\mathcal{L}_\xi g_{ab}) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b = 0 \Rightarrow 0 = \mathcal{L}_\xi g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1}. \quad (5.3-15)$$

再证 “ $\Leftarrow$ ”.  $(\frac{\partial}{\partial x^1})^a$  可以看作是  $U$  上的一个切向量场, 并且  $\{x^i\}$  就是局部适配坐标系. 根据 §2.10 中理论可知, 它一定会诱导一个局部单参数可微变换群  $\phi_t: U \rightarrow U$ .  $\forall f \in C^\infty(U)$ ,  $\phi_t$  所诱导出的李导数就是  $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^1}} f = \frac{\partial f}{\partial x^1}$ . 把它应用到度规场  $g_{ab}$  上, 有

$$0 = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^1} = \mathcal{L}_\xi g_{ij} \stackrel{2.11-18}{=} (\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^1}} g_{ab}) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^b. \quad (5.3-16)$$

因局部自然标架场  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$  恒不为零, 故必有  $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x^1}} g_{ab} = 0$ ; 所以  $(\frac{\partial}{\partial x^1})^a$  是局部开集  $U$  上的 Killing 矢量场. ■

**例 5.28** 与例5.18类似, 设有广义黎曼流形  $(M, g)$ , 存在单参数微分变换群  $\phi_t: M \rightarrow M$ . 再设  $(U; x^i)$  和  $(V; y^\alpha)$  分别是  $\forall p \in M$  和  $q = \phi_t(p) \in M$  的局部坐标, 即  $y^\alpha = \phi_t(x^i)$ . 若  $\phi_t$  还是局部等距同构变换, 那么局部等距的定义5.16的局部坐标系表达式为 (只需将式(5.3-2)中的  $h$  换成  $g$  即可)

$$g_{ij}(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} g_{\alpha\beta}(y). \quad (5.3-17)$$

如果  $U \cap V \neq \emptyset$ , 那么微分同胚映射  $\phi_t$  可以看成  $U \cap V$  中的局部坐标变换; 式(5.3-17)是对这个局部坐标变换的限制.

需要注意, 变换式(5.3-17)与张量坐标变换式(2.4-20)是不同的; 张量坐标变换式应用到度规上是  $\tilde{g}_{ij}(x) = \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j} g_{\alpha\beta}(y)$ , 等号左端是  $\tilde{g}$  不是  $g$ . 如果局部等距同构换成整体等距同胚, 上面论述同样成立. 这是用分量语言来描述 Killing 矢量场, 式(5.3-17)也可当作 Killing 矢量场定义.

**例 5.29** 设  $\xi^a$  和  $\eta^a$  是广义黎曼流形  $(M, g)$  上的两个 Killing 矢量场.

$$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]} g_{ab} \stackrel{4.1-36}{=} \mathcal{L}_\xi \circ \mathcal{L}_\eta g_{ab} - \mathcal{L}_\eta \circ \mathcal{L}_\xi g_{ab} = \mathcal{L}_\xi(0) - \mathcal{L}_\eta(0) = 0. \quad (5.3-18)$$

故  $[\xi, \eta]^a$  也是 Killing 矢量场. 本例也可直接把  $[\xi, \eta]^a$  带入 Killing 方程(5.3-12)去证明.

**定理 5.30** 设两个广义黎曼流形  $(M, g, \nabla_a)$  和  $(N, h, D_a)$  间存在局部等距同构  $\phi: M \rightarrow N$ ,  $\xi^a \in \mathfrak{X}(M)$ . 则  $\phi_* \xi^a$  是  $N$  上 Killing 矢量场的充要条件是  $\xi^a$  是  $M$  上 Killing 矢量场.

**证明.** 由定理5.26出发,

$$\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a = 0 \Leftrightarrow \phi^{-1*}(\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) = 0 \stackrel{\text{定理 } 5.22}{\Leftrightarrow} D_a(\phi^{-1*} \xi_b) + D_b(\phi^{-1*} \xi_a) = 0.$$

上式便证明了定理. ■

**定理 5.31** 设有广义黎曼流形  $(M, g)$ ,  $\xi^a$  是其上 Killing 矢量场,  $T^a$  是其测地线  $\gamma(t)$  的切矢量. 那么有  $\nabla_T(T^a \xi_a) = 0$ , 即  $T^a \xi_a$  沿测地线  $\gamma(t)$  是常数.

**证明.** 测地线定义见4.14, 即  $\nabla_T T^a = 0$ .

$$\nabla_T(T^a \xi_a) = T^a \nabla_T \xi_a + \xi_a \nabla_T T^a = T^a T^b \nabla_b \xi_a \stackrel{5.26(2)}{=} T^{(a} T^{b)} \nabla_{[b} \xi_{a]} \stackrel{1.8-23}{=} 0.$$

在广义相对论中, 经常用到这个定理. ■

### 5.3.2.2 Killing 矢量场与曲率关系

Killing 矢量场  $\xi_a$  满足如下对易子式子 (见式(4.2-3))

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c = -R_{cab}^e \xi_e. \quad (5.3-19)$$

由上式和 Bianchi 第一恒等式(4.2-10)可得

$$\begin{aligned} 0 &= -R_{[cab]}^e \xi_e = \nabla_{[a} \nabla_b \xi_{c]} - \nabla_{[b} \nabla_a \xi_{c]} = \nabla_{[c} \nabla_a \xi_{b]} - \nabla_{[c} \nabla_b \xi_{a]} \xrightarrow{5.3-12} 2\nabla_{[c} \nabla_a \xi_{b]} \\ &\xrightarrow{5.3-12} 0 = \nabla_c \nabla_a \xi_b + \nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_b \nabla_a \xi_c. \end{aligned} \quad (5.3-20)$$

将式(5.3-20)带回(5.3-19)可得

$$\nabla_a \nabla_b \xi_c - \nabla_c \nabla_a \xi_b - \nabla_a \nabla_b \xi_c = -R_{cab}^e \xi_e \Rightarrow \nabla_c \nabla_a \xi_b = R_{cab}^e \xi_e. \quad (5.3-21)$$

这是 Killing 矢量场与黎曼曲率的关系式之一. 将上式中指标收缩可得另一关系式,

$$\nabla_c \nabla^c \xi_b = -R_{eb} \xi^e. \quad (5.3-22)$$

用 Killing 场  $\xi^b$  缩并约化 Bianchi 恒等式(5.2-16)两端, 经计算可得

$$\xi^b \nabla_b R = 0. \quad (5.3-23)$$

这是第三个 Killing 场与曲率间的关系式.

**定理 5.32**  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上最多有  $m(m+1)/2$  个线性独立 Killing 矢量场.

**证明.** 定理中独立是指  $\mathbb{R}$ -线性独立<sup>1.37</sup>, 不是  $C^\infty(M)$ -线性独立 (见第76页及82页).

在给出点  $p$  的  $\xi_a$  和  $\nabla_b \xi_a$  后, 我们可以从式(5.3-21)决定  $\xi_a$  在  $p$  点的二阶导数. 对式(5.3-21)继续求协变导数则可陆续得出  $\xi_a$  在  $p$  点的高阶导数, 所有高阶导数都可表示成  $\xi_a(p)$  和  $\nabla_b \xi_a(p)$  的  $C^\infty(M)$  线性组合. 于是, 在点  $p$  的某个小邻域内, 任意度规  $g_{ab}$  的 Killing 矢量场  $\xi_a(x)$  都可以表示为  $x^\mu - x_p^\mu$  的 Taylor 级数 (如果它存在).

$$\xi_a(x) = \xi_p(x) (dx^\rho)_a = (dx^\rho)_a \left( \xi_p(p) + \xi_{p;\mu}(p)(x^\mu - x_p^\mu) + \frac{1}{2!} \xi_{p;\mu;\nu}(p)(x^\mu - x_p^\mu)(x^\nu - x_p^\nu) + \cdots \right)$$

依照前面分析, 所有高于一阶的导数都能表示为  $\xi_a(p)$  和  $\nabla_b \xi_a(p)$  的  $C^\infty(M)$  线性组合; 故将上式重新组合为

$$\xi_a(x) = (dx^\rho)_a \left( A_\rho^\lambda(x^\mu; p) \xi_\lambda(p) + B_\rho^{\lambda\nu}(x^\mu; p) \xi_{\lambda;\nu}(p) \right). \quad (5.3-24)$$

对于  $m$  维流形,  $\xi_\lambda(p)$  有  $m$  个分量指标,  $\xi_{\lambda;\nu}(p)$  的分量指标有  $m(m-1)/2$  个独立 (因反对称关系(5.3-12)).

我们来看看  $p$  点邻域内共有多少个  $\mathbb{R}$ -线性独立的  $\xi_a^n(x)$ , 这些  $\xi_a^n(x)$  都可以表示成式(5.3-24)的样子, 只需要在右上角增加角标  $n$ . 我们假设当有  $N$  个  $\xi_a^n(x)$  时, 存在非零实常数  $\{c_n\}$  使得下式成立,

$$0 = \sum_{n=1}^N c_n \xi_\rho^n(x) = A_\rho^\lambda(x^\mu; p) \sum_{n=1}^N (c_n \xi_\lambda^n(p)) + B_\rho^{\lambda\nu}(x^\mu; p) \sum_{n=1}^N (c_n \xi_{\lambda;\nu}^n(p)). \quad (5.3-25)$$

如果  $N$  是个极大的正整数, 那么上式必然成立; 我们是来求  $N$  的最小值. 由于  $A_\rho^\lambda(x^\mu; p)$  和  $B_\rho^{\lambda\nu}(x^\mu; p)$  是  $C^\infty(M)$  函数场, 它们不会为零; 故要使式(5.3-25)成立, 必然等价于

$$\sum_{n=1}^N (c_n \xi_\lambda^n(p)) = 0 \quad \text{并且} \quad \sum_{n=1}^N (c_n \xi_{\lambda;\nu}^n(p)) = 0. \quad (5.3-26)$$

我们把上式改成一个线性代数方程组

$$\begin{pmatrix} \xi_1^1(p) & \xi_1^2(p) & \cdots & \xi_1^N(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_m^1(p) & \xi_m^2(p) & \cdots & \xi_m^N(p) \\ \xi_{1;2}^1(p) & \xi_{1;2}^2(p) & \cdots & \xi_{1;2}^N(p) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \xi_{m-1;m}^1(p) & \xi_{m-1;m}^2(p) & \cdots & \xi_{m-1;m}^N(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = 0. \quad (5.3-27)$$

显然只有  $N > m(m+1)/2$  时 (列数大于行数), 上式才肯定有非零解; 故点  $p \in M$  邻域内  $\mathbb{R}$ -线性独立的 Killing 矢量场  $\xi_a(x)$  的最大个数是  $m(m+1)/2$ . ■

### 5.3.2.3 平直闵氏空间的 Killing 矢量场

本节试着找到  $m+1$  维平直 (黎曼曲率为零) 闵可夫斯基空间  $\mathbb{R}^{m+1}$  的全部 Killing 矢量场. 根据定理5.32可知  $\mathbb{R}^{m+1}$  最多有  $(m+2)(m+1)/2$  个  $\mathbb{R}$ -线性独立的 Killing 矢量场. 求解 Killing 方程是寻找 Killing 矢量场的通用方式; 一般说来在弯曲时空这种方式很难奏效 (方程复杂, 很难求出精确解), 但在平直时空却很好用.  $\mathbb{R}^{m+1}$  的度规场是

$$\eta_{ab} = -(\mathrm{d}x^0)_a(\mathrm{d}x^0)_b + \sum_{i=1}^m (\mathrm{d}x^i)_a(\mathrm{d}x^i)_b. \quad (5.3-28)$$

对于平直空间, 黎曼曲率恒为零, 协变导数变为偏导数; 自然坐标基矢场  $(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a$  和其对偶基矢场  $(\mathrm{d}x^\mu)_a$  都是常矢量场, 不逐点变化. 由式(5.3-21)可知

$$\partial_c \partial_a \xi_b = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi_\sigma}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = 0. \quad (5.3-29)$$

这说明  $\xi_b = \xi_\mu (\mathrm{d}x^\mu)_b$  的系数  $\xi_\mu$  是坐标  $x_\alpha$  的线性函数, 即

$$\xi_\mu = \sum_{\alpha} c_{\mu\alpha} x_\alpha + a_\mu, \quad c_{\mu\alpha}, a_\mu \text{ 是实常数}. \quad (5.3-30)$$

平直闵氏空间的 Killing 方程(5.3-12)是

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \xi_\nu}{\partial x^\mu} = 0. \quad (5.3-31)$$

式(5.3-30)最简单情形为  $c_{\mu\alpha} = 0$ ,  $a_\mu \neq 0$ , 它自然满足 Killing 方程(5.3-31), 故下式

$$\xi^a = \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right)^a, \quad 0 \leq \mu \leq m, \quad \text{共 } m+1 \text{ 个} \quad (5.3-32)$$

是平直闵氏空间的 Killing 矢量场, 我们将其标记为第一组. 上式中取  $a_\mu = 1$ ; 如果  $a_\mu$  取任何非零实常数都不会导致新的  $\mathbb{R}$ -线性独立 Killing 矢量场. 下面只讨论  $a_\mu = 0$  情形.

将式(5.3-30)带入 Killing 方程(5.3-31)得

$$0 = \sum_{\alpha} \frac{\partial c_{\mu\alpha} x_{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \sum_{\alpha} \frac{\partial c_{\nu\alpha} x_{\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \sum_{\alpha} c_{\mu\alpha} \eta_{\alpha\nu} + \sum_{\alpha} c_{\nu\alpha} \eta_{\alpha\mu}. \quad (5.3-33)$$

当  $\mu = \nu$  时, 式(5.3-33)变成了

$$0 = \sum_{\alpha} c_{\mu\alpha} \eta_{\alpha\mu} = c_{\mu\mu} \eta_{\mu\mu}, \quad \text{重复指标}\mu\text{不求和}. \quad (5.3-34)$$

$\eta_{\mu\mu} = \pm 1$ , 这说明  $c_{\mu\mu} = 0$ , 也就是 Killing 场分量  $\xi_\mu$  不含  $x^\mu$  (或  $x_\mu$ ).

下面只考虑  $\mu \neq \nu$  的情形, 式(5.3-33)变成了

$$0 = c_{\mu\nu} \eta_{\nu\nu} + c_{\nu\mu} \eta_{\mu\mu}, \quad \text{重复指标不求和}. \quad (5.3-35)$$

下面针对平直闵氏空间开始讨论式(5.3-35); 因度规  $\eta = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ , 其中“-1”只有一个, 所以可以取  $\mu = 0, \nu = i (i > 0)$ , 有

$$0 = c_{0i} \eta_{ii} + c_{i0} \eta_{00} = c_{0i} - c_{i0}. \quad (5.3-36)$$

由上式可以得到平直闵氏空间的第二组 Killing 矢量场

$$\xi^a = x^0 \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a + x^i \left( \frac{\partial}{\partial x^0} \right)^a, \quad 1 \leq i \leq m, \quad \text{共 } m \text{ 个}. \quad (5.3-37)$$

因为系数  $c_{\mu\nu}$  是实常数, 不妨取其值为  $\pm 1$ , 这不影响 Killing 场的  $\mathbb{R}$ -线性独立性.

下面考虑度规  $\eta$  中“+1”部分; 可以取  $\mu = j, \nu = i (i \neq j > 0)$ , 式(5.3-35)变为

$$0 = c_{ji} \eta_{ii} + c_{ij} \eta_{jj} = c_{ji} + c_{ij}, \quad i \neq j > 0. \quad (5.3-38)$$

由上式可以得到平直闵氏空间的第三组 Killing 矢量场

$$\xi^a = -x^j \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a + x^i \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right)^a, \quad 1 \leq i < j \leq m, \quad \text{共 } \frac{m(m-1)}{2} \text{ 个}. \quad (5.3-39)$$

依据定理5.32可知, 上述三组 Killing 矢量场 (共有  $(m+2)(m+1)/2$  个) 是  $m+1$  维平直闵氏空间的全部 Killing 矢量场.

我们将在 §?? 继续探讨这些 Killing 矢量场的物理意义.



## 5.4 黎曼流形上的微分算子

本节介绍几个广义黎曼流形上的几个常用微分算子，这在数学、物理中有着较为广泛的应用；这些算子都是适用于整体的，都有局部坐标表示，它们为构造流形不变量提供了有力的工具。本节中我们假设  $(M, g)$  是  $m$  维、已定向的广义黎曼流形，自然选用 Levi-Civita 联络；如无特殊声明，假设局部坐标系是  $(U; x^i)$ 。

### 5.4.1 体积元

定向无非是给定一个  $m$  阶处处非零的微分型式场（见定义3.24）。在积分的定义中（见式(3.7-1)或(3.7-11)），也是对一个  $m$  阶微分型式场进行的。在有了度规后，可以定义一个与众不同的  $m$  阶微分型式场  $\Omega_{a_1 \dots a_m}$ ，称之为与度规  $g_{ab}$  适配的体积元，简称体元，

$$\Omega^{a_1 \dots a_m} \Omega_{a_1 \dots a_m} = (-)^s m!, \quad \text{其中 } \Omega^{a_1 \dots a_m} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_m b_m} \Omega_{b_1 \dots b_m}. \quad (5.4-1)$$

其中  $s$  是度规  $g_{ab}$  负本征值的个数（即式(1.5-16)中“-1”的个数），对于闵可夫斯基时空来说  $s = 1$ 。因为它是  $m$  阶的微分型式场，所以它的基矢量只有一个，它同构于标量函数场（见 §1.8.2.1）。设流形  $M$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ ，则体元  $\Omega_{a_1 \dots a_m}$  可以表示为

$$\Omega_{a_1 \dots a_m} = \Omega (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}. \quad (5.4-2)$$

将此式带入到式(5.4-1)中，有

$$\begin{aligned} (-)^s m! &= \Omega^2 g^{a_1 b_1} \dots g^{a_m b_m} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} (dx^1)_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{b_m} \\ &\stackrel{1.8-48}{=} \Omega^2 \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} g^{i_1 j_1} \dots g^{i_m j_m}, \quad \text{将 } \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \text{ 按定义展开, 得} \\ &= \Omega^2 \delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} ((g^{1j_1} \dots g^{mj_m}) - (g^{2j_1} g^{1j_2} \dots g^{mj_m}) + \dots), \quad \text{共 } m! \text{ 项} \\ &\stackrel{④}{=} m! \Omega^2 \delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} g^{1j_1} \dots g^{mj_m} \stackrel{1.8-38}{=} m! \Omega^2 \det(g^{ij}). \end{aligned}$$

其中 ④ 步是交换  $\{j\}$  中次序（以第二项为例：先进行变量代换，将哑标  $j_1 \rightarrow k, j_2 \rightarrow j_1$ ，即  $-\delta_{kj_1 j_3 \dots j_m}^{123 \dots m} g^{2k} g^{1j_1} \dots g^{mj_m}$ ；然后交换  $\delta_{kj_1 j_3 \dots j_m}^{123 \dots m}$  中的  $kj_1$  次序，会产生一个“-”，即变为  $+\delta_{j_1 k j_3 \dots j_m}^{123 \dots m} g^{2k} g^{1j_1} \dots g^{mj_m}$ ，与前面的负号刚好负负得正；接着再作变量替换  $k \rightarrow j_2$ ，这样第二项便与第一项完全相同；这样的项共有  $m!$  个。）。由此便可得到  $\Omega^2 = (-)^s g$ ，其中  $g \equiv \det(g_{ij})$ （注  $\det(g_{ij})$  与  $\det(g^{ij})$  刚好互为倒数）；便可得常用体积元

$$\Omega_{a_1 \dots a_m} = \pm \sqrt{(-)^s g} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}, \quad g \equiv \det(g_{ij}). \quad (5.4-3)$$

虽然是在局部坐标系下得到的表达式，但上式在坐标变换下是形式不变的，换句话说此式是定义在整个流形  $M$  上的；验证过程留给读者（即另选一个局部坐标系  $\{y\}$  进行坐标变换， $\sqrt{(-)^s g}$  会产生一个 Jacobi 行列式； $m$  阶外积也会产生一个 Jacobi 行列式；两者刚好互逆，故形式不变）。其实从求解过程便可看出此点，我们是从式(5.4-1)出发的，此式是缩并式，其

结果是在  $M$  上不变的. 虽然体积元  $\Omega_{a_1 \dots a_m}$  是整个流形上的坐标变换形式不变量, 但单独的  $(dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}$  以及标量函数场  $g \equiv \det(g_{ij})$  不是.

有了体积元, 再重复一下定向问题. 给定可定向的广义黎曼流形  $(M, g)$ , 其有坐标图册  $(U_\alpha, \varphi_\alpha; x_\alpha^j)$ , 坐标图册自身是定向相符合的. 若取式(5.4-3)的 “+”, 则称体积元与坐标图册同向; 若取 “-”, 则称体积元与坐标图册反向. 体积元本身就是一个定向.

如无特殊声明, 我们约定取同向, 也就是取式(5.4-3)的 “+”.

以后, 我们会经常遇到体积元间的缩并运算, 下面给出体积元缩并公式,

$$\Omega_{a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_m} \Omega^{b_1 \dots b_r a_{r+1} \dots a_m} = (-)^s (m-r)! r! \delta_{[a_1}^{b_1} \delta_{a_2}^{b_2} \dots \delta_{a_r]}^{b_r}, \quad 0 \leq r \leq m. \quad (5.4-4)$$

直接计算证明,

$$\begin{aligned} & \Omega_{a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_m} \Omega^{b_1 \dots b_r a_{r+1} \dots a_m} \\ &= (-)^s g (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} \otimes (dx^1)_{c_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{c_m} g^{b_1 c_1} \dots g^{b_r c_r} g^{a_{r+1} c_{r+1}} \dots g^{a_m c_m} \\ & \stackrel{1.8-48}{=} (-)^s g \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} (dx^{i_1})_{a_1} \otimes \dots \otimes (dx^{i_r})_{a_r} \otimes (dx^{j_1})_{c_1} \otimes \dots \otimes (dx^{j_r})_{c_r} \\ & \quad g^{b_1 c_1} \dots g^{b_r c_r} \cdot g^{i_{r+1} j_{r+1}} \dots g^{i_m j_m} \\ &= (-)^s \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} (dx^{i_1})_{a_1} \dots (dx^{i_r})_{a_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \right)^{b_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \right)^{b_r} \times g \times \\ & \quad \delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} g^{\mu_1 j_1} \dots g^{\mu_r j_r} g^{i_{r+1} j_{r+1}} \dots g^{i_m j_m}. \end{aligned}$$

上面最后一个等号的第二行, 即  $\delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} g^{\mu_1 j_1} \dots g^{\mu_r j_r} g^{i_{r+1} j_{r+1}} \dots g^{i_m j_m}$ , 无非是个行列式

$$\begin{vmatrix} g^{\mu_1 1} & \dots & g^{\mu_r 1} & g^{i_{r+1} 1} & \dots & g^{i_m 1} \\ g^{\mu_1 2} & \dots & g^{\mu_r 2} & g^{i_{r+1} 2} & \dots & g^{i_m 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g^{\mu_1 m} & \dots & g^{\mu_r m} & g^{i_{r+1} m} & \dots & g^{i_m m} \end{vmatrix} = g^{-1} \delta_{1 \dots m}^{\mu_1 \dots \mu_r i_{r+1} \dots i_m}. \quad (5.4-5)$$

带入上上式后继续计算,

$$\begin{aligned} & \Omega_{a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_m} \Omega^{b_1 \dots b_r a_{r+1} \dots a_m} \\ &= (-)^s \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} (dx^{i_1})_{a_1} \dots (dx^{i_r})_{a_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \right)^{b_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \right)^{b_r} g \cdot g^{-1} \delta_{1 \dots m}^{\mu_1 \dots \mu_r i_{r+1} \dots i_m} \\ & \stackrel{??}{=} (-)^s \delta_{i_1 \dots i_r i_{r+1} \dots i_m}^{\mu_1 \dots \mu_r i_{r+1} \dots i_m} (dx^{i_1})_{a_1} \dots (dx^{i_r})_{a_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \right)^{b_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \right)^{b_r} \\ & \stackrel{1.8-28}{=} (-)^s (m-r)! \delta_{i_1 \dots i_r}^{\mu_1 \dots \mu_r} (dx^{i_1})_{a_1} \dots (dx^{i_r})_{a_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \right)^{b_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \right)^{b_r} \\ & \stackrel{1.8-19}{=} (-)^s (m-r)! r! \delta_{[i_1}^{\mu_1} \dots \delta_{i_r]}^{\mu_r} (dx^{i_1})_{a_1} \dots (dx^{i_r})_{a_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \right)^{b_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x^{\mu_r}} \right)^{b_r}. \end{aligned}$$

上式最后一个等号是式(5.4-4)的分量形式. 证毕.  $\blacksquare$

$\forall X^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 有  $\nabla_X \Omega_{a_1 \dots a_m}$  是  $m$  次外微分型式场. 由于体元已是  $m$  维流形  $M$  中的最高次 ( $m$  次) 外微分型式场, 故此空间是一维空间, 必然有  $\nabla_X \Omega_{a_1 \dots a_m} = h \cdot \Omega_{a_1 \dots a_m}$ , 其中  $h \in C^\infty(M)$ . 由式(5.4-1)可知

$$0 = \Omega^{a_1 \dots a_m} \nabla_X \Omega_{a_1 \dots a_m} = h \cdot \Omega^{a_1 \dots a_m} \Omega_{a_1 \dots a_m} = h \cdot (-)^s m! \Rightarrow h = 0. \quad (5.4-6)$$

再因  $X^a$  的任意性, 可得到一个常用公式

$$\nabla_X \Omega_{a_1 \dots a_m} = 0 \Leftrightarrow \nabla_b \Omega_{a_1 \dots a_m} = 0. \quad (5.4-7)$$

虽然体积元的协变导数恒为零, 但是它的李导数不是零,

$$\mathcal{L}_X \Omega_{a_1 \dots a_m} \stackrel{\substack{4.1-34 \\ 5.4-7}}{=} d_{a_1} (X^b \Omega_{ba_2 \dots a_m}) = (\nabla_b X^b) \Omega_{a_1 \dots a_m}. \quad (5.4-8)$$

此式的证明过程与体积元协变导数证明过程类似; 同样由于体元已是  $m$  维流形  $M$  中的最高次外微分型式场, 所以有  $d_{a_1} (X^b \Omega_{ba_2 \dots a_m}) = h \cdot \Omega_{a_1 \dots a_m}$ , 其中  $h \in C^\infty(M)$ ; 用  $\Omega^{a_1 \dots a_m}$  缩并此式的等号两边, 可得

$$\begin{aligned} h \cdot \Omega^{a_1 \dots a_m} \Omega_{a_1 \dots a_m} &= \Omega^{a_1 \dots a_m} d_{a_1} (X^b \Omega_{ba_2 \dots a_m}) \stackrel{\substack{5.4-4 \\ 5.4-7}}{=} (-)^s m! \cdot h \\ &= m \Omega^{a_1 \dots a_m} \nabla_{a_1} (X^b \Omega_{ba_2 \dots a_m}) = m \Omega^{a_1 \dots a_m} \Omega_{ba_2 \dots a_m} \nabla_{a_1} X^b = (-)^s m(m-1)! \delta_b^{a_1} \nabla_{a_1} X^b \\ &\Rightarrow h = \nabla_b X^b. \end{aligned}$$

将  $h = \nabla_b X^b$  带回即可得到体积元的李导数公式.

### 5.4.2 Hodge 星对偶算子

设  $m$  维黎曼流形  $(M, g)$  有局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $\omega_{a_1 \dots a_r} \in A^r(M)$  的局部坐标表示为

$$\omega_{a_1 \dots a_r} = \frac{1}{r!} \omega_{i_1 \dots i_r} (dx^{i_1})_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^{i_r})_{a_r}, \quad \omega_{i_1 \dots i_r} \in C^\infty(U). \quad (5.4-9)$$

借助体积元 (见式(5.4-3)), 可定义开邻域  $U$  上的 Hodge 星对偶算子,

$$*\omega_{a_{r+1} \dots a_m} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{r!} \omega^{a_1 \dots a_r} \Omega_{a_1 \dots a_r a_{r+1} \dots a_m}, \quad \text{其中 } \omega^{a_1 \dots a_r} = g^{a_1 b_1} \dots g^{a_r b_r} \omega_{b_1 \dots b_r} \quad (5.4-10a)$$

$$= \frac{\sqrt{(-)^s g}}{r!(m-r)!} \delta_{i_1 \dots i_m}^{1 \dots m} \cdot \omega^{i_1 \dots i_r} \cdot (dx^{i_{r+1}})_{a_{r+1}} \wedge \dots \wedge (dx^{i_m})_{a_m}. \quad (5.4-10b)$$

上面两式都能当成定义. 由式(5.4-10a)到(5.4-10b)的推导并不困难; 直接计算, 得

$$\begin{aligned} *\omega_{a_{r+1} \dots a_m} &= \frac{\sqrt{(-)^s g}}{r!r!} \omega_{i_1 \dots i_r} g^{a_1 b_1} \dots g^{a_r b_r} (dx^{i_1})_{b_1} \wedge \dots \wedge (dx^{i_r})_{b_r} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} \\ &\stackrel{1.8-48}{=} \frac{\sqrt{(-)^s g}}{r!r!} \omega_{i_1 \dots i_r} \delta_{k_1 \dots k_r}^{i_1 \dots i_r} \delta_{j_1 \dots j_m}^{1 \dots m} g^{k_1 j_1} \dots g^{k_r j_r} (dx^{j_{r+1}})_{a_{r+1}} \otimes \dots \otimes (dx^{j_m})_{a_m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1.8-21}{r!} \frac{\sqrt{(-)^s g}}{r!} \omega^{j_1 \cdots j_r} \delta_{j_1 \cdots j_m}^{1 \cdots m} (dx^{j_{r+1}})_{a_{r+1}} \otimes \cdots \otimes (dx^{j_m})_{a_m} \\
& \frac{1.8-34}{r!(m-r)!} \frac{\sqrt{(-)^s g}}{r!(m-r)!} \omega^{j_1 \cdots j_r} \delta_{j_1 \cdots j_r, k_{r+1} \cdots k_m}^{1 \cdots r, r+1 \cdots m} \cdot \delta_{j_{r+1} \cdots j_m}^{k_{r+1} \cdots k_m} (dx^{j_{r+1}})_{a_{r+1}} \otimes \cdots \otimes (dx^{j_m})_{a_m} \\
& = \frac{\sqrt{(-)^s g}}{r!(m-r)!} \omega^{j_1 \cdots j_r} \delta_{j_1 \cdots j_r, k_{r+1} \cdots k_m}^{1 \cdots r, r+1 \cdots m} (dx^{k_{r+1}})_{a_{r+1}} \wedge \cdots \wedge (dx^{k_m})_{a_m}.
\end{aligned}$$

这便证明了(5.4-10). 大致重复上面推导过程 (令  $\omega_{i_1 \cdots i_r} = 1$ ) 可得一个常用公式

$$\begin{aligned}
& *((dx^{i_1})_{a_1} \wedge \cdots \wedge (dx^{i_r})_{a_r}) = \\
& = \sqrt{(-)^s g} \sum_{\substack{j_1 < \cdots < j_r \\ j_{r+1} < \cdots < j_m}} \delta_{j_1 \cdots j_m}^{1 \cdots m} (dx^{j_{r+1}})_{a_{r+1}} \wedge \cdots \wedge (dx^{j_m})_{a_m} \begin{vmatrix} g^{i_1 j_1} & \cdots & g^{i_1 j_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g^{i_r j_1} & \cdots & g^{i_r j_r} \end{vmatrix}. \quad (5.4-11)
\end{aligned}$$

式(5.4-11)中的指标  $i_1, \cdots, i_r$  是自由指标, 不参与求和; 在具体应用时最好按顺序排列. 下面给出两次 Hodge 星算子的公式, 直接对(5.4-10a)取星算子, 得

$$\begin{aligned}
*(*\omega)_{b_1 \cdots b_r} &= \frac{(-)^{r(m-r)}}{r!(m-r)!} \omega_{a_1 \cdots a_r} \Omega^{a_1 \cdots a_r, a_{r+1} \cdots a_m} \Omega_{b_1 \cdots b_r, a_{r+1} \cdots a_m} \\
& \stackrel{5.4-4}{=} (-)^{s+r(m-r)} \delta_{b_1}^{[a_1} \cdots \delta_{b_r}^{a_r]} \omega_{a_1 \cdots a_r} = (-)^{s+r(m-r)} \omega_{b_1 \cdots b_r}. \quad (5.4-12)
\end{aligned}$$

#### 5.4.2.1 闵氏空间对偶

闵氏时空  $(\mathbb{R}^4, \eta)$  的坐标系为  $\{t, x, y, z\}$ ; 因标架场正交归一,  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ , 式(5.4-11)的形式简单; 我们给出如下具体表示 (为简洁, 省略抽象指标)

$$\begin{aligned}
*dt &= -dx \wedge dy \wedge dz, & *dx &= -dt \wedge dy \wedge dz, \\
*dy &= +dt \wedge dx \wedge dz, & *dz &= -dt \wedge dx \wedge dy. \\
*(dt \wedge dx) &= -dy \wedge dz, & *(dt \wedge dy) &= +dx \wedge dz, & *(dt \wedge dz) &= -dx \wedge dy. \\
*(dx \wedge dy) &= +dt \wedge dz, & *(dx \wedge dz) &= -dt \wedge dy, & *(dy \wedge dz) &= +dt \wedge dx.
\end{aligned} \quad (5.4-13)$$

#### 5.4.2.2 三维空间的对偶

三维笛卡尔空间  $(\mathbb{R}^3, \delta)$  的坐标系为  $\{x, y, z\}$ ; 因标架场正交归一,  $\delta = \text{diag}(1, 1, 1)$ , 我们给出式(5.4-11)的具体表示 (为简洁, 省略抽象指标)

$$*dx = dy \wedge dz, \quad *dy = dz \wedge dx, \quad *dz = dx \wedge dy. \quad (5.4-14)$$

叉乘、散度、旋度等公式都可用 Hodge 星对偶表示, 请有兴趣读者自行写出.

## 5.4.3 散度及相关

先计算收缩第二类克氏符  $\Gamma_{kj}^k$ ; 为此, 需用到一个行列式中的公式, 设  $g = \det(g_{ij})$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x^k} &= \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sum_{j_1 \cdots j_n} (-)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} g_{1j_1} g_{2j_2} \cdots g_{nj_n} \right) \\ &= \left( \sum_{j_1 \cdots j_n} (-)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} \frac{\partial g_{1j_1}}{\partial x^k} g_{2j_2} \cdots g_{nj_n} \right) + \cdots + \left( \sum_{j_1 \cdots j_n} (-)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} g_{1j_1} \cdots g_{n-1, j_{n-1}} \frac{\partial g_{nj_n}}{\partial x^k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{i1}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} & \cdots & \frac{\partial g_{in}}{\partial x^k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nj} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

这是行列式的求导公式, 将上式按有导数那一行展开, 有

$$\frac{\partial g}{\partial x^k} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} A^{ij}, \quad \text{其中 } A^{ij} \text{ 是 } \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \text{ 或 } g_{ij} \text{ 的代数余子式.} \quad (5.4-15)$$

在行列式理论中, 元素  $g_{il}$  与代数余子式  $A^{lj}$  有正交关系, 即

$$\sum_{l=1}^n g_{il} A^{lj} = \delta_i^j \cdot g. \quad (5.4-16)$$

又因度规  $g_{il}$  及其共轭量  $g^{lj}$  互逆, 即  $g_{il} g^{lj} = \delta_i^j$ ; 由此不难得出

$$A^{ij} = g \cdot g^{ij}. \quad (5.4-17)$$

将上式带入式(5.4-15), 并整理得 (考虑到  $g$  可正可负, 故加上绝对值)

$$\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} = \frac{1}{2} g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}. \quad (5.4-18)$$

利用上式容易得到收缩第二类克氏符为

$$\Gamma_{kj}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{2} g^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^j}. \quad (5.4-19)$$

我们已经知道切矢量场  $v^a \in \mathfrak{X}(M)$  的协变导数, 只需两者缩并即可得到散度算子,

$$\operatorname{div} v \equiv \nabla_a v^a = \frac{\partial v^j}{\partial x^j} + v^k \Gamma_{kj}^j(x) = \frac{\partial v^j}{\partial x^j} + v^k \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial \sqrt{|g|}}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial (v^k \sqrt{|g|})}{\partial x^k}. \quad (5.4-20)$$

微积分中的 Laplace 算子，在微分流形中已被推广为 **Beltrami-Laplace 算子**，只需将式(5.4-20)中  $v^k$  换成  $g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j}$  即可

$$\square f \equiv \nabla_a \nabla^a f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{|g|} g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right), \quad \forall f \in C^\infty(M). \quad (5.4-21)$$

数学上更习惯使用“ $\Delta$ ”来替换上式中的“ $\square$ ”；但在物理学的四维闵氏时空中都使用这个方块算符来代表 d'Alembert 算符，所以在此我们用了方块而不是三角算符。

## 5.5 黎曼曲率型式

本节介绍广义黎曼流形中的曲率型式<sup>[1]§1.7</sup>，§4.3中的理论自然适用于本节，这里主要讨论度规场对型式理论的影响。设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  及 Levi-Civita 联络  $\nabla_a$ 。

### 5.5.1 黎曼度规下的型式场

在标架场  $\{(e_\mu)^a\}$  上，度规表示为

$$g_{ab} = g_{\mu\nu} (e^\mu)_a (e^\nu)_b, \quad g^{ab} = g^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b. \quad (5.5-1)$$

再引入两个记号

$$(e_\rho)_a \stackrel{def}{=} g_{ab} (e_\rho)^b = g_{\mu\nu} (e^\mu)_a (e^\nu)_b (e_\rho)^b = g_{\mu\rho} (e^\mu)_a, \quad (5.5-2)$$

$$(e^\rho)^a \stackrel{def}{=} g^{ab} (e^\rho)_b = g^{\mu\nu} (e_\mu)^a (e_\nu)^b (e^\rho)_b = g^{\mu\rho} (e_\mu)^a. \quad (5.5-3)$$

上面两式说明，基矢的内外指标均可用度规相应指标进行升降。需要说明，如果没有度规，无法定义  $(e_\rho)_a$  和  $(e^\rho)^a$ 。由此可得，

$$g_{ab} = (e_\mu)_a (e^\mu)_b, \quad g^{ab} = (e^\mu)^a (e_\mu)^b; \quad g_{\mu\nu} = (e_\mu)_a (e_\nu)^a, \quad g^{\mu\nu} = (e^\mu)^a (e^\nu)_a. \quad (5.5-4)$$

可以再定义

$$(\omega_{\mu\nu})_a \stackrel{def}{=} g_{\mu\sigma} (\omega^\sigma_{\nu})_a = g_{\mu\sigma} (e^\sigma)_c \nabla_a (e_\nu)^c = (e_\mu)_c \nabla_a (e_\nu)^c = g_{\mu\sigma} \gamma^\sigma_{\nu\tau} (e^\tau)_a. \quad (5.5-5)$$

上式计算用到了式(4.3-5)。同样，上式必须在引入度规之后才能定义。

#### 5.5.1.1 相容性条件

自然坐标下的相容性条件(5.1-2)在一般标架场下变为

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_a g_{bc} \Rightarrow 0 = (\nabla_a g_{\mu\nu}) (e^\mu)_b (e^\nu)_c + g_{\mu\nu} (\nabla_a (e^\mu)_b) (e^\nu)_c + g_{\mu\nu} (e^\mu)_b (\nabla_a (e^\nu)_c) \\ &\Rightarrow 0 = (d_a g_{\mu\nu}) (e^\mu)_b (e^\nu)_c - g_{\mu\nu} ((e^j)_b (\omega^\mu_{\cdot j})_a) (e^\nu)_c - g_{\mu\nu} (e^\mu)_b ((e^j)_c (\omega^\nu_{\cdot j})_a). \end{aligned}$$

上式应用了由式(4.3-5)得到  $\nabla_a(e^\mu)_b = -(e^j)_b(\omega_{.j}^\mu)_a$ . 消去基矢, 得到度规在一般标架场下的相容性条件, 即  $\nabla_a g_{bc} = 0$  的具体表达式

$$d_a g_{\mu\nu} = g_{\sigma\nu}(\omega_{.a}^\sigma)_\mu + g_{\mu\sigma}(\omega_{.a}^\sigma)_\nu = (\omega_{\nu\mu})_a + (\omega_{\mu\nu})_a = (g_{\mu\sigma}\gamma_{\nu\tau}^\sigma + g_{\nu\sigma}\gamma_{\mu\tau}^\sigma)(e^\tau)_a. \quad (5.5-6)$$

### 5.5.1.2 Cartan 结构方程

这里采用的是 Levi-Civita 无挠联络, 挠率型式恒为零; 原形式的 Cartan 结构方程见下节的式(5.5-12); 曲率型式(4.3-23)中的内指标降下来的公式为,

$$(\Theta_{\mu\nu})_{ab} = -(\Theta_{\nu\mu})_{ab} = g_{\mu\sigma}(\Theta_{.a}^\sigma)_{\nu b} = \frac{1}{2}R_{\mu\nu\rho\sigma}(e^\rho)_a \wedge (e^\sigma)_b = R_{\mu\nu\rho\sigma}(e^\rho)_a(e^\sigma)_b. \quad (5.5-7)$$

应用式(5.5-6)容易得到内指标降下来后的结构方程具体形式

$$d_a(e_\mu)_b = -(e^\sigma)_a \wedge (\omega_{\sigma\mu})_b, \quad (5.5-8a)$$

$$d_a(\omega_{\mu\nu})_b = (\omega_{\sigma\mu})_a \wedge (\omega_{.a}^\sigma)_b + (\Theta_{\mu\nu})_{ab}. \quad (5.5-8b)$$

### 5.5.1.3 Bianchi 恒等式

内指标降下来后的第一 Bianchi 恒等式(4.3-27a)变为

$$(e^\sigma)_c \wedge (\Theta_{.a}^\mu)_{\sigma b} = 0 = (e^\sigma)_c \wedge (\Theta_{\mu\sigma})_{ab}. \quad (5.5-9)$$

应用式(5.5-6)容易得到内指标降下来后的第二 Bianchi 恒等式

$$d_c(\Theta_{\mu\nu})_{ab} = (\omega_{.c}^\sigma)_a \wedge (\Theta_{\mu\sigma})_{\nu b} + (\Theta_{.c}^\sigma)_{\nu a} \wedge (\omega_{\sigma\mu})_b. \quad (5.5-10)$$

$$d_c(\Theta_{.a}^\mu)_{\nu b} = (\omega_{.c}^\sigma)_a \wedge (\Theta_{\sigma\nu})_{.a}^\mu - (\Theta_{.c}^\sigma)_{\nu a} \wedge (\omega_{\sigma\nu})_{.a}^\mu. \quad (4.3-27b)$$

为了比对, 保留了式(4.3-27b).

## 5.5.2 局部欧几里得空间

我们称黎曼曲率恒为零的空间为平直的, 黎曼曲率非零的空间为弯曲的.

**定义 5.33** 设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 若  $\forall p \in M$  都存在局部坐标系  $(U; x^\alpha)$  使得

$$g_{ab}|_U = \eta_{\alpha\beta}(dx^\alpha)_a(dx^\beta)_b. \quad (5.5-11)$$

上式必须在  $U$  内成立; 其中  $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, \dots, -1, +1, \dots, +1)$ ,  $\pm 1$  个数总和是  $m$ ; 则流形  $(M, g)$  称为广义局部欧几里得空间.

本节目的就是要证明下述定理,

**定理 5.34** 设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 其黎曼曲率张量为零的充分必要条件是  $(M, g)$  为广义局部欧几里得空间.

如果  $(M, g)$  是广义局部欧几里得空间, 经过直接计算可得其黎曼曲率恒为零.

下面证明必要性. 因 Levi-Civita 联络无挠, 故 Cartan 结构方程(4.3-26)变为

$$d_a(e^\mu)_b = (e^\nu)_a \wedge (\omega^\mu_\nu)_b, \quad (5.5-12a)$$

$$d_a(\omega^\mu_\nu)_b = (\omega^\sigma_\nu)_a \wedge (\omega^\mu_\sigma)_b + (\Theta^\mu_\nu)_{ab}. \quad (5.5-12b)$$

上式的基矢量是  $(e_\mu)^a$  (称为旧的).

现另选一套新基矢  $(\tilde{e}_i)^a$ , 在标架变换(4.3-2)下 (即  $(\tilde{e}_i)^a = (e_\mu)^a A^\mu_i$ ,  $(\tilde{e}^j)_a = (e^\nu)_a B^j_\nu$ , 其中  $A \cdot B^T = I$ ), 新的联络系数及联络一次微分型式场为式(4.3-7),

$$(\tilde{e}_i)^b \nabla_b (\tilde{e}_j)^a = \tilde{\gamma}^k_{ji} (\tilde{e}_k)^a, \quad (\tilde{\omega}^k_{ji})_a \equiv \tilde{\gamma}^k_{ji} (\tilde{e}^i)_a. \quad (4.3-7)$$

新旧一次微分型式场基本变换关系为式(4.3-8),

$$d_a A^\sigma_{\cdot j} + (\omega^\sigma_\nu)_a A^\nu_{\cdot j} = A^\sigma_k (\tilde{\omega}^k_{\cdot j})_a \quad (4.3-8)$$

我们的目的是在  $p$  点附近寻找一组适当的光滑函数  $A^\sigma_k \in C^\infty(U)$  使得  $\det(A^\sigma_k) \neq 0$ , 并且在新标架场  $(\tilde{e}_i)^a$  下 新一次联络型式场  $(\tilde{\omega}^k_{\cdot j})_a$  恒为零, 也就是新的联络系数  $\tilde{\gamma}^k_{ji}$  恒为零; 由上面的式子(4.3-7)可知  $(\tilde{e}_i)^b \nabla_b (\tilde{e}_j)^a = 0$ , 也就是新标架场  $(\tilde{e}_i)^a$  式平行标架场. 由上面的式(4.3-8)可知, 这个问题转化为如下 Pfaff 方程 (未知量是  $A^\sigma_{\cdot j}$ ) 的求解,

$$(\pi^\sigma_{\cdot j})_a \stackrel{def}{=} d_a A^\sigma_{\cdot j} + (\omega^\sigma_\nu)_a A^\nu_{\cdot j} = 0, \quad \det(A^\sigma_k) \neq 0, \quad 1 \leq j, k, \sigma, \nu \leq m. \quad (5.5-13)$$

此 Pfaff 方程是由  $m^2$  个一次微分式组成的, 它的秩是  $m^2$ . 我们对此式再次求外微分, 并利用黎曼曲率为零的条件 (即  $(\Theta^\mu_\nu)_{ab} = 0$ ),

$$\begin{aligned} d_b (\pi^\sigma_{\cdot j})_a &= (d_b (\omega^\sigma_\nu)_a) A^\nu_{\cdot j} + (d_b A^\nu_{\cdot j}) \wedge (\omega^\sigma_\nu)_a \\ &\stackrel{5.5-12b}{=} (\omega^\xi_\nu)_b \wedge (\omega^\sigma_\xi)_a A^\nu_{\cdot j} + ((\pi^\nu_{\cdot j})_b - (\omega^\nu_\xi)_b A^\xi_{\cdot j}) \wedge (\omega^\sigma_\nu)_a = (\pi^\nu_{\cdot j})_b \wedge (\omega^\sigma_\nu)_a. \end{aligned} \quad (5.5-14)$$

于是 Pfaff 方程组(5.5-13)满足 Frobenius 条件(3.4-20); 由 Frobenius 定理3.21可知此方程组完全可积. Pfaff 方程组(5.5-13)没有给定初始条件, 我们将  $p$  点初始条件设为

$$A^i_\alpha(p) A^j_\beta(p) g_{ij}(p) = \eta_{\alpha\beta}. \quad (5.5-15)$$

此时的  $g_{ij}(x)$  是一般的度规, 非对角元可能非零. 现在可假设满足 Pfaff 方程组(5.5-13)和其初始条件(5.5-15)的解为  $a^i_\alpha(x)$ , 令

$$f_{\alpha\beta}(x) \equiv a^i_\alpha(x) a^j_\beta(x) g_{ij}(x) - \eta_{\alpha\beta}, \quad (5.5-16)$$

那么在  $p$  点有  $f_{\alpha\beta}(p) = 0$  (初始条件); 对式(5.5-16)求外微分, 得 (需注意, 当  $a^i_\alpha(x)$  是解时, 由式(5.5-13)可知  $d_b a^\sigma_{\cdot j} = -(\omega^\sigma_\nu)_b a^\nu_{\cdot j}$ )

$$\begin{aligned} d_b f_{\alpha\beta}(x) &= (d_b a^i_\alpha) a^j_\beta g_{ij} + a^i_\alpha (d_b a^j_\beta) g_{ij} + a^i_\alpha a^j_\beta d_b g_{ij} \\ &= -(\omega^i_k)_b a^k_\alpha a^j_\beta g_{ij} - a^i_\alpha (\omega^j_k)_b a^k_\beta g_{ij} + a^i_\alpha a^j_\beta d_b g_{ij} \\ &= a^k_\alpha a^j_\beta (-(\omega^i_k)_b g_{ij} - (\omega^j_l)_b g_{kl} + d_b g_{kj}) \stackrel{5.5-6}{=} 0. \end{aligned} \quad (5.5-17)$$



既然在整个邻域  $U$  内都有  $d_b f_{\alpha\beta}(x) = 0$ , 那么必然可以得出  $f_{\alpha\beta}(x)$  在整个邻域  $U$  内为常数, 所以有  $f_{\alpha\beta}(x) = f_{\alpha\beta}(p) = 0$ . 由此可见在邻域  $U$  内, 有 (见式(5.5-16))

$$a_{\cdot\alpha}^i(x)a_{\cdot\beta}^j(x)g_{ij}(x) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (5.5-18)$$

而度规  $g_{ab}$  在新标架场  $(\tilde{e}_i)^a$  的分量为 (要用上式)

$$\tilde{g}_{ij}(x) = g_{bc}(\tilde{e}_i)^b(\tilde{e}_j)^c = g_{bc}(e_\mu)^b a_{\cdot i}^\mu(e_\nu)^c a_{\cdot j}^\nu = g_{\mu\nu}(x)a_{\cdot i}^\mu(x)a_{\cdot j}^\nu(x) = \eta_{ij}. \quad (5.5-19)$$

此式在整个邻域  $U$  上成立.

在上面论述过程中, 已经指出新标架场  $(\tilde{e}_i)^a$  是平行的, 即有  $(\tilde{\omega}_\nu^\mu)_b$  恒为零, 将其带入 Cartan 第一结构方程(5.5-12a), 可以得到,

$$d_a(\tilde{e}^\mu)_b = (\tilde{e}^\nu)_a \wedge (\tilde{\omega}_\nu^\mu)_b = 0. \quad (5.5-20)$$

也就是每一个  $(\tilde{e}^\mu)_b$  都是闭的, 由 Poincaré 引理3.9可知存在  $p \in M$  的局部坐标邻域  $U$  及其上的光滑函数族  $\{x^\mu\}$  使得

$$(\tilde{e}^\mu)_a = d_a x^\mu = (dx^\mu)_a, \quad 1 \leq \mu \leq m. \quad (5.5-21)$$

这说明在  $U$  内存在自然标架场  $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a\}$  等于  $(\tilde{e}_\mu)^a$ , 从而使度规满足本节开头定理所要求的局部欧氏空间.

### 5.5.3 刚性标架

一般情况下, 在标架场  $(e_\mu)^a$  下的度规分量  $g_{\mu\nu}$  是流形上的标量场, 不是常数.

**定义 5.35** 度规分量  $g_{\mu\nu}$  是常数的标架场  $(e_\mu)^a$  定义为**刚性标架**, 即  $\nabla_a g_{\mu\nu} = d_a g_{\mu\nu} = 0$ .

注意, 对于一般标架场, 虽然度规和联络相容, 即  $\nabla_a g_{bc} \equiv 0$ ; 但  $\nabla_a g_{\mu\nu}$  未必等于零. 对于刚性标架可以得到 1 型式场  $(\omega_{\mu\nu})_a$  对指标反对称性,

$$d_a g_{\mu\nu} = 0 \xrightarrow{5.5-6} (\omega_{\mu\nu})_a = -(\omega_{\nu\mu})_a. \quad (5.5-22)$$

对于非刚性标架, 因  $\nabla_a g_{\mu\nu} \neq 0$ , 故  $(\omega_{\mu\nu})_a$  不具有上述的反对称性.

定义 Ricci 旋转系数 (Ricci rotation coefficients) 为 (类似于第一类克氏符)

$$\omega_{\mu\nu\rho} \stackrel{def}{=} (\omega_{\mu\nu})_a (e_\rho)^a = g_{\mu\sigma} \gamma_{\nu\rho}^\sigma \Leftrightarrow (\omega_{\mu\nu})_a = \omega_{\mu\nu\rho} (e^\rho)_a. \quad (5.5-23)$$

将联络系数公式(4.3-4)中的联络系数换成 Ricci 旋转系数,

$$(e_\rho)^b \nabla_b (e_\mu)^a = \gamma_{\mu\rho}^\sigma (e_\sigma)^a = g^{\nu\sigma} \omega_{\nu\mu\rho} (e_\sigma)^a = -\omega_{\mu\nu\rho} (e^\nu)^a \Leftrightarrow \quad (5.5-24)$$

$$\nabla_b (e_\mu)^a = -\omega_{\mu\nu\rho} (e^\rho)_b (e^\nu)^a \Leftrightarrow \nabla_b (e_\mu)_a = -\omega_{\mu\nu\rho} (e^\rho)_b (e^\nu)_a \Leftrightarrow \quad (5.5-25)$$

$$\nabla_b (e^\mu)_a = -g^{\mu\sigma} \omega_{\sigma\nu\rho} (e^\rho)_b (e^\nu)_a \Leftrightarrow \quad (5.5-26)$$

$$\omega_{\mu\nu\rho} = -(e_\nu)_a (e_\rho)^b \nabla_b (e_\mu)^a = (e_\mu)^a (e_\rho)^b \nabla_b (e_\nu)_a. \quad (5.5-27)$$

只有在刚性标架下, Ricci 旋转系数才能简便计算, 内外指标才能方便升降. 当然, 有些学者也在非刚性标架下来计算.

### 对易关系

虽然自然坐标基底的无挠联络系数  $\Gamma_{ij}^k$  关于两个下标具有对称性, 但一般的基底场下的联络系数  $\gamma_{ij}^k$  通常情况下没有这种对称性; 由式(4.1-29)及(5.5-24)可得基矢的对易关系,

$$[X, Y]^a = (e_\nu(Y^\sigma)X^\nu - e_\nu(X^\sigma)Y^\nu + X^\mu Y^\nu (\gamma_{\nu\mu}^\sigma - \gamma_{\mu\nu}^\sigma)) (e_\sigma)^a. \quad (5.5-28)$$

$$[(e_\mu), (e_\nu)]^a = (\gamma_{\nu\mu}^\sigma - \gamma_{\mu\nu}^\sigma) (e_\sigma)^a = (-\omega_{\nu\sigma\mu} + \omega_{\mu\sigma\nu}) (e^\sigma)^a. \quad (5.5-29)$$

式(5.5-29)第一个等号适用于一般标架, 第二个等号只适用于刚性标架.

### 5.5.4 曲率张量的计算

黎曼流形中, 度规与联络相容, 挠率为零, 曲率张量计算可分三个步骤: ①选一刚性标架, ②计算 Ricci 旋转系数, ③利用 Cartan 第二结构方程计算曲率张量.

#### 5.5.4.1 计算 Ricci 旋转系数

需要先选定一局部坐标系  $\{U; x^\mu\}$ <sup>2</sup>, 刚性标架基矢场  $(e_\mu)_a$ 、 $(e_\mu)^a$  在自然坐标基矢场  $(\frac{\partial}{\partial x^k})^a$ 、 $(dx^k)_a$  下的分量是,

$$(e_\nu)_k \equiv (e_\nu)_a \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a, \quad (e_\mu)^k \equiv (e_\mu)^a (dx^k)_a. \quad (5.5-30)$$

计算 Ricci 旋转系数并不需要基矢场  $(e^\nu)_a$ , 所以上式中未给出其分量表达式. 从 Ricci 旋转系数定义可得

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu\rho} &= (e_\mu)^a (e_\rho)^b \nabla_b (e_\nu)_a = (e_\mu)^k \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^a (e_\rho)^l \left( \frac{\partial}{\partial x^l} \right)^b \nabla_b [(e_\nu)_n (dx^n)_a] \\ &= (e_\mu)^k (e_\rho)^l (e_\nu)_{k,l} - (e_\mu)^k (e_\rho)^l \Gamma_{kl}^n (e_\nu)_n. \end{aligned} \quad (5.5-31)$$

交换指标  $\rho$  和  $\mu$ , 有  $\omega_{\rho\nu\mu} = (e_\rho)^k (e_\mu)^l (e_\nu)_{k,l} - (e_\rho)^k (e_\mu)^l \Gamma_{kl}^n (e_\nu)_n$ ; 将这两式相减, 并利用坐标基底克氏符  $\Gamma_{kl}^n$  关于下标的对称性, 得

$$\omega_{\mu\nu\rho} - \omega_{\rho\nu\mu} = [(e_\mu)^k (e_\rho)^l - (e_\rho)^k (e_\mu)^l] \frac{\partial (e_\nu)_k}{\partial x^l} \stackrel{def}{=} \Lambda_{\mu\nu\rho}. \quad (5.5-32)$$

<sup>2</sup>读者需要认识到, 微分流形局部上同胚于  $\mathbb{R}^m$  开子集, 所以任何流形自然存在局部坐标系.

上式最后一步定义了一个中间步符号  $\Lambda_{\mu\nu\rho}$ , 它还可以表示为

$$\Lambda_{\mu\nu\rho} \equiv \sum_{k,l} \left[ \frac{\partial(e_\nu)_k}{\partial x^l} - \frac{\partial(e_\nu)_l}{\partial x^k} \right] (e_\mu)^k (e_\rho)^l = \sum_{k,l} [(e_\nu)_{k,l} - (e_\nu)_{l,k}] (e_\mu)^k (e_\rho)^l. \quad (5.5-33)$$

上式显示写出了求和符号, 易见  $\Lambda$  具有反对称性  $\Lambda_{\mu\nu\rho} = -\Lambda_{\rho\nu\mu}$ . 由式(5.5-32)出发, 进行指标轮换后相加减, 不难证明 Ricci 旋转系数可由这个中间步符号  $\Lambda_{\mu\nu\rho}$  表示为

$$\omega_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} (\Lambda_{\mu\nu\rho} + \Lambda_{\rho\mu\nu} - \Lambda_{\nu\rho\mu}). \quad (5.5-34)$$

这样, 先选定局部自然坐标基底场  $(\frac{\partial}{\partial x^k})^a$ , 再选择一个刚性标架场  $(e_\mu)^a$ , 通过式(5.5-32)或者(5.5-33)算出中间步符号  $\Lambda_{\mu\nu\rho}$ , 利用上式便可计算 Ricci 旋转系数  $\omega_{\mu\nu\rho}$  了.

**注 5.36** 注解4.12指出无挠联络系数  $\Gamma_{jk}^i$  有  $\frac{1}{2}m^2(m+1)$  个. 因 Ricci 旋转系数  $\omega_{\mu\nu\rho}$  关于前两个指标反对称, 故共有  $\frac{1}{2}m^2(m-1)$  个; 比联络系数略少.

### 5.5.4.2 黎曼张量的分量表示

现在可以导出 Cartan 第二结构方程的具体表达式. 由于这里采用的是刚性标架, 度规分量为常数, 所以式(4.3-20)可重写为

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= g_{\rho\pi} \gamma_{\sigma\nu}^\pi \gamma_{\tau\mu}^\pi - g_{\rho\pi} \gamma_{\sigma\mu}^\pi \gamma_{\tau\nu}^\pi + [d_a(\omega_{\rho\sigma})_b] (e_\mu)^a (e_\nu)^b \\ &\stackrel{5.5-23}{=} (e_\mu)^a (e_\nu)^b \nabla_a (\omega_{\rho\sigma\pi} (e^\pi)_b) - (e_\mu)^a (e_\nu)^b \nabla_b (\omega_{\rho\sigma\pi} (e^\pi)_a) + g^{\xi\zeta} \omega_{\zeta\sigma\nu} \omega_{\rho\xi\mu} - g^{\xi\zeta} \omega_{\zeta\sigma\mu} \omega_{\rho\xi\nu} \\ &\stackrel{5.5-26}{=} g^{\xi\zeta} \omega_{\nu\xi\mu} \omega_{\rho\sigma\zeta} + (e_\mu)^a \nabla_a (\omega_{\rho\sigma\nu}) - g^{\xi\zeta} \omega_{\mu\xi\nu} \omega_{\rho\sigma\zeta} - (e_\nu)^b \nabla_b (\omega_{\rho\sigma\mu}) \\ &\quad + g^{\xi\zeta} (\omega_{\zeta\sigma\nu} \omega_{\rho\xi\mu} - \omega_{\zeta\sigma\mu} \omega_{\rho\xi\nu}). \end{aligned}$$

利用式(4.3-1)可得刚性标架  $(e_\mu)^a$  下  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  的黎曼曲率分量表达式

$$\begin{aligned} R_{\rho\sigma\mu\nu} &= A_{\mu}^\pi(x) \frac{\partial \omega_{\rho\sigma\nu}}{\partial x^\pi} - A_{\nu}^\pi(x) \frac{\partial \omega_{\rho\sigma\mu}}{\partial x^\pi} \\ &\quad + g^{\xi\zeta} [\omega_{\rho\sigma\zeta} (\omega_{\nu\xi\mu} - \omega_{\mu\xi\nu}) + \omega_{\zeta\sigma\nu} \omega_{\rho\xi\mu} - \omega_{\zeta\sigma\mu} \omega_{\rho\xi\nu}]. \end{aligned} \quad (5.5-35)$$

可以看出在刚性标架场  $(e_\mu)^a$  中计算黎曼张量, 不需要计算自然坐标基矢场的克氏符  $\Gamma_{kl}^n$ . 标架法中的 Ricci 旋转系数  $\omega_{\mu\zeta\sigma}$  与自然坐标基底法中的克氏符  $\Gamma_{kl}^n$  地位相当, 但 Ricci 旋转系数计算量较小.

表面上来看, 式(5.5-35)不具有对称性  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ; 经过一些推演可以证明黎曼曲率仍具有这种对称性. 为了避免此种对称性的显示缺失, 通常写出全部的  $R_{\rho\sigma\mu\nu}$  分量; 对于四维流形来说就是写全 36 个.

### 5.5.4.3 例题

在这里给出两个例题, 以便读者更好地理解标架理论.

例 5.37 给定度规

$$ds^2 = \Omega^2(t, x)(-dt^2 + dx^2). \quad (5.5-36)$$

计算黎曼曲率张量.

〔甲〕 由于  $\Omega^2(t, x)$  是自然坐标  $\{t, x\}$  的函数, 所以自然坐标基矢不是刚性标架, 需另选基矢. 我们选成如下正交归一的切基矢及对偶基矢

$$(e^0)_a = \Omega(dt)_a, \quad (e^1)_a = \Omega(dx)_a. \quad (5.5-37)$$

$$(e_0)^a = \Omega^{-1}(\partial_t)^a, \quad (e_1)^a = \Omega^{-1}(\partial_x)^a. \quad (5.5-38)$$

由此容易写出度规张量

$$g_{ab} = -\Omega^2(dt)_a(dt)_b + \Omega^2(dx)_a(dx)_b = -(e^0)_a(e^0)_b + (e^1)_a(e^1)_b \quad (5.5-39)$$

显然, 在新选的标架场  $(e_\mu)^a$  下, 度规系数为常数, 此标架是刚性的. 用上式容易得到将指标升降后的基矢表达式

$$(e_0)_a = -\Omega(dt)_a, \quad (e_1)_a = \Omega(dx)_a. \quad (5.5-40)$$

由式(5.5-30)可得全部坐标分量

$$(e_0)_0 = -\Omega, \quad (e_0)_1 = 0; \quad (e_1)_0 = 0, \quad (e_1)_1 = \Omega. \quad (5.5-41)$$

$$(e_0)^0 = \Omega^{-1}, \quad (e_0)^1 = 0; \quad (e_1)^0 = 0, \quad (e_1)^1 = \Omega^{-1}. \quad (5.5-42)$$

协变基矢导数不为零的分量为, “点” 代表对  $t$  求导, “撇” 代表对  $x$  求导,

$$(e_0)_{0,0} = -\dot{\Omega}, \quad (e_0)_{0,1} = -\Omega', \quad (e_1)_{1,0} = \dot{\Omega}, \quad (e_1)_{1,1} = \Omega'. \quad (5.5-43)$$

〔乙〕 由式(5.5-32)或(5.5-33)计算中间步符号  $\Lambda$ , 全部不为零的式子为

$$\Lambda_{001} = -\Lambda_{100} = ((e_0)_{0,1} - (e_0)_{1,0})(e_0)^0(e_1)^1 = -\Omega^{-2}\Omega', \quad (5.5-44)$$

$$\Lambda_{011} = -\Lambda_{110} = ((e_1)_{0,1} - (e_1)_{1,0})(e_0)^0(e_1)^1 = -\Omega^{-2}\dot{\Omega}. \quad (5.5-45)$$

由式(5.5-34)可得两个独立的 Ricci 旋转系数  $\omega_{\mu\nu\rho}$ , 分别是

$$\omega_{010} = \frac{1}{2}(\Lambda_{010} + \Lambda_{001} - \Lambda_{100}) = \Lambda_{001} = -\Omega^{-2}\Omega' = -\omega_{100} \quad (5.5-46)$$

$$\omega_{011} = \frac{1}{2}(\Lambda_{011} + \Lambda_{101} - \Lambda_{110}) = \Lambda_{011} = -\Omega^{-2}\dot{\Omega} = -\omega_{101} \quad (5.5-47)$$

〔丙〕 由(5.5-35)式可得唯一独立的黎曼分量

$$R_{0101} = (e_0)^a \nabla_a \omega_{011} - (e_1)^a \nabla_a \omega_{010}$$

$$\begin{aligned}
& + g^{\xi\zeta} (\omega_{01\zeta}(\omega_{1\xi 0} - \omega_{0\xi 1}) + \omega_{\zeta 11}\omega_{0\xi 0} - \omega_{\zeta 10}\omega_{0\xi 1}) \\
& = \Omega^{-1}\partial_t \left( -\Omega^{-2}\dot{\Omega} \right) - \Omega^{-1}\partial_x \left( -\Omega^{-2}\Omega' \right) \\
& \quad + g^{00}(\omega_{010}(\omega_{100} - \omega_{001}) + \omega_{011}\omega_{000} - \omega_{010}\omega_{001}) \\
& \quad + g^{11}(\omega_{011}(\omega_{110} - \omega_{011}) + \omega_{111}\omega_{010} - \omega_{110}\omega_{011}) \\
& = -\Omega^{-3}\ddot{\Omega} + 2\Omega^{-4}(\dot{\Omega})^2 + \Omega^{-3}\Omega'' - 2\Omega^{-4}(\Omega')^2 + (\Omega^{-2}\Omega')^2 - (\Omega^{-2}\dot{\Omega})^2 \\
& = \Omega^{-3}(\Omega'' - \ddot{\Omega}) + \Omega^{-4}(\dot{\Omega}^2 - \Omega'^2)
\end{aligned}$$

这是在基矢  $(e_\mu)^a$  下的黎曼张量分量. 计算过程中注意  $g^{00} = -1, g^{11} = +1$ , 其它度规分量为零; 全部系数为常数是刚性标架的体现.

再给出一个比上例复杂的标架计算.

**例 5.38** 给定 Kruskal 度规

$$ds^2 = -4e^{2A}dudv + Z^2(d\theta^2 + (\sin\theta d\phi)^2) \quad (5.5-48)$$

局部坐标是  $\{u, v, \theta, \phi\}$ , 系数  $A, Z$  只是  $u, v$  的函数.

**甲** 局部坐标基矢不是刚性标架, 另选如下正交归一协变基矢

$$\begin{aligned}
(e^1)_a &= \sqrt{2}e^A(du)_a, & (e^2)_a &= \sqrt{2}e^A(dv)_a, \\
(e^3)_a &= Z(d\theta)_a, & (e^4)_a &= Z\sin\theta(d\phi)_a.
\end{aligned} \quad (5.5-49)$$

由此容易写出度规张量

$$g_{ab} = -(e^1)_a(e^2)_b - (e^2)_a(e^1)_b + (e^3)_a(e^3)_b + (e^4)_a(e^4)_b \quad (5.5-50)$$

显然, 在新选的标架场  $(e^\mu)_a$  下, 度规系数为常数, 即非零分量是  $g_{12} = g_{21} = -1, g_{33} = g_{44} = 1$ ; 此标架是刚性的. 用上式容易得到逆变基矢

$$\begin{aligned}
(e_1)^a &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}}(\partial_u)^a, & (e_2)^a &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}}(\partial_v)^a \\
(e_3)^a &= Z^{-1}(\partial_\theta)^a, & (e_4)^a &= (Z\sin\theta)^{-1}(\partial_\phi)^a.
\end{aligned} \quad (5.5-51)$$

将外指标降下来, 有

$$\begin{aligned}
(e_1)_a &= g_{ab}(e_1)^b = -(e^2)_a = -\sqrt{2}e^A(dv)_a \\
(e_2)_a &= g_{ab}(e_2)^b = -(e^1)_a = -\sqrt{2}e^A(du)_a \\
(e_3)_a &= g_{ab}(e_3)^b = +(e^3)_a = +Z(d\theta)_a \\
(e_4)_a &= g_{ab}(e_4)^b = +(e^4)_a = +Z\sin\theta(d\phi)_a
\end{aligned} \quad (5.5-52)$$

**乙** 矢量  $(e_\mu)_a$  在自然坐标基矢  $(dx^j)_a$  上的非零分量为

$$(e_1)_v = -\sqrt{2}e^A, \quad (e_2)_u = -\sqrt{2}e^A, \quad (e_3)_\theta = Z, \quad (e_4)_\phi = Z\sin\theta \quad (5.5-53)$$

刚性标架基矢  $(e_\mu)^a$  在自然坐标基矢  $(\partial_j)^a$  上的非零分量为

$$(e_1)^u = \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}}, \quad (e_2)^v = \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}}, \quad (e_3)^\theta = Z^{-1}, \quad (e_4)^\phi = (Z \sin \theta)^{-1} \quad (5.5-54)$$

基矢非零分量  $(e_\mu)_k$  的非零导数是

$$\begin{aligned} (e_1)_{v,u} &= -\sqrt{2}e^A \partial_u A, & (e_1)_{v,v} &= -\sqrt{2}e^A \partial_v A \\ (e_2)_{u,u} &= -\sqrt{2}e^A \partial_u A, & (e_2)_{u,v} &= -\sqrt{2}e^A \partial_v A \\ (e_3)_{\theta,u} &= \partial_u Z, & (e_3)_{\theta,v} &= \partial_v Z \\ (e_4)_{\phi,u} &= \sin \theta \partial_u Z, & (e_4)_{\phi,v} &= \sin \theta \partial_v Z, & (e_4)_{\phi,\theta} &= Z \cos \theta \end{aligned} \quad (5.5-55)$$

利用式(5.5-32)或(5.5-33), 可得独立非零中间步符号 (求和过程需耐心、仔细),

$$\begin{aligned} \Lambda_{112} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}} \partial_u A, & \Lambda_{221} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}} \partial_v A, \\ \Lambda_{331} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_u Z, & \Lambda_{332} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_v Z, \\ \Lambda_{441} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_u Z, & \Lambda_{442} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_v Z, & \Lambda_{443} &= \frac{\cot \theta}{Z} \end{aligned} \quad (5.5-56)$$

进而利用式(5.5-34), 可得独立非零 Ricci 旋转系数 (求和过程需耐心、仔细),

$$\begin{aligned} \omega_{121} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}} \partial_u A, & \omega_{212} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}} \partial_v A, \\ \omega_{313} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_u Z, & \omega_{323} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_v Z, \\ \omega_{414} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_u Z, & \omega_{424} &= \frac{e^{-A}}{\sqrt{2}Z} \partial_v Z, & \omega_{434} &= \frac{\cot \theta}{Z} \end{aligned} \quad (5.5-57)$$

〔丙〕由(5.5-35)式可得在基矢  $(e_\mu)^a$  下独立非零黎曼张量分量 (注意求和过程中应用刚性标架的度规系数, 见〔甲〕部分),

$$\begin{aligned} R_{1221} &= -e^{-2A} \partial_u \partial_v A, & R_{1332} &= R_{1442} = \frac{e^{-2A} \partial_u \partial_v Z}{2Z}, \\ R_{1313} &= R_{1414} = \frac{e^{-2A}}{2Z} (2 \partial_u A \partial_u Z - \partial_u \partial_u Z), \\ R_{2323} &= R_{2424} = \frac{e^{-2A}}{2Z} (2 \partial_v A \partial_v Z - \partial_v \partial_v Z), \\ R_{3434} &= Z^{-2} (1 + e^{-2A} \partial_u Z \partial_v Z) \end{aligned} \quad (5.5-58)$$

进而易得在基矢  $(e_\mu)^a$  下独立非零 Ricci 张量分量

$$\begin{aligned} R_{11} &= e^{-2A} Z^{-1} (2 \partial_u A \partial_u Z - \partial_u \partial_u Z) \\ R_{12} &= -e^{-2A} Z^{-1} (Z \partial_u \partial_v A + \partial_u \partial_v Z) \\ R_{22} &= e^{-2A} Z^{-1} (2 \partial_v A \partial_v Z - \partial_v \partial_v Z) \\ R_{33} &= R_{44} = e^{-2A} Z^{-2} (e^{2A} + \partial_u Z \partial_v Z + Z \partial_u \partial_v Z) \end{aligned} \quad (5.5-59)$$

需要注意, 以上给出的分量是在  $(e_\mu)^a$  下的分量, 不是在自然坐标基矢  $(\partial_i)^a$  下的分量.

## 5.6 截面曲率

截面曲率是二维曲面论中高斯曲率在高维空间的推广, 本节来讨论这个概念以及与之有关的一些定理. 设有  $m(\geq 2)$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 在  $p \in M$  点切空间  $T_p M$  中有两个不共线的切矢量  $u^a$  和  $v^a$ , 将它们进行非退化线性变换,

$$\tilde{u}^a = C_1^1 u^a + C_1^2 v^a, \quad \tilde{v}^a = C_2^1 u^a + C_2^2 v^a; \quad \det(C) = C_1^1 C_2^2 - C_1^2 C_2^1 \neq 0. \quad (5.6-1)$$

得到的  $\tilde{u}^a$  和  $\tilde{v}^a$  同样是  $T_p M$  中两个不共线切矢量. 令

$$Q(u, v) \equiv u_a u^a \cdot v_b v^b - (u_a v^a)^2. \quad (5.6-2)$$

通过直接计算可证明, 在非退化变换(5.6-1)下, 有

$$Q(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\det(C))^2 Q(u, v). \quad (5.6-3)$$

计算过程只是繁琐但不困难, 请读者补齐. 因  $u^a, v^a$  不共线, 它们共同确定了一个平面, 这个二维子空间称为切空间  $T_p M$  的**二维截面**, 记作  $[u \wedge v]$ . 当度规正定时, 恒为正的  $Q(u, v)$  恰好是两个矢量所张成平行四边形的面积平方; 当度规不定时,  $Q(u, v)$  可能为负, 此时取绝对值以保证  $Q(u, v) > 0$ .

同样通过直接计算可证明下式 (给出计算过程),

$$\begin{aligned} R_{abcd} \tilde{u}^a \tilde{v}^b \tilde{u}^c \tilde{v}^d &= R_{abcd} (C_1^1 u^a + C_1^2 v^a) (C_2^1 u^b + C_2^2 v^b) (C_1^1 u^c + C_1^2 v^c) (C_2^1 u^d + C_2^2 v^d) \\ &= R_{abcd} (C_1^1 C_2^1 u^a u^b - C_1^2 C_2^1 v^b u^a + C_1^1 C_2^2 u^a v^b + C_1^2 C_2^2 v^a v^b) \\ &\quad \times (C_1^1 C_2^1 u^c u^d - C_1^2 C_2^1 v^d u^c + C_1^1 C_2^2 u^c v^d + C_1^2 C_2^2 v^c v^d) \end{aligned}$$

考虑到黎曼曲率关于下标的反对称性, 即  $R_{abcd} = -R_{bacd} = -R_{abdc}$ , 上式最终结果为

$$R_{abcd} \tilde{u}^a \tilde{v}^b \tilde{u}^c \tilde{v}^d = (\det(C))^2 R_{abcd} u^a v^b u^c v^d. \quad (5.6-4)$$

由此可以定义二维截面  $[u \wedge v]$  的**截面曲率**为

$$K([u \wedge v]) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{R_{abcd} u^a v^b u^c v^d}{Q(u, v)}. \quad (5.6-5)$$

其中  $K$  的参数是由  $u^a, v^a$  所确定的截面, 与  $u^a, v^a$  本身没有关系, 这由式(5.6-3)及(5.6-4)一望而知. 由定义可以看出  $K$  是一个实数.

**例 5.39** 当  $m = 2$  时, 来计算一下  $K$  值. 此时可假设  $u^a = (\frac{\partial}{\partial x})^a$  及  $v^a = (\frac{\partial}{\partial y})^a$ , 有

$$K([u \wedge v]) = -\frac{R_{abcd}(\frac{\partial}{\partial x})^a(\frac{\partial}{\partial y})^b(\frac{\partial}{\partial x})^c(\frac{\partial}{\partial y})^d}{Q((\frac{\partial}{\partial x}), (\frac{\partial}{\partial y}))} = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21}}. \quad (5.6-6)$$

这正是二维曲面  $p$  点高斯曲率, 其中的负号纯粹是历史原因.

### 5.6.1 常曲率空间

**定义 5.40** 若广义黎曼流形  $M$  上所有点的二维截面曲率都是常数, 则  $M$  为常曲率空间.

**定理 5.41**  $M$  是常曲率空间的充要条件是:  $\forall p \in M, \forall u^a, v^a, w^a, z^a \in T_p M$ , 有

$$R_{abcd}u^a v^b w^c z^d = -K_0(u_a w^a \cdot v_b z^b - u_a z^a \cdot v_b w^b). \quad (5.6-7)$$

**证明.** “ $\Leftarrow$ ” 部分是显然的.

下面证明 “ $\Rightarrow$ ”. 点  $p$  所有二维截面的截面曲率都是实常数  $K_0$ , 即

$$\begin{aligned} 0 &= R_{abcd}u^a v^b u^c v^d + K_0(u_a u^a \cdot v_b v^b - u_a v^a u^b v_b) \\ \xrightarrow{v \rightarrow v+z} 0 &= R_{abcd}u^a v^b u^c v^d + R_{abcd}u^a v^b u^c z^d + R_{abcd}u^a z^b u^c v^d + R_{abcd}u^a z^b u^c z^d \\ &\quad + K_0(u_a u^a (v_b v^b + v_b z^b + z_b v^b + z_b z^b) - u_a u^b (v^a v_b + v^a z_b + z^a v_b + z^a z_b)) \\ \xrightarrow[\text{恒零项}]{\text{约去}} 0 &= R_{abcd}u^a z^b u^c v^d + K_0(u_a u^a z_b v^b - u_a u^b v^a z_b) \\ \xrightarrow{u \rightarrow u+w} 0 &= R_{abcd}(u^a u^c + w^a u^c + u^a w^c + w^a w^c)z^b v^d \\ &\quad + K_0((u^a u_a + w^a u_a + u^a w_a + w^a w_a)z_b v^b - (u^b u_a + w^b u_a + u^b w_a + w^b w_a)v^a z_b) \\ \xrightarrow[\text{恒零项}]{\text{约去}} 0 &= R_{abcd}(w^a u^c + u^a w^c)z^b v^d + K_0((w^a u_a + u^a w_a)z_b v^b - (w^b u_a + u^b w_a)v^a z_b) \\ &\Rightarrow 0 = R_{abcd}u^a v^b w^c z^d + K_0(w^a u_a z_b v^b - u^b z_b w_a v^a) \\ &\quad + R_{abcd}u^a z^b w^c v^d + K_0(u^a w_a z_b v^b - u_a v^a z_b w^b) \end{aligned}$$

上式倒数第一行中的  $T(u, z, w, v) \equiv K_0(u^a w_a z_b v^b - u_a v^a z_b w^b)$  满足第一 Bianchi 恒等式 (循环恒等式), 即在代换  $v \rightarrow w, w \rightarrow z, z \rightarrow v$  作用下有  $T(u, v, w, z) + T(u, w, z, v) + T(u, z, v, w) = 0$ ; 直接计算便可验证这个恒等式. 同时不难验证它还满足  $T(u, z, w, v) = -T(u, z, v, w) = -T(z, u, w, v)$  和  $T(u, z, w, v) = T(w, v, u, z)$ ; 黎曼曲率本身当然也满足上述这些对称性. 上式最后一步表明, 当所有二维截面曲率为常数时, 具有如下对称性,

$$R_{abcd}u^a v^b w^c z^d + T(u, v, w, z) = R_{abcd}u^a z^b v^c w^d + T(u, z, v, w). \quad (5.6-8)$$



这相当于进行如下轮换时具有不变性, 即  $v \rightarrow z, w \rightarrow v, z \rightarrow w$ ; 很显然, 上式再次轮换后, 还有下述等式

$$R_{abcd}u^a v^b w^c z^d + T(u, v, w, z) = R_{abcd}u^a w^b z^c v^d + T(u, w, z, v). \quad (5.6-9)$$

将式(5.6-8)和(5.6-9)中三个不同项加在一起, 有

$$\begin{aligned} & (R_{abcd}u^a v^b w^c z^d + T(u, v, w, z)) + (R_{abcd}u^a z^b v^c w^d + T(u, z, v, w)) \\ & + (R_{abcd}u^a w^b z^c v^d + T(u, w, z, v)). \end{aligned} \quad (5.6-10)$$

因  $T$  和曲率  $R$  都满足第一 Bianchi 恒等式, 所以式(5.6-10)恒为零. 而式(5.6-10)本身等于  $3(R_{abcd}u^a v^b w^c z^d + T(u, v, w, z))$ , 最终有

$$3 \cdot (R_{abcd}u^a v^b w^c z^d + K_0(u_a w^a \cdot z_b v^b - u^b z_b \cdot w_a v^a)) = 0. \quad (5.6-11)$$

这便是定理中的式(5.6-7). ■

**推论 5.42** 设  $(M, g)$  是曲率为  $K_0$  的常曲率黎曼流形, 则在局部标架场  $\{(e_i)^a\}$  下有

$$R_{ijkl} = R_{abcd}(e_i)^a (e_j)^b (e_k)^c (e_l)^d = -K_0(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}). \quad (5.6-12)$$

在常曲率空间中, 曲率型式有较为简洁的表达式, 由表达式(5.5-7)得

$$(\Theta_{ij})_{ab} = \frac{1}{2}R_{ijkl}(e^k)_a \wedge (e^l)_b \stackrel{5.6-12}{=} -K_0(e_i)_a \wedge (e_j)_b. \quad (5.6-13)$$

需注意, 上式所有指标都在下面. 利用上式, F. Schur 证明了如下重要定理,

**定理 5.43** 设有  $m(\geq 3)$  维连通广义黎曼流形  $(M, g)$ , 如果对于任意点  $p \in M$ , 此点的任意二维截面曲率是常数  $K(p)$ . 那么,  $K(p)$  必为常数, 即  $M$  是常曲率空间.

**证明.** 定理中  $K(p)$  可能是逐点不同的, 也就是  $K(p)$  是  $M$  上光滑函数场; 我们要证明的是: 在整个流形  $M$  上,  $K(p)$  只能取常数值, 不能逐点不同.

由式(5.6-13)可知:  $(\Theta_{ij})_{ab}(p) = -K(p)(e_i)_a \wedge (e_j)_b$ ,  $1 \leq i, j \leq m$ . 对此式求外微分 (注意  $K(p) \in C^\infty(M)$ ), 得

$$\begin{aligned} d_c(\Theta_{ij})_{ab} &= -d_c(K) \wedge (e_i)_a \wedge (e_j)_b - K(d_c(e_i)_a) \wedge (e_j)_b + K(e_i)_c \wedge (d_a(e_j)_b) \\ &\stackrel{5.5-8a}{=} -d_c(K) \wedge (e_i)_a \wedge (e_j)_b + K(e^k)_c \wedge (\omega_{ki})_a \wedge (e_j)_b - K(e_i)_c \wedge (e^k)_a \wedge (\omega_{kj})_b. \end{aligned}$$

同时, 由式(5.5-10)可知联络型式还可以表示为,

$$\begin{aligned} d_c(\Theta_{ij})_{ab} &= (\omega_{.j}^k)_c \wedge (\Theta_{ik})_{ab} + (\omega_{.i}^k)_c \wedge (\Theta_{kj})_{ab} \\ &\stackrel{5.6-13}{=} -K(\omega_{.j}^k)_c \wedge (e_i)_a \wedge (e_k)_b - K(\omega_{.i}^k)_c \wedge (e_k)_a \wedge (e_j)_b. \end{aligned}$$

对比以上两式可知, 有

$$d_c(K) \wedge (e_i)_a \wedge (e_j)_b = 0. \quad (5.6-14)$$

在标架场  $\{(e^i)_a\}$  中, 可令  $d_c(K) = K_l(e^l)_c$ ; 带入上式, 有

$$\sum_l K_l(e^l)_c \wedge (e_i)_a \wedge (e_j)_b = 0, \quad \forall i, j. \quad (5.6-15)$$

取  $i = 1, j = 2$ , 由上式得  $K_l = 0 (l \geq 3)$ . 再取  $i = 3, j = 1$  和  $i = 3, j = 2$ , 由式(5.6-15)可得  $K_1 = K_2 = 0$ . 因此有  $d_c(K) = 0$ , 进而可知  $K(p)$  对于整个流形只能取常数, 不能是逐点变化的. ■

## 5.7 共形变换

有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 设  $\Omega \in C^\infty(M)$  是处处恒正函数场, 于是

$$\tilde{g}_{ab} = \Omega^2 g_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{g}^{ab} = \Omega^{-2} g^{ab}, \quad (5.7-1)$$

在流形  $M$  上定义了一个新度规场  $\tilde{g}_{ab}$ ; 式(5.7-1)称为流形  $M$  上的**共形变换**; 特别的, 如果  $\Omega$  是正的实常数, 则称为**相似变换**.

与  $g_{ab}$  相容的联络记为  $\nabla_a$ , 克氏符记为  $\Gamma_{ij}^k$ . 与  $\tilde{g}_{ab}$  相容的联络记为  $\tilde{\nabla}_a$ , 克氏符记为  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ . 一般说来, 带波纹的量与不带波纹的量不再相同, 本节主要来计算它们间的差异. 需要注意的是, 带波纹张量需要用带波纹度规  $\tilde{g}$  升降指标; 不带波纹张量需要用不带波纹度规  $g$  升降指标. 为了避免不必要的误解, 我们将显示写出这些度规.

### 5.7.1 克氏符差异

设有局部坐标系  $\{x^i\}$ , 仿照式(5.1-3a)可知

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} \left( \frac{\partial \tilde{g}_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial \tilde{g}_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^l} \right) = \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{kl} \left( \frac{\partial \Omega^2 g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Omega^2 g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Omega^2 g_{ij}}{\partial x^l} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{kl} \left( \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) + \frac{1}{2} \Omega^{-2} g^{kl} \left( g_{il} \frac{\partial \Omega^2}{\partial x^j} + g_{lj} \frac{\partial \Omega^2}{\partial x^i} - g_{ij} \frac{\partial \Omega^2}{\partial x^l} \right) \\ &= \Gamma_{ij}^k + \delta_i^k \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x^j} + \delta_j^k \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x^i} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x^l} \equiv \Gamma_{ij}^k + \Xi_{ij}^k. \end{aligned} \quad (5.7-2)$$

上式最后一步定义了

$$\Xi_{ij}^k \equiv \delta_i^k \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x^j} + \delta_j^k \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x^i} - g_{ij} g^{kl} \frac{\partial \ln \Omega}{\partial x^l}; \quad \Xi_{ab}^c \equiv \Xi_{ij}^k (dx^i)_a (dx^j)_b \left( \frac{\partial}{\partial x^k} \right)^c. \quad (5.7-3)$$

虽然克氏符不是张量, 但两者的差  $\Xi_{ab}^c$  是张量; 很明显有  $\Xi_{ab}^c = \Xi_{ba}^c$ . 因  $\ln \Omega$  是标量函数场, 在局部上可以将偏导数换成协变导数, 即  $\partial_a \ln \Omega = \nabla_a \ln \Omega$ ; 所以上式还可以表示成,

$$\Xi_{ab}^c = \delta_a^c \nabla_b \ln \Omega + \delta_b^c \nabla_a \ln \Omega - g_{ab} g^{ce} \nabla_e \ln \Omega. \quad (5.7-4)$$

有了克氏符的差异, 那联络差异便容易求得了,  $\forall X^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\omega_a \in \mathfrak{X}^*(M)$

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)X^b = \Xi_{ca}^b X^c, \quad (5.7-5)$$

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b = -\Xi_{ba}^c \omega_c. \quad (5.7-6)$$

由上两式容易求得高阶张量场的协变导数差异.

### 5.7.2 曲率差异

首先计算黎曼曲率, 从式(4.2-2)出发, 为行文简单, 先计算下式 ( $\forall Z^a \in \mathfrak{X}(M)$ )

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b Z^d &= \nabla_a (\nabla_b Z^d + \Xi_{fb}^d Z^f) + \Xi_{ea}^d (\nabla_b Z^e + \Xi_{fb}^e Z^f) - \Xi_{ba}^e (\nabla_e Z^d + \Xi_{fe}^d Z^f) \\ &= \nabla_a \nabla_b Z^d + Z^f \nabla_a \Xi_{fb}^d + \Xi_{fb}^d \nabla_a Z^f + \Xi_{ea}^d (\nabla_b Z^e + \Xi_{fb}^e Z^f) - \Xi_{ba}^e \tilde{\nabla}_e Z^d \end{aligned}$$

对上式中的下标  $ab$  取反对称 (注意利用  $\Xi_{ab}^c = \Xi_{ba}^c$ ), 有

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{cab}^d &= 2\tilde{\nabla}_{[a} \tilde{\nabla}_{b]} Z^d = 2\nabla_{[a} \nabla_{b]} Z^d + 2Z^f \nabla_{[a} \Xi_{b]f}^d + 2\Xi_{f[b}^d \nabla_{a]} Z^f + 2\Xi_{e[a}^d \nabla_{b]} Z^e + 2\Xi_{e[a}^d \Xi_{b]f}^e Z^f \\ &= R_{cab}^d + 2Z^f \nabla_{[a} \Xi_{b]f}^d + 2\Xi_{e[a}^d \Xi_{b]f}^e Z^f \end{aligned}$$

因  $\forall Z^a \in \mathfrak{X}(M)$ , 故有

$$\tilde{R}_{cab}^d = R_{cab}^d + 2\nabla_{[a} \Xi_{b]c}^d + 2\Xi_{e[a}^d \Xi_{b]c}^e \quad (5.7-7a)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{5.7-3}{=} R_{cab}^d - 2\delta_{[a}^d \nabla_{b]} \partial_c \ln \Omega + 2g^{df} g_{c[a} \nabla_{b]} \partial_f \ln \Omega + 2(\partial_c \ln \Omega) \delta_{[a}^d \partial_{b]} \ln \Omega \\ &\quad - 2g_{c[a} (\partial_{b]} \ln \Omega) g^{df} \partial_f \ln \Omega - 2\delta_{[a}^d g_{b]c} g^{ef} (\partial_e \ln \Omega) \partial_f \ln \Omega \end{aligned} \quad (5.7-7b)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{5.7-4}{=} R_{cab}^d - 2\delta_{[a}^d \nabla_{b]} \nabla_c \ln \Omega + 2g^{df} g_{c[a} \nabla_{b]} \nabla_f \ln \Omega + 2(\nabla_c \ln \Omega) \delta_{[a}^d \nabla_{b]} \ln \Omega \\ &\quad - 2g_{c[a} (\nabla_{b]} \ln \Omega) g^{df} \nabla_f \ln \Omega - 2\delta_{[a}^d g_{b]c} g^{ef} (\nabla_e \ln \Omega) \nabla_f \ln \Omega. \end{aligned} \quad (5.7-7c)$$

计算过程并不复杂, 也不繁琐.

式(5.7-7c)收缩后得 Ricci 曲率间的差异是 (黎曼曲率收缩无需度规, 直接缩并  $a, d$ )

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{bc} &= R_{bc} - g_{bc} g^{ef} \nabla_e \nabla_f \ln \Omega - (m-2) \nabla_b \nabla_c \ln \Omega \\ &\quad + (m-2) (\nabla_b \ln \Omega) \nabla_c \ln \Omega - (m-2) g_{bc} g^{ef} (\nabla_e \ln \Omega) \nabla_f \ln \Omega. \end{aligned} \quad (5.7-8)$$

再次收缩得标量曲率间的差异是 (需用度规, 所以有系数  $\Omega^2$ )

$$\Omega^2 \tilde{R} = R - 2(m-1) g^{bc} \nabla_b \nabla_c \ln \Omega - (m-1)(m-2) g^{bc} (\nabla_b \ln \Omega) \nabla_c \ln \Omega. \quad (5.7-9)$$

(1,3) 型 Weyl 张量 (可由式(5.2-18)将指标升上来得到) 间的差异是

$$\tilde{C}_{.bcd}^a = C_{.bcd}^a. \quad (5.7-10)$$

上式计算过程较为繁琐, 但无需任何技巧, 直接把式(5.7-7)、(5.7-8)和(5.7-9)带入式(5.2-18)硬算便是; 注意利用: 因联络无挠, 故  $\nabla_b \nabla_c \ln \Omega = \nabla_c \nabla_b \ln \Omega$ . 在共形映射下, (1,3) 型 Weyl 张量是不变的, 所它也被称为共形张量. 需要注意其它类型 Weyl 张量未必是共形不变的, 比如 (0,4) 型的就不是, 即  $\tilde{C}_{abcd} = \Omega^2 C_{abcd}$ .

### 5.7.3 共形平坦

**定义 5.44** 如果  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上对于每一点  $p$ , 都存在包含  $p$  的开邻域  $U$  以及  $U$  上的平坦度量  $\tilde{g}$  (即它的黎曼曲率  $\tilde{R}_{bcd}^a$  恒为零), 使得在  $U$  上  $g$  和  $\tilde{g}$  是共形的, 则称  $(M, g)$  是局部共形平坦的黎曼流形.

**定理 5.45**  $m(> 3)$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  是局部共形平坦的充要条件是  $C_{bcd}^a$  恒为零.

**证明** . 参见文献 [3] 推论 7.31; 或见文献 [2]<sup>§28</sup>; 或见文献 [6]<sup>§3.3</sup>. 当  $m \leq 3$  时, 局部共形平坦充分必要条件也可参见上述文献. ■

设  $m(> 3)$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  是曲率为  $K_0$  的常曲率空间, 则由式(5.6-12)可得其各种曲率分量表达式

$$R_{ijkl} = -K_0(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \quad (5.6-12)$$

$$R_{jl} = -K_0(m-1)g_{jl}, \quad (5.7-11)$$

$$R = -K_0(m-1)m, \quad (5.7-12)$$

$$C_{ijkl} = 0. \quad (5.7-13)$$

上面已算出常曲率空间的 Weyl 张量恒为零, 由定理5.45可得如下推论,

**推论 5.46** 常曲率广义黎曼流形 (维数大于 3) 必是局部共形平坦的.

## 第五章参考文献

- [1] CHANDRASEKHAR S. The Mathematical Theory of Black Holes[M]. UK: Oxford University Press, 1983 (引用页: 156).
- [2] EISENHART L P. Riemannian Geometry[M]. US: Princeton University Press, 1926 (引用页: 170).
- [3] LEE J M. Introduction to Riemannian Manifolds[M]. 2nd ed. US: Springer, 2018. DOI: [10.1007/978-3-319-91755-9](https://doi.org/10.1007/978-3-319-91755-9) (引用页: 170).
- [4] MISNER C W, THORNE K S, WHEELER J A. Gravitation[M]. US: W. H. Freeman, 1973 (引用页: 140).
- [5] WALD R M. General Relativity[M]. US: University of Chicago Press, 1984 (引用页: 140).
- [6] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 等. 黎曼几何初步[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004 (引用页: 170).
- [7] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 133).

## 第六章 测地线

为了更好地讨论，我们先引入了诱导联络概念，继而讨论测地线的一般属性。借助测地线可以定义指数映射，由指数映射自然地引入黎曼法坐标的概念，法坐标系对于简化计算有特别的帮助。我们还简要介绍了测地完备性以及弧长变分公式。本章最后介绍了 Jacobi 场，这是描述引力论中测地偏离方程的工具。

本章主要参考了 [5]<sup>Ch.9</sup>、[6]<sup>Ch.4</sup> 和 [8]<sup>Ch.3, Ch.5, Ch.6</sup> 或其它类似书籍。

### 6.1 测地线概念

欧几里得空间  $\mathbb{R}^m$  的直线在几何图像上是“直”的，但这种感官性质的“直”是无法向流形上推广的。然而  $\mathbb{R}^m$  直线方程的两次导数恒为零的分析属性（微积分属性）是可以推广到流形上的，流形上测地线定义就是依据这个属性进行推广的。流形上的测地线感官上来看，一般不是“直”的。测地线是沿自身平行的曲线，可以看作是欧氏空间中直线方向不变的推广。

§4.1.5节中，已经给出仿射空间测地线  $\gamma(t)$  定义4.14；这个定义也适用于  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ ，此时有度规，内容更丰富。该定义中称满足  $T^b \nabla_b T^a = 0$  的参数为仿射参数；有时<sup>[4]p.33</sup>也把满足  $T^b \nabla_b T^a = f T^a$ （ $f$  为非零标量场）的曲线称为测地线；不过，最好称之为“非仿射参数化的测地线（non-affinely parametrized geodesic）”。

#### 6.1.1 诱导联络

为了更精准地讨论，需先引入诱导联络的概念；请先阅读 §2.8.4。先看一下目前的 Levi-Civita 联络有何不足。设  $\gamma(t)$  是流形  $M$  中的一条曲线， $X^a$  是沿  $\gamma$  的一条光滑切矢量场（注意，它未必平行于  $\gamma$  的切线； $X^a$  是切丛  $TM$  中的矢量，只是在  $\gamma$  上取值而已）； $T^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$  是  $\gamma(t)$  的真正的切线切矢量。在讨论  $\gamma$  的平行移动或者  $\gamma$  是测地线时，我们需要定义  $T^b \nabla_b X^a$ ；此时需要将  $\gamma$  上的  $X^a$  延拓至整个  $M$  上。如果  $\gamma$  有自交点，那么在交点处出现多值性；如果  $T^a$  在某点为零，那么联络定义也有问题。而下面定义的诱导联络大体可以避免这种缺陷。

设  $N$  是一  $n$  维光滑流形;  $M$  是  $m$  维黎曼流形, 度规为  $g_{ab}$ ,  $\nabla_a$  是其 Levi-Civita 联络; 存在光滑浸入映射  $\phi: N \rightarrow M$  (所以必有  $n < m$ ). 如果  $\forall p \in N$ ,  $X^a \in T_{\phi(p)}M$ , 则称  $X^a$  是  $\phi$  上的矢量场.

前面讨论的曲线  $\gamma(t)$  自然是一条浸入曲线, 可看作此定义中的流形  $N$ . 如果  $u^a$  是  $N$  上的矢量场, 一般说来  $\phi_* u^a$  可能不是  $M$  上的矢量场; 比如  $\phi$  不是满的 (注:  $\phi$  是浸入, 必是局部单射), 那么推前之后, 在  $M$  上不是每一点都有一个矢量场. 但  $\phi_* u^a$  是  $\phi$  上的矢量场, 因为映射  $\phi: N \rightarrow \phi(M)$  是 (局部) 双射. 可见有必要引入 “ $\phi$  上的矢量场” 这一概念. 矢量场  $u^a$  在  $N$  中原来只有  $n (< m)$  个分量; 在浸入  $M$  后, 矢量场  $\phi_* u^a$  可以假设前  $n$  个分量不变<sup>1</sup>, 后  $m - n$  个分量为零; 这样  $\phi_* u^a$  就有了  $m$  个分量, 便是  $TM$  中矢量了. 如果  $TM$  有矢量  $Y^a$  在点  $\phi(p) \in M$  有定义, 但后  $m - n$  个分量中有非零值, 那么  $Y^a$  也是  $\phi$  上的矢量场.  $\phi$  上的矢量场不一定都由  $TN$  推前得到.

设  $\{(e_i)^a, 1 \leq i \leq m\}$  是在点  $\phi(p) \in U \subset M$  邻域  $U$  中的局部标架场; 为了讨论诱导联络定义与局部标架场无关, 我们同时设点  $\phi(p)$  有邻域  $V$  及局部标架场  $\{(\tilde{e}_\alpha)^a\}$ , 并且  $\phi(p) \in U \cap V \neq \emptyset$ . 再设存在  $m^2$  个光滑函数  $A_\alpha^i \in C^\infty(U \cap V)$  使得  $(\tilde{e}_\alpha)^a = A_\alpha^i (e_i)^a \Leftrightarrow B_i^\alpha (\tilde{e}_\alpha)^a = (e_i)^a$ . 那么  $\phi$  上的矢量场  $X^a \in T_{\phi(p)}(U \cap V) \subset T_{\phi(p)}M$  可展开为

$$X^a = \xi_{\phi(p)}^i \cdot (e_i)^a|_{\phi(p)} = \eta_{\phi(p)}^\alpha \cdot (\tilde{e}_\alpha)^a|_{\phi(p)} = (\eta_{\phi(p)}^\alpha \cdot A_\alpha^i) \cdot (e_i)^a|_{\phi(p)}. \quad (6.1-1)$$

定义沿  $v^a \in T_p N$  的  $\phi$  上矢量场  $X^a \in T_{\phi(p)}M$  的诱导联络  $\tilde{\nabla}_v X^a \in T_{\phi(p)}M$  为

$$\tilde{\nabla}_v X^a \stackrel{\text{def}}{=} (\phi_* v(\xi^i))(e_i)^a|_{\phi(p)} + \xi_{\phi(p)}^i \nabla_{\phi_* v}((e_i)^a|_{\phi(p)}) = \nabla_{\phi_* v} X^a. \quad (6.1-2)$$

先证明这个定义与局部标架场  $\{(e_i)^a\}$  选取无关, 为简洁起见省略角标  $\phi(p)$ .

$$\begin{aligned} & (\phi_* v(\xi^i))(e_i)^a + \xi_{\phi(p)}^i \nabla_{\phi_* v}((e_i)^a) \\ &= v(\eta^\alpha A_\alpha^i)(\tilde{e}_\beta)^a B_i^\beta + \eta^\alpha A_\alpha^i \nabla_{\phi_* v}((\tilde{e}_\beta)^a B_i^\beta) \\ &= \eta^\alpha v(A_\alpha^i)(\tilde{e}_\beta)^a B_i^\beta + A_\alpha^i v(\eta^\alpha)(\tilde{e}_\beta)^a B_i^\beta + \eta^\alpha A_\alpha^i B_i^\beta \nabla_{\phi_* v}((\tilde{e}_\beta)^a) + \eta^\alpha A_\alpha^i (\tilde{e}_\beta)^a \nabla_{\phi_* v}(B_i^\beta) \\ &= v(\eta^\alpha)(\tilde{e}_\alpha)^a + \eta^\alpha \nabla_{\phi_* v}(\tilde{e}_\alpha)^a + \eta^\alpha (\tilde{e}_\beta)^a \left( v(A_\alpha^i) \cdot B_i^\beta + A_\alpha^i v(B_i^\beta) \right) \\ &= v(\eta^\alpha)(\tilde{e}_\alpha)^a + \eta^\alpha \nabla_{\phi_* v}(\tilde{e}_\alpha)^a + \eta^\alpha (\tilde{e}_\beta)^a \left( v(A_\alpha^i B_i^\beta) \right) \\ &= v(\eta^\alpha)(\tilde{e}_\alpha)^a + \eta^\alpha \nabla_{\phi_* v}(\tilde{e}_\alpha)^a. \end{aligned}$$

注意  $A^T = B^{-1}$ . 这便证明了定义与标架场选取无关.

直接带入即可验证它满足定义4.1中的前三个条件 (将  $K$  和  $L$  看成矢量场或标量场); 最后两条看作附加原则; 因此式(6.1-2)符合联络定义.

再列出几条关于诱导联络的性质.

$$v(X_a Y^a) = (\tilde{\nabla}_v X_a) Y^a + X_a (\tilde{\nabla}_v Y^a); \quad \forall X^a, Y^a \in T_{\phi(p)}M, \quad \forall v^a \in T_p N. \quad (6.1-3)$$

<sup>1</sup> 因为是浸入, 所以可以认为  $N$  中的  $n$  个坐标与流形  $M$  中的前  $n$  个坐标完全重合; 见定理2.37.

$$\phi_*[X, Y]^a = \tilde{\nabla}_X(\phi_* Y^a) - \tilde{\nabla}_Y(\phi_* X^a); \quad \forall X^a, Y^a \in T_p N. \quad (6.1-4)$$

式(6.1-3)说明度规与诱导联络是相容的, 请比对式(5.1-1); 式(6.1-4)说明诱导联络是无挠的, 请比对式(4.1-22).

先证明式(6.1-3). 注意  $v(X_a Y^a)$  应理解为  $\phi_* v(X_a Y^a)$ , 故

$$(\phi_* v)(X_a Y^a) = \nabla_{\phi_* v}(X_a Y^a) = Y^a \nabla_{\phi_* v} X_a + X_a \nabla_{\phi_* v} Y^a = (\tilde{\nabla}_v X_a) Y^a + X_a (\tilde{\nabla}_v Y^a).$$

再证明式(6.1-4). 设  $T_p N$  处的局部标架场是  $\{(E_i)^a\} (1 \leq i \leq n)$ ; 因  $\phi$  是浸入, 故基矢推前后在  $T_{\phi(p)} M$  处基矢场  $\{(e_\alpha)^a\}$  展开表示为  $(E_i)^a = c_i^\alpha (e_\alpha)^a$ , 其中  $c_i^\alpha \in C^\infty(M)$ , 又因  $n < m$ , 故  $c$  不是方阵. 有了这些准备, 可得  $\phi_* X^a = \phi_*(X^i (E_i)^a) = X^i c_i^\alpha (e_\alpha)^a$ , 和  $\phi_* Y^a = \phi_*(Y^j (E_j)^a) = Y^j c_j^\beta (e_\beta)^a$ .

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\phi_* Y^a) - \tilde{\nabla}_Y(\phi_* X^a) &= (X^i c_i^\alpha e_\alpha(Y^j c_j^\pi))(e_\pi)^a + Y^j c_j^\pi (X^i c_i^\alpha (e_\alpha)^b) \nabla_b (e_\pi)^a \\ &\quad - (Y^i c_i^\alpha e_\alpha(X^j c_j^\pi))(e_\pi)^a - X^j c_j^\pi (Y^i c_i^\alpha (e_\alpha)^b) \nabla_b (e_\pi)^a \\ &= \left( X^i c_i^\alpha e_\alpha(Y^j c_j^\sigma) + Y^j c_j^\pi X^i c_i^\alpha \gamma_{\pi\alpha}^\sigma - Y^i c_i^\alpha e_\alpha(X^j c_j^\sigma) - X^j c_j^\pi Y^i c_i^\alpha \gamma_{\pi\alpha}^\sigma \right) (e_\sigma)^a \\ &= \left( X^i c_i^\alpha e_\alpha(Y^j c_j^\sigma) - Y^i c_i^\alpha e_\alpha(X^j c_j^\sigma) + X^i c_i^\alpha Y^j c_j^\pi (\gamma_{\pi\alpha}^\sigma - \gamma_{\alpha\pi}^\sigma) \right) (e_\sigma)^a \\ &\stackrel{5.5-28}{=} [\phi_* X, \phi_* Y]^a \stackrel{2.63}{=} \phi_* [X, Y]^a. \end{aligned} \quad (6.1-5)$$

**注 6.1** 在此之后, 如果联络意义有含混时, 一律按诱导联络理解; 但不再记为  $\tilde{\nabla}_v X^a$ , 而直接记为  $\nabla_v X^a$ .

在平行移动定义4.13中所用的联络便是诱导联络的特例, 即一条曲线上的诱导联络. 有了诱导联络和度规, 可以有如下定理: 平行移动保内积不变.

**定理 6.2** 设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 其上存在光滑曲线  $\gamma(t)$ . 如果有沿  $\gamma(t)$  平行的切向量场  $X^a, Y^a$ , 那么  $g_{ab} X^a Y^b$  沿  $\gamma(t)$  是常数.

**证明.** 沿  $\gamma(t)$  平行是指:  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} X^a = 0, \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} Y^a = 0$ ; 其中  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  是  $\gamma(t)$  的切线切矢量.

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (g_{ab} X^a Y^b) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (g_{ab}) X^a Y^b + g_{ab} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (X^a) Y^b + g_{ab} X^a \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} (Y^b) = 0.$$

为零原因: 度规、联络相互容许, 切向量场  $X^a, Y^a$  沿  $\gamma(t)$  平行. 这说明, 沿曲线  $\gamma(t)$  平行移动保持切矢量长度和夹角不变; 换句话说: 平行移动是线性、局部等距同构映射. ■

### 6.1.2 测地线的存在唯一性

设广义黎曼流形  $M$  的局部坐标系为  $(U; x^i)$ ; 曲线  $\gamma(t)$  的局部坐标表达式为  $x^i \circ \gamma(t)$ , 由式(4.1-41)可得: 曲线  $\gamma(t)$  是测地线的充分必要条件是分量  $x^i \circ \gamma(t)$  (为简洁起见, 省掉后缀 “ $\circ \gamma$ ”) 满足如下方程组,

$$\frac{d^2 x^i(t)}{dt^2} + \Gamma_{jk}^i(t) \frac{dx^j(t)}{dt} \frac{dx^k(t)}{dt} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad t \in (-\delta, \delta). \quad (6.1-6)$$

上式中所有量均沿曲线  $\gamma(t)$  取值, 并且当  $t$  变动时,  $\gamma(t)$  没有跑出开子集  $U$ .

式(6.1-6)是常微分方程 (不论线性与否), 根据常微分方程解存在唯一性以及初值依赖性 (比如参阅 [1]<sup>§31</sup>), 当给定初值时 (点  $p \in U$  的坐标  $x_p$  以及此点的一个切矢量  $v^a$ ),

$$x^i(0) = x_p^i, \quad \frac{dx^i(0)}{dt} = v^i; \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.1-7)$$

常微分方程式(6.1-6)在局部开集  $U$  内存在满足上述初始条件的唯一解; 也就是说开集  $U$  内存在唯一一条测地线  $\gamma(t; p, v^a)$  满足初始条件(6.1-7), 即  $\gamma(0; p, v) = p$  及  $(\frac{\partial}{\partial t})^a|_{\gamma(0)} = v^a$ .

**定义 6.3** 设  $\gamma(t)$  是黎曼流形  $M$  上的一条测地线, 用  $T^a = (\frac{\partial}{\partial t})^a$  表示其切矢量; 如果  $T^a$  处处非零, 则称其为**正则测地线**; 如果  $T_a T^a = 1$  处处成立, 则称其为**正规测地线**.

测地线唯一性定理与度规场没有本质联系, 有无度规场, 解都是唯一的.

### 6.1.3 仿射变换

设有映射  $t(u)$  将正则测地线  $\gamma(t)$  实参数  $t$  变成了  $u$  (这称为重参数化), 曲线也变成了  $\tilde{\gamma}(u)$ ; 对重参数化后的曲线作如下计算 (注: 对单参量  $t$  (或  $u$ ) 的偏导数相当于普通导数, 即  $\partial \rightarrow d$ ),

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^a &= \nabla_{\frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t}} \left( \frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t} \right)^a = (t'(u))^2 \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a + t'(u) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left( \frac{dt}{du} \right) \\ &\quad \frac{\gamma(t) \text{ 是 } \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a}{\text{测地线}} \frac{dt}{du} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{dt}{du} \right) = t''(u) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a. \end{aligned} \quad (6.1-8)$$

由此式可以看出当变换  $t(u)$  是仿射变换时, 即

$$t(u) = au + b, \quad a, b \text{ 是实常数, 并且 } a \neq 0. \quad (6.1-9)$$

此时  $t''(u) = 0$ , 所以变换后的曲线  $\tilde{\gamma}(u)$  仍是测地线, 即满足  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial u}} \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^a = 0$ .

反之, 如果要求变换后的曲线  $\tilde{\gamma}(u)$  是测地线, 那么由式(6.1-8)可知必有  $t''(u) = 0$  (因  $\gamma(t)$  正则, 所以在任意点都有  $(\frac{\partial}{\partial t})^a \neq 0$ ), 故  $t(u)$  必是仿射变换(6.1-9).

下面开始讨论一类特殊的仿射变换: 缩放变换. 对于测地线  $\gamma(t; p, v^a)$ , 我们来作参数变换  $t = \lambda u$  (其中  $\lambda$  是正的实常数), 变换前后的参数取值范围仍在测地线定义域内. 这显然是仿射变换, 变换后的曲线  $\tilde{\gamma}(u) \equiv \gamma(\lambda u; p, v^a)$  是仍是测地线, 并且有

$$\tilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = p; \quad \left( \frac{\partial}{\partial u} \right)^a \Big|_{u=0} = \lambda \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \Big|_{t=0} = \lambda v^a. \quad (6.1-10)$$

这说明  $\tilde{\gamma}(u)$  是经过  $p$  点以  $\lambda \cdot v^a$  为初始切矢量的测地线, 由测地线的唯一性可知,

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(\lambda u; p, v^a) = \gamma(u; p, \lambda v^a) \Leftrightarrow \gamma(u; p, v^a) = \gamma(\lambda u; p, \frac{v^a}{\lambda}). \quad (6.1-11)$$

仿射变换、缩放变换与度规场没有本质联系.



### 6.1.4 弧长参数

下面来看测地线  $\gamma(t)$  的线元长度，计算下式

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left( g_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^b \right) = 2g_{ab} \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \right) \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^b = 0. \quad (6.1-12)$$

可见测地线弧长平方求导之后恒为零，这说明测地线线元长度是实常数，因此必然有（也就是把上式换成下式）

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^b} = a > 0. \quad (6.1-13)$$

于是有常数  $b$  使得仿射变换  $s = at + b$  成立，这说明弧长参数  $s$  是仿射参数；以线长为参数的测地线，其切矢量恒为 1（见式(5.1-16)），是正规测地线。

## 6.2 指数映射与法坐标系

我们先引入指数映射定义，然后借用指数映射介绍法坐标系（Normal Coordinates）。

### 6.2.1 指数映射

现有满足初始条件(6.1-7)的流形  $(M, g)$  上的测地线  $\gamma(t; p, v)$ ，当参数  $t = 1$  时，赋予它一个新的名称：**指数映射**，它是  $TM$  上开子集到流形  $M$  开子集的映射，

$$\exp_p(v^a) \equiv \exp(p, v^a) \stackrel{\text{def}}{=} \gamma(1; p, v^a) = \gamma(|v|; p, \frac{v^a}{|v|}). \quad (6.2-1)$$

上面最后一式用到了(6.1-11)式；指数映射的几何意义是沿测地线  $\gamma(t)$  由点  $p \equiv \gamma(0)$  到点  $\gamma(1)$  的测地线弧长等于  $|v|$ 。需要注意，如果切矢量  $v^a$  过大，指数映射可能没有定义；但只要定义则必然唯一。同理，很明显有

$$\exp_p(tv^a) = \gamma(1; p, tv^a) = \gamma(t; p, v^a). \quad (6.2-2)$$

指数映射(6.2-1)只是借助测地线将  $T_p M$  映射到流形  $M$  中，参数  $t \equiv 1$ ；式(6.2-2)则是测地线本身，参数  $t$  是变量。

**定理 6.4** 设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ 。  $\forall p \in M$ ，在线性空间  $T_p M$  中存在原点的开邻域  $V$ ，使得指数映射  $\exp_p$  是从  $V$  到  $M$  中开子集  $U = \exp_p(V)$  上的微分同胚。

**证明**。原点是指向量空间  $T_p M$  中矢量为零的点，令

$$B_p(\epsilon) \equiv \{v^a \in T_p M; |v| < \epsilon\}. \quad (6.2-3)$$

显然  $B_p(\epsilon)$  是  $T_p M$  中以原点为中心, 半径为  $\epsilon$  的开球.  $\forall v \in B_p(\epsilon) \subset T_p M = T_0(T_p M)$ <sup>2</sup>, 令  $|t| \leq 1$ , 则式(6.2-2)肯定有定义; 参考式(2.5-8)

$$\phi_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(0)} \right)^a = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\phi \circ \gamma(0)} \right)^a. \quad (2.5-8)$$

可得

$$(\exp_p)_* (v^a) = \left( \frac{d}{dt} \Big|_{\gamma(0;p,v^a)} \right)^a = v^a. \quad (6.2-4)$$

此处的  $(\exp_p)_*$  相当于式(2.5-8)的  $\phi_*$ , 式(2.5-8)中的  $\gamma(t)$  就是此处的测地线  $\gamma(t;p,v^a)$ ; 而  $(\exp_p)_*$  本质上是测地线的推前映射, 所以才有最终上式的结果. 这说明  $(\exp_p)_*$  是恒等映射, 那它自然是非退化的 (Jacobi 矩阵满秩), 由定理2.36可知映射  $\exp_p$  在原点  $\mathbf{0} \in T_p M$  处是局部微分同胚. ■

**例 6.5** 欧几里得空间  $\mathbb{R}^m$  上的指数映射.

欧氏空间测地线就是所谓的“直线”. 原点处的切空间  $T_0(\mathbb{R}^m)$  就是  $\mathbb{R}^m$  自身. 指数映射  $\exp_0$  则是恒等映射. 一般的,  $\forall p \in \mathbb{R}^m$ , 不难得到

$$\exp_p = p + v, \quad \forall v^a \in T_p(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m. \quad (6.2-5)$$

我们借用这道例题来解释一下上面提到的指数映射“有无定义”这件事情. 在本例中, 我们把定义域和值域都取成了  $\mathbb{R}^m$ ; 如果我们把指数映射的定义域取成半径为 1 的开球, 那么当  $|v| > 1$  时就会出现所谓的“无定义”情形, 当  $|v| < 1$  时属于“有定义”情形.

### 6.2.2 黎曼法坐标系

在几何学中, 为了能够简单明了的描述问题, 选择适当坐标系非常重要; 如果选择不当会使计算或证明异常困难. 对于黎曼流形来说, “黎曼法坐标系”是非常合适的坐标系, 它是借助指数映射建立起来的.

要严格叙述黎曼法坐标系需要测地凸邻域等概念, 请参阅文献 [7]<sup>§5.2</sup> 或 [8]<sup>§3.4-3.5</sup>; 我们只给出描述性的说明. 只要在  $T_p M$  原点足够小的邻域内, 指数映射之后的值域  $W \subset M$  也足够小, 那么在映射后的 ( $M$  中) 开集  $W$  内连接任意点  $q \in W$  和  $p$  的测地线全部位于  $W$  中, 并且在  $W$  内连接  $p$  和  $q$  的测地线是唯一的 ( $W$  称为测地凸邻域). 可以证明  $\forall p \in M$  都存在包含  $p$  点的测地凸邻域. 如果测地线不能完全落在  $W$  中, 那么我们无法建立  $T_p M$  与  $W$  间的双射, 也就无法建立坐标. 如果测地线不唯一, 建立后的坐标将是多值的, 不符合要求.

<sup>2</sup> $T_p M$  是线性空间, 自然可以看成流形; 原点是这个流形上一点,  $T_0(T_p M)$  是指流形  $T_p M$  中原点处的切空间.

指数映射将原点附近足够小的开邻域  $V \subset T_p M$  映射为

$$\exp_p : V \rightarrow U \equiv \exp_p(V) \subset M \quad (6.2-6)$$

设  $U$  是  $\exp_p(0)$  点 (即  $p$  点) 测地凸邻域. 由定理 6.4 可知指数映射是局部微分同胚的 (其实由高斯引理的注解 6.18 可知指数映射是沿径向测地线局部等距同构映射). 因  $T_p M \cong \mathbb{R}^m$ , 其上天然存在正交归一的笛卡尔坐标系; 那么局部恒等映射  $\varphi = \exp_p^{-1} : U \rightarrow V$  便将  $V \subset \mathbb{R}^m$  中的笛卡尔坐标携带到  $U$  中, 从而它有一个局部坐标系  $(U, \varphi; y^i)$ , 称为黎曼流形  $(M, g)$  在  $p$  点的黎曼法坐标系, 相应的开集  $U$  称为黎曼法坐标邻域; 通常会简称为法坐标系 (邻域). 由指数映射得到的测地线一般称为径向测地线.

**定理 6.6** 设  $(U, \varphi; y^i)$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上任意点  $p$  的法坐标系, 那么在  $p$  点有  $\bar{g}_{ij}(p) = \eta_{ij}$ ,  $\bar{\Gamma}_{ij}^k(p) = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial y^k}(p) = 0$ .

**证明.** 我们把法坐标系下的诸多分量上加了一道横杠以区别一般坐标系, 比如  $\bar{g}_{ij}, \bar{\Gamma}_{ij}^k$ .

因点  $p$  切空间  $T_p M$  同构于  $\mathbb{R}^m$  中开子集, 故我们可以在  $T_p M$  中取正交归一的标架场  $(e_i)^a$ ; 即  $g_{ab}(e_i)^a(e_j)^b = \eta_{ij}$ , 其中  $\eta_{ij}$  是指对角元为  $\pm 1$ , 非对角元全为零的矩阵. 再任取  $V$  中一个矢量  $v^a$ , 在这个正交归一的标架场  $(e_i)^a$  上分量为  $v = (v^1, \dots, v^m) \in V$ , 其中  $v^i$  是实常数. 依据法坐标系定义, 局部恒等映射  $\varphi = \exp_p^{-1}$  会把这个坐标带到  $U$  中, 矢量  $v^a$  在  $(U; y^i)$  中的坐标是

$$y^i \circ \exp_p(v^a) \equiv v^i, \quad \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^a \bigg|_p \equiv (e_i)^a; \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.2-7)$$

故  $\bar{g}_{ij}(p) = g_{ab}(\frac{\partial}{\partial y^i})^a|_p(\frac{\partial}{\partial y^j})^b|_p = g_{ab}(e_i)^a(e_j)^b = \eta_{ij}$ .

在  $V$  中测地线是真正的“直线”; 局部恒等映射  $\varphi = \exp_p^{-1}$  也会把它带入到  $U$  中的法坐标系, 因此从  $p$  点出发的径向测地线方程  $\exp_p(sv^a)$  的分量表达是

$$y^i(s) = y^i \circ \exp_p(sv^a) = sv^i, \quad s \text{ 是弧长}, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.2-8)$$

把式(6.2-8)带入测地线方程式(6.1-6), 立即可得

$$v^i v^j \bar{\Gamma}_{ij}^k(sv^a) = 0, \quad 1 \leq i, j, k \leq m. \quad (6.2-9)$$

特别地, 当  $s = 0$  时, 利用  $v^a$  的任意性以及  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$  关于下标  $i, j$  的对称性 (如果不对称则没有以下结果), 可得  $\bar{\Gamma}_{ij}^k(0) = 0$ ,  $1 \leq i, j, k \leq m$ . 如果  $s \neq 0$ , 那么  $\bar{\Gamma}_{ij}^k(sv^a)$  将与  $v^a$  相关, 则式(6.2-9)不是二次型, 未必能得到  $\bar{\Gamma}_{ij}^k(sv^a) = 0$ .

由  $\bar{g}_{ij}(p) = \eta_{ij}$ ,  $\bar{\Gamma}_{ij}^k(p) = 0$ , 再结合式(5.1-2) ( $\partial_a g_{bc} = \Gamma_{ba}^e g_{ec} + \Gamma_{ca}^e g_{be}$ ) 易得  $\frac{\partial \bar{g}_{ij}}{\partial y^k}(p) = 0$ . 以上关系式仅在  $p$  点成立, 哪怕离开一点点也未必再成立. ■

上面用抽象的映射定义了法坐标系, 下面我们用分量语言再次看一下这个问题, 并且给出法坐标系下诸多几何量的展开式; 为此需要分成几部分来叙述.

### 6.2.2.1 广义克氏符号

对广义黎曼流形  $(M, g)$  上任意点  $p$ , 在  $T_p M$  中取定理6.6中所述的正交归一标架  $(e_i)^a$ . 再取  $p$  点局部坐标系为  $(U; x^i)$ , 原点就是  $p$ ; 在局部坐标系中取标架场  $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$ , 我们要求这个标架场在  $p$  点有  $(\frac{\partial}{\partial x^i})^a|_p = (e_i)^a = (\frac{\partial}{\partial y^i})^a|_p$ ; 但离开  $p$  点后  $\{x\}$ 、 $\{y\}$  可能不同.

令任意给定  $p$  点的切矢量  $v^a|_p$ , 那么点  $p$  和  $v^a|_p$  的局部坐标表达式为

$$x_p^i \equiv x_0^i, \quad v^a|_p = v^i|_p \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a \Big|_p. \quad (6.2-10)$$

则可设满足上式(初始条件)的测地线坐标分量的 Taylor 展开为(即满足方程式(6.1-6))

$$x^i = x_0^i + s v^i + \frac{s^2}{2!} \left( \frac{d^2 x^i}{ds^2} \right)_p + \frac{s^3}{3!} \left( \frac{d^3 x^i}{ds^3} \right)_p + \frac{s^4}{4!} \left( \frac{d^4 x^i}{ds^4} \right)_p + \dots \quad (6.2-11)$$

由于我们不晓得测地线解的确切表达式, 我们假设上述多项式(假设收敛)是测地线方程式(6.1-6)的解(为叙述简单起见, 需要把式(6.1-6)中的仿射参数  $t$  取为测地线弧长  $s$ ).

我们通过对式(6.1-6)再次取  $s$  的导数来求得  $\frac{d^3 x^i}{ds^3}$  及更高阶导数,

$$\frac{d^3 x^i}{ds^3} + \Gamma_{jkl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0, \quad \frac{d^4 x^i}{ds^4} + \Gamma_{jkl}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} \frac{dx^n}{ds} = 0, \quad \dots \quad (6.2-12)$$

其中  $\Gamma_{jkl}^i, \Gamma_{jkl}^i$  等是广义克氏符号(见文献 [3]<sup>§17</sup> 式 (17.13)-(17.15)),

$$\Gamma_{i_1 i_2 i_3 \dots i_n}^j = \Gamma_{(i_1 i_2 i_3 \dots i_{n-1}, i_n)}^j - (n-1) \Gamma_{k(i_2 i_3 \dots i_{n-1}}^j \Gamma_{i_1 i_n)}^k, \quad n > 2. \quad (6.2-13)$$

先由普通的克氏符定义三阶广义克氏符, 然后四阶, …… , 递归定义到  $n$  阶. 与三、四阶方程类似, 可求得其它高阶方程. 求完之后, 带入式(6.2-11)得

$$x^i = x_0^i + s v^i - \frac{s^2}{2!} \Gamma_{jk}^i(p) v^j v^k - \frac{s^3}{3!} \Gamma_{jkl}^i(p) v^j v^k v^l - \frac{s^4}{4!} \Gamma_{jkl}^i(p) v^j v^k v^l v^n - \dots \quad (6.2-14)$$

上式所有  $v^i$  均在  $p$  点取值, 为使表达式简洁一些省略了角标  $p$ . 假设式(6.2-14)是收敛的; 即便如此,  $s$  也不能太大, 因为在离  $p$  点非常远的地方(比如  $q \in M$ )测地线可能相交, 这相当于坐标线相交于两点  $p$  和  $q$ ; 出现多值性, 需要增加一个坐标卡来覆盖这个流形了.

继续式(6.2-14)的讨论. 黎曼本人引入了坐标(6.2-7)和测地线方程式(6.2-8)(约 1920 年代 Birkhoff 将它命名为法坐标), 即  $y^i = s \cdot v^i$ . 我们把它带入式(6.2-14)得

$$x^i = x_0^i + y^i - \frac{1}{2!} \Gamma_{jk}^i(p) y^j y^k - \frac{1}{3!} \Gamma_{jkl}^i(p) y^j y^k y^l + \dots \quad (6.2-15)$$

这样, 在上式中就不再显示出  $v^a|_p$  的信息了. 很明显在  $p$  点处 Jacobi 矩阵  $\frac{\partial x^i}{\partial y^j}$  是非退化的, 而且上式对经过  $p$  点的所有测地线都成立; 因此  $\{y^i\}$  可以看作一组新的坐标(即法坐标), 上式可以看作是两组坐标  $\{x\}$  和  $\{y\}$  的变换公式.

我们已约定坐标系  $\{y\}$  中, 度规取为  $g_{ab} = \bar{g}_{ij}(\mathrm{d}y^i)_a(\mathrm{d}y^j)_a$ , 相应的克氏符号取为  $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ . 那么对应的测地线方程变为

$$\frac{\mathrm{d}^2 y^i(s)}{\mathrm{d}s^2} + \bar{\Gamma}_{jk}^i(s) \frac{\mathrm{d}y^j(s)}{\mathrm{d}s} \frac{\mathrm{d}y^k(s)}{\mathrm{d}s} = 0, \quad 1 \leq i \leq m, \quad s \in (-\delta, \delta). \quad (6.2-16)$$

很明显, 我们可以重复上面的过程, 得到类似于式(6.2-14)的方程式

$$y^i = sv^i - \frac{s^2}{2!} \bar{\Gamma}_{jk}^i(p) v^j v^k - \frac{s^3}{3!} \bar{\Gamma}_{jkl}^i(p) v^j v^k v^l + \cdots \quad (6.2-17)$$

又因为已知  $y^i = sv^i$ , 故可以得到所有的(广义)克氏符在  $p$  点为零, 即

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i(p) = 0, \quad \bar{\Gamma}_{jkl}^i(p) = 0, \quad \bar{\Gamma}_{jklm}^i(p) = 0, \quad \cdots \quad (6.2-18)$$

叙述到此, 需要作一个声明: 定理6.6中所描述的点  $p$  处切空间  $T_p M$  中正交归一基矢  $(e_i)^a$  是任取的; 如果我们另取一套正交归一基矢  $(e'_i)^a = C_i^j(e_j)^a$ , 其中  $C_i^j$  是常数正交矩阵; 那么由  $(e'_i)^a$  也会诱导出一套法坐标  $\{y'\}$ , 它与法坐标  $\{y\}$  相差一个常系数正交变换.

### 6.2.2.2 法坐标展开

在法坐标域内, 仅一个坐标系即可, 所以只需偏导数, 无需考虑协变导数.

由黎曼曲率的分量公式(4.2-5) ( $R_{jln}^i = \partial_l \Gamma_{jn}^i - \partial_n \Gamma_{jl}^i + \Gamma_{jn}^k \Gamma_{kl}^i - \Gamma_{jl}^k \Gamma_{kn}^i$ ) 出发; 在法坐标系下, 在  $p$  点所有的(广义)克氏符都是零, 故有由此式可得

$$\bar{R}_{jln}^i(p) = \partial_l \bar{\Gamma}_{jn}^i(p) - \partial_n \bar{\Gamma}_{jl}^i(p). \quad (6.2-19)$$

由  $p$  点  $\bar{\Gamma}_{jkl}^i(p) = 0$  得  $\bar{\Gamma}_{jk,l}^i(p) + \bar{\Gamma}_{lj,k}^i(p) + \bar{\Gamma}_{kl,j}^i(p) = 0$ ; 再由上式可得

$$\partial_n \bar{\Gamma}_{jl}^i(p) = -\frac{1}{3} (\bar{R}_{jln}^i(p) + \bar{R}_{ljn}^i(p)). \quad (6.2-20)$$

利用式(6.2-20), 由式(5.1-2) ( $\partial_a g_{bc} = \Gamma_{ba}^e g_{ec} + \Gamma_{ca}^e g_{be}$ ) 得

$$\frac{\partial^2 \bar{g}_{ij}(p)}{\partial y^n \partial y^l} = -\frac{1}{3} (\bar{R}_{iljn}(p) + \bar{R}_{injl}(p)). \quad (6.2-21)$$

根据式(6.2-21)和(6.2-20), 我们可以得到度规和联络系数的 Taylor 展开式

$$\bar{g}_{ij}(y) = \eta_{ij} - \frac{1}{3} \bar{R}_{iljn}(p) y^l y^n + \cdots \quad (6.2-22)$$

$$\bar{g}^{ij}(y) = \eta^{ij} + \frac{1}{3} \bar{R}_{l \cdot n}^{i \cdot j}(p) y^l y^n + \cdots \quad (6.2-23)$$

$$\bar{\Gamma}_{jl}^i(y) = -\frac{1}{3} (\bar{R}_{jln}^i(p) + \bar{R}_{ljn}^i(p)) y^n + \cdots \quad (6.2-24)$$

只需知道  $p$  点黎曼曲率  $\bar{R}_{iljn}(p)$  值就可以计算二阶微扰了. 更高阶法坐标系 Taylor 展开可用计算机代码<sup>[2]</sup>给出.

**例 6.7** 二维半球面的法坐标系.

通过这道例题向大家初步展示如何建立法坐标系, 以及初步验证上面几个微扰展开式. 设有三维欧氏空间  $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$ , 半径为 1 的二维球面切于原点  $O$ , 切平面是  $x-y$  平面, 球心位于  $z$  轴上  $(0, 0, 1)$  点; 我们只取  $0 \leq z < 1$  的半个球面. 此半球面  $S$  方程是

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \quad -1 < x, y < 1, \quad 0 \leq z < 1. \quad (6.2-25)$$

二维球面的测地线是过球心平面所截取的大圆. 切空间是  $x-y$  平面, 此空间上有坐标系  $\{x, y\}$ ; 半球面  $S$  上的指数映射  $\exp_O$  将这个坐标带到  $S$  上; 为了有显示的区分, 我们用  $\xi, \eta$  两个参量来描述半球面  $S$  的法坐标系坐标参量. 在  $x-y$  平面上显然有  $\xi = x, \eta = y$ , 在半球面  $S$  上对应的点需要求出. 点  $(\xi, \eta)$  在  $x-y$  平面上的弧长是  $\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ , 指数映射  $\exp_O$  将它映射到大圆上弧长相等的点  $p$ ,  $p$  点在  $\mathbb{R}^3$  中的坐标投影是

$$\phi(\xi, \eta) = \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \xi, \frac{\sin \theta}{\theta} \eta, 1 - \cos \theta \right); \quad \text{其中 } \theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \quad (6.2-26)$$

到此, 已建立好法坐标系, 我们开始验证式(6.2-22)–(6.2-24)的正确性. 下面的计算较为繁琐, 可借助计算机符号软件完成. 先列出几个展开式 (注  $\theta = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ ), 然后直接带入后面的式子,

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{24} + \cdots \quad (6.2-27)$$

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{6} + \cdots \quad (6.2-28)$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\theta} - \frac{\theta}{3} - \frac{\theta^3}{45} + \cdots \quad (6.2-29)$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{6} + \frac{7\theta^3}{360} + \cdots \quad (6.2-30)$$

用 §7.1 的式(7.1-1)来求取半球面上的诱导度规 (并将展开式带入)

$$h_{11} = \frac{-\eta^2 \cos 2\theta + \eta^2 + 2\xi^2(\eta^2 + \xi^2)}{2(\eta^2 + \xi^2)^2} \approx 1 - \frac{\eta^2}{3} + \cdots \quad (6.2-31)$$

$$h_{12} = \frac{\eta\xi(\cos 2\theta - 1 + 2(\eta^2 + \xi^2))}{2(\eta^2 + \xi^2)^2} \approx \frac{\eta\xi}{3} + \cdots \quad (6.2-32)$$

$$h_{22} = \frac{-\xi^2 \cos 2\theta + \xi^2 + 2\eta^4 + 2\eta^2\xi^2}{2(\eta^2 + \xi^2)^2} \approx 1 - \frac{\xi^2}{3} + \cdots \quad (6.2-33)$$

由上面的诱导度规  $h_{ab}$  可求得半球面的克氏符, 克氏符表达式十分复杂, 只给出一个,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\eta \left( (\xi^2 + 4\eta^4 - 4\xi^4) \cot \theta - \xi^2 \cos 3\theta \csc \theta - 4\eta^2 \sqrt{\eta^2 + \xi^2} \right)}{4(\eta^2 + \xi^2)^{5/2}} \approx -\frac{\eta}{3} + \cdots \quad (6.2-34)$$

由克氏符号可求得非零黎曼曲率

$$R_{1212} = \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right)^2 \approx 1 - \frac{\eta^2 + \xi^2}{3} + \cdots \quad (6.2-35)$$

容易看出在二维半球面的法坐标系  $\{\xi, \eta\}$  下：度规、克氏符等符合定理6.6中叙述；首项非零微扰（二阶）展开式也符合式(6.2-22)–(6.2-24)。

## 6.3 测地完备性

本节仅限正定度规情形，我们省略所有定理证明，可查阅本章末的参考文献。

**定义 6.8** 设  $(M, g)$  是  $m$  维、连通黎曼流形， $\forall p, q \in M$ ，令

$$d(p, q) = \inf \{L(\gamma); \gamma \in M \text{ 是连接 } p, q \text{ 的分段光滑曲线}\}, \quad (6.3-1)$$

称为  $p, q$  两点间距离。

可以证明距离  $d$  满足正定性、对称性和三角关系不等式。

可以证明  $M$  上由距离  $d$  诱导的拓扑与微分拓扑是同胚的。

**定义 6.9** 设黎曼流形  $(M, g)$  是连通的，如果作为度量空间  $(M, d)$  是完备的（见定义1.11），那么称  $M$  是**度量完备的**，一般简称**完备**。

**定义 6.10** 设黎曼流形  $(M, g)$  是连通的，如果任何一条测地线的定义域都可延拓至整个实数轴，那么称  $M$  是**测地完备的**。

测地完备还可以叙述成： $\forall p \in M$  或  $\forall v^a \in T_p M$  或者两者都任意，指数映射  $\exp_p(v^a)$  都有定义。

**定理 6.11**（Hopf–Rinow 定理）对于连通黎曼流形  $(M, g)$  下面几个命题等价：

- (1)  $M$  是度量完备的；
- (2)  $M$  是测地完备的；
- (3)  $(M, d)$  的有界闭子集都是  $M$  的紧致子集。

可以证明完备黎曼流形上任意两点都可以用最短测地线相互连接。

等距同胚保紧致性、保子集的（开）闭属性、保子集的有界性，所以由 Hopf–Rinow 定理中的 (3) 可知：等距同胚保持黎曼流形完备性不变。

**定义 6.12** 设有连通黎曼流形  $(M, g)$  和  $(N, h)$ ， $(\widetilde{M}, g)$  是  $M$  的一个真开子流形；若存在等距同胚映射  $\phi: N \rightarrow \widetilde{M}$ ，则称  $(N, h)$  是**可延拓的**；否则称  $(N, h)$  是**不可延拓的**。

测地完备的黎曼流形  $M$  中已将测地线定义域延拓至最大了，没法再延拓了，所以完备黎曼流形是不可延拓的。

Hopf–Rinow 定理貌似还没有推广到不定度规情形（即广义黎曼几何）。不定度规情形下的延拓仍未彻底解决。

## 6.4 弧长变分公式

先给出这里用到的变分概念以及记号<sup>[7]§8.5</sup>。

### 6.4.1 变分概念

**定义 6.13** 设  $C : [r_1, r_2] \rightarrow M$  是黎曼流形  $(M, g)$  中的一条光滑曲线段, 如果有  $\epsilon > 0$  以及光滑映射  $\sigma : [r_1, r_2] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$  使得  $\sigma(s, 0) = C(s)$ ,  $\forall s \in [r_1, r_2]$ , 则称映射  $\sigma$  是曲线  $C$  的一个**变分**;  $C(s)$  称为变分的**基准曲线**. 对于任意固定的  $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ , 由  $\gamma_\tau(s) \equiv \sigma(s, \tau)$  定义的参数曲线  $\gamma_\tau : [r_1, r_2] \rightarrow M$  称为**变分曲线** ( $s$ -曲线). 如果固定  $s$ , 由  $\phi_s(\tau) \equiv \sigma(s, \tau)$  定义的参数曲线称为**横截曲线** ( $\tau$ -曲线).

对于任意固定的  $\tau$ , 若变分曲线  $\gamma_\tau$  都是  $M$  上测地线, 则称其为**测地变分**.

为简单起见, 我们取参数  $s$  为曲线  $\gamma_\tau(s)$  的弧长.

如果  $C(s)$  的变分  $\sigma$  满足

$$\sigma(r_1, \tau) = C(r_1), \quad \sigma(r_2, \tau) = C(r_2), \quad \forall \tau \in (-\epsilon, \epsilon),$$

则称  $\sigma$  是基准曲线  $C(s)$  的一个**具有固定端点的变分**.

对于  $C$  的每一个变分  $\sigma$  可以引入沿  $\sigma$  定义的光滑矢量场,

$$\tilde{S}^a = \sigma_{*(s, \tau)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a, \quad \tilde{T}^a = \sigma_{*(s, \tau)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a. \quad (6.4-1)$$

那么  $\tilde{S}^a$  是变分曲线族  $\{\gamma_\tau\}$  的切矢量场;  $\tilde{T}^a$  是横截曲线族  $\{\phi_s\}$  的切矢量场. 当端点固定时, 有  $\tilde{T}^a(r_1, \tau) = 0 = \tilde{T}^a(r_2, \tau)$ ,  $\forall \tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

由二维区域  $[r_1, r_2] \times (-\epsilon, \epsilon)$  在  $M$  上构成的二维子流形上,  $s$  和  $\tau$  是两个相互独立的坐标, 所以它们的自然基矢是相互对易的, 即诱导联络无挠 (见式(6.1-4))

$$\sigma_{*(s, \tau)} \left[ \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau} \right]^a = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \left( \sigma_{*(s, \tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \left( \sigma_{*(s, \tau)} \frac{\partial}{\partial s} \right)^a = 0. \quad (6.4-2)$$

为简单起见, 令  $S^a(s) \equiv \tilde{S}^a(s, 0)$  和  $T^a(s) \equiv \tilde{T}^a(s, 0)$ .  $T^a(s)$  是沿曲线  $C(s)$  定义的光滑切矢量场, 称为变分  $\sigma$  的**变分矢量场**. 一般说来, 它不平行于  $C(s)$  的切线.

### 6.4.2 弧长第一变分公式

下面来计算变分曲线  $\gamma_\tau(s)$  弧长, 曲线弧长定义见(5.1-10), 即  $\forall \tau \in (-\epsilon, \epsilon)$  有

$$L(\tau) = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{ab} \tilde{S}^a \tilde{S}^b} ds. \quad (6.4-3)$$

很明显  $L(\tau)$  是一个标量函数, 对其取  $\tau$  的导数 (需要把联络理解成诱导联络),

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} L(\tau) &= \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^c \nabla_c \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{g_{ab} \tilde{S}^a \tilde{S}^b} ds = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_a \tilde{S}^a}} g_{ab} \tilde{S}^a \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^b ds \\ &\stackrel{6.4-2}{=} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_a \tilde{S}^a}} \tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b ds = \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} (\tilde{S}_b \tilde{T}^b) - \tilde{T}^b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{S}_b \right\} ds. \end{aligned} \quad (6.4-4)$$



上式最后一步用到了曲线  $\gamma_\tau(s)$  是以弧长为参数的, 即  $\tilde{S}_a \tilde{S}^a = 1$ ; 同时用了分部积分. 取  $\tau = 0$ , 由此可以得到弧长第一变分公式,

$$L'(0) = (S_b T^b) \Big|_{r_1}^{r_2} - \int_{r_1}^{r_2} T_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} S^b ds. \quad (6.4-5)$$

上式中的  $S_b(s) = \tilde{S}_b(s, 0)$ , 是曲线  $\gamma_0(s)$  的切矢量; 而  $T^a(s) = \tilde{T}^a(s, 0)$ . 如果所有变分曲线有相同的端点, 上式还可以化简 (注  $\tilde{T}^a(r_1, \tau) = 0 = \tilde{T}^a(r_2, \tau)$ ),

$$L'(0) = - \int_{r_1}^{r_2} T_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} S^b ds. \quad (6.4-6)$$

当第一变分公式为零时, 又因  $T_b = \sigma_{*(s,0)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a$  不恒为零, 故必有  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} S^b = 0$ ; 这是测地线方程, 所以曲线  $C(s)$  是测地线. 最终, 由式(6.4-6)可得定理

**定理 6.14** 光滑曲线  $C(s)$  为测地线的充要条件是: 在固定端点情形下, 曲线  $C(s)$  是弧长泛函变分的临界点, 也就是第一变分公式恒为零.

如果  $C(s)$  是分段光滑的, 除了讨论会麻烦一些, 所有结果都与上述相同.

### 6.4.3 弧长第二变分公式

接上一节, 求弧长泛函的二阶导数, 则可得第二变分公式. 需要在  $L'(0) = 0$  (即  $C(s)$  是测地线) 的前提下计算  $L''(0)$ . 继续上一节式(6.4-4)的计算, 有

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\tau^2} L(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_a \tilde{S}^a}} \tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b ds = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{\sqrt{\tilde{S}_a \tilde{S}^a}} \tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b ds \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ \frac{(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}_b)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b) + \tilde{S}_b (\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b)}{\sqrt{\tilde{S}_a \tilde{S}^a}} - \frac{(\tilde{S}_a \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^a)(\tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b)}{(\tilde{S}_a \tilde{S}^a)^{3/2}} \right\} ds \\ &= \frac{4.2-1}{\tilde{S}_a \tilde{S}^a = 1} \int_{r_1}^{r_2} \left\{ (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}_b)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b) - (\tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b)^2 + \tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{T}^b + \tilde{S}_b R_{cad}^b \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^d \tilde{T}^c \right\} ds \\ &= \int_{r_1}^{r_2} \left\{ (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}_b)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b) - (\tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^b)^2 + \tilde{S}_b R_{cad}^b \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^d \tilde{T}^c \right\} ds \\ &\quad + \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial}{\partial s} \left( \tilde{S}_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{T}^b \right) ds - \int_{r_1}^{r_2} (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{S}_b)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{T}^b) ds. \end{aligned}$$

在  $\tau = 0$  处取值: 因  $C(s)$  是测地线, 所以  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} S_b = 0$ , 继续计算得到弧长第二变分公式,

$$L''(0) = \left( S_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} T^b \right) \Big|_{r_1}^{r_2} + \int_{r_1}^{r_2} \left( (\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} T_b)(\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} T^b) - (S_b \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} T^b)^2 + R_{cad}^b T^a S^d T^c S_b \right) ds \quad (6.4-7)$$

上面所有计算都需按诱导联络理解.

#### 6.4.4 Gauss 引理

**定理 6.15** 设有  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ ,  $\forall p \in M, v^a \in T_p M$ . 如果指数映射  $\exp_p$  在  $v^a$  有定义, 那么  $\forall w^a \in T_p M = T_v(T_p M)$ , 有

$$g_{ab} [(\exp_p)_{*v}(v^a)] [(\exp_p)_{*v}(w^b)] = v_b w^b. \quad (6.4-8)$$

**证明** .  $T_p M$  是线性空间, 自然可以看成流形;  $v \in T_p M$  是这个流形上一点,  $T_v(T_p M)$  是指流形  $T_p M$  中点  $v$  处的切空间. 定理中已假设  $\exp_p$  在  $v^a$  处有定义; 我们任取  $w^a \in T_p M$ , 存在充分小的  $\epsilon > 0$  使得下面的映射有定义 (参照定义 6.13),

$$\sigma(s, \tau) = \exp_p(s(v^a + \tau w^a)), \quad \forall (s, \tau) \in [0, 1] \times (-\epsilon, \epsilon). \quad (6.4-9)$$

显然, 对于每一个固定的  $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ ,  $\gamma_\tau(s) = \sigma(s, \tau)$  是测地线; 依定义 6.13,  $\sigma(s, \tau)$  是测地线  $\gamma_0(s)$  的一个测地变分. 容易求得  $\gamma_0(s)$  的切线切矢量场为

$$S^a(s) = \sigma_{*(s,0)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a = (\exp_p)_{*sv} v^a. \quad (6.4-10)$$

由于式(6.4-9)是指数映射, 当  $s$  固定、 $\tau$  变化时, 得到的曲线是测地线, 记为  $\alpha(\tau; q, sw^a)$ , 其中  $q = \exp_p(sv^a)$ . 很明显  $\alpha(\tau; q, sw^a)$  是横截曲线, 它的切线切矢量  $T^a(s)$  为

$$T^a(s) = \sigma_{*(s,0)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a = s \cdot (\exp_p)_{*sv} w^a. \quad (6.4-11)$$

将以上两式带入弧长第一变分公式(6.4-5), 并注意  $\gamma_\tau(s)$  是测地线 (即  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} S^b = 0$ ), 有

$$L'(0) = (S_b T^b) \Big|_0^1 = g_{ab} (\exp_p)_{*v}(v^a) (\exp_p)_{*v}(w^b). \quad (6.4-12)$$

上式中的  $g_{ab}$  自然是在推前后  $((\exp_p)_{*v}(v^a))$  的点取值.

我们再以另外一种方法来求  $L'(0)$ . 对于任意固定的  $\tau$ ,  $\gamma_\tau(s)$  的弧长也可按下式计算,

$$L(\tau) = \int_0^1 \left| \frac{d}{ds} \gamma_\tau(s; p, v^a + \tau w^a) \right| ds = \int_0^1 |v + \tau w| ds = |v + \tau w|. \quad (6.4-13)$$

对上式求  $\tau$  的导数,

$$\begin{aligned} \frac{dL(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=0} &= \frac{d(v_a v^a + 2\tau v_a w^a + \tau^2 w_a w^a)^{1/2}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \\ &= \frac{v_a w^a + \tau w_a w^a}{(v_a v^a + 2\tau v_a w^a + \tau^2 w_a w^a)^{1/2}} \Big|_{\tau=0} = \frac{v_a w^a}{|v|} \end{aligned} \quad (6.4-14)$$

因为我们采用的是弧长参数, 所以  $|v| = 1$ . 结合上式与式(6.4-12)便可得式(6.4-8). 上式中的  $v_a w^a$  是切空间  $T_p M$  上的内积, 在  $p$  点取值. ■

**引理 6.16** 指数映射  $\exp_p$  把  $T_p M$  中正交的切矢量  $v^a$  和  $w^a$  映射到  $M$  中正交的切矢量.

只需将  $v_a w^a = 0$  带入定理6.15即可得到本引理. 本引理才是最早由 Gauss 证明的“Gauss lemma”, 定理6.15是推广的“Gauss lemma”.

**命题 6.17** 指数映射  $\exp_p$  沿射线  $tv^a$  的切方向是保长的, 即对于任意的、平行于  $v^a$  的切矢量  $w^a \in T_p M$ , 都有  $|(\exp_p)_{*tv}(w)| = |w|$ .

**证明**. 设  $w^a = \lambda v^a$ , 其中  $\lambda$  是非零实常数, 则由高斯引理可得

$$|(\exp_p)_{*tv}(w)| = g_{ab}(\exp_p)_{*tv}(\lambda v^a)(\exp_p)_{*tv}(w^b) = \lambda v_a w^a = w_a w^a.$$

需要提醒读者  $v^a$  是测地线的切线方向. ■

**注 6.18** 由此可见指数映射既保长又保角, 所以它是沿径向测地线局部等距同构映射.

## 6.5 Jacobi 场

采用 §6.4.1 记号. 需提醒读者, 在考虑曲线时, 一般使用的是诱导联络. 设曲线  $C(s)$  是测地线, 它的每一个变分  $\sigma(s, \tau)$  也是测地线, 即只考虑测地变分情形.  $\tilde{S}^a$  是测地变分曲线族  $\{\gamma_\tau(s)\}$  的切矢量;  $\tilde{T}^a$  是横截曲线族  $\{\phi_s(\tau)\}$  的切矢量. 既然是测地变分, 那么  $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{S}^a = 0$ ; 再由式(6.4-2) ( $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^a - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^a = 0$ ), 可得

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^a = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^a = \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^a - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{S}^a = R_{bcd}^a \tilde{S}^c \tilde{T}^d \tilde{S}^b. \quad (6.5-1)$$

上式最后一步再次利用式(6.4-2) ( $[\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial \tau}]^a = 0$ ) 以及黎曼曲率定义式(4.2-1). 令上式中的  $\tau = 0$ , 那么依照 §6.4.1 中约定 (即  $S^a(s) \equiv \tilde{S}^a(s, 0)$  和  $T^a(s) \equiv \tilde{T}^a(s, 0)$ ), 去掉符号上面的波浪线; 上面方程变为 (同时令  $T \rightarrow J$ )

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J^a = R_{bcd}^a S^c J^d S^b. \quad (6.5-2)$$

此式称为 **Jacobi 方程**; 自然是因为 Jacobi 的原因才将  $T$  变  $J$ .

**定义 6.19** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上的一条测地线,  $J^a(s)$  是  $M$  上沿  $C(s)$  定义的一个光滑矢量场. 如果  $J^a(s)$  满足式(6.5-2), 则称  $J^a(s)$  是沿测地线  $C(s)$  定义的一个 **Jacobi 矢量场**, 简称为 **Jacobi 场**.

$J^a(s)$  是定义在  $C(s)$  上的切矢量场;  $S^a$  是  $C(s)$  的切线切矢量. 依照前面的讨论有

**定理 6.20** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上的一条测地线, 则  $C(s)$  测地变分的变分矢量场是沿测地线  $C(s)$  的 Jacobi 矢量场.

$C(s)$  的变分矢量场的方向一定不平行于  $C(s)$  的切线切矢量 (称为纵向), 直观感觉它沿横向拉着  $C(s)$  偏离原来的位置, 所以 Jacobi 方程也被称为**测地偏离方程** (geodesic deviation).

### 6.5.1 分量表达式

下面给出 Jacobi 方程的分量表达式. 我们取一个沿测地线  $C(s)$  平行移动的正交归一活动标架场  $\{(e_i)^a\}$ , 并取  $(e_1)^a = (\frac{d}{ds})^a|_{C(s)}$  (如果指标  $i$  是从 0 开始记号的, 则取  $(e_0)^a = (\frac{d}{ds})^a|_{C(s)}$ ). 因标架场是平行移动的, 所以有

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}}(e_i)^a = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.5-3)$$

因  $J^a$  是沿  $C(s)$  定义的光滑切矢量场, 可以把它表示为

$$J^a(s) = J^i(s)(e_i)^a. \quad (6.5-4)$$

于是有 (我们已约定  $(e_1)^a = (\frac{d}{ds})^a|_{C(s)} = S^a$ )

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J^a(s) = \frac{\partial J^i(s)}{\partial s} (e_i)^a, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J^a(s) = \frac{\partial^2 J^i(s)}{\partial s^2} (e_i)^a. \quad (6.5-5)$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} J^a(s) - R^a_{bcd} S^c J^d S^b = \left( \frac{\partial^2 J^i(s)}{\partial s^2} - R^i_{11j}(C(s)) J^j(s) \right) (e_i)^a. \quad (6.5-6)$$

由此可得 Jacobi 方程的在活动标架场  $\{(e_i)^a(s)\}$  (它沿  $C(s)$  平行移动) 的分量方程式

$$\frac{d^2 J_i(s)}{ds^2} = R_{i11j}(C(s)) J^j(s), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (6.5-7)$$

因标架场  $\{(e_i)^a(s)\}$  是正交归一的, 所以  $g_{ij} = g_{ab}(e_i)^a(e_j)^b = \eta_{ij}$ , 其中  $\eta_{ij}$  非对角元都是零, 对角元是 +1 或 -1. 我们已用  $\eta_{ij}$  把上式中的指标降下来了,  $J_i = \eta_{ij} J^j$ . 同时考虑到方程只是在测地线  $C(s)$  上取值, 是单参数的, 所以作了  $\partial \rightarrow d$  的替换. 从式(6.5-7)可以看出 Jacobi 方程只是线性、齐次、二阶常微分方程组.

**命题 6.21** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是广义黎曼流形  $(M, g)$  上一条测地线, 那么  $\forall v^a, w^a \in T_{C(r_1)}M$ , 存在唯一的一个沿  $C(s)$  的 Jacobi 场  $J^a(s)$  满足  $J^a(r_1) = v^a, \frac{dJ^a}{ds}|_{r_1} = w^a$ .

**证明.** 我们先把方程式(6.5-7)化成一阶常微分方程组, 令  $W_i = \frac{dJ_i}{ds}$ , 有

$$\begin{cases} \frac{dJ_i}{ds} = W_i(s) \\ \frac{dW_i}{ds} = R_{i11j}(C(s)) J^j(s) \end{cases}, \quad \text{初条件} \begin{cases} J_i(r_1) = \eta_{ij} v^j \\ W_i(r_1) = \eta_{ij} w^j \end{cases}. \quad (6.5-8)$$

依据常微分方程组解存在唯一性定理<sup>[1]§31</sup>可知上述方程式解存在、唯一. ■

我们知道  $T_{C(r_1)}M$  是  $m$  维的线性空间, 而 Jacobi 场方程(6.5-8)的解由初始条件  $(v^a, w^a) \in T_{C(r_1)}M \oplus T_{C(r_1)}M$  唯一确定; 由上述命题可知这个关系是一个双射. 因 Jacobi 方程是线性的, 所有解的集合按定义1.34构成线性空间, 很明显有如下命题,

**命题 6.22** 线性 Jacobi 场方程(6.5-7)或(6.5-8)的解空间是一个  $2m$  维线性空间.

有了这些准备, 现在可以证明命题6.20的逆命题了.

**定理 6.23** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上的测地线,  $J^a(s)$  是一沿测地线  $C(s)$  的 Jacobi 场. 则  $J^a(s)$  必是  $C(s)$  的某个测地变分的变分矢量场.

**证明.** 为了叙述简单, 令  $r_1 = 0$ , 并记  $p = C(0)$ . 在流形  $M$  上任取一条光滑曲线  $\alpha(\tau)$ , 其中  $\tau \in (-\epsilon, \epsilon)$ , 使得

$$\alpha(0) = p, \quad \left( \frac{d}{d\tau} \right)^a \Big|_{\alpha(0)} = v^a; \quad \text{对任意固定的 } v^a \in T_p M. \quad (6.5-9)$$

再取对于任意固定的  $w^a \in T_p M$ , 把  $w^a$  和  $S^a(0) = \left( \frac{d}{ds} \right)^a|_{C(0)}$  (测地线端点的切线切矢量) 沿曲线  $\alpha(\tau)$  作平行移动, 得到两个沿  $\alpha(\tau)$  平行的矢量场  $W^a(\tau)$  和  $S^a(\tau)$ , 它们满足

$$\nabla_{\frac{d}{d\tau}} W^a(\tau) = 0, \quad \nabla_{\frac{d}{d\tau}} S^a(\tau) = 0. \quad (6.5-10)$$

由此可以构造映射  $\sigma(s, \tau)$  如下

$$\sigma(s, \tau) = \exp_{\alpha(\tau)} \left[ s(S^a(\tau) + \tau W^a(\tau)) \right], \quad (s, \tau) \in [0, r_2] \times (-\epsilon, \epsilon). \quad (6.5-11)$$

对于每一个固定的  $\tau$ , 曲线  $\alpha_\tau(\cdot) \equiv \sigma(\cdot, \tau)$  是测地线, 并且  $C(s) = \alpha_0(s)$ ; 所以  $\sigma(s, \tau)$  是测地线  $C(s)$  的测地变分. 其变分曲线和横截曲线的切矢量场分别是

$$\tilde{S}^a = \sigma_{*(s, \tau)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a, \quad \tilde{T}^a = \sigma_{*(s, \tau)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a. \quad (6.5-12)$$

其中变分曲线的切矢量场是

$$\tilde{S}^a \Big|_{s=0} = \sigma_{*(0, \tau)} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^a = (\exp_{\alpha(\tau)})_{*0} (S^a(\tau) + \tau W^a(\tau)) = S^a(\tau) + \tau W^a(\tau). \quad (6.5-13)$$

根据命题6.20可知  $T^a = \tilde{T}^a|_{\tau=0}$  是沿  $C(s)$  的 Jacobi 场, 并且有

$$T^a(0) = \sigma_{*(0, 0)} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a \Big|_{s=0, \tau=0} (\sigma(0, \tau)) = \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^a \Big|_{\tau=0} \alpha(\tau) = v^a. \quad (6.5-14)$$

再由式(6.4-2) ( $\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^a - \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^a = 0$ ) 可得

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \tilde{T}^a \Big|_{s=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} \tilde{S}^a \Big|_{s=0} = \nabla_{\frac{\partial}{\partial \tau}} (S^a(\tau) + \tau W^a(\tau)) \Big|_{s=0} \stackrel{6.5-10}{=} W^a(0) = w^a. \quad (6.5-15)$$

上面讨论说明  $T(s)$  是  $C(s)$  上满足初始条件(6.5-9)的 Jacobi 场.

现在取  $v^a = J^a(0)$ ,  $w^a = \left( \frac{dJ^a}{ds} \right)|_0$ . 那么  $T^a$  和  $J^a$  都是定义在  $C(s)$  上的由  $v^a, w^a \in T_p M$  确定的 Jacobi 场, 从定理6.21的唯一性可知  $J^a(s) = T^a(s)$ , 故  $J^a(s)$  是测地线  $C(s)$  的测地变分的变分矢量场. ■

### 6.5.2 法 Jacobi 场

**定义 6.24** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是广义黎曼流形  $(M, g)$  上测地线,  $J^a(s)$  是沿  $C(s)$  的 Jacobi 场. 若  $J^a(s)$  与  $C(s)$  处处正交, 则称  $J^a(s)$  是沿  $C(s)$  的**法 Jacobi 场**.

取 Jacobi 方程(6.5-7)中指标  $i = 1$ , 由黎曼曲率的反对称性可知  $\frac{d^2 J_1(s)}{ds^2} = 0$ , 所以  $J_1(s)$  是个线性函数, 即

$$J_1(s) = k \cdot s + c_0, \quad k, c_0 \in \mathbb{R}. \quad (6.5-16)$$

由此, 易得

$$g_{ab}(e_1)^b \frac{dJ^a}{ds} = g_{ab}(e_1)^b (e_i)^a \frac{dJ^i}{ds} = \eta_{11} \frac{dJ^1}{ds} = k. \quad (6.5-17)$$

令上两式中的  $s = r_1$ , 有

$$k = g_{ab}(e_1)^b \frac{dJ^a(r_1)}{ds}, \quad k \cdot r_1 + c_0 = J_1(r_1) = g_{ab}(e_1)^b |_{r_1} J^a(r_1). \quad (6.5-18)$$

由此可得  $c_0$  为

$$c_0 = g_{ab}(e_1)^b |_{r_1} \left( J^a(r_1) - r_1 \cdot \frac{dJ^a(r_1)}{ds} \right). \quad (6.5-19)$$

将  $k, c_0$  带回式(6.5-16), 有

$$J_1(s) = (s - r_1) \cdot g_{ab}(e_1)^b |_{r_1} \frac{dJ^a(r_1)}{ds} + g_{ab}(e_1)^b |_{r_1} J^a(r_1). \quad (6.5-20)$$

我们注意到  $(e_1)^a = \left(\frac{d}{ds}\right)^a |_{C(s)}$  是测地线  $C(s)$  的切线切矢量, 所以上式可改写为

$$g_{ab} J^a(s) \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(s)} = J_1(s) = \left( (s - r_1) \cdot \frac{dJ^a(r_1)}{ds} + J^a(r_1) \right) g_{ab}(e_1)^b |_{r_1}. \quad (6.5-21)$$

进而可得如下命题

**命题 6.25** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是广义黎曼流形  $(M, g)$  上一条测地线,  $J^a(s)$  是沿测地线  $C(s)$  的 Jacobi 场, 那么  $J^a(s)$  与测地线  $C(s)$  处处正交的充要条件是

$$g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(r_1)} \frac{dJ^a(r_1)}{ds} = 0, \quad \text{且} \quad g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(r_1)} J^a(r_1) = 0. \quad (6.5-22)$$

**命题 6.26** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上的一条测地线, 设  $J^a(s)$  沿测地线  $C(s)$  的 Jacobi 矢量场. 如果存在两个不同的点  $s_1, s_2 \in [r_1, r_2]$  使得

$$g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(s_1)} J^a(s_1) = 0, \quad \text{且} \quad g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(s_2)} J^a(s_2) = 0. \quad (6.5-23)$$

那么  $J^a(s)$  是法 Jacobi 场.

证明. 将式(6.5-20)带入(6.5-23), 有

$$\begin{aligned} 0 &= (s_1 - r_1) \cdot g_{ab}(e_1)^b \Big|_{r_1} \frac{dJ^a(r_1)}{ds} + g_{ab}(e_1)^b \Big|_{r_1} J^a(r_1), \\ 0 &= (s_2 - r_1) \cdot g_{ab}(e_1)^b \Big|_{r_1} \frac{dJ^a(r_1)}{ds} + g_{ab}(e_1)^b \Big|_{r_1} J^a(r_1). \end{aligned}$$

因  $s_1 \neq s_2$ , 由上式必然可以得到式(6.5-22); 故  $J^a(s)$  是法 Jacobi 场. ■

**命题 6.27** 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上的一条测地线. 用  $\mathfrak{J}^\perp(C)$  表示  $M$  上沿测地线  $C(s)$  法 Jacobi 场的集合, 则  $\mathfrak{J}^\perp(C)$  是一个  $2m - 2$  维线性空间.

证明. 由命题6.22可知  $M$  上全体沿测地线  $C(s)$  的 Jacobi 场的集合是一个  $2m$  维线性空间. 从命题6.22的证明过程可知, 初始条件  $(v^a, w^a) \in T_{C(r_1)}M \oplus T_{C(r_1)}M$  中使下式

$$g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(s_1)} v^a = 0 = g_{ab} \left( \frac{d}{ds} \right)^b \Big|_{C(s_1)} w^a, \quad (6.5-24)$$

成立的子空间是  $2m - 2$  维的; 而这个子空间线性同构于  $\mathfrak{J}^\perp(C)$ , 故  $\mathfrak{J}^\perp(C)$  是  $2m - 2$  维的线性空间. ■

因黎曼曲率的反对称性, 有

$$R^a_{bcd} \left( \frac{d}{ds} \right)^c \left( \frac{d}{ds} \right)^d \left( \frac{d}{ds} \right)^b = 0, \quad R^a_{bcd} s \left( \frac{d}{ds} \right)^c s \left( \frac{d}{ds} \right)^d s \left( \frac{d}{ds} \right)^b = 0. \quad (6.5-25)$$

很明显测地线  $C(s)$  的切线切矢量  $\left( \frac{d}{ds} \right)^a$  满足

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \left( \frac{d}{ds} \right)^a = 0, \quad \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \left[ s \left( \frac{d}{ds} \right)^a \right] = 0. \quad (6.5-26)$$

由上两式可知集合

$$\mathfrak{J}^\top(C) \equiv \text{Span} \left\{ \left( \frac{d}{ds} \right)^a, \quad s \cdot \left( \frac{d}{ds} \right)^a \right\}. \quad (6.5-27)$$

满足 Jacobi 方程(6.5-2), 因此两维空间  $\mathfrak{J}^\top(C)$  也是 Jacobi 场; 称它们为切 Jacobi 场. 很明显  $\mathfrak{J}^\top(C) \cap \mathfrak{J}^\perp(C) = \{0\}$ , 故切 Jacobi 场与法 Jacobi 场交集为零.

### 6.5.3 常曲率空间

本节讨论一下常曲率空间 (见 §5.6.1) 的 Jacobi 场. 设  $C: [r_1, r_2] \rightarrow M$  是  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  上的一条测地线, 测地线参数取弧长  $s$ ; 我们取一个沿测地线  $C(s)$  平行移动的正交归一活动标架场  $\{(e_i)^a\}$ , 并取  $(e_1)^a = \left( \frac{d}{ds} \right)^a \Big|_{C(s)}$ .

设常曲率空间  $M$  的曲率为  $c$ . 利用标架场  $\{(e_i)^a\}$  正交归一性, 由式(5.6-7)知

$$R_{abcd}(e_i)^a(e_1)^b(e_1)^c(e_j)^d = -c(g_{af}(e_i)^f(e_1)^a \cdot g_{bh}(e_1)^h(e_j)^b - g_{bf}(e_i)^f(e_j)^a \cdot g_{bh}(e_1)^h(e_1)^b)$$

$$\Rightarrow R_{i11j} = -c(\eta_{i1}\eta_{1j} - \eta_{ij}\eta_{11}) = c\eta_{ij}\eta_{11}.$$

设  $J^a(s)$  是沿  $C(s)$  定义的法 Jacobi 场, 其展开式为  $J^a = J^i(e_i)^a$ . 结合上式, 由 Jacobi 方程(6.5-7)得

$$\frac{d^2 J_i(s)}{ds^2} = R_{i11j}(C(s))J^j(s) = c\eta_{ij}\eta_{11}J^j(s) = c\eta_{11}J_i(s), \quad 1 < i \leq m. \quad (6.5-28)$$

其中  $\eta_{11}$  是 +1 或 -1. 考虑到我们使用的是沿  $C(s)$  平行移动的标架场, 法场  $J^a$  的第一分量恒为零, 即  $J_1(s) \equiv 0$ ; 所以上式中的指标  $i$  从 2 记起. 上式的通解是

$$J_i(s) = \begin{cases} \lambda_i \sin(\sqrt{-c\eta_{11}}s) + \mu_i \cos(\sqrt{-c\eta_{11}}s), & \text{若 } c\eta_{11} < 0; \\ \lambda_i s + \mu_i, & \text{若 } c\eta_{11} = 0; \\ \lambda_i \sinh(\sqrt{c\eta_{11}}s) + \mu_i \cosh(\sqrt{c\eta_{11}}s), & \text{若 } c\eta_{11} > 0. \end{cases} \quad 1 < i \leq m. \quad (6.5-29)$$

其中  $\lambda_i, \mu_i$  是积分常数.

#### 6.5.4 共轭点

设广义黎曼流形  $(M, g)$  是完备的, 由 Hopf-Rinow 定理可知指数映射  $\exp_p$  在切空间  $T_p M$  上处处由定义, 再由定理6.4可知指数映射在原点附近是非退化的; 但指数映射未必是处处非退化的. 从而引出如下定义,

**定义 6.28** 设  $m$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  是完备的.  $p \in M$ ,  $v^a \in T_p M$ , 如果指数映射  $\exp_p$  在  $v^a$  处是退化的, 即存在非零切矢量  $w^a \in T_p M = T_v(T_p M)$  使得  $(\exp_p)_{*v}(w^a) = 0$ ; 那么称  $q = \exp_p(v^a) \in M$  是点  $p$  (沿测地线  $\exp_p(tv^a)$ ) 的共轭点.

## 第六章参考文献

- [1] ARNOLD(阿诺尔德) V. 常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2001 (引用页: 174, 186).
- [2] BREWIN L. Riemann normal coordinate expansions using Cadabra[J]. Classical and Quantum Gravity, 2009, 26(17):175017. DOI: [10.1088/0264-9381/26/17/175017](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/17/175017) (引用页: 179).
- [3] EISENHART L P. Riemannian Geometry[M]. US: Princeton University Press, 1926 (引用页: 178).
- [4] HAWKING S W, ELLIS G. The Large Scale Structure of Space-Time[M]. UK: Cambridge University Press, 1973 (引用页: 171).
- [5] SPIVAK M. A Comprehensive Introduction to Differential Geometry: Vol. I[M]. 3rd ed. US: Publish or Perish, 1999 (引用页: 171).



- [6] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 等. 黎曼几何初步[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004 (引用页: 171).
- [7] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 176, 181).
- [8] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论 (上) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2002 (引用页: 171, 176).

## 第七章 子流形

§2.6已经初步讨论了子流形概念；在引入度规后，可研究的子流形内容更加丰富．我们先给出子流形的一般理论，然后再把这些理论应用到超曲面上；超曲面在广义相对论中有重要应用．

本章主要参考了如下文献相应章节：[3]，[4]，[5]<sup>Ch. 5</sup>，[6]<sup>Ch. 7</sup>．

### 7.1 广义黎曼子流形例子

设有两个广义黎曼流形  $M$  和  $N$ ，维数分别为  $m$  和  $n(< m)$ ，假设存在光滑浸入映射  $\phi: N \rightarrow M$ ，即切映射  $\phi_*$  处处非退化； $M$  和  $N$  的局部坐标分别为  $(V; x^\alpha)$  和  $(U; y^i)$ ，且  $\phi(U) \subset V$ ．指定  $g_{ab}$  是流形  $M$  的广义黎曼度规．第80页的定义2.59指出拉回张量  $h_{ab} \equiv \phi^* g_{ab}$  也是流形  $N$  上的张量场，容易验证  $h_{ab}$  也是对称的；下面证明它还是非退化的．与式(5.3-2)推导过程相同，可得

$$h_{ij} = h_{ab} \left( \frac{\partial}{\partial y^i} \right)^a \left( \frac{\partial}{\partial y^j} \right)^b = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} g_{\alpha\beta}. \quad (7.1-1)$$

注意，此时的 Jacobi 矩阵  $\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$  不是方阵．上式等号最右端是三个矩阵相乘，它们都是非退化矩阵，所以乘积之后的秩是  $\min(m, n)$ ，即矩阵  $h_{ij}$  的秩是  $n$ ；因此  $h_{ij}$  是非退化的．虽然上面是从分量角度来论证的，但是基矢是任选的，而且矩阵的秩不随基矢改变而改变；最终可知二阶对称张量场  $h_{ab}$  是非退化的．

此时，把二阶、对称、非退化张量场  $h_{ab} \equiv \phi^* g_{ab}$  称为广义黎曼流形  $M$  中度规  $g_{ab}$  通过映射  $\phi$  拉回到流形  $N$  上的诱导度规．在古典微分几何中，称度规为第一基本形式；我们称诱导度规  $h_{ab}$  为子流形  $N$  的第一基本形式．

当  $m = n + 1$  时，流形  $N$  称为  $M$  的浸入超曲面；为给读者初步认知，下面讨论两个简单例子，在后面会进一步讨论这个话题．

#### 欧氏超曲面

令  $M$  中度规是  $g_{ab} = \delta_{ab}$ ，即  $M$  是通常的欧几里得空间  $\mathbb{R}^{n+1}$ ．我们以第56页例2.10（标准球面）来具体说明诱导度规．在此例中，将标准球面  $S^n(a)$  正则嵌入到  $\mathbb{R}^{n+1}$  中，这

当然也是浸入.

从式(2.2-12)和(7.1-1)容易求得如下诱导度规 (延用例2.10坐标记号),

$$h_{ab}^+ = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^j} (dy^i)_a (dy^j)_b = \frac{4a^4 \delta_{ij}}{(a^2 + \sum_{k=1}^n (y^k)^2)^2} (dy^i)_a (dy^j)_b, \quad (7.1-2)$$

$$h_{ab}^- = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha=1}^m \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^j} (dz^i)_a (dz^j)_b = \frac{4a^4 \delta_{ij}}{(a^2 + \sum_{k=1}^n (z^k)^2)^2} (dz^i)_a (dz^j)_b. \quad (7.1-3)$$

其中第二式是由式(2.2-13)和(7.1-1)求得的. 上面的计算只涉及求偏导与求和, 虽然繁琐但并无困难, 请读者补齐. 利用式(2.2-14)和(2.2-15)可验证  $h_{ab}^+ = h_{ab}^-$ , 这说明两者是同一个度规; 这便是由  $\mathbb{R}^{n+1}$  诱导得到的度规.

读者可试算  $n=2$  的情形, 此诱导度规与我们所熟悉的二维球面度规相同.

## 闵氏超曲面

设  $a \geq 0$ ,  $S = (-a, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . 令 (其中  $(x^0, x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ )

$$H_+^n(a) = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - (x^0)^2 = -a^2, x^0 > 0\}, \quad (7.1-4)$$

$$H_-^n(a) = \{(x^0, x^1, \dots, x^n) \mid (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2 - (x^0)^2 = -a^2, x^0 < 0\}, \quad (7.1-5)$$

$$B^n(a) = \{(0, \xi^1, \dots, \xi^n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\xi^1)^2 + \dots + (\xi^n)^2 < a^2\}. \quad (7.1-6)$$

参见图7.1 (抽象成二维平面中的双曲线, 图中两条对角虚直线是双曲线的渐近线). 其中式(7.1-4)和(7.1-5)分别是**双曲空间**的上下叶 (当  $n=1$  时, 就是两条双曲线). 式(7.1-6)是无边实心球, 抽象成图中  $(-a, +a)$  的粗实线.

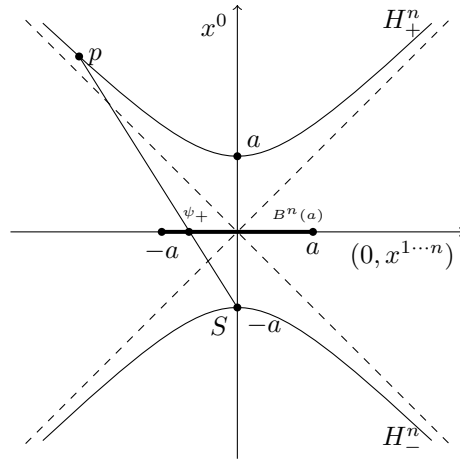


图 7.1: 双曲空间

对任意  $p = (x^0, x^1, \dots, x^n) \in H_+^n(a)$  (见图7.1), 连接点  $p$  和  $S$  的直线  $l_{pS}$  必定交超平面  $x^0 = 0$  于某点  $\psi_+(p)$ ; 很明显交点  $\psi_+(p)$  位于  $B^n(a)$  内 (不可能不与之相交); 同时  $\psi_+ : H_+^n(a) \rightarrow B^n(a)$  是双射. 对于任意的点  $p$ , 下面我们来求  $\psi_+(p)$  的坐标  $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ .

过两点 (此处是  $p$  和  $S$  点) 的直线方程是 (直线上点的坐标是  $(\xi^0, \xi^1, \dots, \xi^n)$ )

$$\frac{\xi^1 - 0}{x^1 - 0} = \frac{\xi^2 - 0}{x^2 - 0} = \dots = \frac{\xi^n - 0}{x^n - 0} = \frac{\xi^0 + a}{x^0 + a} \quad (7.1-7)$$

令上式中的  $\xi^0 = 0$  可得  $\psi_+(p)$  坐标如下

$$(\xi^1, \dots, \xi^n) = \psi_+(x^0, x^1, \dots, x^n) = \frac{a}{a + x^0}(x^1, \dots, x^n). \quad (7.1-8)$$

反之. 将上式求平方和, 并利用  $\sum_{i=1}^n (x^i)^2 - (x^0)^2 = -a^2$ , 可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (\xi^k)^2 &= \frac{a^2}{(a + x^0)^2} \left( \sum_{i=1}^n (x^i)^2 \right) = \frac{a^2}{(a + x^0)^2} (-a^2 + (x^0)^2) \\ \Rightarrow x^0 &= \frac{a(a^2 + \sum_k (\xi^k)^2)}{a^2 - \sum_k (\xi^k)^2}, \quad \text{或} \quad x^0 = -a \text{ (舍弃)}. \end{aligned}$$

有了  $x^0$  坐标表达式, 其它坐标几乎一望而知, 它们是

$$\begin{aligned} (x^0, x^1, \dots, x^n) &= \psi_+^{-1}(\xi^1, \dots, \xi^n) \\ &= \frac{a}{a^2 - \sum_k (\xi^k)^2} \left( +a^2 + \sum_{k=1}^n (\xi^k)^2, 2a\xi^1, \dots, 2a\xi^n \right), \end{aligned} \quad (7.1-9)$$

$$\begin{aligned} (x^0, x^1, \dots, x^n) &= \psi_-^{-1}(\eta^1, \dots, \eta^n) \\ &= \frac{a}{a^2 - \sum_k (\eta^k)^2} \left( -a^2 - \sum_{k=1}^n (\eta^k)^2, 2a\eta^1, \dots, 2a\eta^n \right). \end{aligned} \quad (7.1-10)$$

上面第二式为双曲空间下叶的坐标 (其中  $\eta^i = \frac{ax^i}{a-x^0}$ ), 请读者补齐推导过程. 不难看出映射  $\psi_\pm$  及  $\psi_\pm^{-1}$  都是无穷阶可微函数, 所以  $\psi_\pm : H_\pm^n(a) \rightarrow B^n(a)$  是光滑同胚.

截止到此, 本小节还未涉及度规, 现指定  $\mathbb{R}^{n+1}$  度规为广义洛伦兹度规, 即

$$g_{cb}X^cY^b = (-(dx^0)_c(dx^0)_b + \sum_{i=1}^n (dx^i)_c(dx^i)_b)X^cY^b = -X^0Y^0 + \sum_{i=1}^n X^iY^i, \quad (7.1-11)$$

其中  $X^c, Y^c \in \mathbb{R}^{n+1}$  是任意矢量. 显然, 有

$$g_{cb}X^cY^b = \frac{1}{2}(g_{cb}(X+Y)^c(X+Y)^b - g_{cb}X^cX^b - g_{cb}Y^cY^b). \quad (7.1-12)$$

从上式可见, 只需研究  $g_{cb}X^cX^b$  就可讨论整个洛伦兹度规了. 在物理学中 (见定义5.7和5.8), 只讨论类时矢量和零模矢量, 而它们正好与双曲空间有一一对应关系; 类时矢量对应  $a > 0$ , 零模矢量对应  $a = 0$ . 为简单起见, 我们假设所有矢量的第零维分量是正的 (指向未来), 同

时只讨论类时矢量；这样只需讨论双曲空间的上叶即可。从上面的讨论可以看出，类时矢量的洛伦兹度规内积可以转化为双曲上叶中（这种转换是双射）。

读者需要注意，我们只给  $\mathbb{R}^{n+1}$  选定了度规，还没有给  $H_+^n(a)$  或  $B^n(a)$  指定度规；下面我们来给它们指定诱导度规。很明显，包含映射  $\iota: H_+^n(a) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  是正则嵌入的；令  $\varphi = \iota \circ \psi_+^{-1}$ ，则由上面的讨论可知： $\varphi: B^n(a) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  也是光滑、正则嵌入映射；当然它们都是浸入的了。根据式(7.1-1)可以求得  $B^n(a)$  的诱导度规  $h_{cb} = \varphi^* g_{cb}$ ，直接计算即可

$$h_{cb} = \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \xi^j} - \frac{\partial x^0}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^0}{\partial \xi^j} \right) (d\xi^i)_c (d\xi^j)_b = \frac{4a^4 \sum_{i=1}^n (d\xi^i)_c (d\xi^i)_b}{(a^2 - \sum_{k=1}^n (\xi^k)^2)^2}. \quad (7.1-13)$$

可见这个度规是正定的，因而  $B^n(a)$  是一个正定黎曼流形。

还可以求得  $H_+^n(a)$  中的诱导度规  $h'_{cb} = \iota^* g_{cb}$ （假设  $x^1, \dots, x^n$  是独立变量， $x^0$  可由上述量来表示），根据式(7.1-1)经过计算可得，

$$\begin{aligned} h'_{cb} &= \sum_{ij=1}^n \left( \sum_{\alpha,\beta=1}^n \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j} \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial x^0}{\partial x^i} \frac{\partial x^0}{\partial x^j} \right) (dx^i)_c (dx^j)_b \\ &= \sum_{ij=1}^n \left( \delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{a^2 + \sum_{k=1}^n (x^k)^2} \right) (dx^i)_c (dx^j)_b \\ &\stackrel{7.1-9}{=} \frac{4a^4 \sum_{i=1}^n (d\xi^i)_c (d\xi^i)_b}{(a^2 - \sum_{k=1}^n (\xi^k)^2)^2}. \end{aligned} \quad (7.1-14)$$

上式最后一步推导较为繁琐，计算冗长，所得结果与式(7.1-13)相同。这说明  $(H_+^n(a), \iota^* g_{cb})$  和  $(B^n(a), \varphi^* g_{cb})$  是等距同胚。

**例 7.1** 具体计算一例。当  $n = 1$  时，设  $v^c = v_\xi (\frac{\partial}{\partial \xi})^c \in T_p B^1(a)$ ，根据式(7.1-13)，有  $h_{cb} v^c v^b = \frac{4a^4 v_\xi^2}{(a^2 - \xi^2)^2}$ ；这是正定的。

再计算洛伦兹度规下的数值。推前  $v^c$  有  $\varphi_*(v^c) = \frac{4a^3 \xi v_\xi}{(a^2 - \xi^2)^2} (\frac{\partial}{\partial x^0})^c + \frac{2a^2(a^2 + \xi^2) v_\xi}{(a^2 - \xi^2)^2} (\frac{\partial}{\partial x^1})^c$ ；再来计算矢量长度， $g_{cb} v^c v^b = \frac{4a^4 v_\xi^2}{(a^2 - \xi^2)^2}$ ；两者相等。

## 7.2 子流形基本理论

设  $(M, g, \nabla_a)$  是  $m$  维广义黎曼流形， $(N, h, D_a)$  是  $n (< m)$  维广义黎曼流形。假设两个流形间存在光滑局部等距浸入映射  $\phi: N \rightarrow M$ ，局部等距即是  $h_{ab} = \phi^* g_{ab}$ 。  $\forall p \in N$ ，存在该点邻域  $p \in U \subset N$  使得  $\phi|_U: U \rightarrow V \subset M$  是等距、正则嵌入映射；因此，在局部上  $(\phi, N)$  是正则嵌入的；正因为如此，在局部上通常用包含映射  $\iota$  来代替前面给出的浸入映射  $\phi$ ，即  $\iota: U \rightarrow V$  或  $\iota: N \rightarrow M$ （应理解成只在局部成立）。我们常常把  $N$  和  $\iota(N)$  等同起来，把  $T_p N$  和  $\iota_*(T_p N)$  也看作认同，等等。同时，很多时候会忽略  $\phi_*, \phi^*, \iota_*, \iota^*$  等记号；绝大部分文献皆如此，我们也无意改变这种记号习惯，读者小心理解、区分便是，只是在笔者认为需要强调的时候会恢复省略的记号。

$\forall p \in N$ , 切空间  $T_{i(p)}M$  关于广义黎曼度规  $g_{ab}$  可以分解为正交直和

$$T_{i(p)}M = T_pN \oplus T_p^\perp N, \quad (7.2-1)$$

其中  $T_pN$  是  $N$  在  $p$  点的切空间 (用正则嵌入映射将之与  $\iota_*(T_pN) \subset T_{i(p)}M$  等同), 因此可把  $T_pN$  看作  $T_{i(p)}M$  的子空间;  $T_p^\perp N$  是  $T_pN$  在  $T_{i(p)}M$  中的正交补空间, 即

$$T_p^\perp N = \{\xi^a \in T_{i(p)}M \mid g_{ab}\xi^a v^b = 0, \forall v^b \in T_pN\}, \quad (7.2-2)$$

称为子流形  $\iota: N \rightarrow M$  在点  $\iota(p)$  的法空间; 法空间的维数  $m - n$  称为余维数. 这样,  $\forall v^a \in T_pM$  可唯一分解为

$$v^a = {}^\top v^a + {}^\perp v^a, \quad (7.2-3)$$

其中  ${}^\top v^a \in T_pN$  称为切分量 (Tangent),  ${}^\perp v^a \in T_p^\perp N$  称为法分量 (Normal). 令

$$T^\perp N = \bigcup_{p \in N} T_p^\perp N, \quad (7.2-4)$$

可以证明  $T^\perp N$  是流形  $M$  上的一个矢量丛, 称为子流形  $\iota: N \rightarrow M$  的法丛. 需注意, 法空间、法丛中所有矢量属于  $T_{i(p)}M$ , 并且不属于  $T_pN$  ( $\equiv \iota_*(T_pN)$ ) 的矢量. 用  $\mathfrak{X}^\perp(N)$  表示法丛  $T^\perp(N)$  中的可微截面集合, 即法向矢量场集合.

需假设法丛中没有零模矢量; §7.7 会初步涉及零模法矢量的内容.

### 7.2.1 子流形联络

设  $\nabla_a$  是黎曼流形  $(M, g)$  的 Levi-Civita 联络.  $\forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $\iota_* X^a, \iota_* Y^a$  是  $M$  中沿  $\iota$  的切矢量; 为使意义清晰, 我们将多次写出 “ $\iota_*$ ” 等记号. 显然  $\nabla_{\iota_* X}(\iota_* Y^a) \in \mathfrak{X}(M)$ , 但它未必是  $\iota_*(\mathfrak{X}(N)) \subset \mathfrak{X}(M)$  中的切矢量; 利用式(7.2-3), 可以假设

$$\nabla_{\iota_* X}(\iota_* Y^a) = D_{\iota_* X}(\iota_* Y^a) + K_{bc}^a(\iota_* X^b, \iota_* Y^c), \quad (7.2-5)$$

其中  $D_{\iota_* X}(\iota_* Y^a) = {}^\top(\nabla_{\iota_* X}(\iota_* Y^a))$ , 那么  $D_{\iota_* X}(\iota_* Y^a) \in \iota_*(\mathfrak{X}(N)) \equiv \mathfrak{X}(N)$ , 所以通常会把  $D_{\iota_* X}(\iota_* Y^a)$  简记为  $D_X Y^a$ ; 另一部分  $K_{bc}^a(\iota_* X^b, \iota_* Y^c) = {}^\perp(\nabla_{\iota_* X}(\iota_* Y^a))$ , 是法丛  $T^\perp N$  中的矢量, 在不引起误解的前提下也简记为  $K_{bc}^a(X^b, Y^c)$ . 式(7.2-5)通常称为 **Gauss 公式**;  $K_{bc}^a$  称为等距浸入  $\phi$  的**第二基本形式**, 或称为  $N$  在  $M$  中的第二基本形式.

我们需要证明上式中给出  $D_a$  是流形  $(N, h)$  中的 Levi-Civita 联络,

**定理 7.2** 设  $\phi: N \rightarrow M$  为局部等距浸入, 则式(7.2-5)中的  $D_a$  是流形  $(N, h)$  中的 Levi-Civita 联络.

**证明**. 设  $\alpha, \beta \in C^\infty(N)$ , 由式(7.2-5)可得

$$\nabla_{\alpha X}(\beta Y^a) = D_{\alpha X}(\beta Y^a) + K_{bc}^a(\alpha X^b, \beta Y^c). \quad (7.2-6)$$

我们已知上式左端的  $\nabla_a$  是黎曼流形  $(M, g)$  的 Levi-Civita 联络, 所以有

$$\nabla_{\alpha X}(\beta Y^a) = \alpha Y^a X(\beta) + \alpha \beta (D_X Y^a + K_{bc}^a(X^b, Y^c)). \quad (7.2-7)$$

注意到切空间与法空间的交集只有零矢量, 依照式(7.2-3)可知, 上两式等号右端的切向部分(或法向部分)是相等的, 即

$$D_{\alpha X}(\beta Y^a) = \alpha \beta D_X Y^a + \alpha Y^a X(\beta), \quad (7.2-8)$$

$$K_{bc}^a(\alpha X^b, \beta Y^c) = \alpha \beta K_{bc}^a(X^b, Y^c). \quad (7.2-9)$$

式(7.2-8)说明  $D_X$  符合  $N$  上仿射联络定义; 我们只验证了最重要的一条, 其它几条简单的验证留给读者当练习; 比如 Leibnitz 律和缩并与联络可交换属于附加的额外原则, 无需验证. 此外, 仍需证明它是无挠, 以及与度规相容.

我们已知联络  $\nabla_a$  是无挠的, 即有

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X Y^a - \nabla_Y X^a - [X, Y]^a \\ &= D_X Y^a - D_Y X^a - [X, Y]^a + K_{bc}^a(X^b, Y^c) - K_{bc}^a(X^c, Y^b). \end{aligned} \quad (7.2-10)$$

需注意  $[X, Y]^a = [\iota_* X, \iota_* Y]^a = \iota_*([X, Y]^a)$ , 显然已把  $\iota_*([X, Y]^a)$  和  $[X, Y]^a$  作认同; 读者需注意  $[X, Y]^a \in \mathfrak{X}(N)$ , 推前之后的  $\iota_*([X, Y]^a) \in \iota_*\mathfrak{X}(N)$ , 推前映射是不会把切矢量“推出”法空间分量的. 对上式分别取切向部分和法向部分, 有

$$0 = D_X Y^a - D_Y X^a - [X, Y]^a, \quad (7.2-11)$$

$$0 = K_{bc}^a(X^b, Y^c) - K_{bc}^a(X^c, Y^b). \quad (7.2-12)$$

由式(7.2-11)可知, 仿射联络  $D_a$  是无挠的.

将  $X^a \in \mathfrak{X}(N)$  作用在标量场上, 有 (其中  $Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(N)$ )

$$X(h_{bc}Y^bZ^c) = X((\iota^*g_{bc})Y^bZ^c) = X(g_{bc}(\iota_*Y^b)(\iota_*Z^c)) = X(g_{bc}Y^bZ^c) \quad (7.2-13)$$

我们已知联络  $\nabla_a$  是与  $g_{ab}$  相容的, 即有

$$\begin{aligned} X(g_{bc}Y^bZ^c) &= g_{bc}(\nabla_X Y^b)Z^c + g_{bc}Y^b\nabla_X Z^c \\ &= g_{bc}Z^cD_X Y^b + g_{bc}Z^cK_{ad}^b(X^a, Y^d) + g_{bc}Y^bD_X Z^c + g_{bc}Y^bK_{ad}^c(X^a, Z^d) \end{aligned}$$

注意到  $Z^c$  是切矢量部分, 而  $K_{ad}^b(X^a, Y^d)$  是法矢量部分, 故两者内积必然为零. 继续计算, 有 (注意  $\iota_*(D_X Y^b) = D_X Y^b$ )

$$\begin{aligned} X(h_{bc}Y^bZ^c) &\stackrel{7.2-13}{=} X(g_{bc}Y^bZ^c) = g_{bc}\iota_*(Z^cD_X Y^b) + g_{bc}\iota_*(Y^bD_X Z^c) \\ &= \iota^*(g_{bc})(Z^cD_X Y^b) + \iota^*(g_{bc})(Y^bD_X Z^c) = h_{bc}Z^cD_X Y^b + h_{bc}Y^bD_X Z^c. \end{aligned} \quad (7.2-14)$$

因此联络与度规相容, 所以  $D_a$  是流形  $N$  的 Levi-Civita 联络. ■

不难得到对偶矢量场的协变导数公式, 与式(7.2-5)相对应,

$$\nabla_X \omega_a = D_X \omega_a - K_{ba}^c X^b \omega_c; \quad \text{其中 } \omega_a \in \mathfrak{X}^*(N). \quad (7.2-15)$$

此后, 当不引起混淆时, 把  $K_{ad}^b(X^a, Y^d)$  记成  $K_{ad}^b X^a Y^d$ . 由式(7.2-9)和(7.2-12)可得关于  $K$  的重要命题如下,

**命题 7.3** 映射  $K : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(N)$  是对称的 ( $K_{bc}^a = K_{cb}^a$ )、 $C^\infty(N)$ -双线性的.

### 7.2.2 法联络

设  $X^a \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $\xi^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ , 仿照式(7.2-5), 可把  $\nabla_X \xi^a$  分成切向、法向两部分,

$$\nabla_X \xi^a = -S_{\xi b}^a X^b + D_X^\perp \xi^a. \quad (7.2-16)$$

其中  $S_{\xi b}^a X^b$  和  $D_X^\perp \xi^a$  分别表示  $\nabla_X \xi^a$  的切向和法向部分. 公式(7.2-16)一般称为 **Weingarten 公式**, 它和 Gauss 公式合称为子流形基本公式.

设  $\alpha, \beta \in C^\infty(N)$ , 参考定理7.2的证明过程可得  $\nabla_X \xi^a$  的两种表述方式

$$\nabla_{\alpha X}(\beta \xi^a) = -S_{\beta \xi b}^a (\alpha X^b) + D_{\alpha X}^\perp(\beta \xi^a), \quad (7.2-17)$$

$$\nabla_{\alpha X}(\beta \xi^a) = \alpha X(\beta) \xi^a - \alpha \beta S_{\xi b}^a X^b + \alpha \beta D_X^\perp \xi^a. \quad (7.2-18)$$

比较上两式的切向与法向部分, 有

$$S_{\beta \xi b}^a (\alpha X^b) = \alpha \beta \cdot S_{\xi b}^a X^b, \quad (7.2-19)$$

$$D_{\alpha X}^\perp(\beta \xi^a) = \alpha X(\beta) \xi^a + \alpha \beta D_X^\perp \xi^a. \quad (7.2-20)$$

由式(7.2-19)可得如下命题,

**命题 7.4** 由  $(X, \xi) \xrightarrow{S} -S_{\xi b}^a(X^b)$  定义的映射  $S : \mathfrak{X}^\perp(N) \times \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$  是  $C^\infty(N)$ -双线性的. 一般称映射  $S$  为**形状因子**.

因  $S_{\xi b}^a : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ , 故从张量场特征引理2.68可知  $S_{\xi b}^a$  是  $N$  上的  $(1, 1)$  型光滑张量场; 但因  $\xi^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ , 故  $S$  (及  $K$ ) 不是流形  $N$  上的  $(1, 2)$  型张量场. 但  $S$  和  $K$  却是流形  $M$  上的  $(1, 2)$  型张量场.

从式(7.2-20)可知: 式(7.2-16)中定义的  $D_X^\perp$  是一个仿射联络, 称为流形  $N$  上的**法联络**; 此映射是  $D_a^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}^\perp(N) \rightarrow \mathfrak{X}^\perp(N)$ .

$\forall \xi^a, \eta^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ , 考虑到法向矢量与切向矢量内积恒为零, 有

$$g_{ab}(D_X^\perp \xi^a) \eta^b + g_{ab} \xi^a D_X^\perp \eta^b \stackrel{7.2-16}{=} g_{ab}(\nabla_X \xi^a) \eta^b + g_{ab} \xi^a \nabla_X \eta^b = X(g_{ab} \xi^a \eta^b). \quad (7.2-21)$$

上式说明法联络  $D_X^\perp$  与  $g$  在法空间的诱导度规是相容的. 因为  $D_X^\perp \xi^a$  中的  $X^a$  和  $\xi^a$  分别属于切空间和法空间, 所以法联络  $D_a^\perp$  的无挠性不好探讨.



$\forall \xi^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ ,  $\forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(N)$ , 注意  $g_{ab}Y^a\xi^b = 0$ , 有

$$0 = \nabla_X(g_{ab}Y^a\xi^b) = g_{ab}Y^a\nabla_X\xi^b + g_{ab}\nabla_X(Y^a)\xi^b = g_{ab}K_{cd}^aX^cY^d\xi^b - g_{ab}Y^aS_{\xi^c}^bX^c.$$

由上式及命题7.3可得

$$g_{ab}Y^aS_{\xi^c}^bX^c = g_{ab}K_{cd}^aX^cY^d\xi^b = g_{ab}K_{dc}^aY^dX^c\xi^b = g_{ab}X^aS_{\xi^c}^bY^c. \quad (7.2-22)$$

因此, 映射  $S_{\xi^b}^a : T_pN \rightarrow T_pN$  关于内积  $g_{ab}$  是对称线性变换; 或许用第一种记号 (见 §1.7) 能更好地表示这种对称性,

$$\langle S_\xi(X), Y \rangle = \langle K(X, Y), \xi \rangle = \langle K(Y, X), \xi \rangle = \langle S_\xi(Y), X \rangle.$$

### 7.2.3 子流形基本方程

令  ${}^mR_{cab}^d$  表示  $m$  维流形  $M$  中黎曼张量,

$${}^mR_{cab}^dX^aY^bZ^c = \nabla_X\nabla_YZ^d - \nabla_Y\nabla_XZ^d - \nabla_{[X,Y]}Z^d, \quad (7.2-23a)$$

$${}^n_{\top}R_{cab}^dX^aY^bZ^c = D_XD_YZ^d - D_YD_XZ^d - D_{[X,Y]}Z^d, \quad (7.2-23b)$$

$${}^n_{\perp}R_{cab}^dX^aY^b\xi^c = D_X^\perp D_Y^\perp \xi^d - D_Y^\perp D_X^\perp \xi^d - D_{[X,Y]}^\perp \xi^d. \quad (7.2-23c)$$

其中  $X^a, Y^a, Z^a \in \mathfrak{X}(N)$ ,  $\xi^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ . 式(7.2-23a)中的辅助切矢量场  $X^a, Y^a, Z^a$  可随意换成法空间的矢量场  $\xi^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ , 并仍有意义; 其它两个式子则不可以.  ${}^n_{\top}R_{cab}^d$  表示  $n$  维流形  $N$  切丛  $TN$  的黎曼张量, 并在公式中显示标记了“ $\top$ ”, 为了给指标升降留下空间, “ $\top$ ”标在了左下角.  ${}^n_{\perp}R_{cab}^d$  是法丛  $T^\perp N$  的黎曼张量. 式(7.2-23b)给出的定义本就是流形  $N$  中的黎曼曲率, 无需在左下角增加记号“ $\top$ ”, 只是为了与式(7.2-23c)形成对比才附加此记号; 在其他章节中, 当只有  ${}^n_{\top}R_{cab}^d$  出现时, 我们将其记成  ${}^nR_{cab}^d$ .

对 Gauss 公式(7.2-5)再次求协变导数, 经简单计算有

$$\nabla_X\nabla_YZ^a = D_XD_YZ^a + K_{bc}^aX^bD_YZ^c + \nabla_X(K_{bc}^aY^bZ^c) \quad (7.2-24)$$

交换式(7.2-24)中  $X, Y$  的位置, 并相减, 有 (下式中  $\zeta^a \equiv K_{bc}^aY^bZ^c, \eta^a \equiv K_{bc}^aX^bZ^c$ )

$$\begin{aligned} {}^mR_{bcd}^aX^cY^dZ^b &= {}^n_{\top}R_{bcd}^aX^cY^dZ^b - S_{\zeta^b}^aX^b + S_{\eta^b}^aY^b - K_{ef}^aZ^fD_XY^e + K_{ef}^aZ^fD_YX^e \\ &\quad + D_X^\perp(K_{bc}^aY^bZ^c) - D_Y^\perp(K_{bc}^aX^bZ^c) + K_{bc}^aX^bD_YZ^c - K_{bc}^aY^bD_XZ^c. \end{aligned} \quad (7.2-25)$$

用  $g$  将式(7.2-25)的上指标“ $a$ ”降下来,<sup>1</sup>再与  $W^a \in \mathfrak{X}(N)$  缩并, 有 (利用式(7.2-22))

$$\begin{aligned} {}^mR_{abcd}W^aX^cY^dZ^b &= {}^n_{\top}R_{abcd}W^aX^cY^dZ^b - S_{\zeta^b}^aX^b g_{af}W^f + S_{\eta^b}^aY^b g_{af}W^f \\ &= {}^n_{\top}R_{abcd}W^aZ^bX^cY^d + g_{af}((K_{bc}^fX^bZ^c)(K_{ed}^aY^eW^d) - (K_{bc}^fY^bZ^c)(K_{ed}^aX^eW^d)). \end{aligned} \quad (7.2-26)$$

<sup>1</sup> 因为  $h_{ab}X^b = (\iota^*g_{ab})X^b = g_{ab}\iota_*X^b = g_{ab}X^b$ , 所以  $\forall X^a \in \mathfrak{X}(N)$  用  $g_{ab}$  还是用  $h_{ab}$  升降指标都是一样的.

因  $W^a, Z^b, X^c, Y^d \in \mathfrak{X}(N)$  的任意性, 上式等价于

$${}^n R_{abcd} = {}^m R_{abcd} + g_{ef} K_{ac}^e K_{bd}^f - g_{ef} K_{ad}^e K_{bc}^f. \quad (7.2-27)$$

式(7.2-26)或(7.2-27)称为流形  $M$  与流形  $N$  之间的黎曼曲率 **Gauss 方程**. 需要强调的是:  $K_{ij}^\alpha$  上指标的取值范围是  $n+1 \leq \alpha \leq m$ ; 下指标的取值范围是  $1 \leq i, j \leq n$ . 由于是在法空间作内积, 所以需用度规  $g$ , 而不能用诱导度规  $h$ .

以上考虑了式(7.2-25)的切向部分, 下面取其等号两侧的法向部分, 有

$$\begin{aligned} ({}^m R_{bcd}^a Z^b X^c Y^d)^\perp = & + D_X^\perp (K_{bc}^a Y^b Z^c) - K_{bc}^a Y^b D_X Z^c - K_{bc}^a Z^c D_X Y^b \\ & - D_Y^\perp (K_{bc}^a X^b Z^c) + K_{bc}^a X^b D_Y Z^c + K_{bc}^a Z^c D_Y X^b. \end{aligned} \quad (7.2-28)$$

这个方程一般称为 **Codazzi 方程**.

为计算法丛中的黎曼曲率, 对式(7.2-16)再次求协变微分, 有

$$\nabla_X \nabla_Y \xi^a = D_X^\perp D_Y^\perp \xi^a - S_{(D_Y^\perp \xi)}^a X^f - D_X (S_{\xi^e}^a Y^e) - K_{bc}^a X^b S_{\xi^e}^c Y^e. \quad (7.2-29)$$

交换式(7.2-29)中  $X, Y$  位置得到新式, 用旧式减掉新式, 参考黎曼曲率定义式(7.2-23); 并计算式  ${}^m R_{abcd} X^c Y^d \xi^b \theta^a$  (其中  $\theta^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$ ), 有

$${}^m R_{bcd}^a X^c Y^d \xi^b \theta^a = {}^n R_{bcd}^a X^c Y^d \xi^b \theta^a - \theta_a K_{bc}^a X^b S_{\xi^e}^c Y^e + \theta_a K_{bc}^a Y^b S_{\xi^e}^c X^e \quad (7.2-30a)$$

$$\Leftrightarrow {}^n R_{bcd}^a = {}^m R_{bcd}^a + K_{ce}^a S_{bd}^e - K_{de}^a S_{bc}^e. \quad (7.2-30b)$$

一般称之为 **Ricci 方程**. 式(7.2-30b)中对哪几个指标取法空间分量不是十分清晰, 此时需要结合式(7.2-30a), 就一目了然了; 即, 上式  $\forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(N); \forall \xi^a, \theta^a \in \mathfrak{X}^\perp(N)$  成立.

式(7.2-27)、(7.2-28)和(7.2-30)是子流形理论中的基本方程式.

### 7.3 活动标架法

设有两个广义黎曼流形  $M$  和  $N$ , 维数分别为  $m$  和  $n(< m)$ , (局部上)存在包含映射  $\iota: N \rightarrow M$ . 取流形  $(M, g)$  切空间的局部基矢场为  $\{(E_i)^a\}$ , 其对偶基矢场为  $\{(E^i)_a\}$ ; (因包含映射)可规定前  $n$  (即  $1 \leq i \leq n$ ) 个基矢场是切空间  $\mathfrak{X}(N)$  的基矢场, 后面  $m-n$  (即  $n+1 \leq A \leq m$ ) 个基矢场是法空间  $\mathfrak{X}^\perp(N)$  的基矢场; 很明显两者加起来构成了  $TM$  的基矢场. 再规定这些基矢场是刚性标架场 (定义见 §5.5.3的5.35).

本节约定: 小写拉丁字母  $1 \leq i, j, \dots \leq n$ ; 大写拉丁字母  $n+1 \leq A, B, \dots \leq m$ ; 希腊字母  $1 \leq \alpha, \beta, \dots \leq m$ .

流形  $M$  上的 Levi-Civita 联络  $\nabla_a$  是无挠的, 第131页的嘉当结构方程(4.3-26)变为

$$d_a(E^\alpha)_b = \sum_{\beta=1}^m (E^\beta)_a \wedge (\omega^\alpha)_b, \quad (\omega^\alpha)_b = -(\omega^\alpha)_b; \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq m; \quad (7.3-1a)$$

$$d_a(\omega_{\beta}^{\alpha})_b = \sum_{\mu=1}^m (\omega_{\beta}^{\mu})_a \wedge (\omega_{\mu}^{\alpha})_b + \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu=1}^m R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} (E^{\mu})_a \wedge (E^{\nu})_b. \quad (7.3-1b)$$

它们是流形  $M$  上的结构方程.

### 7.3.1 子流形联络型式

包含映射将  $TM$  基矢场拉回到  $TN$  中,

$$(e^i)_a = \iota^*(E^i)_a, \quad (e_i)^a = \iota_*^{-1}(E_i)^a; \quad 1 \leq i \leq n. \quad (7.3-2)$$

$$(e^A)_a = \iota^*(E^A)_a = 0, \quad (e_A)^a = \iota_*^{-1}(E_A)^a = 0; \quad n+1 \leq A \leq m. \quad (7.3-3)$$

我们用小写的  $(e^i)_a$  表示  $TN$  中的基矢场; 因  $N$  是  $n$  维的, 当角标  $A > n$  时, 所拉回的基矢场自然是零. 对于流形  $N$  中 1 型式场  $(\omega_{\cdot i}^A)_a$ , 我们不再引入新的记号, 而是沿用上述结构方程中的记号, 用角标的取值范围来区分它们.

#### 7.3.1.1 1 型式场 $(\omega_{\cdot i}^A)_a$ 的简化表示

因交换性  $d \circ \iota^* = \iota^* \circ d$ , 以及拉回映射与外积可交换, 由  $M$  上第一结构方程可得

$$0 = d_a(e^A)_b = \sum_{i=1}^n (e^i)_a \wedge (\omega_{\cdot i}^A)_b, \quad n+1 \leq A \leq m. \quad (7.3-4)$$

由 Cartan 引理 1.104 可知

$$(\omega_{\cdot i}^A)_a = \sum_{j=1}^n K_{ij}^A (e^j)_a, \quad K_{ij}^A = K_{ji}^A; \quad 1 \leq i \leq n, \quad n+1 \leq A \leq m. \quad (7.3-5)$$

上式中的系数用“ $K$ ”, 而没有用其它字符的原因见后. 利用反对称性  $(\omega_{\beta}^{\alpha})_b = -(\omega_{\beta}^{\alpha})_b$ , 作如下计算 (由正交分解的定义式 (7.2-2) 可知  $g_{Ai} \equiv 0$ )

$$(\omega_{\cdot A}^i)_a = - \sum_{B=n+1}^m \sum_{l=1}^n g_{AB} g^{il} (\omega_{\cdot l}^B)_a = - \sum_{B=n+1}^m \sum_{j,l=1}^n g_{AB} g^{il} K_{lj}^B (e^j)_a. \quad (7.3-6)$$

式 (7.3-6) 适用于正定或不定度规的刚性标架场 (包括非正交归一). 当基矢正交归一、且度规正定时, 度规的非对角元全部为零, 对角元为“+1”, 上式还能进一步化简为

$$(\omega_{\cdot A}^i)_a = -(\omega_{\cdot i}^A)_a = -K_{ij}^A (e^j)_a. \quad (7.3-7)$$

只有在正交归一基矢、正定度规下才允许上式中指标的上下位置不匹配.

### 7.3.1.2 联络的型式表示

Gauss 公式(7.2-5)和 Weingarten 公式(7.2-16)在基矢量  $\{(e_i)^a\}$  下变成,

$$\nabla_{e_i}(e_j)^a = D_{e_i}(e_j)^a + K_{bc}^a(e_j)^b(e_i)^c, \quad \nabla_{e_i}(E_B)^a = -S_{E_B b}^a(e_i)^b + D_{e_i}^\perp(E_B)^a. \quad (7.3-8)$$

由第128页的式(4.3-6)可得流形  $M$  上的联络型式为

$$\nabla_{e_i}(e_j)^a = (e_i)^c(\omega_{\cdot j}^k)_c(e_k)^a + (e_i)^c(\omega_{\cdot j}^A)_c(E_A)^a, \quad (7.3-9)$$

$$\nabla_{e_i}(E_B)^a = (e_i)^c(\omega_{\cdot B}^k)_c(e_k)^a + (e_i)^c(\omega_{\cdot B}^A)_c(E_A)^a. \quad (7.3-10)$$

取(7.3-9)的切向部分, 再取(7.3-10)的法向部分; 再结合式(7.3-8), 可得  $TN$  及  $T^\perp N$  在局部标架场上的联络型式如下 (即  $D$  和  $D^\perp$  的联络型式),

$$D_{e_i}(e_j)^a = (e_i)^c(\omega_{\cdot j}^k)_c(e_k)^a = e_i(\omega_{\cdot j}^k)(e_k)^a = \gamma_{ji}^k(e_k)^a, \quad (7.3-11)$$

$$D_{e_i}^\perp(E_B)^a = (e_i)^c(\omega_{\cdot B}^A)_c(E_A)^a = e_i(\omega_{\cdot B}^A)(E_A)^a = \gamma_{Bi}^A(E_A)^a. \quad (7.3-12)$$

其中  $\gamma_{jk}^i$  等定义见 §4.3. 剩余部分是

$$K_{bc}^a(e_j)^b(e_i)^c = (e_i)^c(\omega_{\cdot j}^A)_c(E_A)^a \xrightarrow{7.3-5} K_{bc}^a = K_{jl}^A(e^l)_c(e^j)_b(E_A)^a, \quad (7.3-13)$$

$$S_{E_B c}^a(e_i)^c = -(e_i)^c(\omega_{\cdot B}^k)_c(e_k)^a \xrightarrow{7.3-6} S_{bc}^a = g_{BC}g^{kl}K_{lj}^C(e^j)_c(E^B)_b(e_k)^a. \quad (7.3-14)$$

需要再次强调: 虽然  $K, S$  不是  $TN$  上的张量场但它们是  $TM$  上的张量场.

### 7.3.2 Gauss-Codazzi-Ricci 方程的型式表示

由式(7.3-13)和(7.3-14)可以用联络型式来表示 Gauss-Codazzi-Ricci 方程; 计算过程并不是十分复杂, 请读者补齐.

Gauss 方程(7.2-27)在刚性活动标架下的表达式为,

$${}^n R_{abcd} \xrightarrow{7.3-13} ({}^m R_{ijkl} + g_{AB}(K_{ik}^A K_{jl}^B - K_{il}^A K_{jk}^B))(e^i)_a(e^j)_b(e^k)_c(e^l)_d. \quad (7.3-15)$$

上式中的“ $K$ ”是式(7.3-5)中的“ $K$ ”. 比对式(7.2-27)可知此“ $K$ ”几何意义便是第二基本形式. 这正是我们在式(7.3-5)中用“ $K$ ”的原因; 如果在式(7.3-5)中没有用“ $K$ ”而用其它字符, 反而有违和感. 同时也可看到需注意  ${}^m R_{ijkl}$  只取切空间分量, 不取法空间分量.

Codazzi 方程(7.2-28)在刚性标架下的表达式为, (取式(7.2-28)中的  $Z^a = (e_j)^a, X^a = (e_k)^a, Y^a = (e_l)^a, \theta^a = (E_A)^a$ , 注意内指标  $j, k, l, A$ ; 参考式(4.3-6)、(7.3-11)和(7.3-12))

$$\begin{aligned} {}^m R_{jkl}^A = & + e_k(K_{lj}^A) + K_{lj}^B \gamma_{Bk}^A - K_{lr}^A \gamma_{jk}^r - K_{rj}^A \gamma_{lk}^r \\ & - e_l(K_{kj}^A) - K_{kj}^B \gamma_{Bl}^A + K_{kr}^A \gamma_{jl}^r + K_{rj}^A \gamma_{kl}^r. \end{aligned} \quad (7.3-16)$$

由 §4.3.3 可知上式恰好是第二基本形式的两个协变导数之差, 即  ${}^m R_{jkl}^A = K_{jl;k}^A - K_{jk;l}^A$ .

Ricci 方程(7.2-30)在刚性活动标架下的表达式为,

$${}_{\perp}^n R_{bcd}^a = ({}^m R_{Ckl}^B + g_{CA} g^{pq} (K_{kq}^B K_{pl}^A - K_{lq}^B K_{pk}^A)) (E_B)^a (E^C)_b (e^k)_c (e^l)_d. \quad (7.3-17)$$

Gauss 方程(7.3-15)、Codazzi 方程(7.3-16) 和 Ricci 方程(7.3-17)对度规是否正定没有要求, 只需刚性标架即可; 度规信息已体现在  $g_{BC}$  或  $g^{pq}$  等项中.

### 7.3.3 子流形结构方程

因此, 把  $M$  上的结构方程(7.3-1)用  $\iota^*$  拉回到流形  $N$  上, 可得  $N$  上结构方程为

$$d_a(e^i)_b = (e^j)_a \wedge (\omega_{\cdot j}^i)_b, \quad (\omega_{\cdot j}^i)_b = -(\omega_j^{\cdot i})_b; \quad (7.3-18a)$$

$$d_a(\omega_{\cdot j}^i)_b = (\omega_{\cdot j}^k)_a \wedge (\omega_k^{\cdot i})_b + \frac{1}{2} [{}^m R_{jkl}^i + g_{AB} g^{ip} (K_{pk}^A K_{jl}^B - K_{pl}^A K_{jk}^B)] (e^k)_a \wedge (e^l)_b; \quad (7.3-18b)$$

$$d_a(\omega_C^B)_b = (\omega_C^A)_a \wedge (\omega_A^B)_b + \frac{1}{2} [{}^m R_{Ckl}^B + g_{CA} g^{qp} (K_{qk}^B K_{pl}^A - K_{ql}^B K_{pk}^A)] (e^k)_a \wedge (e^l)_b; \quad (7.3-18c)$$

$$d_a(\omega_{\cdot j}^B)_b = (\omega_{\cdot j}^k)_a \wedge (K_{kr}^B (e^r)_b) + (K_{js}^A (e^s)_a) \wedge (\omega_A^B)_b + \frac{1}{2} {}^m R_{jkl}^B (e^k)_a \wedge (e^l)_b. \quad (7.3-18d)$$

式(7.3-18b)中 “[...]” 里面的式子与 Gauss 方程(7.3-15)相同. 式(7.3-18c)中 “[...]” 里面的式子与 Ricci 方程(7.3-17)相同. 式(7.3-18d)对应 Codazzi 方程(7.3-16).

请读者补齐所有计算过程, Gauss 方程和 Ricci 方程的计算较为简单. Codazzi 方程略显繁琐, 计算中需注意外微分定义并不需要联络, 但通过包含映射  $\iota^*$  拉回后, 使用流形  $N$  中的无挠联络  $D_a$  来代替外微分可简化计算, 替代公式是式(4.1-28).

### 7.3.4 常曲率空间子流形

设广义黎曼流形  $(M, g)$  是曲率为  $\bar{c}$  的常曲率空间, 则在刚性标架场  $\{(E_A)^a\}$  下, 由式(5.6-12)可知  $M$  的黎曼曲率为

$${}^m R_{\alpha\beta\mu\nu} = -\bar{c}(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}). \quad (7.3-19)$$

将上式带入式(7.3-15)、(7.3-16)和(7.3-17), 可得相应的曲率公式,

$${}_{\perp}^n R_{ijkl} = -\bar{c}(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) + g_{AB} (K_{ik}^A K_{jl}^B - K_{il}^A K_{jk}^B), \quad (7.3-20)$$

$$0 = K_{jl;k}^A - K_{jk;l}^A, \quad (7.3-21)$$

$${}_{\perp}^n R_{Ckl}^B = g_{CD} g^{pq} (K_{kq}^B K_{pl}^D - K_{lq}^B K_{pk}^D). \quad (7.3-22)$$

计算中需注意度规的切空间与法空间分量是零, 即  $g_{Bi}$  等项恒为零.

## 7.4 超曲面一：基本概念

设有两个光滑流形  $M$  和  $\Sigma$  (超曲面理论中一般用  $\Sigma$  来代替前几节常用的字符  $N$ ), 维数分别为  $m+1$  和  $m$ ,<sup>2</sup> 设存在光滑等距浸入映射  $\phi: \Sigma \rightarrow M$ , 流形  $\Sigma$  称为  $M$  的**浸入超曲面**. 指定  $g_{ab}$  是流形  $M$  的广义黎曼度规,  $h_{ab} \equiv \phi^* g_{ab}$  是流形  $\Sigma$  上的诱导度规.

设  $M$  和  $\Sigma$  局部坐标分别为  $(V; x^\alpha)$  和  $(U; y^i)$ , 且  $\phi(U) \subset V$ . 因为浸入映射在局部上就是包含映射, 所以可以认为  $V$  中的第  $1 \leq i \leq m$  个坐标与  $U$  中的第  $1 \leq i \leq m$  个坐标是相同的, 即  $x^i \equiv y^i$ ; 只有  $V$  中第零坐标  $x^0$  是  $U$  中没有的.

在超曲面几节中我们使用如下约定: 小写拉丁字母  $1 \leq i, j, \dots \leq m$ , 希腊字母  $0 \leq \alpha, \beta, \dots \leq m$ ; 法空间一般用指标“0”来标记. 这种约定是为了匹配广义相对论部分.

在超曲面几节中, 只考虑**正定或广义洛伦兹度规**(即  $(-+\dots+)$ ); 不考虑其它情形. 因为超曲面的法空间是一维的, 可从法空间任选一个**非零**矢量  $\xi^a \in \mathfrak{X}^\perp \Sigma$  作为基矢,

**定义 7.5** 如果  $g_{ab}\xi^a\xi^b < 0$  处处成立, 则称  $\Sigma$  为**类空超曲面**; 如果  $g_{ab}\xi^a\xi^b > 0$  处处成立, 则称  $\Sigma$  为**类时超曲面**; 如果  $g_{ab}\xi^a\xi^b = 0$  处处成立, 则称  $\Sigma$  为**零模超曲面**.

如果是正定度规, 则必有  $g_{ab}\xi^a\xi^b > 0$ , 那么便没有必要再作定义7.5式的划分.

对比第135页定义5.8可知类空超曲面的法矢量  $\xi^a$  自身是类时矢量, 类时超曲面的法矢量  $\xi^a$  自身是类空矢量.

我们只考虑可定向的超曲面, 比如不考虑类似于 Möbius 带的超曲面.

在广义相对论中, 超曲面占有较为重要的位置, 为此我们分几节来讨论这个议题. 在 §7.7 专门讨论零模超曲面; 除该节外, 假定  $g_{ab}\xi^a\xi^b \neq 0$ .

### 7.4.1 归一化法矢量

在  $m+1$  维广义黎曼流形  $(M, g)$  中, 有局部坐标系  $(U; x^i)$ . 我们可以通过对坐标施加限制来描述一个特定的超曲面  $\Sigma$ ,

$$\Phi(x^0, x^1, \dots, x^m) = \text{const}. \quad (7.4-1)$$

比如嵌入到  $\mathbb{R}^2$  中的圆  $x^2 + y^2 = 1$ . 再比如嵌入到  $\mathbb{R}^3$  中的球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

依照 §2.10 理论可知  $\Sigma$  上点  $p$  处的任意切矢量  $v^a \in T_p \Sigma$  都会在局部都会对应一条积分曲线  $\gamma(t)$ , 曲线  $\gamma(t)$  在  $p$  点的切矢恰好是  $v^a$ . 我们任取  $u^a$  是切于超曲面  $\Sigma$  的切矢量, 它必然可以看成某条曲线  $\gamma(t) \in \Sigma$  的切矢, 即可以表示成  $u^a = (\frac{d}{dt})^a|_\gamma$ . 那么有  $u^a \nabla_a \Phi = \frac{d\Phi}{dt}|_\gamma = 0$ , 上式最后一步是因为沿  $\gamma(t)$  标量函数  $\Phi$  为常数. 因为  $u^a$  是任取的, 这说明  $\nabla^a \Phi$  与  $\Sigma$  上所有切矢量都正交, 所以它一定是超曲面  $\Sigma$  的法矢量. 定义7.5中所用的  $\xi^a$  一定正比于  $\nabla^a \Phi$ , 不妨取  $\xi^a = \nabla^a \Phi$ . 我们改用字符  $n^a$  来表示  $\xi^a$  归一化后的法矢量,

<sup>2</sup>超曲面几节用  $m$  来代替前几节常用的维数  $n$ , 是为了避免与法矢量  $n^a$  的冲突; 而且超曲面中法矢量记为第0维. 请读者注意与前几节的区别.

即有

$$g_{ab}n^an^b = n_an^a = \epsilon, \quad \text{其中} \epsilon = \begin{cases} +1, & \xi_a\xi^a > 0, \text{类时超曲面或正定度规;} \\ -1, & \xi_a\xi^a < 0, \text{类空超曲面.} \end{cases} \quad (7.4-2)$$

不难求得

$$n_a = \frac{\epsilon \nabla_a \Phi}{\sqrt{|g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi|}}, \quad n^a = \frac{\epsilon g^{ab} \nabla_b \Phi}{\sqrt{|g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi|}}; \quad (7.4-3)$$

并且  $n^a \nabla_a \Phi = \frac{\epsilon g^{ab} (\nabla_b \Phi) \nabla_a \Phi}{\sqrt{|g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi|}} = \sqrt{|g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi|} > 0.$

上式同时对法矢量的取向作了规定，相当于  $n^a$  指向  $\Phi$  增加的方向。这种取法并不是通用的，不同文献有不同习惯。

我们用  $(e_i)^a (1 \leq i \leq m)$  表示  $T\Sigma$  中的基矢量场，如有必要将  $(e_i)^a$  选为正交归一的，但暂不做这样要求。将归一化法矢量记为  $(e_0)^a \equiv n^a$ 。在这样约定下，标架场  $(e_\mu)^a (0 \leq \mu \leq m)$  便构成了  $TM$  中的基矢量场。

#### 7.4.2 超曲面之诱导度规

依法空间定义(7.2-2)，有  $g_{0i} = g_{ab}(e_0)^a(e_i)^b = 0$ ；故度规  $g$  在基矢量场  $(e_\mu)^a$  下，有

$$g_{ab} = g_{00}(e^0)_a(e^0)_b + g_{ij}(e^i)_a(e^j)_b = \epsilon n_a n_b + g_{ij}(e^i)_a(e^j)_b. \quad (7.4-4)$$

其中  $(e^\mu)_a$  是  $(e_\mu)^a$  的对偶基矢量场。因为我们已经规定法矢量  $n^a$  是归一化的，所以有  $g_{00} = g_{ab}n^an^b = \epsilon = \pm 1$ 。由式(7.4-4)可以定义超曲面  $\Sigma$  上的度规

$$h_{ab} \stackrel{\text{def}}{=} g_{ab} - \epsilon n_a n_b = g_{ij}(e^i)_a(e^j)_b. \quad (7.4-5)$$

我们来验证一下上述定义的  $h_{ab}$  便是诱导度量  $\phi^*g_{ab}$ 。  $\forall u^a, v^a \in T\Sigma$ ，有（注意因正交性，有  $n_a u^a = 0$ ）

$$h_{ab}u^av^b = (g_{ab} - \epsilon n_a n_b)u^av^b = g_{ab}u^av^b - \epsilon n_a u^a n_b v^b = g_{ab}u^av^b. \quad (7.4-6)$$

因浸入映射在局部上就是包含映射，所以有  $u^a = \phi_* u^a \in TM$ ，即在  $TM$  中  $u^a$  和  $\phi_* u^a$  是同一个矢量；故继续计算上式得

$$h_{ab}u^av^b = g_{ab}u^av^b = g_{ab}(\phi_* u^a)(\phi_* v^b) = (\phi^* g_{ab})u^av^b. \quad (7.4-7)$$

这便证明了： $\forall u^a, v^a \in T\Sigma$ ， $h_{ab} = \phi^* g_{ab}$  成立；所以式(7.4-5)是诱导度规，很明显  $h_{ab}$  是对称的，即  $h_{ab} = h_{ba}$ 。

### 7.4.2.1 几条属性

叙述几条关于诱导度规  $h_{ab}$  的属性. 首先

$$h_{ab}n^a = 0 = h_{ab}n^b. \quad (7.4-8)$$

证明极易, 直接带入即完成. 其次  $\forall v^a \in T\Sigma$ , 有  $n_b v^b = 0$ , 进而有

$$h_{ab}v^b = (g_{ab} - \epsilon n_a n_b)v^b = g_{ab}v^b. \quad (7.4-9)$$

这说明  $\forall v^a \in T\Sigma$ , 用  $h_{ab}$  或  $g_{ab}$  升降指标是等价的. 继续进行相似计算,

$$h_a^b \stackrel{def}{=} h_{ac}g^{cb} = (g_{ac} - \epsilon n_a n_c)g^{cb} = \delta_a^b - \epsilon n_a n^b, \quad (7.4-10)$$

$$h^{ab} \stackrel{def}{=} g^{ac}h_{cd}g^{db} = g^{ac}(g_{cd} - \epsilon n_c n_d)g^{db} = g^{ab} - \epsilon n^a n^b, \quad (7.4-11)$$

$$h_{ac}h^{cb} = (g_{ac} - \epsilon n_a n_c)(g^{cb} - \epsilon n^c n^b) = \delta_a^b - \epsilon n_a n^b - \epsilon n_a n^b + n_a n_c n^c n^b = h_a^b. \quad (7.4-12)$$

由式(7.4-12)可见对于  $h_{ab}$  自身指标的升降来说, 用  $h_{ab}$  或  $g_{ab}$  升降指标是等价的.

### 7.4.2.2 投影算符

从诱导度规的定义式(7.4-5)可以看出,  $h_{ab}$  除了可以作用  $\mathfrak{X}(\Sigma)$  中矢量场, 还能与  $\mathfrak{X}(M)$  中矢量相互作用, 比如法空间矢量  $n^a$  (见式(7.4-8)). 以  $(1,1)$  型张量场  $T_d^c \in \mathfrak{T}_q^p(M)$  为例来说明  $h_{ab}$  还可以看成一种**投影算符**: 它将  $\mathfrak{T}_q^p(M)$  中张量场变成  $\mathfrak{T}_q^p(\Sigma)$  中张量场,

$$\tilde{T}_b^a = h_c^a h_b^d T_d^c. \quad (7.4-13)$$

一般说来把上式等号左端记成  $\tilde{T}_b^a$  便能与原来的  $T_b^a$  区分开来, 但超曲面 (以及广义相对论) 中通常会去掉那个波浪线, 直接用原来的符号; 在不引起误解的前提下, 我们也采用省略记号, 读者需熟悉这种记号方式. 经过  $h_{ab}$  投影的张量场不再有法空间分量, 比如

$$n_a \tilde{T}_b^a = n_a h_c^a h_b^d T_d^c = 0, \quad n^b \tilde{T}_b^a = n^b h_c^a h_b^d T_d^c = 0. \quad (7.4-14)$$

虽然通过 Gauss 公式(7.2-5)可以得到超曲面  $\Sigma$  上的 Levi-Civita 联络  $D_a$ , 但这多少有些不便; 用投影算符  $h_{ab}$  可以直接由  $M$  上的 Levi-Civita 联络  $\nabla_a$  得到  $D_a$ ; 仅以  $(1,1)$  型张量场  $T_c^b \in \mathfrak{T}_q^p(\Sigma)$  为例来说明,

$$D_{a'} T_c^{b'} = h_{a'}^a h_b^{b'} h_c^c \nabla_a T_c^b = h_{a'}^a h_b^{b'} h_c^c (D_a T_c^b + K_{ad}^b T_c^d - K_{ac}^d T_d^b) = h_{a'}^a h_b^{b'} h_c^c D_a T_c^b. \quad (7.4-15)$$

这是因为  $K_{bc}^a$  是法空间部分, 与投影算符缩并后恒为零.

从上面数个公式, 可以得到: 对于  $TM$  中张量必须用  $g_{ab}$  进行升降指标. 对于  $T\Sigma$  中张量可以用  $g_{ab}$  或  $h_{ab}$  进行升降指标, 两者效果相同.



我们已经证明了诱导度规  $h_{ab}$  是与联络  $D_a$  相容的（见定理7.2）；在超曲面中可通过式(7.4-15)再次证明它们相容。

$$\begin{aligned} D_{a'} h_{b'c'} &= h_{a'}^a h_{b'}^b h_{c'}^c \nabla_a h_{bc} = h_{a'}^a h_{b'}^b h_{c'}^c \nabla_a (g_{bc} - \epsilon n_b n_c) \\ &= -\epsilon n_b h_{a'}^a h_{b'}^b h_{c'}^c \nabla_a (n_c) - \epsilon n_c h_{a'}^a h_{b'}^b h_{c'}^c \nabla_a (n_b) \stackrel{7.4-8}{=} 0. \end{aligned} \quad (7.4-16)$$

上式说明了  $D_a$  与  $h_{bc}$  相互容许；但是  $\nabla_a$  与  $h_{bc}$  并不相互容许；当然  $D_a$  与  $g_{bc}$  也是相互容许的。下面证明  $D_a$  是无挠的， $\forall f \in C^\infty(\Sigma)$  有

$$(D_a D_b - D_b D_a) f = h_{a'}^{a'} h_{b'}^{b'} (\nabla_{a'} \nabla_{b'} - \nabla_{b'} \nabla_{a'}) f = 0. \quad (7.4-17)$$

我们也可以把式(7.4-15)当成  $D_a$  的定义式，即通过  $h_{ab}$  把联络  $\nabla_a$  从流形  $M$  投影到超曲面  $\Sigma$ （即  $D_{a'} T_{c'}^{b'} \stackrel{def}{=} h_{a'}^a h_{b'}^b h_{c'}^c \nabla_a T_c^b$ ）；采用这种方式定义的联络  $D_a$  依旧是无挠、容许的。

#### 7.4.2.3 度规矩阵元

在基矢场  $(e_\mu)^a (0 \leq \mu \leq m)$  下， $g_{ab}$  和  $h_{ab}$  的矩阵元是

$$g = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_{11} & \cdots & h_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & h_{m1} & \cdots & h_{mm} \end{pmatrix}; \quad g_{ij} \equiv h_{ij}. \quad (7.4-18)$$

上式说明在  $(e_\mu)^a (0 \leq \mu \leq m)$  下  $h_{ab}$  的行列式是退化的；只有在  $(e_i)^a (1 \leq i \leq m)$  下才是非退化。两个度规行列式的关系式

$$\det(g_{\mu\nu}) = \epsilon \cdot \det(g_{ij}) = \epsilon \cdot \det(h_{ij}). \quad (7.4-19)$$

同时还有（读者能明白为什么吗？）

$$g_{ab} g^{ab} = m + 1; \quad h_{ab} h^{ab} = m. \quad (7.4-20)$$

#### 7.4.3 超曲面之外曲率

对式(7.4-2) ( $n_a n^a = \epsilon$ ) 求流形  $M$  上的协变导数，有 ( $\forall X^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ )

$$0 \equiv \frac{1}{2} \nabla_X (g_{bc} n^b n^c) = g_{bc} n^b \nabla_X n^c \stackrel{7.2-16}{=} n_c D_X^\perp n^c - n_c S_{ne}^c X^e = n_c D_X^\perp n^c. \quad (7.4-21)$$

因为法空间是一维的，并且已知  $D_X^\perp n^c \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ ；所以由上式必然有

$$D_X^\perp n^c = 0, \quad \forall X^a \in \mathfrak{X}(\Sigma). \quad (7.4-22)$$

在微分几何中, 只涉及度规  $g_{ab}$  (也就是第一基本形式) 的内容称为内蕴几何学, 比如黎曼曲率只需度规本身, 常被称为内曲率; 还涉及第二基本形式  $K_{ab}^c$  的内容称为外蕴几何学, 所以  $K_{ab}^c$  也被称为外曲率.

设  $X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , Gauss 公式(7.2-5) 和 Weingarten 公式(7.2-16)变为

$$\nabla_X Y^a = D_X Y^a + K_{bc}^a X^b Y^c = D_X Y^a + \epsilon (K_{bc} X^b Y^c) n^a, \quad (7.4-23)$$

$$\nabla_X n^a = -S_{cb}^a n^c X^b. \quad (7.4-24)$$

Gauss 方程(7.4-23)的第二个等号是这样得到的: 因流形  $M$  的法空间是一维的, 则必有  $K_{bc}^a X^b Y^c \propto n^a$ ; 既然是正比关系, 我们可直接假设

$$(K_{bc} X^b Y^c) n^a \stackrel{def}{=} \epsilon K_{bc}^a X^b Y^c. \quad (7.4-25)$$

这样定义的  $K_{bc}$  是对称的 (即  $K_{bc} = K_{cb}$ , 见命题7.3). 既然法空间是一维空间, 我们把基矢 (即  $n^a$ ) 单拿出来, 其前面系数更容易处理; 这样做的目的主要是为了方便.

下面通过一个变换来导出  $K_{bc}$  的常用表达式;  $\forall X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , 我们把式(7.4-23)最左端进行一下角标替换, 并计算 (参考(7.4-10))

$$\nabla_X Y^a = g_c^a \nabla_X Y^c = h_c^a \nabla_X Y^c + \epsilon n_c n^a \nabla_X Y^c = h_c^a \nabla_X Y^c - \epsilon Y^c n^a \nabla_X n_c. \quad (7.4-26)$$

上式最后一步利用了: 因为  $Y^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,  $n^a \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ , 所以有  $n_c Y^c = 0$ . 同时, 前面已经叙述过  $h_c^a$  的作用之一便是投影, 所以  $h_c^a \nabla_X Y^c = D_X Y^a$ . 将上式和式(7.4-23)比对后可得

$$(K_{bc} X^b Y^c) n^a = -Y^c n^a \nabla_X n_c = -(Y^c X^b \nabla_b n_c) n^a. \quad (7.4-27)$$

$X^a, Y^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  的主要作用就是将  $K_{bc}$  限制在超曲面  $\Sigma$  的切空间取值, 这相当于增加了两次投影, 那么便有第一种表述方式 (最重要的).

**$K_{ab}$  的表达式之一** 同样称投影之后的  $K_{bc}$  为超曲面  $\Sigma$  第二基本形式或外曲率.

$$K_{ab} = -h_a^c h_b^d \nabla_c n_d = -D_a n_b = -\nabla_a n_b + \epsilon n_a n^c \nabla_c n_b. \quad (7.4-28)$$

增加投影算符  $h_a^c h_b^d$  后, 即使对于单张超曲面, 导数  $h_a^c h_b^d \nabla_c n_d$  也有意义; 否则 (对单张超曲面而言)  $\nabla_c n_d$  的定义可能有缺陷.

**$K_{ab}$  的表达式之二** 由式(4.1-31)易得流形  $M$  中度规场  $g_{ab}$  沿法矢量  $n^a$  的李导数

$$\mathcal{L}_n g_{ab} = g_{ac} \nabla_b n^c + g_{cb} \nabla_a n^c = \nabla_b n_a + \nabla_a n_b. \quad (7.4-29)$$

利用  $K_{ab} = K_{ba}$ , 由上式易得

$$K_{ab} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{ab} + \frac{\epsilon}{2} (n_a n^c \nabla_c n_b + n_b n^c \nabla_c n_a) = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab}. \quad (7.4-30)$$

第二个等号的推导如下，

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_n h_{ab} &= \mathcal{E}_n g_{ab} - \epsilon \mathcal{E}_n (n_a n_b) = \mathcal{E}_n g_{ab} - \epsilon n^c \nabla_c (n_a n_b) - \epsilon n_c n_b \nabla_a \overline{n^c} - \epsilon n_a n_c \nabla_b \overline{n^c} \\ &= -2K_{ab} + \epsilon (n_a n^c \nabla_c n_b + n_b n^c \nabla_c n_a) - \epsilon n_b n^c \nabla_c n_a - \epsilon n_a n^c \nabla_c n_b = -2K_{ab}.\end{aligned}$$

**$K_{ab}$  表达式之三** 我们已知  $\nabla_a$  是  $(M, g)$  的 Levi-Civita 联络；由定理7.2又知  $D_a$  是  $(\Sigma, h)$  的 Levi-Civita 联络；即

$$\nabla_X Y^a = X^b \partial_b Y^a + X^b Y^c \Gamma_{bc}^a(g), \quad D_X Y^a = X^b \partial_b Y^a + X^b Y^c \Gamma_{bc}^a(h). \quad (7.4-31)$$

由于  $D_X Y^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ ,  $n_a \in \mathfrak{X}^\perp(\Sigma)$ , 所以  $n_a \Gamma_{bc}^a(h) = 0$  一定成立. 由上式经简单比对, 可得  $\Gamma_{bc}^a(g) = \Gamma_{bc}^a(h) + \epsilon K_{bc} n^a$ ; 故有

$$K_{bc} = n_a \Gamma_{bc}^a(g) = \frac{1}{2} n^e \left( \frac{\partial g_{ce}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{eb}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^e} \right). \quad (7.4-32)$$

式(7.4-32)为  $K_{bc}$  的一个常用计算公式.

**标量外曲率** 我们还需定义第二基本形式的缩并, 它是一个标量场

$$K \stackrel{def}{=} h^{ab} K_{ab} = g^{ab} K_{ab} = -\nabla_a n^a = -\frac{1}{2} h^{ab} \mathcal{E}_n h_{ab}. \quad (7.4-33)$$

**形状因子** 由式(7.4-28)和(7.4-24)可得形状因子  $S_{nb}^a$  的表达式 (依形状因子定义, 可以看出它本身带有双重投影)

$$S_{nb}^a = -h_c^a h_b^d \nabla_d n^c = K_b^a. \quad (7.4-34)$$

## 7.5 超曲面二：应用

本节是上一节的续篇, 仍只讨论非零模超曲面.

### 7.5.1 超曲面正交性与 Frobenius 可积性

**定义 7.6** 设广义黎曼流形  $(M, g)$  上有超曲面  $\Sigma$ , 它可用  $\Phi = c$  (即式(7.4-1)) 来描述. 若存在非零  $\xi^a \in \mathfrak{X}(M)$  (类时、类空或零模) 使得  $\xi^a = f \cdot \nabla^a \Phi$  (非零  $f \in C^\infty(M)$ ) 成立, 则称  $\xi^a$  与  $\Sigma$  是超曲面正交的.

由超曲面正交性, 容易得到 ( $\xi_a = g_{ab} \xi^b$ )

$$\nabla_a \xi_b = \nabla_a (f \nabla_b \Phi) = (\nabla_a f) \nabla_b \Phi + f \nabla_a \nabla_b \Phi. \quad (7.5-1)$$

虽然这是正确的, 在这种形式下, 它不是一个特别方便的超曲面正交性特征表述. 我们把它变成一个更方便、更有用的可积性条件; 继续计算 (对下标取反对称运算; 注意 Levi-Civita 联络是无挠的: 以及  $\xi_{[c}\xi_{b]} = 0$ )

$$\nabla_{[a}\xi_{b]} = (\nabla_{[a}\ln f)\xi_{b]} \Rightarrow \xi_{[c}\nabla_a\xi_{b]} = 0. \quad (7.5-2)$$

反之, 若  $\xi^a$  满足  $\xi_{[c}\nabla_a\xi_{b]} = 0$ , 由 Frobenius 定理 3.21 可证明存在与  $\xi^a$  正交的超曲面  $\Sigma$ .

设有  $m+1$  维广义黎曼流形  $(M, g)$ , 其上有非零切矢量场  $\xi^a \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $M$  上有局部坐标系  $(U; x^\alpha)$ ,  $0 \leq \alpha \leq m$ . 按照 Frobenius 定理 3.21 可知, 存在  $m$  维积分流形  $\Sigma \subset M$  (即存在局部坐标是  $(V; x^i)$ ,  $1 \leq i \leq m$ ), 并且  $\forall p \in V \subset \Sigma \subset U$  使得

$$V = \text{Span} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial x^1} \right)^a, \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x^m} \right)^a \right\}, \quad (3.3-11)$$

的充分必要条件是:  $\xi^a$  满足 Frobenius 条件 (7.5-3), 即

$$(d\xi)_{ab} = \phi_a \wedge \xi_b, \quad \text{存在 } \phi_a \in \mathfrak{X}^*(V^\perp), \quad \xi_a = g_{ab}\xi^b; \quad (7.5-3a)$$

$$0 = (d\xi)_{ab} \wedge \xi_c; \quad (7.5-3b)$$

$$\xi_a = f(x^0)(dx^0)_a, \quad \text{存在 } f(x^0) \in C^\infty(V^\perp); \quad (7.5-3c)$$

$$0 = \xi_{[a}\nabla_b\xi_{c]}. \quad (7.5-3d)$$

其中式 (7.5-3d) 是一个新的条件, 它与式 (7.5-3b) 等价,

$$0 = (d\xi)_{ab} \wedge \xi_c = 3((d\xi)_{[ab]}\xi_{c]} = 3(2\nabla_{[a}\xi_{b]})\xi_{c]} = 6\xi_{[c}\nabla_a\xi_{b]}. \quad (7.5-4)$$

对于非零切矢量场  $\xi^a \in \mathfrak{X}(M)$  而言, 如果它满足 Frobenius 条件 (7.5-3d), 那么存在  $m$  维积分流形  $\Sigma$  ( $M$  的超曲面) 使得在局部上  $\Sigma$  仅由  $\{x^1, \dots, x^m\}$  描述 (见式 (3.3-11)), 而  $\xi_a = f(x^0)(dx^0)_a$  (见式 (7.5-3c)) 仅由第 0 坐标描述. 此时,  $\xi^a$  与  $\Sigma$  是超曲面正交的.

因此式 (7.5-3) (尤其是 (7.5-3d)) 是  $\xi^a$  与  $\Sigma$  是超曲面正交的充要条件.

Frobenius 定理只是说存在这样的坐标系  $\{x^0; x^1, \dots, x^m\}$ , 但未必容易找到.

## 7.5.2 诱导体积元

本小节只处理非零模超曲面的诱导体积元. 我们知道超曲面  $\Sigma$  有单位法矢量  $n^a$ , 满足  $n^a n_a = \epsilon$ , 超曲面的诱导度规为式 (7.4-5) ( $h_{ab} = g_{ab} - \epsilon n_a n_b$ ).  $n^a$  按照式 (7.4-3) 中方式来选择方向.

作为  $m+1$  维流形  $M$  的超曲面  $\Sigma$  自然是  $m$  维流形. 由于体积元本身就体现了流形定向, 我们从体积元角度再次表述超曲面诱导定向问题. 已知  $M$  的定向为 (取局部坐标系为  $(U; x^\alpha)$ , 参见式 (5.4-3))

$$\Omega_{a_0 a_1 \dots a_m} = \sqrt{(-)^s g} (dx^0)_{a_0} \wedge (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}, \quad g \equiv \det(g_{\alpha\beta}). \quad (7.5-5)$$

超曲面  $\Sigma$  是浸入流形  $M$  中的, 由定理2.37可知: 在局部上, 我们可假设在超曲面  $\Sigma$  中局部坐标  $x^0 \equiv 0$ , 它仅由  $\{x^1, \dots, x^m\}$  来描述. 设超曲面的单位法矢量  $n^a$  的局部坐标表示为

$$n^a = \sum_{\alpha=0}^m n^\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \right)^a. \quad (7.5-6)$$

根据假设, 有 (为避免误解, 写出求和范围)

$$g_{ab} n^a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b = \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha i} n^\alpha = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (7.5-7)$$

又因它是正交归一的, 利用上式, 有 ( $\epsilon$  见(7.4-2))

$$\epsilon = g_{ab} n^a n^b = g_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha 0} n^\alpha n^0 + \sum_{i=1}^m n^i \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha i} n^\alpha = n^0 \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha 0} n^\alpha. \quad (7.5-8)$$

由式(7.5-7)得

$$\sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha i} n^\alpha g^{i\beta} = 0 \Rightarrow \sum_{\mu=0}^m \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha\mu} n^\alpha g^{\mu\beta} = \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha 0} n^\alpha g^{0\beta} \stackrel{7.5-8}{=} g^{0\beta} \frac{\epsilon}{n^0}. \quad (7.5-9)$$

而上式左端是:  $\sum_{\mu=0}^m \sum_{\alpha=0}^m g_{\alpha\mu} n^\alpha g^{\mu\beta} = n^\beta$ . 由此式易得

$$n^0 = \pm \sqrt{\epsilon g^{00}}, \quad n^i = g^{0i} \frac{\epsilon}{n^0}. \quad (7.5-10)$$

由前面的论述可知  $\epsilon g^{00} > 0$ . 将式(7.5-10)带回式(7.5-7)得

$$g_{0i} = \frac{1}{n^0} \sum_{j=1}^m g_{ji} g^{0j} \frac{-\epsilon}{n^0} = -\frac{1}{g^{00}} \sum_{j=1}^m g_{ji} g^{0j}. \quad (7.5-11)$$

在局部坐标系为  $(U; x^\alpha)$  下, 流形  $M$  的度规行列式为

$$\begin{aligned} g &= \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} & \cdots & g_{0m} \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m0} & g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{00} + \frac{1}{g^{00}} \sum_{j=1}^m g_{j0} g^{0j} & 0 & \cdots & 0 \\ g_{10} & g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m0} & g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{g^{00}} \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mm} \end{vmatrix} \stackrel{7.5-10}{=} \frac{h}{\epsilon (n^0)^2}; \quad h \equiv \det(g_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq m. \end{aligned}$$

其中  $h$  是超曲面  $\Sigma$  的度规行列式. 由上式得到两个行列式间的关系式为

$$h = g \cdot \epsilon \cdot (n^0)^2, \quad h \equiv \det(g_{ij}) = \det(h_{ij}), \quad g \equiv \det(g_{\alpha\beta}). \quad (7.5-12)$$

作为流形  $M$  子空间的超曲面  $\Sigma$  的诱导体积元  $\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m}$  可表示为

$$\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m} = \phi^*(n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}). \quad (7.5-13)$$

我们分几种情形来证明此式.

首先, 对于正定度规,  $s = 0$ ,  $\epsilon = +1$ . 参考式(1.8-25)、(1.8-48), 由式(7.5-5)出发可计算  $n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}$ ; 然后再把它拉回到超曲面  $\Sigma$ , 得 (参考式(7.5-12))

$$\begin{aligned} \phi^*(n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}) &= \text{sign}(n^0) |n^0| \sqrt{g} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} \\ &= \text{sign}(n^0) \sqrt{h} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}. \end{aligned} \quad (7.5-14)$$

很明显, 上式右端是超曲面  $\Sigma$  的体积元.

其次, 广义闵氏时空中的类时超曲面, 此时  $s = 1$ ,  $\epsilon = +1$ . 同样由式(7.5-5)出发计算  $n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}$ ; 然后再把它拉回到超曲面  $\Sigma$ , 得

$$\begin{aligned} \phi^*(n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}) &= \text{sign}(n^0) |n^0| \sqrt{-g} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} \\ &= \text{sign}(n^0) \sqrt{-h} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}. \end{aligned} \quad (7.5-15)$$

因为类时超曲面的法矢量是类空的, 所以第 0 维坐标的切矢量不是类时的; 因此超曲面  $\Sigma$  的诱导度规仍是广义 Lorentz 度规, 其行列式是负的, 即  $h < 0$ .

最后, 广义闵氏时空中的类空超曲面, 此时  $s = 1$ ,  $\epsilon = -1$ ; 此时  $g_{00} < 0$  且  $g^{00} < 0$ . 同样由式(7.5-5)出发计算  $n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}$ ; 然后再把它拉回到超曲面  $\Sigma$ , 得

$$\begin{aligned} \phi^*(n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}) &= \text{sign}(n^0) |n^0| \sqrt{-g} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m} \\ &= \text{sign}(n^0) \sqrt{h} (dx^1)_{a_1} \wedge \dots \wedge (dx^m)_{a_m}. \end{aligned} \quad (7.5-16)$$

因为类空超曲面的法矢量是类时的, 所以第 0 维坐标的切矢量是类时的; 此时超曲面  $\Sigma$  中的诱导度规是正定的, 即  $h > 0$ .

综上, 正定度规、广义 Lorentz 度规下的超曲面  $\Sigma$  诱导体积元都可以用式(7.5-13)来表示. 流形  $M$  的定向与  $\text{sign}(n^0)$  无关, 但超曲面  $\Sigma$  的定向则由  $\text{sign}(n^0)$  决定, 它可能是正的, 也可能是负的.

容易验证超曲面  $\Sigma$  诱导体积元与度规  $h_{ab}$  适配, 即满足  $\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m} \hat{\Omega}^{a_1 \dots a_m} = (-)^{\hat{s}} m!$ , 其中  $\hat{s}$  是  $h_{ab}$  中特征值负数的个数,  $\hat{\Omega}^{a_1 \dots a_m} = h^{a_1 b_1} \dots h^{a_m b_m} \hat{\Omega}_{b_1 \dots b_m}$ .

### 7.5.3 散度定理

有了诱导体积元和诱导定向, 我们来探讨一下推广的 Gauss 散度定理.

**定理 7.7** 设有  $m+1$  维、已定向、广义黎曼流形  $(M, g)$ ,  $\Omega_{a_0 a_1 \dots a_m}$  是  $M$  上适配体积元, 为节省空间, 简记为  $\Omega$ ;  $N$  是  $M$  上带边嵌入子流形, 边界是超曲面  $\Sigma$ . 对于任意非零  $C^1$  切矢量场  $\xi^a \in TM$ , 有

$$\int_{i(N)} (\nabla_a \xi^a) \Omega = \int_{\Sigma} \xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m} = \pm \int_{\Sigma} \xi^b n_b \hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m}. \quad (7.5-17)$$

其中  $n^a$  是  $\Sigma$  的单位法矢量,  $\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m}$  是  $\Sigma$  的诱导体积元.

证明. 很明显  $\omega = \xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}$  是一个  $m$  阶外微分型式场, 求其外微分得,

$$d_{a_0} \omega = (m+1) \nabla_{[a_0} (\xi^b \Omega_{b|a_1 \dots a_m]}) \stackrel{5.4-7}{=} (m+1) (\nabla_{[a_0} \xi^b) \Omega_{b|a_1 \dots a_m]}. \quad (7.5-18)$$

因  $d\omega$  是  $m+1$  阶外型式场, 那么在  $m+1$  维流形  $M$  中它必然正比于体积元, 即

$$\begin{aligned} d_{a_0} (\xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}) &= h \cdot \Omega_{a_0 \dots a_m}, \quad \exists h \in C^\infty(M); \Rightarrow \\ (m+1) (\nabla_{[a_0} \xi^b) \Omega_{b|a_1 \dots a_m]} &= h \cdot \Omega_{a_0 \dots a_m}, \quad \text{两边同时缩并 } \Omega^{a_0 \dots a_m}; \Rightarrow \\ (m+1) (\nabla_{[a_0} \xi^b) \Omega_{b|a_1 \dots a_m]} \Omega^{a_0 a_1 \dots a_m} &= h \cdot \Omega_{a_0 a_1 \dots a_m} \Omega^{a_0 a_1 \dots a_m}, \quad \text{利用式(5.4-4); } \Rightarrow \\ (m+1) (-)^s m! (\nabla_{a_0} \xi^b) \delta_b^{a_0} &= h \cdot (-)^s (m+1)! \Rightarrow h = \nabla_b \xi^b. \end{aligned}$$

带回上式, 我们得到

$$d_{a_0} \omega = d_{a_0} (\xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}) = (\nabla_b \xi^b) \Omega_{a_0 a_1 \dots a_m}. \quad (7.5-19)$$

依据 Stokes–Cartan 定理3.29, 由上式可得

$$\int_{i(N)} (\nabla_b \xi^b) \Omega_{a_0 a_1 \dots a_m} = \int_{i(N)} d_{a_0} (\xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}) = \int_{\Sigma} \xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}. \quad (7.5-20)$$

定理证明过半, 下面证明后半部分. 因  $\xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m}$  是  $\Sigma$  上的微分型式场, 故它正比于  $\Sigma$  上的诱导体积元  $\hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m}$ , 即存在  $K \in C^\infty(\Sigma)$  使得下式成立 (利用式(7.5-13)),

$$\xi^b \Omega_{ba_1 \dots a_m} = K \hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m} = K n^b \Omega_{ba_1 \dots a_m} \xrightarrow[\text{体元}]{\text{缩并}} \xi^a = K n^a \Rightarrow K = \epsilon \xi^a n_a. \quad (7.5-21)$$

带回便可证明定理. 式中的“ $\pm$ ”与诱导定向相关, 可通过调节定向只取正号. ■

应用上面的定理可以给出二阶对称张量场  $T^{ab}$  的散度定理.  $\forall \xi^b \in \mathfrak{X}(M)$  有

$$(\nabla_a T^{ab}) \xi_b = \nabla_a (T^{ab} \xi_b) - \frac{1}{2} T^{ab} (\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) = \nabla_a (T^{ab} \xi_b) - \frac{1}{2} T^{ab} \mathcal{L}_\xi g_{ab}. \quad (7.5-22)$$

配上体积元, 取积分, 得

$$\int_{i(N)} (\nabla_a T^{ab}) \xi_b \Omega_{a_0 \dots a_m} = \pm \int_{\partial N} T^{ab} \xi_b n_a \hat{\Omega}_{a_1 \dots a_m} - \frac{1}{2} \int_{i(N)} T^{ab} \mathcal{L}_\xi g_{ab} \Omega_{a_0 \dots a_m}. \quad (7.5-23)$$

我们没有对闭曲面  $\Sigma$  的属性作细致地探讨, 尤其没有讨论零模边界; 可参考 [2].

#### 7.5.4 超曲面之 Gauss-Codazzi-Ricci 方程

我们将式(7.3-15)和(7.3-16)约化到超曲面情形; 注意  $K_{ik}^A$  中的上标  $A$  只能取  $O$ , 且  $K_{bc}^0 = K_{b'c'}^0 h_b^{b'} h_c^{c'} = K_{bc}$ , 再加上  $\epsilon = g_{00}$  (见式(7.4-5)), 可得

$${}^m R_{abcd} = h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} h_d^{d'} ({}^{m+1} R_{a'b'c'd'}) + \epsilon (K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{bc}). \quad (7.5-24)$$

$${}^{m+1}R_{jkl}^0 = K_{jl;k} - K_{jk;l} \Leftrightarrow {}^{m+1}R_{bcd}^a n_a = D_c K_{bd} - D_d K_{bc}. \quad (7.5-25)$$

Gauss 方程(7.5-24)所有分量指标都不能取法空间分量, 即第 0 分量不能取; 这个原则同样适用于 Codazzi 方程(7.5-25). 总这样声明多有不便, 在式(7.5-24)中, 我们加上了投影算符以保证只取黎曼曲率  $R_{abcd}$  的切分量; 约化后的第二基本形式  $K_{ab}$  本身就没有法分量, 无需再次投影.

由式(7.4-22)和式(7.2-23c)可知 Ricci 方程(7.3-17)在超曲面上是  $0 = 0$  的恒等式.

### 7.5.5 超曲面之爱因斯坦张量

通过缩并 Gauss 和 Codazzi 方程可以得到超曲面中两个常用方程式. 先缩并 Gauss 方程(7.5-24)可得超曲面  $\Sigma$  上的 Ricci 曲率,

$$\begin{aligned} {}^m R_{ac} &= h^{bd} ({}^m R_{abcd}) = h^{bd} h_a^{a'} h_b^{b'} h_c^{c'} h_d^{d'} \times {}^{m+1} R_{a'b'c'd'} + \epsilon h^{bd} (K_{ac} K_{bd} - K_{ad} K_{bc}) \\ &= {}^{m+1} R_{ac} - {}^{m+1} R_{ec} n_a n^e \epsilon - {}^{m+1} R_{af} n_c n^f \epsilon + {}^{m+1} R_{ef} n_a n_c n^e n^f \\ &\quad - {}^{m+1} R_{aecf} n^e n^f \epsilon + \epsilon (K_{ac} K - K_a^b K_{bc}). \end{aligned} \quad (7.5-26)$$

继续计算标量曲率

$${}^m R = h^{ac} ({}^m R_{ac}) = {}^{m+1} R - {}^{m+1} R_{ac} n^a n^c 2\epsilon + \epsilon (K^2 - K^{ab} K_{ab}). \quad (7.5-27)$$

从  $m+1$  维流形  $M$  上的爱因斯坦张量(5.2-15)出发, 利用式(7.5-27), 容易得到

$${}^{m+1} G_{ab} n^a n^b = {}^m R \frac{-\epsilon}{2} + \frac{1}{2} (K^2 - K^{ab} K_{ab}). \quad (7.5-28)$$

用  $g^{bd}$  缩并 Codazzi 方程(7.5-25),

$${}^{m+1} R_{abcd} n^a g^{bd} = g^{bd} D_c K_{bd} - g^{bd} D_d K_{bc} \Rightarrow {}^{m+1} R_{ac} n^a = D_c K - D_b K_c^b. \quad (7.5-29)$$

由爱因斯坦张量作运算, 得

$${}^{m+1} G_{ab} n^a h_c^b = {}^{m+1} R_{ab} n^a h_c^b - {}^{m+1} R g_{ab} n^a h_c^b \frac{1}{2} = {}^{m+1} R_{ab} n^a h_c^b. \quad (7.5-30)$$

结合式(7.5-29)和(7.5-30)可得爱氏张量的另一重要公式,

$${}^{m+1} G_{ab} n^a h_c^b = D_c K - D_b K_c^b. \quad (7.5-31)$$

式(7.5-28)和(7.5-31)的重要性在于: 它们构成了超曲面  $\Sigma$  上爱因斯坦引力场方程的一部分. 爱因斯坦张量的剩余分量不能仅由  $h_{ab}$  和  $K_{ab}$  来表述了.



## 7.6 超曲面三：相对论时空

本节将光滑流形  $(M, g)$  的维数限定在四维，则超曲面  $\Sigma$  是三维的，度规  $g$  是洛伦兹类型的  $(-+++)$ 。本小节拉丁字母表示  $1, 2, 3$ ；希腊字母表示  $0, 1, 2, 3$ 。

**定义 7.8** 流形  $M$  的切丛  $TM$  上存在一类时矢量场  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$ ，这一类时场将流形  $M$  分解为一族类空超曲面  $\{\Sigma_t\}$ ，整张超曲面  $\Sigma_t$  上的参数  $t$  是同一实数。这族超曲面中任意两张不同参数的超曲面没有交集，即  $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset, \forall t \neq t'$ 。流形  $M$  中任意一点都位于某张（且只在此张） $\Sigma_t$  上，即  $\{\Sigma_t\}$  能覆盖住流形  $M$ ， $M = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t$ 。

从纯粹数学角度来看任意四维闵氏流形  $(M, g)$ ，未必存在这样的分解，或者说需要满足一定条件才存在这样的类时矢量场，然后依据这个类时场将空间  $M$  划分成一族超曲面  $\Sigma_t$ ；寻找数学上的这些存在性条件（对物理学工作者来说）太过艰深。从物理学角度看，这样的分解一定存在，因为我们就生活在这样一个四维时空中，这个时空然后被  $1+3$  分解成时间和空间。

### 7.6.1 ADM 分解

类时场  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  自然是单参数的，参数是  $t$ ；我们约定它指向未来，即指向参数  $t$  增大的方向。一般情形下， $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  未必与超曲面  $\Sigma_t$  处处正交；假设类时矢量场  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  可分解为两个矢量场，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = Nn^a + S^a. \quad (7.6-1)$$

其中  $n^a$  是类空超曲面  $\Sigma_t$  的单位法矢量，所以有  $n^a n_a = -1$ ；标量场  $N$  称为时移函数 (lapse function)，矢量场  $S^a$  称为位移矢量场 (shift vector field)， $S^a$  切于类空超曲面  $\Sigma_t$ 。一般称这种分解方式为 ADM 分解<sup>[1]</sup>。很容易得到

$$(dt)_a = -\frac{1}{N}n_a. \quad \text{因为 } 1 = (dt)_a \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^a = -\frac{1}{N}n_a(Nn^a + S^a) = -n_a n^a = 1. \quad (7.6-2)$$

我们需要建立局部坐标系，类时矢量场  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  自然是坐标基矢之一，它的积分曲线（见 §2.10）是一条坐标线。依据它分层的每张超曲面  $\Sigma_t$  都是三维类空曲面，在每张超曲面上我们都选取三个线性无关的（即不在同一个二维超曲面内）类空矢量场；当然可以选三个正交归一的类空矢量场，但目前暂不做此要求。这四个坐标构成局部坐标系  $\{x^0 \equiv t, x^i\}$ ，基矢分别是  $\{(\frac{\partial}{\partial t})^a, (\frac{\partial}{\partial x^i})^a\}$ 。类时矢量场  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  的积分曲线与每一个  $\Sigma_t$  都有且只有一个交点，所有交点的三个类空坐标  $\{x^i\}$  自然取为相同的值；每张  $\Sigma_t$  上的参数  $t$  取同一值。

根据假设矢量场  $S^a$  是纯类空矢量场，切于  $\Sigma_t$ ；而  $n^a$  正交于  $\Sigma_t$ ，固有

$$S^0 = S^a(dt)_a = -\frac{1}{N}S^a n_a = 0. \quad (7.6-3)$$

因此

$$S^a = \sum_{i=1}^3 S^i \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a. \quad (7.6-4)$$

令  $S_a = g_{ab} S^b$ ,  $S_i = S_a \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a$ .

经计算可得度规场  $g_{ab}$  在局部坐标系  $\{x^0 \equiv t, x^i\}$  的分量表达式,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} S^i S_i - N^2 & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ S_2 & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ S_3 & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad g^{\mu\nu} = \frac{1}{N^2} \begin{pmatrix} -1 & S^1 & S^2 & S^3 \\ S^1 & N^2 g_{ij}^{-1} & - & S^i S^j \\ S^2 & & & \\ S^3 & & & \end{pmatrix}. \quad (7.6-5)$$

其中共轭度规右下角  $3 \times 3$  的矩阵元是  $g^{ij} = g_{ij}^{-1} - N^{-2} S^i S^j$ , 需要注意的是矩阵外面还有一个因子.

可求得单位法矢量在  $\{t, x^i\}$  的分量表达式

$$n^a = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^a - \frac{S^i}{N} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a; \quad n_a = -N(dt)_a = -N \nabla_a t. \quad (7.6-6)$$

诱导度规  $h_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$  在  $\{t, x^i\}$  的分量表达式为

$$h_a^b = ((dx^i)_a + S^i(dt)_a) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^b, \quad (7.6-7)$$

$$h_{ab} = S_k S^k (dt)_a (dt)_b + S_i ((dt)_a (dx^i)_b + (dt)_b (dx^i)_a) + g_{ij} (dx^i)_a (dx^j)_b. \quad (7.6-8)$$

请注意:  $g_{ij} \equiv h_{ij}$ ,  $g^{ij} \equiv h^{ij}$ ;  $1 \leq i, j \leq 3$ . 直接计算便可得到  $\det(h_{\mu\nu}) = 0$ ,  $g = \det(g_{\mu\nu}) = -N^2 \det(g_{ij}) = -N^2 \det(h_{ij})$ , 但  $h = \det(h_{ij}) \neq 0$ . 从而得到  $M$  体积元与  $\Sigma_t$  的诱导体积元之间的关系

$$n^a (\sqrt{-g} (dx^0)_a \wedge (dx^1)_b \wedge (dx^2)_c \wedge (dx^3)_d) = N \sqrt{h} (dx^1)_b \wedge (dx^2)_c \wedge (dx^3)_d. \quad (7.6-9)$$

有了上述这些表达式, 借助式(7.4-32), 可以给出外曲率  $K_{ab}$  分量的一个计算公式.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= n_\rho \Gamma_{ij}^\rho(g) = -N \Gamma_{ij}^0(g) = \frac{1}{2} n^\sigma \left( \frac{\partial g_{j\sigma}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{\sigma i}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{1}{2N} \left[ \left( \frac{\partial S_j}{\partial x^i} - S_l \Gamma_{ij}^l(h) \right) + \left( \frac{\partial S_i}{\partial x^j} - S_l \Gamma_{ij}^l(h) \right) - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} \right]. \end{aligned} \quad (7.6-10)$$

这是用 ADM 时移函数  $N$  和位移函数  $S^i$  表示的外曲率公式; 其中圆括号内的表达式 (比如  $\frac{\partial S_j}{\partial x^i} - S_l \Gamma_{ij}^l(h)$ ) 就是类空超曲面  $\Sigma_t$  上的协变导数.

### 7.6.2 时间导数

在适配坐标系中（见式(2.11-18)），李导数化为偏导数；ADM 分解后的坐标系就是一个适配坐标系，所有张量分量对参数  $t$  的偏导数都可以化作李导数。在 ADM 分解中，参量  $t$  可以看作“时间”；故张量场对切矢量场  $(\frac{\partial}{\partial t})^a$  的李导数可以看作对时间  $t$  的导数。

类空张量场  $T_{b...}^{a...} \in \mathfrak{T}_q^p(\Sigma_t)$  的李导数未必仍是类空张量场，我们给其增加数次投影，这样的李导数自然仍是类空张量场。

$$\dot{T}_{b...}^{a...} \equiv \tilde{\mathcal{L}}_{\partial_t} T_{b...}^{a...} \stackrel{def}{=} h_{a'}^a \cdots h_b^{b'} \cdots \mathcal{L}_{\partial_t} T_{b'...}^{a'...}. \quad (7.6-11)$$

可以证明如下重要公式

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\partial_t} T_{b...}^{a...} = \tilde{\mathcal{L}}_{Nn} T_{b...}^{a...} + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{S}} T_{b...}^{a...} = N \tilde{\mathcal{L}}_n T_{b...}^{a...} + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{S}} T_{b...}^{a...}, \quad \forall T_{b...}^{a...} \in \mathfrak{T}_q^p(\Sigma_t). \quad (7.6-12)$$

由于  $S^a$  在 ADM 分解下是纯类空矢量场，在李导数的角标中，将其记为  $\vec{S}$ 。式  $\tilde{\mathcal{L}}_{Nn} T_{b...}^a = N \tilde{\mathcal{L}}_n T_{b...}^a$  的证明较为繁琐，需先后计算  $\tilde{\mathcal{L}}_{Nn} T_{b...}^a$  和  $\tilde{\mathcal{L}}_n T_{b...}^a$ ，然后即可验证它们相等。有了此等式，也就证明了式(7.6-12)。

我们来计算超曲面上两个最基本张量的时间导数。首先是诱导度规  $h_{ab}$ ，

$$\dot{h}_{ab} = N \tilde{\mathcal{L}}_n h_{ab} + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{S}} h_{ab} \stackrel{7.4-30}{=} -2NK_{ab} + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{S}} h_{ab}. \quad (7.6-13)$$

其次是外曲率  $K_{ab}$  的时间导数，

$$\dot{K}_{ab} = -{}^4R_{cd} N h_a^c h_b^d + {}^3R_{ab} N - 2NK_a^c K_{cb} + NK K_{ab} - D_a D_b N + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{S}} K_{ab}. \quad (7.6-14)$$

证明此式需分为两步。首先，我们定义单位法矢量的四加速度（这是一个常用量），

$$\begin{aligned} A_a &\stackrel{def}{=} n^b \nabla_b n_a = -n^b \nabla_b (N \nabla_a t) = -(n^b \nabla_b N) \nabla_a t - N n^b \nabla_b \nabla_a t \\ &= (n^b \nabla_b N) \frac{n_a}{N} - N n^b \nabla_a \nabla_b t = n_a \frac{1}{N} n^b \nabla_b N + N n^b \nabla_a \frac{n_b}{N} \\ &= N^{-1} n_a n^b \nabla_b N + N^{-1} \nabla_a N = N^{-1} (n_a n^b + \delta_a^b) \nabla_b N = N^{-1} D_a N. \end{aligned} \quad (7.6-15)$$

注意到明显有： $n^a A_a = 0$ 。

其次，因  $\dot{K}_{ab} = N \tilde{\mathcal{L}}_n K_{ab} + \tilde{\mathcal{L}}_{\vec{S}} K_{ab}$ ，故只需计算  $\tilde{\mathcal{L}}_n K_{ab}$  即可。

$$\begin{aligned} -\tilde{\mathcal{L}}_n K_{ab} &= -h_a^c h_b^d (n^e \nabla_e K_{cd} + K_{ed} \nabla_c n^e + K_{ce} \nabla_d n^e) \\ &= h_a^c h_b^d (n^e \nabla_e (\nabla_c n_d + n_c A_d) + K_{ed} (K_c^e + n_c A^e) + K_{ce} (K_d^e + n_d A^e)) \\ &= h_a^c h_b^d (n^e (\nabla_c \nabla_e n_d - {}^4R_{fdec} n^f) + \cancel{n^e n_c \nabla_e A_d} - A_d n^e (\cancel{K_{ec}} + n_e A_c) + 2K_{ed} K_c^e \\ &\quad + \cancel{n_e K_{ed} A^e} + \cancel{n_d K_{ce} A^e}) \quad \text{其中 } n^e K_{ec} = 0, h_a^c n_c = 0 = h_b^d n_d \\ &= h_a^c h_b^d (\nabla_c (n^e \nabla_e n_d) - (\nabla_c n^e) \nabla_e n_d - {}^4R_{fdec} n^f n^e + A_d A_c + 2K_{ed} K_c^e) \\ &= h_a^c h_b^d (\nabla_c A_d - {}^4R_{fdec} n^f n^e + A_d A_c + K_{ed} K_c^e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{7.5-26}{=} h_a^c h_b^d (\nabla_c A_d + A_d A_c + K_{ed} K_c^e) + {}^4 R_{ef} h_a^f h_b^e - {}^3 R_{ab} - K_{ab} K + K_b^e K_{ea} \\
& = D_a(N^{-1} D_b N) + A_a A_b + {}^4 R_{ef} h_a^f h_b^e - {}^3 R_{ab} - K_{ab} K + 2K_b^e K_{ea} \\
& = N^{-1} D_a D_b N + {}^4 R_{ef} h_a^f h_b^e - {}^3 R_{ab} - K_{ab} K + 2K_b^e K_{ea}.
\end{aligned}$$

将上式带回, 即可证明式(7.6-14).

## 7.7 超曲面四: 零模

设有广义黎曼流形  $(M, g)$ , 其度规是广义洛伦兹度规  $((- + \cdots +))$ ; 它有零模超曲面  $\Sigma$ . 首先, 零模超曲面的  $\Sigma$  法矢量  $n^a$  自然是法丛  $T^\perp \Sigma$  中的矢量; 其次它还是零模的, 即  $n^a n_a = 0$ , 这说明  $n^a$  还属于切丛  $T\Sigma$ . 这种双重身份, 使得矢量场  $n^a$  即切于又法于超曲面  $\Sigma$ ; 这在非零模情形是不可能的!

### 7.7.1 法矢量

在 §7.4.1 中我们用标量函数  $\Phi = 0$  来描述超曲面, 这种方式同样适用于零模超曲面. 但此时  $g^{ab} \nabla_a \Phi \nabla_b \Phi = 0$ , 故我们没有类似于式(7.4-3)的描述法矢量的方式. 零模超曲面的法矢量自然不能归一化到  $\pm 1$ , 也就是说它没有单位法矢量的概念. 我们令

$$n^a \equiv \nabla^a \Phi. \quad (7.7-1)$$

把它当成零模超曲面的法矢量.

### 7.7.2 一般属性

**命题 7.9** 在广义洛伦兹度规下, 与类时矢量正交的矢量必定是类空矢量.

**证明.** 设在流形  $M$  上有类时矢量  $t^a$ , 将其选为第零基矢量, 即  $(e_0)^a = t^a$ ; 然后将这个基矢扩充为整个流形的基矢组  $(e_\mu)^a (0 \leq \mu \leq m)$ ; 假设这个基矢组是正交归一的, 这一点总是可以做到的. 在此正交归一基矢组  $(e_\mu)^a$  下, 度规是对角矩阵  $g = \text{diag}(-1, 1, \cdots, 1)$ .

假设非零矢量  $v^a$  与  $t^a$  正交, 即  $g_{ab} t^a v^b = 0$ . 在基矢组  $(e_\mu)^a$  下, 矢量  $v^a$  可以展开为  $v^a = v^\mu (e_\mu)^a$ , 则有

$$0 = g_{ab} t^a v^b = g_{ab} (e_0)^a v^\mu (e_\mu)^b = g_{0\mu} v^\mu = -1 \cdot v^0 \Rightarrow v^0 = 0. \quad (7.7-2)$$

再计算

$$g_{ab} v^a v^b = -(v^0)^2 + \sum_{i=1}^m (v^i)^2 = \sum_{i=1}^m (v^i)^2 > 0. \quad (7.7-3)$$

上式说明矢量  $v^a$  是类空矢量. ■

这个命题只在广义洛伦兹度规下成立；比如在度规  $g = \text{diag}(-1, -1, +1, +1)$  下便可举出反例。

因广义闵可夫斯基空间的矢量只分为类时、类空和零模的，故由命题7.9必有推论，

**推论 7.10** 在广义洛伦兹度规下，类时矢量与零模矢量的内积不为零，两者不正交！

**推论 7.11** 切于零模超曲面  $\Sigma$  的矢量不能是类时的，只能是类空的或者是零模的。

令广义闵可夫斯基流形  $M$  的基底是正交归一的；那么必有一基底是类时的（否则  $M$  的度规就变成正定的了）。设流形  $M$  中有类时超曲面  $\Sigma$ ，它的法矢量是类空的；那么这个类时基底必然切于类时超曲面  $\Sigma$ 。因此可以得到结论：类时超曲面  $\Sigma$  每一点都有类时矢量切于它。

**命题 7.12** 在广义洛伦兹度规下，超曲面  $\Sigma$  每点都有零模切矢量并且没有类时切矢量，那么  $\Sigma$  必定是零模超曲面。

**证明** . 用反证法。假设  $\Sigma$  是类时的，与上面结论矛盾！

再假设  $\Sigma$  是类空的，那么它的法矢量  $t^a$  是类时的；而切于  $\Sigma$  的矢量必定正交于  $t^a$ 。命题7.9告诉我们切于  $\Sigma$  的矢量都是类空的，不可能是零模的！这与命题中的条件（每点都有零模切矢量）矛盾！ ■

**命题 7.13** 在广义洛伦兹度规下，设有零模矢量  $\xi^a, \eta^a \in \mathfrak{X}(M)$ ；如果  $g_{ab}\xi^a\eta^b = 0$ ，那么必有  $\xi^a \propto \eta^a$ 。

**证明** . 选正交归一基矢组  $(e_\mu)^a$ ，度规是对角矩阵  $g = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ 。不失一般性，假设在上述基底上，两个零模矢量的分量表达是为

$$\xi = (\kappa, \kappa, 0, \dots, 0), \quad \text{通过旋转基矢, 总可以做到此点;} \quad (7.7-4)$$

$$\eta = (\eta^0, \eta^1, \dots, \eta^m), \quad \text{其中 } -(\eta^0)^2 + \sum_{i=1}^m (\eta^i)^2 = 0. \quad (7.7-5)$$

将  $g_{ab}\xi^a\eta^b = 0$  用上述分量展开，有

$$g_{ab}\xi^a\eta^b = -\kappa\eta^0 + \kappa\eta^1 \stackrel{?}{=} 0. \quad (7.7-6)$$

上式只有在  $\xi^a \propto \eta^a$  情形下才可能等于零。 ■

类时矢量与零模矢量不正交；与零模矢量  $\xi^a$  正交的零模矢量只能是  $f \cdot \xi^a (f \in C^\infty(M))$ ；类空矢量可以与零模矢量正交，且没有太多限制。由此可得如下命题，

**命题 7.14** 在广义洛伦兹度规下，有一零模超曲面  $\Sigma$ ，它的法矢量是  $n^a$ ；那么切于  $\Sigma$  的矢量场只能是类空矢量场，或者是  $f \cdot n^a (f \in C^\infty(M))$ 。

**例 7.15** 在广义闵氏流形  $(\mathbb{R}^{m+1}, \eta)$  中至少包含两个线性无关的零模切矢量。

设此流形有正交归一基矢组  $\{(e_\alpha)^a\}$ , 其中有 (且仅有一个) 类时基矢  $(e_0)^a$ , 其余基矢  $(e_i)^a$  ( $1 \leq i \leq m$ ) 是类空的. 不难验证  $(e_0)^a \pm (e_1)^a$  是两个线性无关的零模矢量.

其实  $(e_0)^a \pm (e_i)^a$  都是零模矢量, 且当  $i$  不同时线性无关. 我们仅验证  $(e_0)^a + (e_1)^a$  和  $(e_0)^a + (e_2)^a$  线性无关性; 假设两者线性相关, 即存在非零实常数  $\lambda$  使得

$$\begin{aligned} (e_0)^a + (e_1)^a &= \lambda((e_0)^a + (e_2)^a) \Rightarrow \\ \eta_{ab}((e_0)^a + (e_1)^a)((e_0)^b + (e_1)^b) &= \eta_{ab}\lambda((e_0)^a + (e_2)^a)((e_0)^b + (e_1)^b) \Rightarrow 0 = \lambda(-1). \end{aligned}$$

与  $\lambda \neq 0$  的假设矛盾, 故两者线性无关.

读者需注意零模矢量是可以作为基矢的. 比如对于流形  $(\mathbb{R}^2, \eta)$  而言, 我们可以选取  $\{(e_0)^a, (e_1)^a\}$  当基矢, 也可以选取线性无关的零模矢量组  $\{(e_0)^a \pm (e_1)^a\}$  当基矢. ■

### 7.7.3 零模测地线

我们先计算下式

$$n^b \nabla_b n_a = (\nabla^b \Phi) \nabla_b \nabla_a \Phi = (\nabla^b \Phi) \nabla_a \nabla_b \Phi = \frac{1}{2} \nabla_a (\nabla^b \Phi \nabla_b \Phi). \quad (7.7-7)$$

因超曲面是零模的, 故  $\nabla^b \Phi \nabla_b \Phi = 0$ ; 它的梯度也是零模的, 有 (将指标升上来)

$$n^b \nabla_b n^a = \kappa n^a. \quad (7.7-8)$$

这正是测地线方程的一般形式 (见测地线一章开头论述), 称为非仿射参数化测地线. 因  $n^a$  也是切于超曲面  $\Sigma$  的, 故可以把超曲面  $\Sigma$  看成由零测地线生成的, 也就是  $\Sigma$  是由  $n^a$  的积分曲线构成.

### 7.7.4 诱导“度规”

设流形  $(M, g)$  有零模超曲面  $\Sigma$ , 其零模法矢量  $n^a$  具有双重身份, 它既是  $\Sigma$  的法矢量又是  $\Sigma$  的切矢量. 首先, 我们把  $n^a$  看成法矢量, 那么  $\forall u^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ , 有

$$g_{ab} n^a u^b = 0. \quad (7.7-9)$$

根据法矢量与切矢量正交, 可得此式为零. 然而,  $n^a$  的另一身份是:  $n^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ . 当用这个身份来看时, 诱导度规是 (注意  $\iota_* u^a = u^a$ ,  $\forall u^a \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ )

$$h_{ab} n^a u^b = (\iota^* g_{ab}) n^a u^b = g_{ab} (\iota_* n^a) (\iota_* u^b) = g_{ab} n^a u^b \stackrel{7.7-9}{=} 0. \quad (7.7-10)$$

可见诱导“度规”  $h_{ab}$  是退化的, 它不能称为真正的度规.

## 第七章参考文献

- [1] ARNOWITT R, DESER S, MISNER C W. The dynamics of general relativity[J]. General Relativity and Gravitation, 2008, 40(9): 1997-2027. DOI: [10.1007/s10714-008-0661-1](https://doi.org/10.1007/s10714-008-0661-1) (引用页: 215).
- [2] EZIN J P, HASSIROU M, TOSSA J. Divergence theorem for symmetric (0,2)-tensor fields on a semi-Riemannian manifold with boundary[J]. Kodai Mathematical Journal, 2007, 30(1): 41-54. DOI: [10.2996/kmj/1175287620](https://doi.org/10.2996/kmj/1175287620) (引用页: 213).
- [3] O'NEILL B. Semi-Riemannian Geometry With Applications to Relativity[M]. US: Academic Press, 1983 (引用页: 192).
- [4] POISSON E. A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics[M]. UK: Cambridge University Press, 2007 (引用页: 192).
- [5] 白正国, 沈一兵, 水乃翔, 等. 黎曼几何初步[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2004 (引用页: 192).
- [6] 陈维桓, 李兴校. 黎曼几何引论 (上) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2002 (引用页: 192).

## 第八章 李群初步

李群是由挪威数学家 Sophus Lie 最早研究的；它是一类重要的微分流形，其线性化后便是李代数。李群内容十分丰富，我们不可能详细叙述整个理论，只能介绍一些基本概念、重要定理。详尽论述可参考文献 [2-3,6] 相应章节；所有忽略的定理证明可在上述文献中查到。由于抽象指标记号对于有较多缩并、求导的运算较为合适，而李群中较少用到这类运算；所以本章不用抽象指标，而采用 §1.7 记号。

### 8.1 李群与李代数定义

**定义 8.1** 设  $G$  是一个非空集合，如果 (1)  $G$  是一个群；(2)  $G$  是  $m$  维光滑流形；(3) 群乘法和求逆是  $C^\infty$  可微的，即：映射  $gh$  和  $g^{-1}$  是  $G$  上的可微映射，其中  $\forall g, h \in G$ 。则称  $G$  是一个  $m$  维李群。李群维数是指它作为流形的维数。

如果上述条件只在  $G$  的局部开集  $U \subset G$  (需包含单位元，即  $e \in U$ ) 成立，那么称  $U$  是局部李群。

如果李群的拓扑结构是紧致的 (见定义 1.13)，则称之为紧致李群。

**定义 8.2** 设  $\mathcal{G}$  是数域  $\mathbb{F}$  上的  $m$  维线性空间， $\forall X, Y \in \mathcal{G}$ ，有  $\mathcal{G}$  中唯一一个元素  $[X, Y]$  与之对应 (封闭性)， $[X, Y]$  称为换位子或李积，并且李积满足如下性质，

- (1) 反对称性： $[X, Y] = -[Y, X]$ ；
- (2) 双  $\mathbb{F}$ -线性： $[X + kY, Z] = [X, Z] + k[Y, Z]$ ，常常省略前缀“ $\mathbb{F}$ -”；
- (3) Jacobi 恒等式： $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ 。

其中  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{G}$ ， $\forall k \in \mathbb{F}$ ，则称  $\mathcal{G}$  是一个  $m$  维李代数。李代数维数是指它作为线性空间的维数。

在同构意义下，紧致李群的李代数称为紧致李代数。

由性质 (1) 和 (2) 可知，李积对第二个因子也是线性的，即李积是双线性的，

$$[Z, X + kY] = -[X + kY, Z] = -[X, Z] - k[Y, Z] = [Z, X] + k[Z, Y]. \quad (8.1-1)$$

**定义 8.3** 设有李代数  $\mathcal{G}$ ， $\mathcal{H}$  是它的子集；如果  $\forall \mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in \mathcal{H}$  有  $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] \in \mathcal{H}$ ，那么称  $\mathcal{H}$  是  $\mathcal{G}$  的李子代数。



**定义 8.4** 设有李代数  $\mathcal{G}$  及其子代数  $\mathcal{H}$ , 如果  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \in \mathcal{H}, \forall \mathfrak{g} \in \mathcal{G}, \forall \mathfrak{h} \in \mathcal{H}$ ; 则称  $\mathcal{H}$  是  $\mathcal{G}$  的理想 (ideal)。

李代数中理想的概念与群理论中正规子群 (见定义1.23) 概念基本相当。

李群与李代数的关系可见 §8.4.1 的几个定理。

**定义 8.5** 设有李群  $G$  及其李代数  $\mathcal{G}$ 。如果  $G$  不含有正规李子群 (除群  $G$  本身和单位元  $e$  构成的子群之外), 并且  $G$  本身不是可对易群, 则称  $G$  是单李群 (英文是 simple, 也译为“单纯”)。如果  $G$  不含有可对易正规李子群 (除单位元  $e$  构成的子群之外), 则称  $G$  是半单李群 (semi-simple)。

如果  $\mathcal{G}$  不含有理想 (除  $\mathcal{G}$  本身和零元  $\{0\}$  构成的理想之外), 则称  $\mathcal{G}$  是单李代数。如果  $\mathcal{G}$  不含非零可对易理想, 则称  $\mathcal{G}$  是半单李代数。

**一维李代数** 一维李代数  $\mathcal{G}$  非常简单, 可任选一个非零矢量  $\mathfrak{g} \in \mathcal{G}$  作为此李代数的基矢 (读者请注意, 李代数本身是一个线性空间); 那么  $\forall \mathfrak{h} \in \mathcal{G}$  都可以表示成它的倍数, 即  $\mathfrak{h} = c\mathfrak{g}$ 。根据李代数定义8.2可知:  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] = [c\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = c[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$ 。即它们是可对易的, 这说明所有的一维李代数都是可对易代数 (Abel 代数)。任何形式的一维李代数都是同构的 (定义见 §8.4.1); 换句话说, 在同构意义下只有一个一维李代数。

依照定义, 一维李代数是单纯李代数; 而维数大于 1 的对易李代数一定不是单纯李代数。因此, 除了一维李代数外, 单纯李代数都是不可对易的。

一维李代数是单纯的, 并且它不是半单纯的; 这是唯一的不是半单却是单李代数的例子。除了一维李代数之外, 所有单李代数都是半单的。

今后, 我们谈及单纯或半单纯时总假定李代数的维数大于 1, 即从 2 维谈起。

## 8.2 李群、李代数例子

### 8.2.1 李群例子

先叙述一个极为简单的例子,

**例 8.6** 验证实数域  $\mathbb{R}$  关于加法构成一维李群。

首先,  $\mathbb{R}$  是一维光滑流形。其次, 对于群乘法 (已选为实数加法),  $\mathbb{R}$  中元素具有封闭性、可结合性; 数字 0 是单位元; 任意实数  $r$  的相反数  $-r$  是其逆元。综上  $\mathbb{R}$  是群。很明显对于实数加法 (群乘法) 和取负 (群元求逆) 运算是  $C^\infty$  运算, 即无穷多次可微。因加法可交换, 故实数群是可对易李群。

同理,  $\mathbb{R}^m$  关于加法构成  $m$  维李群; 一般记作  $(\mathbb{R}^m, +)$ 。

我们用一个具体的例子来再次解释一下什么叫作群运算  $C^\infty$  可微性。

**例 8.7** 一维环群  $T^1$  可以看作  $\mathbb{R}^2$  中的一个圆周  $S^1 = \{e^{2\pi it}\}$ , 在  $S^1$  上的乘法和求逆运算分别是

$$e^{2\pi it} \cdot e^{2\pi is} = e^{2\pi i(t+s)}; \quad (e^{2\pi it})^{-1} = e^{-2\pi it}.$$

很明显上述两个运算的函数都是  $C^\infty$  可微的, 这便是定义8.1中  $C^\infty$  可微的具体示例。由此可见  $T^1$  是个一维交换李群。

一维环群  $T^1$  同构于商群  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 。高维环群可以看作一维环群的直积  $T^m = T^1 \times \cdots \times T^1 \cong \mathbb{R}^m/\mathbb{Z}^m$ 。

从例8.6和8.7可知: 李代数相同, 它们的李群未必微分同胚。两者李代数相同, 但例8.6中李群是非紧致的, 例8.7中李群是紧致的, 两者不可能微分同胚。

**例 8.8** 李群  $G$  有两个常用的光滑同胚映射。设  $g \in G$ , 令

$$L_g(x) = g \cdot x, \quad \forall x \in G. \quad \text{左移动} \quad (8.2-1)$$

$$R_g(x) = x \cdot g, \quad \forall x \in G. \quad \text{右移动} \quad (8.2-2)$$

这两个映射都是光滑双射, 它们逆映射分别是

$$L_g \circ L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} \circ L_g = \text{id} = L_g \circ L_g^{-1} = L_g^{-1} \circ L_g, \quad (8.2-3)$$

$$R_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ R_g = \text{id} = R_g \circ R_g^{-1} = R_g^{-1} \circ R_g. \quad (8.2-4)$$

**例 8.9 李群直积。** 设有李群  $G$  和  $H$ , 在积流形  $G \times H$  (见 §2.2.2) 上定义如下群运算

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1 g_2, h_1 h_2), \quad (g, h)^{-1} \stackrel{\text{def}}{=} (g^{-1}, h^{-1}). \quad (8.2-5)$$

其中  $\forall g, g_1, g_2 \in G; \forall h, h_1, h_2 \in H$ 。这样定义的群乘法与求逆运算都是无穷阶可微的, 故  $G \times H$  是李群, 称为李群  $G$  和  $H$  的直积。并且  $\dim(G \times H) = \dim G + \dim H$ 。

**例 8.10** 一般线性群  $GL(m, \mathbb{F})$ 。

**矩阵形式:** 全体可逆、 $\mathbb{F}$  数值、 $m$  维矩阵构成一个集合, 并取矩阵的乘法为群乘法, 则此集合构成一个群, 称为  $\mathbb{F}$  值一般线性群, 记为  $GL(m, \mathbb{F})$ 。先验证, 它是一个群。首先, 多个可逆矩阵相乘后还是可逆矩阵, 乘法具有封闭性、结合性。其次, 取单位矩阵为  $GL(m, \mathbb{F})$  的单位元。最后, 可逆矩阵  $T$  的逆矩阵一定是存在的, 取群元  $T$  的逆元是逆矩阵  $T^{-1}$ , 很明显  $T^{-1} \in GL(m, \mathbb{F})$ 。这便验证了  $GL(m, \mathbb{F})$  是一个群。

$GL(m, \mathbb{F})$  的矩阵元可以排成一个  $m^2$  的列矢量, 它同构于  $\mathbb{F}^{m^2}$ , 因而它有流形  $\mathbb{F}^{m^2}$  的光滑结构; 进而它也是光滑流形。

设有  $GL(m, \mathbb{F})$  中两个元素  $A = (a_{ij}^j), B = (b_{ij}^j)$ , 它们的乘积是  $(A \cdot B)_{ij}^j = \sum_k a_{ik}^j b_{kj}^k$ , 这个运算只涉及数的乘法和加法, 自然是  $C^\infty$  可微的。矩阵  $A$  的逆是  $(A^{-1})_{ij}^j = \tilde{A}_{ij}^j / \det A$ , 其中  $\tilde{A}_{ij}^j$  是矩阵  $A$  中元素  $a_{ij}^j$  的代数余子式,  $\det A$  是其行列式; 代数余子式和行列式运算

只涉及数的乘法和加法, 然后是两者相除, 自然也是  $C^\infty$  可微的。这便说明了群  $GL(m, \mathbb{F})$  中的群元乘法和群元逆运算都是  $C^\infty$  可微的, 所以群  $GL(m, \mathbb{F})$  是  $m^2$  维李群。

**线性变换形式:** 设有数域  $\mathbb{F}$  上  $m$  维线性空间  $V$ , 其上全体可逆线性变换构成集合  $GL(V)$ , 群乘法定义为两个可逆线性变换的相继作用。多个可逆线性变换的相继作用仍是可逆线性变换, 同时这种相继作用满足结合律。恒等线性变换自然属于  $GL(V)$ 。因此,  $GL(V)$  构成一个群。

取  $V$  的一个基底  $e_i$ , 则可逆线性变换在此基底上双射于一个可逆矩阵, 那么  $GL(V)$  同构于  $GL(m, \mathbb{F})$ 。两个可逆线性变换的相继作用也双射于可逆矩阵乘法, 恒等线性变换双射于单位矩阵。可见  $GL(V)$  群与李群  $GL(m, \mathbb{F})$  是  $m^2$  同构, 也是一个李群。当作基底变换时, 可逆矩阵之间相差一个合同变换, 合同变换不影响光滑性; 因此微分结构与基底选择无关。

这是一般线性群的两种表述方式。 ■

### 8.2.2 李代数例子

**命题 8.11** 试证明: 定义8.2中性质 (1) 等价于  $[X, X] = 0$ 。

证明过程并不难, 留给读者当练习。

设李代数  $\mathfrak{g}$  的一组基为  $X_1, \dots, X_m$ , 由于李积满足封闭性, 所以李积一定可以用这个基矢展开, 即有

$$[X_i, X_j] = c_{ij}^k X_k, \quad 1 \leq i, j, k \leq m. \quad (8.2-6)$$

其中  $c_{ij}^k$  称为李代数  $\mathfrak{g}$  的**结构常数**。很明显, 定义8.2中性质 (1) 和 (3) 变为

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \quad (8.2-7)$$

$$c_{ij}^s c_{sl}^k + c_{jl}^s c_{si}^k + c_{li}^s c_{sj}^k = 0. \quad (8.2-8)$$

不同李代数的结构常数一般是不同的。同一个李代数在不同基矢下, 结构常数也可能不同。

对同一李代数  $\mathfrak{g}$ , 它还有另一组基  $Y_1, \dots, Y_m$ , 基矢间变换关系为

$$Y_i = X_s a_{.i}^s. \quad (8.2-9)$$

矩阵  $(a_{.i}^s)$  当然是可逆的, 其逆记为  $b_{.s}^i$ 。如果有

$$[Y_i, Y_j] = \tilde{c}_{ij}^k Y_k. \quad (8.2-10)$$

那么可以得到

$$\tilde{c}_{ij}^k Y_k = [Y_i, Y_j] = [a_{.i}^s X_s, a_{.j}^t X_t] = a_{.i}^s a_{.j}^t c_{st}^r X_r = a_{.i}^s a_{.j}^t b_{.r}^k c_{st}^r Y_k. \quad (8.2-11)$$

由此可以得到不同基矢下, 结构常数的变换关系是

$$\tilde{c}_{ij}^k = a_{.i}^s a_{.j}^t b_{.r}^k c_{st}^r = a_{.i}^s a_{.j}^t (b_{.r}^k)^T c_{st}^r. \quad (8.2-12)$$

由上式可以看出, 结构常数  $c_{ij}^k$  服从 (1, 2) 型张量的变换规则。

**例 8.12**  $\mathbb{R}^3$  中的叉乘构成李代数。设有  $\mathbb{R}^3$  中三个矢量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ , 定义李积为  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{u} \times \mathbf{v}$ 。很明显, 叉乘符合定义 8.2 中性质 (1) 和 (2)。对于性质 (3), 有

$$\begin{aligned} & [\mathbf{u}, [\mathbf{v}, \mathbf{w}]] + [\mathbf{v}, [\mathbf{w}, \mathbf{u}]] + [\mathbf{w}, [\mathbf{u}, \mathbf{v}]] = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \mathbf{v} \times (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) + \mathbf{w} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \\ & = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{w})\mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u})\mathbf{w} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{v})\mathbf{u} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v} = 0. \end{aligned}$$

这说明由叉乘定义的李积满足 Jacobi 恒等式, 所以它是一个 (实) 李代数。

**例 8.13** 设  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$  是复数域上  $m \times m$  矩阵全体构成的集合, 显然这是一个  $m^2$  维的线性空间。  $\forall X, Y \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ , 定义李积为  $[X, Y] \stackrel{\text{def}}{=} XY - YX$ , 即两矩阵相乘之差。容易验证此定义满足李代数定义 8.2 中的三条性质, 因此  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$  是  $m^2$  维复李代数。

设  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  是实数域上  $m \times m$  矩阵全体构成的集合; 同理, 它是  $m^2$  维实李代数。

$\mathfrak{gl}(m)$  是李群  $GL(m)$  的李代数, 见例题 8.19。

### 8.3 左不变切矢量场

李群集几何与代数性质于一身难于研究, 把李群线性化得到一个有限维线性空间来代替它, 通过对这个线性空间的研究便可了解诸多李群知识; 这个线性空间就是李代数。

左移动  $L_g$  是光滑同胚, 它诱导出单位元  $e$  附近的线性同构映射  $L_{g*e} : T_e G \rightarrow T_g G$ , 其中  $L_{g*e}$  下标中星号后面的  $e$  表示被作用对象是单位元的切空间; 而元素  $e$  还可以换成其它群元, 比如  $h$ ,  $L_{g*h}$  代表映射从  $T_h G$  到  $T_{gh} G$  的线性映射。这样写可能会令人误解为  $g$  与  $e$  (或  $h$ ) 的群乘法, 所以我们将其简记为  $L_{g*}$ , 然后根据它所作用对象来判断是哪个空间。

也存在通过右不变切矢量场来阐述本节理论的方式, 见 [5]<sup>§6.1</sup>。

#### 8.3.1 两点间矢量变换

$\forall X \in T_e G$ , 借助左移动  $L_g$  在  $G$  上产生一个切矢量场  $\tilde{X}$ ,

$$\tilde{X}(g) = L_{g*} X, \quad \forall g \in G. \quad (8.3-1)$$

因  $L_g$  是双射, 当  $g$  遍历整个李群  $G$  时,  $\tilde{X}$  便是微分流形  $G$  上的一个切矢量场。当一组  $X_i \in T_e G$  构成线性空间  $T_e G$  的基底时, 左移动后的相应全体  $\tilde{X}_i$  也构成微分流形  $G$  切丛  $TG$  的基底。

我们将李群  $G$  上的群乘法记为

$$\varphi(g_1, g_2) = g_1 \cdot g_2, \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (8.3-2)$$

取单位元  $e$  附近的线性空间  $T_e G$  局部坐标为  $(U; x^i)$ , 再取  $g$  附近的线性空间  $T_g G$  局部坐标为  $(V; z^\alpha)$ 。  $\varphi$  是光滑映射, 利用它的连续性, 适当缩小  $U$ , 存在  $g$  的小邻域  $V_1 \subset V$ , 使

得  $\varphi(V_1 \times U) \subset V$ , 并记  $y^\alpha = z^\alpha|_{V_1}$ 。这样, 群乘法  $\varphi$  可用局部坐标表示为

$$z^\alpha = \varphi^\alpha(y^1, \dots, y^m, x^1, \dots, x^m), \quad \{y^j\} \subset V_1, \{x^j\} \subset U, \quad 1 \leq \alpha, j \leq m. \quad (8.3-3)$$

很明显,  $\varphi^\alpha$  是自变量  $y^j, x^j$  的  $C^\infty$  函数。

$\forall X \in T_e G$ , 在  $U$  中都存在一条光滑曲线  $\gamma(t)$ ,  $-\epsilon < t < \epsilon$  使得

$$\gamma(0) = e, \quad \gamma'(0) = X. \quad (8.3-4)$$

读者需要注意满足上述条件的曲线不止一条, 它们都过  $e$  点且在此点相切, 并且切矢量都相等; 在  $e$  点局部此条曲线是唯一的, 但远离  $e$  后可能不同。左移动可以把整条曲线  $\gamma(t)$ ,  $-\epsilon < t < \epsilon$  移动到  $g$  点, 并且在  $g$  的切矢量是

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \cdot \gamma(t)) \stackrel{2.5-8}{=} L_{g*} \gamma'(0) = L_{g*} X = \tilde{X}(g). \quad (8.3-5)$$

设  $\gamma(t)$  的坐标是  $x^i(t)$ , 于是

$$X = \gamma'(0) = \frac{dx^i(0)}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} \Leftrightarrow X^a = \frac{dx^i(0)}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)^a. \quad (8.3-6)$$

那么,  $\tilde{X}(g)$  的坐标表达式为

$$\begin{aligned} \tilde{X}(g) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (g \cdot \gamma(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \varphi^\alpha(y^1, \dots, y^m, x^1(t), \dots, x^m(t)) \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \right) \\ &= \frac{\partial \varphi^\alpha(y, x)}{\partial x^j} \frac{dx^j(0)}{dt} \frac{\partial}{\partial y^\alpha}. \end{aligned} \quad (8.3-7)$$

从上式可以说明两件事: 第一, 可以看出  $\tilde{X}(g)$  在  $g$  点是  $C^\infty$  可微的; 第二, 可以得到点  $e$  和  $g$  间基矢的变换公式。

$$L_{g*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \frac{\partial \varphi^\alpha(y, x)}{\partial x^i} \Big|_{\substack{x=e \\ y=g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big|_g. \quad (8.3-8)$$

其中, 系数  $\frac{\partial \varphi^\alpha(y, x)}{\partial x^i} \Big|_{\substack{x=e \\ y=g}}$  称为李群  $G$  的变换函数; 这与切映射公式 (见(2.5-5)) 本质相同。与此对偶, 可以导出右移动的相似公式,

$$R_{g*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \frac{\partial \varphi^\alpha(x, y)}{\partial x^i} \Big|_{\substack{x=e \\ y=g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \Big|_g. \quad (8.3-9)$$

### 8.3.2 切矢量场

前面只是两不同点间的矢量变换, 下面进入切矢量场的内容。

**定义 8.14** 设切矢量场  $X \in \mathfrak{X}(G)$ , 如果  $\forall g \in G$  都有  $L_{g*} X = X$ , 那么称切矢量场  $X$  是李群  $G$  的左不变切矢量场。

因  $X$  是切向量场, 故  $X$  在微分流形  $G$  上每一点都有定义; 比如  $X$  定义在点  $h$ , 定义8.14中利用左移动将其移动到  $gh$  处, 即  $L_{g*}X(h) = X(gh)$ ; 当  $g$  和  $h$  遍历整个李群  $G$  时, 都有此式 ( $L_{g*}X(h) = X(gh)$ ) 成立, 那么  $X$  便是左不变切向量场。

**定理 8.15** 设  $G$  是  $m$  维光滑李群, 单位元  $e$  中的切向量  $X \in T_e G$  经过左移动  $L_g$  ( $g$  遍历整个李群  $G$ ) 变换产生一个向量场  $\tilde{X}$ , 它是李群  $G$  左移动不变向量场。反之, 李群  $G$  上任意左不变向量场都可以由  $T_e G$  中某切向量经左移动生成。

**证明** . 设  $\forall h \in G, X \in T_e G$ , 由式(8.3-5)可知

$$L_{h*} \circ L_{g*} X = L_{h*} \tilde{X}(g \cdot e) = \tilde{X}(h \cdot g). \quad (8.3-10)$$

因  $h, g$  都是任意群元, 由上式可以看出:  $\tilde{X}(g)$  是左移动不变向量场。

反之. 任选  $G$  上左移动不变向量场  $Y$ , 即有

$$L_{h*} Y(g) = Y(h \cdot g), \quad \forall h, g \in G. \quad (8.3-11)$$

令  $g = e$  得  $L_{h*} Y(e) = Y(h)$ , 即满足定理要求。 ■

**定理 8.16** 将  $m$  维李群  $G$  上全体左不变向量场的集合记为  $\mathcal{G}$ , 则  $\mathcal{G}$  是  $m$  维线性空间, 它与切空间  $T_e G$  同构。Poisson 括号在  $\mathcal{G}$  上是封闭的, 因而  $\mathcal{G}$  是  $m$  维李代数。

**证明** . 如果  $X, Y$  是  $G$  上左不变切向量场, 那么  $X + \lambda \cdot Y (\forall \lambda \in \mathbb{R})$  也是李群  $G$  上的左不变切向量场, 满足封闭性。不难验证  $\mathcal{G}$  满足定义1.34, 所以  $\mathcal{G}$  是线性空间。

由定理8.15可知, 任意一左不变向量场  $X$  都可由单位元处的线性空间  $T_e G$  中矢量生成, 我们定义一个映射  $\sigma$ , 它将  $X$  对应为  $T_e G$  中生成它的矢量,

$$\sigma(X) = X(e), \quad \forall X \in \mathfrak{X}(G), \quad X = L_{g*} X(e). \quad (8.3-12)$$

定理8.15已表明  $\sigma$  是双射; 同时  $\sigma(X + \lambda \cdot Y) = X(e) + \lambda \cdot Y(e) = \sigma(X) + \lambda \cdot \sigma(Y)$ , 这便验证了  $\sigma$  是  $\mathbb{R}$ -线性的。故  $\sigma$  是同构映射。我们已知  $T_e G$  是  $m$  维的, 那么自然可以得到线性空间  $\mathcal{G}$  也是  $m$  维的。

我们已知左移动是微分同胚, 由定理2.64以及 §2.8.2可知

$$L_{g*}[X, Y] = [L_{g*}X, L_{g*}Y] = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}. \quad (8.3-13)$$

上式说明向量场  $[X, Y]$  也是左移动不变的, 所以 Poisson 括号在  $\mathcal{G}$  上是封闭的; 因此  $\mathcal{G}$  是一个李代数, 称之为李群  $G$  的李代数。因为  $\mathcal{G}$  与  $T_e G$  是同构的, 很多时候, 我们也称  $T_e G$  是李群  $G$  的李代数。 ■

### 8.3.3 李代数结构常数

本小节进一步阐述上面定义的李群  $G$  的李代数  $\mathcal{G}$  或  $T_e G$ 。下面来导出  $T_e G$  中的结构常数, 我们选取  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_e\}$  为  $T_e G$  的基底; 由式(8.3-8)可以导出上述  $m$  个基底生成的左不变切向量场,

$$X_i(g) = L_{g*} \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \varphi^\alpha(y, x)}{\partial x^i} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=g}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \bigg|_g. \quad (8.3-14)$$

则

$$[X_i, X_j](g) = \left[ \frac{\partial \varphi^\beta(y, x)}{\partial x^i} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=g}} \frac{\partial^2 \varphi^\alpha(y, x)}{\partial y^\beta \partial x^j} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=g}} - \frac{\partial \varphi^\beta(y, x)}{\partial x^j} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=g}} \frac{\partial^2 \varphi^\alpha(y, x)}{\partial y^\beta \partial x^i} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=g}} \right] \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \bigg|_g.$$

令上式中的  $g \rightarrow e$ , 则  $\varphi^\beta(y, x) \rightarrow x^\beta$ , 即  $\frac{\partial \varphi^\beta(y, x)}{\partial x^i} \rightarrow \delta_i^\beta$ ; 那么可得到  $T_e G$  中基底  $\{\frac{\partial}{\partial x^i}|_e\}$  间的结构常数

$$[X_i, X_j](e) = \left[ \frac{\partial^2 \varphi^\alpha(y, x)}{\partial y^i \partial x^j} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=e}} - \frac{\partial^2 \varphi^\alpha(y, x)}{\partial y^j \partial x^i} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=e}} \right] \frac{\partial}{\partial y^\alpha} \bigg|_e. \quad (8.3-15)$$

$$c_{ij}^\alpha = \frac{\partial^2 \varphi^\alpha(y, x)}{\partial y^i \partial x^j} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=e}} - \frac{\partial^2 \varphi^\alpha(y, x)}{\partial y^j \partial x^i} \bigg|_{\substack{x=e \\ y=e}}. \quad (8.3-16)$$

### 8.3.4 例题

**例 8.17** 可对易群结构常数。可对易群意味着群乘法是可交换的, 即  $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ 。由式(8.3-16)可知结构常数恒为零, 即  $c_{ij}^\alpha = 0$ 。

**例 8.18** 设  $C^*$  是非零复数全体构成的集合。(1) 额外引入复数乘法, 证明  $C^*$  是二维实李群。(2) 求出李代数的基矢和结构常数。

先证 (1)。我们是在实数域  $\mathbb{R}$  上讨论问题, 是把  $C^*$  看成一个有序二维数对; 即将  $z = x + iy$  映射为  $(x, y)$ , 这是个双射。可以看出  $C^*$  是二维光滑流形。设有复数  $z_1 = x_1 + iy_1$  和  $z_2 = x_2 + iy_2$ , 则复数乘法为

$$z_1 \cdot z_2 = \varphi(z_1, z_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2). \quad (8.3-17)$$

由于已将零  $((0, 0))$  排除, 所以复数乘法可逆 (即除法), 是

$$\varphi^{-1}(z) = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right). \quad (8.3-18)$$

由上两式可见复数乘法、求逆都是  $C^\infty$  函数运算。

下面再说明  $C^*$  对复数乘法构成群。首先,  $C^*$  对群乘法具有封闭性; 其次, 群乘法满足结合律; 再者, 存在逆元和单位元 (复数  $e = (1, 0)$ ); 故  $C^*$  构成群。

因此,  $C^*$  是个二维李群。

再解 (2)。利用上面复数乘法公式(8.3-17)，先求四个变换函数，

$$\left. \frac{\partial \varphi^\alpha(z_1, z_2)}{\partial x_2} \right|_{z_2=e} = (x_1, y_1), \quad \left. \frac{\partial \varphi^\alpha(z_1, z_2)}{\partial y_2} \right|_{z_2=e} = (-y_1, x_1). \quad (8.3-19)$$

在由式(8.3-8)可得  $z_1 = x_1 + iy_1$  处的基矢，

$$\begin{aligned} X_1 &= L_{g*} \left. \frac{\partial}{\partial x_2} \right|_e = \left. \frac{\partial \varphi^1(z_1, z_2)}{\partial x_2} \right|_{z_2=e} \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{z_1} + \left. \frac{\partial \varphi^2(z_1, z_2)}{\partial x_2} \right|_{z_2=e} \left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_{z_1} \\ &= x_1 \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{z_1} + y_1 \left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_{z_1}, \end{aligned} \quad (8.3-20)$$

$$X_2 = L_{g*} \left. \frac{\partial}{\partial y_2} \right|_e = -y_1 \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_{z_1} + x_1 \left. \frac{\partial}{\partial y_1} \right|_{z_1}. \quad (8.3-21)$$

由于复数乘法构成的李群是可对易群，所以结构常数都是零。这也可以直接由  $[X_1, X_2]$  直接计算得到（留给读者当练习）。 ■

**例 8.19** 一般线性群  $GL(m, \mathbb{R})$  的李代数  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ 。

取  $GL(m, \mathbb{R})$  中两个元素  $A = (a_{\cdot i}^j), B = (b_{\cdot i}^j)$ ，它们的群乘积是  $(A \cdot B)_{\cdot i}^j = \sum_k a_{\cdot k}^j b_{\cdot i}^k$ 。仿照上个例题，先求变换函数，

$$\left. \frac{\partial \varphi_{\cdot i}^j(A, B)}{\partial b_{\cdot s}^t} \right|_{b=I} = a_{\cdot k}^j \delta_{\cdot t}^k \delta_{\cdot i}^s = a_{\cdot t}^j \delta_{\cdot i}^s. \quad (8.3-22)$$

由式(8.3-8)可得李代数  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  的基矢

$$X_{\cdot t}^s = L_{g*} \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot s}^t} \right|_e = a_{\cdot t}^j \delta_{\cdot i}^s \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot i}^j} \right|_g = a_{\cdot t}^j \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot s}^j} \right|_g. \quad (8.3-23)$$

基矢间的对易关系是

$$\begin{aligned} [X_{\cdot t}^s, X_{\cdot k}^l] &= a_{\cdot t}^j \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot s}^j} \right|_g a_{\cdot k}^i \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot l}^i} \right|_g - a_{\cdot k}^i \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot l}^i} \right|_g a_{\cdot t}^j \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot s}^j} \right|_g \\ &= a_{\cdot t}^j \delta_{\cdot k}^s \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot l}^j} \right|_g - a_{\cdot k}^i \delta_{\cdot t}^l \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot s}^i} \right|_g = \delta_{\cdot k}^s X_{\cdot t}^l - \delta_{\cdot t}^l X_{\cdot k}^s. \end{aligned} \quad (8.3-24)$$

李群  $GL(m, \mathbb{R})$  的李代数  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$  可以表示为

$$\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) = \text{Span} \left\{ a_{\cdot t}^j \left. \frac{\partial}{\partial a_{\cdot s}^j} \right|_g \right\}. \quad (8.3-25)$$

需提醒一下：Span 的组合系数是  $C^\infty(G)$ 。除了按照上述微分几何的方式求解基矢之外，还可以按照矩阵形式来求解。在例8.13中，我们已经说明  $\mathfrak{gl}(m)$  是李代数，它的基矢是矩阵  $E_{\cdot j}^i (1 \leq i, j \leq m)$ ；其中  $E_{\cdot j}^i$  表示的第  $i$  行、第  $j$  列元素为 1，其余矩阵元是零。按照矩阵乘法，很明显有

$$[E_{\cdot t}^s, E_{\cdot k}^l] = E_{\cdot t}^s E_{\cdot k}^l - E_{\cdot k}^l E_{\cdot t}^s = \delta_{\cdot k}^s E_{\cdot t}^l - \delta_{\cdot t}^l E_{\cdot k}^s. \quad (8.3-26)$$



虽然  $X_{.t}^s$  是微分形式,  $E_{.j}^i$  是矩阵形式, 但不影响在两种基矢间建立线性双射  $\pi$ ,

$$\pi(X_{.j}^i) = E_{.j}^i; \quad 1 \leq i, j \leq m. \quad (8.3-27)$$

因已约定双射  $\pi$  是线性的, 故有

$$\pi(c \cdot X_{.j}^i + X_{.s}^t) = c \cdot E_{.j}^i + E_{.s}^t = c \cdot \pi(X_{.j}^i) + \pi(X_{.s}^t); \quad \forall c \in \mathbb{R}. \quad (8.3-28)$$

所以双射  $\pi$  是线性同构映射。又由于

$$\pi([X_{.t}^s, X_{.k}^l]) = \pi(\delta_{.k}^s X_{.t}^l - \delta_{.t}^l X_{.k}^s) = \delta_{.k}^s E_{.t}^l - \delta_{.t}^l E_{.k}^s = [E_{.t}^s, E_{.k}^l] = [\pi(X_{.t}^s), \pi(X_{.k}^l)].$$

上式说明映射  $\pi$  保李积不变。上面讨论表明: 从纯粹的代数角度来看, 基矢是微分形式的李代数完全同构于矩阵形式的李代数; 两者没有区别。

这也就说明了: 一般线性群  $GL(m, \mathbb{R})$  的李代数就是例题8.13中的  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{R})$ 。这一结论对于  $GL(m, \mathbb{C})$  和  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$  也成立。 ■

## 8.4 李群同态与李子群

我们先叙述有关李群、李子群的一些同态、同构概念; 然后描述半直积群概念; 最后, 着重阐述单参数子群, 这是李群中一个重要课题。

### 8.4.1 同态、同构

§1.1.2中概念大都适用于本节, 有的需要略作调整; 我们从新叙述几个定义。

**定义 8.20** 若从李群  $G$  到李群  $H$  存在一个光滑映射  $\phi: G \rightarrow H$ , 它是群  $G$  到群  $H$  的同态映射 (定义见1.24); 那么称  $\phi$  是李群  $G$  到  $H$  的**同态映射**。

若  $\phi$  还是微分同胚, 则称之为李群间的**同构映射**, 记为  $G \cong H$ 。李群  $G$  到它自身的同构称为李群  $G$  的**自同构**。

**定义 8.21** 设  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  是两个李代数。设  $\psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  是保持李积不变的线性映射, 即

$$\psi([X, Y]) = [\psi(X), \psi(Y)], \quad \forall X, Y \in \mathcal{G}. \quad (8.4-1)$$

则称  $\psi$  是从李代数  $\mathcal{G}$  到  $\mathcal{H}$  的**同态**。

如果同态  $\psi$  是双射, 则称之为**同构**。李代数  $\mathcal{G}$  到自身的同构称为**自同构**。

我们将李群  $G$  的全体自同构映射 (双射) 所组成的集合记为  $\text{Aut}(G)$ , 这些双射构成一个群, 称为李群  $G$  的**自同构群**。验证  $\text{Aut}(G)$  是群的工作留给读者。

关于李群和李代数同态有如下重要定理; 定理证明可参阅 [5]<sup>§6.1</sup> 定理 1.5。

**定理 8.22** 设有两个李群  $G, H$ , 它们的李代数是  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$ 。假设有同态映射  $\phi: G \rightarrow H$ , 那么 (1)  $\phi$  在它们的李代数间诱导出同态映射  $\psi = \phi_*: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  是李代数同态; (2) 如果  $\phi$  是李群同构, 那么  $\psi = \phi_*$  也是李代数的同构。

李群和李代数还有如下两个基本定理; 证明可参考 [6] 第三章定理 20、21 和 29。

**定理 8.23** 设有  $m$  维实数李代数  $\mathfrak{g}$ ; 则存在一  $m$  维局部李群  $G$ , 它以  $\mathfrak{g}$  为李代数。

**定理 8.24** 设有  $m$  维 (局部) 李群  $G$  和  $H$ , 如果它们的李代数同构, 那么  $G$  和  $H$  是局部同构的。若  $G, H$  都是单连通的, 则它们整体上也是同构的 (微分同胚)。

注意“单连通”和“连通”是两个不同的概念。单连通是代数拓扑中的概念, 可见 [4]<sup>§52</sup>; 连通概念见 [4]<sup>§23, §24</sup>。

**定义 8.25** 设有两个李群  $G$  和  $H$ , 且  $H \subset G$ 。如果 (1) 存在同态映射  $\phi: H \rightarrow G$ ; (2) 映射  $\phi: H \rightarrow G$  是嵌入子流形。则称  $H$  为  $G$  的**李子群**。

如果映射  $\phi: H \rightarrow G$  是正则嵌入子流形, 则称  $H$  为  $G$  的**拓扑李子群**。

**定义 8.26** 设李群  $H$  是李群  $G$  的李子群, 如果  $H$  还是  $G$  的闭子集 (见定义 1.9), 则称  $H$  为  $G$  的**闭子群**。

关于李子群, 有如下重要定理, 证明可参考 [6]<sup>§3.8</sup>。

**定理 8.27** 设李群  $H$  为李群  $G$  的李子群,  $H$  的李代数是  $\mathcal{H}$ ,  $G$  的李代数是  $\mathcal{G}$ 。那么必然有: (1)  $\mathcal{H}$  是  $\mathcal{G}$  的子代数。(2)  $\mathcal{G}$  每一个子代数恰好是  $G$  内唯一一个连通李子群的李代数。

**定理 8.28** 若李群  $H$  为李群  $G$  的闭子群, 则  $H$  是  $G$  的拓扑李子群。

### 8.4.2 半直积群

介绍到这里, 我们稍微偏离一下主题。例 8.9 中引入了直积的概念, 现在借助自同构映射来引入半直积定义。设有两个群  $G = \{g\}$  和  $H = \{h\}$ ,  $G$  的自同构群是  $\text{Aug}(G)$ , 其元素  $\nu \in \text{Aug}(G)$ 。如果存在一个把群  $H$  映射为  $\text{Aug}(G)$  的同态映射  $\Phi: H \rightarrow \text{Aug}(G)$ , 其具体表达式为

$$\Phi: h \rightarrow \nu_h, \quad h \in H, \quad \nu \in \text{Aug}(G). \quad (8.4-2)$$

那么, 便可定义  $G$  和  $H$  的**半直积群**  $K = G \otimes_s H$ , 其元素可唯一地记为  $k \equiv (g, h)$ , 注意两者 (即  $g$  和  $h$ ) 顺序不能改变; 半直积群  $K$  中元素的群乘法为:

$$k_1 k_2 \equiv (g_1, h_1)(g_2, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1 \nu_{h_1}(g_2), h_1 h_2). \quad (8.4-3)$$

下面, 我们验证在上述群乘法定义下  $K$  确实是一个群。

首先, 群乘法的封闭性是显然的。

其次, 设群  $G, H$  的单位元分别是  $I_g, I_h$ , 那么由自同构映射  $\nu_h \in \text{Aug}(G)$  可得

$$\nu_h(I_g) = I_g, \quad \nu_{I_h}(g) = g; \quad \forall g \in G, \quad \forall h \in H. \quad (8.4-4)$$

利用上式可以证明,  $\forall g' \in G, \forall h' \in H$  有

$$(I_g, I_h)(g', h') = (I_g \nu_{I_h}(g'), I_h h') = (I_g g', I_h h') = (g', h'). \quad (8.4-5)$$

$$(g', h')(I_g, I_h) = (g' \nu_{h'}(I_g), h' I_h) = (g' I_g, h' I_h) = (g', h'). \quad (8.4-6)$$

上两式说明  $(I_g, I_h)$  是  $K$  的单位元。

第三, 证明群乘法满足结合律。根据自同构映射  $\nu_h \in \text{Aug}(G)$  的属性可知

$$\nu_h(g_1 g_2) = \nu_h(g_1) \nu_h(g_2); \quad \nu_{h_1 h_2}(g) = \nu_{h_1}(\nu_{h_2}(g)). \quad (8.4-7)$$

利用此式可证

$$\begin{aligned} [(g_1, h_1)(g_2, h_2)](g_3, h_3) &= (g_1 \nu_{h_1}(g_2), h_1 h_2)(g_3, h_3) = (g_1 \nu_{h_1}(g_2) \nu_{h_1 h_2}(g_3), h_1 h_2 h_3) \\ &= (g_1 \nu_{h_1}(g_2) \nu_{h_1}(\nu_{h_2}(g_3)), h_1 h_2 h_3) = (g_1 \nu_{h_1}(g_2 \nu_{h_2}(g_3)), h_1 h_2 h_3) \\ &= (g_1, h_1)(g_2 \nu_{h_2}(g_3), h_2 h_3) = (g_1, h_1)[(g_2, h_2)(g_3, h_3)]. \end{aligned}$$

这便证明了半直积乘法满足结合律。

最后, 自同构映射是双射, 保证了逆元的存在;  $(g, h)$  的逆元是  $(\nu_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1})$ ,

$$(g, h)(\nu_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}) = (g \nu_h(\nu_{h^{-1}}(g^{-1})), h h^{-1}) = (g \nu_{I_h}(g^{-1}), I_h) = (I_g, I_h).$$

$$(\nu_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1})(g, h) = (\nu_{h^{-1}}(g^{-1}) \nu_{h^{-1}}(g), h^{-1} h) = (\nu_{h^{-1}}(g^{-1} g), I_h) = (I_g, I_h).$$

综合上述四条可知  $K$  是群。

从群  $K = G \otimes_s H$  的构造来看,  $G$  是  $K$  的不变子群; 验证如下,  $\forall g' \in G$  有

$$\begin{aligned} (g, h)g'(g, h)^{-1} &= (g, h)(g', I_{h'}) (\nu_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}) = (g \nu_h(g'), h I_{h'}) (\nu_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}) \\ &= (g \nu_h(g') \nu_h(\nu_{h^{-1}}(g^{-1})), h h^{-1}) = (g \nu_h(g') g^{-1}, I_h) \in G. \end{aligned}$$

上式最后一步中的元素  $g \nu_h(g') g^{-1}$  仍是群  $G$  中的元素, 故上式说明  $G$  是  $K$  的不变子群。

但是一般说来  $H$  不是  $K$  的不变子群。当  $G, H$  都是  $K$  的不变子群时, 半直积就退化为直积了。由此也可看出半直积比直积条件弱一些。

我们也可以将上述构造过程反过来, 将一个大群分解为两个群的半直积, 这需要原来的大群有不变子群才可以。具体例子见

### 8.4.3 单参数子群

单参数子群是最简单的李子群之一, 容易研究清楚。单参数子群理论与单参数微分变换群 (见 §2.10) 内容有密切关系。我们已经知道实数域  $\mathbb{R}$  关于加法构成一维、连通、可对易李群 (见例8.6), 用它可以定义单参数子群,

**定义 8.29** 设  $G$  是李群, 其维数不小于 1. 如果映射  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow G$  是浸入的 (微分流形角度), 并且又是群  $\mathbb{R}$  到群  $G$  内的一个同态 (群的角度); 则称  $\sigma$  是  $G$  的 **单参数子群**.

**定理 8.30**  $m$  维李群  $G$  的任一左不变切向量场  $X$  都是完备的.

**证明** . 完备的定义见 2.76. 我们不考虑  $X$  的积分曲线有人为奇点的情形; 若有, 通过延拓消除即可. 根据 §2.10 理论 (李群  $G$  也是光滑流形, 自然可用该节理论) 可知在  $\mathbb{R}$  的局部开区间  $(-\epsilon, +\epsilon)$  ( $\epsilon > 0$ ) 上  $X$  一定存在积分曲线  $\sigma(t)$  满足:  $\sigma: (-\epsilon, +\epsilon) \rightarrow G$ ,  $\sigma(0) = e$ ,  $\sigma'(0) = X$ ; 其中  $e$  是  $G$  的单位元. 取  $\sigma(t)$  线上一点  $h \equiv \sigma(\epsilon/2)$ , 再定义  $\nu(t) \equiv h \cdot \sigma(t - \epsilon/2)$ ;  $h$  和  $\sigma(t - \epsilon/2)$  都是李群  $G$  中的群元,  $\nu(t)$  是通过两者的群乘法来定义的; 由这个定义不难看出  $\nu(t)$  的定义域是  $(-\epsilon/2, 3\epsilon/2)$ .

为了进一步讨论, 我们先证明一个公式. 设  $f$  是  $\sigma(\mathbb{R})$  上任意的  $C^\infty$  函数场,

$$\begin{aligned} L_{\sigma_{t_2}*} \circ \sigma_{t_1}* \left( \frac{d}{dt} \right) f &\stackrel{2.35(2)}{=} (L_{\sigma_{t_2}} \circ \sigma_{t_1})* \left( \frac{d}{dt} \right) f \stackrel{2.5-8}{=} \frac{d}{dt} f (L_{\sigma_{t_2}} \circ \sigma_{t_1}) \\ &= \frac{d}{dt} f (\sigma_{t_2} \circ \sigma_{t_1}) = \frac{d}{dt} f (\sigma(t_2 + t_1)) = \sigma_{(t_1+t_2)*} \left( \frac{d}{dt} \right) f. \end{aligned}$$

其中  $t_1, t_2$  是任意固定实数, 且  $t$  的取值不超出定义域范围. 上式说明, 有

$$L_{\sigma_{t_2}*} \circ \sigma_{t_1}* \left( \frac{d}{dt} \right) = \sigma_{(t_1+t_2)*} \left( \frac{d}{dt} \right) = \sigma_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{(t_1+t_2)} \right). \quad (8.4-8)$$

利用上式, 我们可以求取曲线  $\nu(t)$  的导数了,

$$\frac{d}{dt} \Big|_{\nu(t)} = (L_h \circ \sigma_{t-\epsilon/2})* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right) = \sigma_{t*} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \right). \quad (8.4-9)$$

这说明  $\nu(t)$  和  $\sigma(t)$  在它们定义域重合的区域中, 它们各自诱导的切向量场是相同的; 由积分曲线局部唯一性定理 (常微分方程解唯一性) 可知定义域重合区域里  $((-\epsilon/2, \epsilon))$  积分曲线也是重合的, 即  $\nu = \sigma$ . 由此可见原始积分曲线  $\sigma(t)$  的定义域  $(-\epsilon, \epsilon)$  已被延拓至  $(-\epsilon, 3\epsilon/2)$ ; 重复上述操作便可得到左不变切向量场  $X$  的一条定义在全实数轴  $\mathbb{R}$  上的积分曲线, 也就说明了  $X$  是完备的. ■

**定理 8.31** 设  $G$  是  $m(> 0)$  维李群, 任意给定  $T_e G$  内一个非零矢量  $X_e$ , 由  $X_e$  生成的左不变切向量场是  $X(t)$ ; 那么一定存在唯一单参数子群  $\sigma(t)$  满足  $X(t) = \sigma_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_t \right)$ . 并且, 切向量场  $X(t)$  在  $G$  上生成的单参数变换群  $\phi_t$  恰好是  $\sigma(t)$  在  $G$  上的右移动, 即  $\phi_t(g) = R_{\sigma(t)}(g) = g \cdot \sigma(t)$ ,  $\forall g \in G$ .

**证明** . 由定理 8.30 可知  $X(t)$  是完备向量场; 根据 §2.10 理论可知, 存在单位元  $e$  附近的一个邻域  $U$ ,  $X(t)$  在  $U$  上的限制  $X|_U$  可诱导唯一一个 (局部) 单参数变换群  $\phi: (-\epsilon, \epsilon) \times U \rightarrow G$ .

任取李群  $G$  中的元素  $g$ , 那么  $\tilde{U} = g \cdot U = L_g(U)$  是  $g$  的一个邻域. 则,

$$\tilde{\phi}(t, h) = g \cdot \phi(t, g^{-1} \cdot h), \quad \forall (t, h) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{U}, \quad (8.4-10)$$

是从  $(-\epsilon, \epsilon) \times \tilde{U}$  到  $G$  的局部单参数变换群。容易求得  $\tilde{\phi}(t, h)$  诱导的切矢量场

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{\phi}(t, h) \stackrel{2.5-8}{=} L_{g*} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi(t, g^{-1}h) = L_{g*}(X(g^{-1}h)) = X(h). \quad (8.4-11)$$

这说明  $\tilde{\phi}(t, h)$  诱导的切矢量场仍是  $X(t)$  (注意  $X(t)$  是左不变的)。令

$$\sigma(t) \stackrel{def}{=} \phi(t, e), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.4-12)$$

映射  $\sigma(t)$  显然是和  $X$  相关的, 为了简洁起见, 没有把它记成  $\sigma_X(t)$ 。由  $\phi(t)$  的性质可知

$$\sigma(t+s) = \phi(t+s, e) = \phi_s \circ \phi_t(e) = \phi_s(\sigma(t)) = \phi_s \circ L_{\sigma(t)}(e). \quad (8.4-13)$$

因为  $X(t)$  是左移动  $L_{\sigma(t)}$  不变的矢量场, 由命题2.82可知:  $\phi_s$  与  $L_{\sigma(t)}$  是可交换的。继续上式的计算, 有

$$\sigma(t+s) = L_{\sigma(t)} \circ \phi_s(e) = L_{\sigma(t)} \circ \sigma(s) = \sigma(t) \cdot \sigma(s). \quad (8.4-14)$$

这说明  $\sigma(t)$  是群  $(\mathbb{R}, +)$ , 同时它也是李群  $G$  的同态映射; 因此  $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow G$  是李群  $G$  的单参数子群。

对于任意  $g \in G$ , 由于  $X(t)$  是左不变矢量场, 由命题2.82可知  $\phi_t \circ L_g = L_g \circ \phi_t$ ; 将此式作用在单位元  $e$  上便有

$$\phi_t \circ L_g(e) = L_g \circ \phi_t(e) \Rightarrow \phi_t \circ g = L_g \circ \sigma(t) = g \cdot \sigma(t) = R_{\sigma(t)}(g). \quad (8.4-15)$$

注意到  $\phi_t \circ g$  是  $\phi_t(g)$ , 便可知上式满足定理要求。

注意到  $X(e) = \sigma'(0) = \sigma_{0*} \left( \frac{d}{dt} \right)$ 。令式(8.4-8)中  $t_1 = 0$ , 有

$$\sigma_* \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_t \right) = L_{\sigma_t*} \circ \sigma_{0*} \left( \left. \frac{d}{dt} \right| \right) = L_{\sigma_t*}(X(e)) = X(\sigma(t)). \quad (8.4-16)$$

上式说明由式(8.4-12)定义的单参数子群符合定理中要求。 $\sigma(t)$  的唯一性可由常微分方程组解唯一性定理得到。 ■

由此定理可知, 李代数有如下四种等价表述: (1) 李代数定义; (2) 左不变切矢量场; (3) (左不变) 单参数微分同胚群的切矢量; (4) 单参数子群的切矢量。

根据单参数子群  $\sigma(t)$  同态于加法群的属性, 容易得到如下公式

$$\sigma(Nt) = \sigma(t) \times \cdots \times \sigma(t) = (\sigma(t))^N. \quad N \in \mathbb{N}. \quad (8.4-17)$$

## 8.5 指数映射

**定义 8.32** 设有  $m$  维李群  $G$ ,  $\forall X \in T_e G$ , 用  $\sigma_X: \mathbb{R} \rightarrow G$  表示李群  $G$  中由  $X$  确定的单参数子群 (见式(8.4-12))。定义**指数映射**为  $\exp: T_e G \rightarrow G$ , 具体表示为

$$\exp(X) \stackrel{def}{=} \sigma_X(1); \quad \forall X \in T_e G. \quad (8.5-1)$$

指数映射是通过单参数子群来定义的, 那么明显有

$$\exp(t+s)X = \sigma_X(s+t) = \sigma_X(t) \cdot \sigma_X(s) = \exp(tX) \cdot \exp(sX). \quad (8.5-2)$$

**定理 8.33** 设有  $m$  维李群  $G$ , 指数映射  $\exp: T_e G \rightarrow G$  是光滑的, 且有

$$(1): \exp(tX) = \sigma_X(t); \quad (2): (\exp)_{*0} = \text{id}. \quad (8.5-3)$$

第 (2) 条是说指数映射在零矢量处是  $G$  切空间的恒等映射。

**证明** . 单位元  $e$  处有局部坐标系  $(U; x^i)$ ,  $e$  对应坐标原点  $\{0\}$ 。设由自然基矢  $\frac{\partial}{\partial x^i}|_e$  生成的左不变切矢量场是 (参见式(8.3-8))

$$E_i = L_{g*} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_e = \lambda_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_g; \quad \lambda_i^j(x) \in C^\infty(U), \quad \lambda_i^j(0) = \delta_i^j. \quad (8.5-4)$$

$\frac{\partial}{\partial x^i}|_e$  是  $T_e G$  上的基矢量组,  $\{E_i\}$  是李代数  $\mathcal{G}$  上的基矢量组, 两者同构。任取  $(a^1, \dots, a^m) \in \mathbb{R}^m$ , 那么  $X = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}|_e$  所生成的左不变切矢量场是

$$\tilde{X} = a^i E_i = a^i \lambda_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}. \quad (8.5-5)$$

由  $\tilde{X}$  构建一个常微分方程组

$$\frac{dx^j(t)}{dt} = a^i \lambda_i^j(x); \quad \text{初条件 } x^j(0) = 0. \quad (8.5-6)$$

那么, 上述方程组的解便是左不变切矢量场  $\tilde{X}$  过单位元  $e$  的积分曲线, 此积分曲线显然为由式(8.4-12)定义的  $\sigma_X(t)$ ; 现在我们将这个解记为  $\exp(tX) \equiv \sigma_X(t)$ ; 也就是说式(8.5-6)中的  $x^j(t)$  是  $\exp(tX) \equiv \sigma_X(t)$  的局部坐标表达。当  $t=0$  时, 自然得到单位元  $e$  (它的局部坐标是  $\{0\}$ ); 当  $t=1$  时, 此解便是指数映射(8.5-1); 由此可见第 (1) 条是成立的。根据常微分方程解存在唯一性依赖定理<sup>[1]§31</sup>可知  $\exp(tX)$  是参数  $t, a^1, \dots, a^m$  的光滑函数。

采用直接求导的方式证明第 (2) 条; 因  $\exp(tX)$  是左不变切矢量场  $\tilde{X}$  过单位元  $e$  的积分曲线, 故

$$X = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t \cdot X) = (\exp)_{*0} \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (t \cdot X) \right) = (\exp)_{*0}(X). \quad (8.5-7)$$

定理第 (2) 条得证。 ■

一般说来  $\exp(\mathcal{G}) \neq G$ , 但由定理2.36可以得到如下命题,

**命题 8.34** 指数映射  $\exp: T_e G \rightarrow G$  在单位元  $e$  的小邻域内是局部微分同胚的。

如果  $G$  是单连通的, 那么  $\exp(\mathcal{G}) = G$ 。不那么严谨的证明:  $\exp(\mathcal{G})$  在  $G$  的单位元  $e$  附近生成了一个单连通局部李群; 很明显  $\exp(\mathcal{G})$  和  $G$  的李代数是相同的; 如果  $G$  本身也是单连通的, 那么由定理8.24可知  $\exp(\mathcal{G})$  和  $G$  是微分同胚的; 证毕。

**定理 8.35** 设  $F$  是从  $m$  维李群  $M$  到  $n$  维李群  $N$  的  $C^\infty$  同态映射。对于  $M$  内任意单参数子群  $\exp(tX)$ , 我们有  $F(\exp(tX)) = \exp(t(F_*X))$ 。

**证明** . 因  $F$  是同态映射, 那么有 (其中  $X \in T_e M$ )

$$F(\exp(t+s)X) = F(\exp(tX) \cdot \exp(sX)) = F(\exp(tX)) \cdot F(\exp(sX)) \quad (8.5-8)$$

上式可说明  $F(\exp(tX))$  是李群  $N$  内的单参数子群; 因而存在  $Y \in T_e N$  使得  $F(\exp(tX)) = \exp(tY)$ 。我们要证明的是  $Y_{e_N} = F_* X_{e_M}$ 。我们来求取单位元处的切矢量,

$$Y_{e_N} = \left. \frac{d}{dt} F(\exp(tX)) \right|_{t=0} \stackrel{2.5-8}{=} F_* \left( \left. \frac{d \exp(tX)}{dt} \right|_{t=0} \right) = F_*(\exp_{*0}(X)) \stackrel{8.33}{=} F_*(X_{e_M}).$$

证毕。 ■

**例 8.36** 李群  $G$  上的映射  $\exp(tX) \equiv \sigma(t)$  在原点  $\{0\}$  (单位元  $e$ ) 处的展开。

设有李群  $G$  上的  $C^\infty$  函数场  $f$ 。左不变矢量场  $X(t)$  诱导出来的积分曲线是单参数子群  $\sigma(t)$ , 它的控制方程是(8.5-6)。  $X(t)$  作用在  $f$  上, 有

$$X(f) = \left. \frac{dx^j}{dt} \right|_{\sigma(t)} \frac{\partial f}{\partial x^j} = \left. \frac{df}{dt} \right|_{\sigma(t)}. \quad (8.5-9)$$

继续对上式求导数, 有

$$X^k(f) = \left. \frac{d^k f}{dt^k} \right|_{\sigma(t)} = \frac{d^k f(\sigma(t))}{dt^k}. \quad (8.5-10)$$

在单位元  $e$  附近, 标量函数场  $f$  有微扰展开

$$f(\sigma(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \frac{d^k f(\sigma(0))}{dt^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k(f(\sigma(0))). \quad (8.5-11)$$

在流形论中  $\sigma(t)$  的分量就是局部坐标, 如果我们选  $f$  是恒等映射, 即  $f$  把坐标映射为坐标; 那么从上式可得

$$\sigma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k|_{\sigma(0)}, \quad -\epsilon < t < \epsilon. \quad (8.5-12)$$

而  $\sigma(t)$  是由  $X$  生成的单参数子群, 有  $\sigma(t) \equiv \exp(tX)$ , 故可得

$$\exp(tX) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} X^k = e + t \cdot X + \frac{t^2}{2!} X^2 + \cdots \quad (8.5-13)$$

这就是指数映射在单位元  $e$  处的展开式。 ■

不加证明地给出 Baker–Campbell–Hausdorff 公式<sup>[3]§2.1.4</sup>的几个不同形式的近似表达。

$$\exp(tX) \exp(tY) = \exp\left(t(X+Y) + \frac{t^2}{2}[X, Y] + o(t^3)\right), \quad (8.5-14)$$

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX)\exp(-tY) = \exp(t^2[X, Y] + o(t^3)), \quad (8.5-15)$$

$$\exp(tX)\exp(tY)\exp(-tX) = \exp(tY + t^2[X, Y] + o(t^3)). \quad (8.5-16)$$

其中  $X, Y$  是李群  $G$  的李代数  $\mathcal{G}$  中的元素, 也就是切矢量场;  $t$  是实参数;  $o(t^3)$  表示它是  $t$  的 3 阶小量。上述三个公式表征了指数映射将李群  $G$  单位元  $e$  处切空间的切矢量映入李群  $G$  的性状。

读者应能发现李群中通过单参数子群定义的指数映射和由黎曼测地线定义的指数映射 (见 §6.2.1) 有很多相似之处; 其实在满足一定条件下两者是相同的, 见 §8.9.1。

### 8.5.1 矩阵群的指数映射

在例8.19中, 已经指出  $GL(m, \mathbb{C})$  (所有  $m$  维可逆矩阵) 的李代数是  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$  (任意  $m$  维矩阵)。已知任意固定的  $m$  维复数矩阵  $X$ , 考虑如下矩阵级数:

$$\exp X \equiv I_m + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \equiv I_m + X + \frac{1}{2!} X^2 + \cdots + \frac{1}{k!} X^k + \cdots \quad (8.5-17)$$

其中  $I_m$  是  $m$  维单位矩阵, 注意上式中的  $X$  未必是可逆矩阵。上式中, 我们只是简单将这个级数记为  $\exp X$ , 并没有说它就是“指数”, 虽然后面会证明这一点。

令  $\rho$  是  $X = (x_{ij})$  矩阵元最大模数值, 即  $\rho = \max_{i,j} |x_{ij}|$ 。级数(8.5-17)矩阵元为

$$\begin{aligned} (\exp X)_{ij} &= \delta_{ij} + x_{ij} + \frac{1}{2!} \sum_{l=1}^m x_{il} x_{lj} + \cdots + \frac{1}{k!} \sum_{l_1 \cdots l_{k-1}}^m x_{il_1} x_{l_1 l_2} \cdots x_{l_{k-1} j} + \cdots \\ &\leq 1 + \rho + \frac{1}{2!} m \rho^2 + \cdots + \frac{1}{k!} m^{k-1} \rho^k + \cdots \end{aligned}$$

上式中第二行的级数是绝对收敛的, 故矩阵级数(8.5-17)是有意义的。

如果两个矩阵的乘法可对易, 即  $XY = YX$ ; 那么, 经计算可得

$$\exp(X + Y) = \exp X \cdot \exp Y. \quad (8.5-18)$$

令上式中的  $Y = -X$ , 则上式变为  $\exp X \cdot \exp(-X) = \exp(X - X) = \exp(0) = I_m$ 。这说明矩阵级数  $\exp X$  是非退化的, 故有  $\exp X \in GL(m, \mathbb{C})$  (其中  $X$  是任意  $m$  维矩阵, 即  $X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$ )。

定义映射  $F: \mathbb{R} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$ , 它的具体表达式为 ( $\exp$  是矩阵级数(8.5-17))

$$F(t) \stackrel{\text{def}}{=} \exp(tX), \quad \text{非零矩阵 } X \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.5-19)$$

由式(8.5-18)容易看出:  $\forall t, s \in \mathbb{R}$ ,

$$F(t)F(s) = \exp(tX) \cdot \exp(sX) = \exp(tX + sX) = \exp((t+s)X) = F(t+s). \quad (8.5-20)$$



上式说明映射  $F$  对实参数构成加法群, 并且满足同态映射定义。从微分流形角度来看, 在坐标卡  $(GL(m, \mathbb{C}), \varphi)$  下,  $\varphi(\exp tX)$  的第  $ij$  项是

$$(\exp tX)_{ij} = \delta_{ij} + tx_{ij} + \frac{t^2}{2!} \sum_{l=1}^m x_{il}x_{lj} + \cdots + \frac{t^k}{k!} \sum_{l_1 \cdots l_{k-1}}^m x_{il_1} \cdots x_{l_{k-1}j} + \cdots \quad (8.5-21)$$

上式中只有数的乘法和加法, 故  $F$  是  $C^\infty$  的。映射  $F: \mathbb{R} \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$  在  $t=0$  点的 Jacobi 矩阵是一个  $1 \times m^2$  的矩阵,

$$(x_{11}, x_{12}, \cdots, x_{1m}; \quad \cdots \quad ; x_{m1}, x_{m2}, \cdots, x_{mm}) \quad (8.5-22)$$

由于我们已经约定  $X = (x_{ij})$  不是零矩阵, 故上述 Jacobi 矩阵的秩为 1; 这说明映射  $F$  是浸入同态映射。最终得到  $F$  (式(8.5-19)) 是  $GL(m, \mathbb{C})$  的单参数子群。

既然是单参数子群, 那么式(8.5-19)也可看成 (其实就是)  $\mathbb{R}^{2m^2}$  中的一条光滑曲线, 不难求出单参数子群  $F$  的切矢量

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{d}{dt} \left( I_m + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + \cdots \right) = X \cdot \exp tX = (\exp tX)X. \quad (8.5-23)$$

尤其在  $t=0$  处的切矢量是

$$\left. \frac{d}{dt}F(t) \right|_{t=0} = X. \quad (8.5-24)$$

对数 (实数或复数) 的指数函数成立的结果可能适用于指数矩阵, 也可能不适用。比如, 当  $[X, Y] \neq 0$  时,  $\exp(X + tY)$  的导数就不是  $Y \exp(X + tY)$ 。

**命题 8.37**  $GL(m, \mathbb{C})$  的任意单参数子群都具有式(8.5-19)的形式。

**证明** . 可参阅 [2]<sup>§2.4</sup> 定理 2.14。 ■

当取  $t=1$  时  $GL(m, \mathbb{C})$  的单参数子群(8.5-19)便是它的指数映射, 表达式为式(8.5-17)。这便解释了  $\exp$  为何被称为“指数映射”, 因为它和实数或复数的指数函数  $e^x$  展开式形式几乎相同。

**矩阵级数的计算** 我们再给出一个关于  $GL(m, \mathbb{C})$  指数映射的表达式, 更能体现“指数”这个名称了。对于任意复数矩阵  $X$  相似于一个 Jordan 标准型, 即存在可逆矩阵  $B \in GL(m, \mathbb{C})$  使得  $B \cdot X \cdot B^{-1}$  成为上三角矩阵; 这一结论可查阅任意线性代数教材。Jordan 矩阵对角线上的数是  $X$  的特征值 (也称为本征值), 即有

$$B \cdot X \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (8.5-25)$$

上式左下角矩阵元都是零，右上角可能非零可能是零；对角线是  $X$  的特征值，特征值重根按重数计算，比如  $\lambda_1$  是三重根，那么对角元上就有三个  $\lambda_1$ 。由上式可得

$$B \cdot X^k \cdot B^{-1} = (B \cdot X \cdot B^{-1}) \cdots (B \cdot X \cdot B^{-1}) = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_m^k \end{pmatrix}. \quad (8.5-26)$$

有限个上三角矩阵乘积仍是上三角矩阵。故有

$$B \cdot (\exp X) \cdot B^{-1} = \exp(B \cdot X \cdot B^{-1}) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_m} \end{pmatrix}. \quad (8.5-27)$$

上式中对指数映射  $\exp X$  进行相似变换，得到一个上三角矩阵；对角元是本征值  $\lambda_i$ （复数数值）的指数函数  $e^{\lambda_i}$ 。由此可得  $GL(m, \mathbb{C})$  指数映射  $\exp X$  的行列式为

$$\det(\exp X) = (\det B)(\det \exp X)(\det B^{-1}) = \prod_{i=1}^m e^{\lambda_i} = e^{\sum_i \lambda_i} = e^{\text{Tr} X}. \quad (8.5-28)$$

由上式更加明显地看出  $\det(\exp X) \neq 0$ 。

**微分方程** 下面我们从常微分方程角度再次讨论上述问题。我们已知  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{C})$  的基矢(8.3-25)，结合指数映射（也是单参数子群）控制方程式(8.5-6)，有

$$\frac{dx^{ij}(t)}{dt} = x^{il} a_l^j; \quad \text{初条件 } x^{ij}(0) = \delta^{ij}. \quad (8.5-29)$$

把上式写成矩阵形式，有（把  $x^{ij}$  换成  $\sigma$ ，）

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \sigma(t)A; \quad \text{初条件 } \sigma(0) = I. \quad (8.5-30)$$

适合上述方程的唯一解析解是

$$\sigma(t) = \exp tA = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k + \cdots \quad (8.5-31)$$

很明显，这正是本小节开头所定义矩阵级数。

## 8.6 伴随表示

§1.1.2中所叙述的群表示定义适用于李群。寻找群  $G$  表示的大体步骤是：首先，选一个线性空间  $V$ ；其次，找到可逆线性变换构成的群（即  $GL(V)$ ），它也称为  $V$  上全体可逆线性自同构群；最后，寻找到  $G$  到  $GL(V)$  某个子群的同态映射  $\phi$ ， $\phi$  便是群表示。如果  $V$  是实数域上空间，则群表示为实表示；如果是复数域上空间，则为复表示。

李群、李代数表示理论是一个非常专门且深入的学科，任何具体群的实际应用绝大多数都是用它的表示。在这里，我们只讨论李群、李代数的一种自然且重要的表示——伴随表示 (Adjoint Representation)，其表示空间就是李群、李代数空间自身。

对于李群  $G$  中任意元素  $g$ ，定义映射  $F(g) : G \rightarrow G$  如下：

$$(F(g))(h) \stackrel{\text{def}}{=} ghg^{-1}, \quad \forall h \in G; \quad \Leftrightarrow \quad F(g) = L_g \circ R_{g^{-1}} = R_{g^{-1}} \circ L_g. \quad (8.6-1)$$

可见  $F(g)$  是李群  $G$  到自身的光滑同胚，显然它将单位元映射为单位元。在一般文献中，常常使用  $\text{ad}(g)$  来代替式(8.6-1)中的  $F(g)$ ；但这样容易与后面的记号混淆，故我们作了上述符号的替换，即  $\text{ad}(g) \rightarrow F(g)$ 。  $\forall h, k \in G$ ，有

$$F(g)(h \cdot k) = g(h \cdot k)g^{-1} = g(h \cdot g^{-1} \cdot g \cdot k)g^{-1} = F(g)(h) \cdot F(g)(k). \quad (8.6-2)$$

$$F(g)(h^{-1}) = gh^{-1}g^{-1} = (ghg^{-1})^{-1} = (F(g)(h))^{-1}. \quad (8.6-3)$$

以上两式说明  $F(g)$  保持群乘法和求逆运算不变； $F(g)$  由左右移动构成，故它是双射；综上，可以看出  $F(g)$  是李群  $G$  的同构映射，称之为**内自同构**。当  $g$  遍历李群  $G$  时，全体  $F(g)$  构成一个群，称为**内自同构群**，记为  $F(G)$ ；下面，我们验证这一点。首先，当  $g = e$  时  $F(e)$  是恒等映射，可作为  $F(G)$  的单位元。其次，它满足封闭性，验证如下，

$$F(g) \circ F(h)(k) = g(hkh^{-1})g^{-1} = (gh)k(gh)^{-1} = F(gh)(k), \quad \forall k \in G. \quad (8.6-4)$$

此式说明  $F(g) \circ F(h)$  仍是自同构映射，也就是说集合  $F(G)$  中的任意两个元素  $F(g)$ 、 $F(h)$  之积仍在集合  $F(G)$  中。第三， $(F(g) \circ F(h)) \circ F(k) = F(g) \circ (F(h) \circ F(k))$  的成立几乎一望而知，这说明群乘法具有结合性。最后，它的逆元也在集合  $F(G)$  中，

$$(F(g))^{-1}h = (g)^{-1}h(g^{-1})^{-1} = g^{-1}hg = F(g^{-1})h. \quad (8.6-5)$$

上式说明  $F(g)$  逆元也在  $F(G)$  中。验证完毕。

内自同构群  $F(G)$  是自同构群  $\text{Aut}(G)$  (见 §8.4.1) 的一个真子群。

由定理8.22可知，李群  $G$  的自同构映射  $F(g)$  会诱导出李代数  $\mathcal{G}$  上的自同构映射

$$\text{Ad}_g \equiv (F(g))_{*e}. \quad (8.6-6)$$

而  $\mathcal{G}$  还可以看作是线性空间，那么它上的自同构  $\text{Ad}_g$  还可以看成空间矢量间的线性变换，故有  $\text{Ad}_g \in GL(\mathcal{G})$ ；而  $GL(\mathcal{G})$  本身是一个群。  $\forall g, h \in G$ ，有

$$\text{Ad}_{g \cdot h} \stackrel{8.22}{=} (F(g \cdot h))_{*e} = (F(g))_{*e} \circ (F(h))_{*e} = \text{Ad}_g \circ \text{Ad}_h. \quad (8.6-7)$$

上式说明  $\text{Ad}$  是从群  $G$  到群  $GL(\mathcal{G})$  (注意它是李代数  $\mathcal{G}$  作为线性空间时的一般线性群) 的同态映射；因映射  $F$  是由  $C^\infty$  映射  $L_g$  和  $R_g$  构成，故可以证明  $\text{Ad}$  也是  $C^\infty$  的 (省略不

证)。我们称  $C^\infty$  同态映射  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathcal{G})$  为李群  $G$  的**伴随表示**。由定理8.22可知同态映射  $\text{Ad} : G \rightarrow GL(\mathcal{G})$  还会诱导出李代数间的同态

$$\text{ad} : \mathcal{G} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathcal{G}), \quad \text{具体形式为} \quad \text{ad}_X \equiv \text{Ad}_{e*}, \quad X \in T_e G. \quad (8.6-8)$$

称其为李代数  $\mathcal{G}$  的**伴随表示**。因表示空间  $\mathcal{G}$  是  $m$  维的, 故伴随表示也是  $m$  维的。

**定理 8.38**  $\forall X, Y \in \mathcal{G}, \text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ 。

**证明** . 由定理8.35可得 ( $F$  定义见式(8.6-1))

$$F(\exp tX)(\exp(tY)) = \exp(t(F_{\exp(tX)*}Y)) = \exp(t \cdot \text{Ad}_{\exp(tX)}Y). \quad (8.6-9)$$

依照定义(8.6-1), 并利用式(8.5-16), 有

$$F(\exp tX)(\exp tY) = (\exp tX) \cdot (\exp tY) \cdot (\exp tX)^{-1} = \exp(tY + t^2[X, Y] + o(t^3)).$$

再利用定理8.33和命题8.34可知在包含 0 的一个小开集内, 指数映射  $\exp$  是局部微分同胚的; 并且当  $t \rightarrow 0$  时是恒等映射; 故从上式和式(8.6-9)可以得到

$$\text{Ad}_{\exp(tX)}Y = Y + t[X, Y] + o(t^2). \quad (8.6-10)$$

再次利用定理8.35可得

$$\text{Ad}_{\exp(tX)}Y = (\exp(t \cdot \text{ad}_X))Y \stackrel{8.5-13}{=} (e + t \cdot \text{ad}_X + o(t^2))Y. \quad (8.6-11)$$

结合上两式可得 (令  $t \rightarrow 0$ )

$$\text{ad}_X Y = [X, Y]. \quad (8.6-12)$$

一般称  $\text{ad}_X$  为由  $X$  导出的**内导子**或**内微分**。为清晰起见, 可将  $\text{ad}_X Y$  记为  $\text{ad}_X(Y)$ 。 ■

**定理 8.39**  $\text{ad}_{[X, Y]} = [\text{ad}_X, \text{ad}_Y]$  .

**证明** .  $\forall Z \in \mathcal{G}$ , 并利用李代数的 Jacobi 恒等式,

$$\begin{aligned} \text{ad}_{[X, Y]}(Z) &= [[X, Y], Z] = -[[Y, Z], X] - [[Z, X], Y] \\ &= -[\text{ad}_Y Z, X] + [\text{ad}_X Z, Y] = \text{ad}_X(\text{ad}_Y Z) - \text{ad}_Y(\text{ad}_X Z) \\ &= [\text{ad}_X, \text{ad}_Y](Z). \end{aligned}$$

因  $Z$  的任意性, 命题得证。 ■

## 8.7 李代数 Killing 型

**定义 8.40** 设有  $m$  维李代数  $\mathcal{G}$ , 定义  $\mathcal{G}$  上的 **Killing 型**为

$$(X, Y) \equiv \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y); \quad \text{ad 是内导子, Tr 是迹算符, } X, Y \in \mathcal{G}. \quad (8.7-1)$$

Killing 型有很多称呼, 如 Killing 度规场, Cartan 内积, Cartan-Killing 度规, 等等。

我们先看一下 Killing 型的具体表达。设  $m$  维李代数  $\mathcal{G}$  基矢为  $\{X_\mu | \mu = 1, \dots, m\}$ , 基矢间的李积关系是  $[X_\mu, X_\nu] = C_{\mu\nu}^\tau X_\tau$ , 其中  $C_{\mu\nu}^\tau$  是结构常数。李代数的 Killing 型是 (我们通常把它记为  $g_{\mu\nu}$ )

$$g_{\mu\nu} = (X_\mu, X_\nu) = \text{Tr}(\text{ad}_{X_\mu} \text{ad}_{X_\nu}) = C_{\mu\rho}^\tau C_{\nu\tau}^\rho. \quad (8.7-2)$$

计算过程并不难。设  $\mathcal{G}$  中两矢量  $Y, Z$  可表示成  $Y = y^\alpha X_\alpha, Z = z^\beta X_\beta$ 。根据内导子关系式 (见定理 8.38), 有

$$\text{ad}_Y(Z) = [Y, Z] = [y^\alpha X_\alpha, z^\beta X_\beta] = y^\alpha z^\beta [X_\alpha, X_\beta] = y^\alpha z^\beta C_{\alpha\beta}^\sigma X_\sigma. \quad (8.7-3)$$

由上式可知  $\text{ad}_Y$  (即定义 8.40 中的  $\text{ad}_Y$ ) 可看成一个矩阵, 它的表达式为

$$(\text{ad}_Y)_\beta^\sigma = y^\alpha C_{\alpha\beta}^\sigma. \quad (8.7-4)$$

由此, 容易求得李代数  $\mathcal{G}$  的 Killing 型是

$$(Y, Z) = \text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_Z) = \text{Tr}((\text{ad}_Y)_\beta^\sigma (\text{ad}_Z)_\rho^\beta) = y^\alpha z^\nu C_{\alpha\beta}^\sigma C_{\nu\sigma}^\beta. \quad (8.7-5)$$

经过比对可得式 (8.7-2)。

**定理 8.41** 李代数  $\mathcal{G}$  的 Killing 型有如下性质:

- (1) 对称性:  $(X, Y) = (Y, X)$ 。
- (2) 双线性性:  $\forall X, Y, Z \in \mathcal{G}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ 或 } \mathbb{C}$ , 有

$$(X + \lambda Y, Z) = (X, Z) + \lambda(Y, Z); \quad (X, \lambda Y + Z) = \lambda(X, Y) + (X, Z). \quad (8.7-6)$$

- (3)  $([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = 0$ , 即  $(\text{ad}_X Y, Z) + (Y, \text{ad}_X Z) = 0$ 。

**证明** . 前两条的证明极为简单。下面给出第 (3) 条的证明; 依定义, 有

$$\begin{aligned} ([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) &= \text{Tr}(\text{ad}_{[X, Y]} \text{ad}_Z) + \text{Tr}(Y, \text{ad}_{[X, Z]}) \\ &= \text{Tr}([\text{ad}_X, \text{ad}_Y] \text{ad}_Z) + \text{Tr}(\text{ad}_Y [\text{ad}_X, \text{ad}_Z]) \\ &= \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y \text{ad}_Z) - \text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_X \text{ad}_Z) + \text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_X \text{ad}_Z) - \text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_Z \text{ad}_X) \end{aligned}$$

三个有限维矩阵乘积之迹有如下关系:  $\text{Tr}(ABC) = \text{Tr}(CAB)$ 。继续上式的计算可得

$$([X, Y], Z) + (Y, [X, Z]) = \text{Tr}(\text{ad}_X \text{ad}_Y \text{ad}_Z) - \text{Tr}(\text{ad}_Y \text{ad}_Z \text{ad}_X) = 0. \quad (8.7-7)$$

证毕。 ■

**定理 8.42** 李代数  $\mathfrak{g}$  是半单的充分必要条件是其 Killing 型非退化, 也就是  $\det(g_{\mu\nu}) = \det(C_{\mu\rho}^\tau C_{\nu\tau}^\rho) \neq 0$ 。

这个定理是由 Cartan 证明的, 可参考 [7]<sup>§4.3</sup>。

Killing 型是李代数中一个基本概念, 读者如需了解更多内容, 可参阅相应书籍 (如 [7])。

## 8.8 覆盖群

## 8.9 双不变黎曼度规

李群  $G$  既是群又是微分流形, 作为微分流形, 我们可以给其指定广义度规场  $g$ , 即  $g$  的特征值可正可负。对于  $G$  上的任意两个切向量场  $X, Y$ , 它们的标量积记为  $\langle X, Y \rangle$ ; 用抽象指标表示就是  $\langle X, Y \rangle = g_{ab} X^a Y^b$ 。

下面我们开始定义双不变黎曼度规场。其实, 李群  $G$  上的双不变度规场等同于  $G$  的李代数  $\mathfrak{g}$  上的标量积, 或者切空间  $T_e G$  上的标量积; 读者应能记起李代数  $\mathfrak{g}$  中的元素同构于单位元  $e$  处切空间  $T_e G$  中的元素。  $\forall X, Y \in T_e G$ , 和  $\forall a, b \in G$

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle &= \langle L_{a*} X, L_{a*} Y \rangle; & L_a \text{ 是左移动} \\ \langle X, Y \rangle &= \langle R_{b*} X, R_{b*} Y \rangle; & R_b \text{ 是右移动} \end{aligned} \quad (8.9-1)$$

如果由度规  $g$  定义的标量积满足上式, 那么称  $g$  是双不变黎曼度规, 称  $G$  为广义黎曼群。

### 8.9.1 指数映射等价性

## 8.10 李变换群

## 8.11 常用矩阵李群

本节介绍几个常用矩阵李群 (有限维) 与李代数 (部分内容见表 8.1)。全面详尽的描述可参考 [2]<sup>Part I</sup>, 本节中未给出的定理证明过程可在该书中查到。我们不去证明各种群的拓扑属性, 比如紧致、连通、单连通等等, 也可在该书中查到。

每个群的定义会在具体小节分别介绍; 这些群都是  $GL(m)$  的闭子群, 具体来说, 由定理 8.28 可知:  $SL(m, \mathbb{R})$ 、 $O(m, \mathbb{R})$  是  $GL(m, \mathbb{R})$  的拓扑李子群;  $SL(m, \mathbb{C})$ 、 $U(m, \mathbb{C})$  是  $GL(m, \mathbb{C})$  的拓扑李子群。

由定理 8.27 可知  $GL(m)$  子群的李代数也是  $\mathfrak{gl}(m)$  的李子代数。我们已知  $\mathfrak{gl}(m)$  是  $m$  维任意 (实或复) 矩阵, 那么它的子群所对应的李代数自然也是  $m$  维任意 (实或复) 矩阵的某个子集 (即满足一些约束条件)。

表 8.1 中 “连通性” 一栏, 上面是点集拓扑的连通属性; 下面是代数拓扑的属性 (单连通或复连通)。

表 8.1: 常用矩阵李群

李群	矩阵	维数	连通性	紧致性	对应李代数
$GL(m, \mathbb{R})$	$m$ 维可逆实矩阵	$m^2$	非连通 非单连通	非紧	$m$ 维任意实矩阵
$GL(m, \mathbb{C})$	$m$ 维可逆复矩阵	$2m^2$	连通 非单连通	非紧	$m$ 维任意复矩阵
$SL(m, \mathbb{R})$	行列式为 1 的 $m$ 维可逆实矩阵	$m^2 - 1$	连通 非单连通	非紧	$m$ 维无迹实矩阵
$SL(m, \mathbb{C})$	行列式为 1 的 $m$ 维可逆复矩阵	$2m^2 - 2$	连通 单连通	非紧	$m$ 维无迹复矩阵
$O(m)$	$m$ 维正交实矩阵	$\frac{m(m-1)}{2}$	非连通 非单连通	紧致	$m$ 维反对称实矩阵
$SO(m)$	行列式为 1 的 $m$ 维正交实矩阵	$\frac{m(m-1)}{2}$	连通 2 度连通	紧致	$m$ 维反对称实矩阵
$SO(1, 3)$	4 维实矩阵 $\Lambda$ 且 $\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$	6	非连通 2 度连通	非紧	4 维实矩阵 $A$ $A^T = -\eta A \eta$
$U(m)$	$m$ 维幺正矩阵	$m^2$	连通 $\infty$ 度连通	紧致	$m$ 维反厄米复矩阵
$SU(m)$	行列式为 1 的 $m$ 维幺正矩阵	$m^2 - 1$	连通 单连通	紧致	$m$ 维反厄米 无迹复矩阵

### 8.11.1 一般线性群

一般线性群 (General linear group) 已经分散在例题 8.10、8.13、8.19 中以及 §8.5.1 中介绍过了。在单位元局部, 指数映射  $\exp: \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) \rightarrow GL(m, \mathbb{C})$  (式(8.5-17)) 生成全部李群; 也就是说在

下面给出其 Killing 型

### 8.11.2 特殊线性群

特殊线性群  $SL(m, \mathbb{C})$  (Special linear group) 是一般线性群的子群, 它定义为

$$SL(m, \mathbb{C}) = \{A \in GL(m, \mathbb{C}) | \det A = 1\}. \quad (8.11-1)$$

也就是给  $GL(m, \mathbb{C})$  群元增加一条约束, 令其矩阵的行列式为 1。 $SL(m, \mathbb{C})$  任意两个元素的群乘积得到的元素行列式仍是 1, 故对群乘法具有封闭性, 也就是说  $SL(m, \mathbb{C})$  构成子群。 $GL(m, \mathbb{C})$  群元的行列式是非零的, 也就是  $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ;  $SL(m, \mathbb{C})$  群元的行列式是 1;

$GL(m, \mathbb{C})$  减掉  $SL(m, \mathbb{C})$  后剩余元素的行列式取值范围是  $C \equiv (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$ , 显然  $C$  是开集。行列式映射  $\det$  是拓扑学上的连续函数, 那么它的  $\det^{-1}C$  构成的逆像集也是开集; 因此由定义1.9可知  $\det A = 1$  所构成的集合是闭集, 也就是说  $SL(m, \mathbb{C})$  是  $GL(m, \mathbb{C})$  的拓扑闭子集。这便回应本节开头所述  $SL(m, \mathbb{C})$  是闭子集的断言。上面关于闭子集的论述同样适用于  $SL(m, \mathbb{R})$ 、 $SO(m, \mathbb{R})$ 、 $SU(m, \mathbb{C})$  等子群。

作为  $GL(m, \mathbb{C})$  拓扑李子群的  $SL(m, \mathbb{C})$ , 指数映射自然也适合于它。由式(8.5-28)可知  $SL(m, \mathbb{C})$  的行列式为  $\det e^A = e^{Tr A} = 1 \Rightarrow Tr A = 0$ ; 也就是  $SL(m, \mathbb{C})$  的李代数是迹为零矩阵构成的集合, 即

$$\mathfrak{sl}(m, \mathbb{C}) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{C}) | Tr A = 0\}. \quad (8.11-2)$$

$SL(m, \mathbb{R})$  的定义与  $SL(m, \mathbb{C})$  的定义完全类似, 只是把上面公式中的  $\mathbb{C}$  换成  $\mathbb{R}$  即可。其它所有内容几乎无需改变, 结论也无任何变化 (除了维数)。

由于  $SL(m)$  群是在  $GL(m)$  群上增加一个约束得到的, 即矩阵行列式等于 1。对于  $SL(m, \mathbb{C})$  而言, 行列式等于 1 相当于实部为 1 和虚部为零, 是两个约束; 故  $SL(m, \mathbb{C})$  维数是  $2m^2 - 2$ 。对于  $SL(m, \mathbb{R})$  而言, 是一个约束, 故它的维数是  $m^2 - 1$ 。

可以证明  $\mathfrak{sl}(m, \mathbb{F})$  是  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$  的理想;  $\forall X \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{F}), \forall Y \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$ ,

$$Tr[X, Y] = Tr(XY - YX) = 0 \Rightarrow [X, Y] \in \mathfrak{sl}(m, \mathbb{F}). \quad (8.11-3)$$

### 8.11.3 保度规子群

我们只考虑实数域和复数域情形; 任取数域  $\mathbb{F}$  上的  $m \times m$  对称矩阵  $S$ , 考虑  $GL(m, \mathbb{F})$  中的子集

$$G(S) = \{A \in GL(m, \mathbb{F}) | AS\bar{A}^T = S\}. \quad (8.11-4)$$

$\bar{A}$  是  $A$  的复共轭, 如果是实矩阵, 则为自身。显然,  $G(s)$  是  $GL(m, \mathbb{F})$  中的普通子群, 且为闭子集, 所以  $G(s)$  是  $GL(m, \mathbb{F})$  的拓扑李子群。我们将  $G(s)$  的李代数记为  $\mathfrak{g}(s)$ , 它自然是  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$  的李子代数。

任取  $A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$ , 若  $\exp tA \in G(S)$ , 即满足

$$(\exp tA)S(\exp t\bar{A})^T = S, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (8.11-5)$$

对上式等号两侧求  $t$  的导数, 再令  $t \rightarrow 0$ , 可以得到

$$AS + S\bar{A}^T = 0. \quad (8.11-6)$$

由上式可以建立  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$  的子集

$$\tilde{\mathfrak{g}}(s) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{F}) | AS + S\bar{A}^T = 0\}. \quad (8.11-7)$$



显然有  $\mathfrak{g}(s) \subset \tilde{\mathfrak{g}}(s)$ ; 并且  $\tilde{\mathfrak{g}}(s)$  是  $\mathfrak{gl}(m, \mathbb{F})$  的子代数。任取  $X \in \tilde{\mathfrak{g}}(s)$ , 通过计算可以证明

$$\sum_{k=0}^n C_n^k X^k S(\bar{X}^T)^{n-k} = 0. \quad (8.11-8)$$

借用此式可以证明  $(\exp tX)S(\exp t\bar{X})^T = S, \forall t \in \mathbb{R}$ 。这便说明了  $\exp tX \in G(S)$ , 因此  $G(S)$  的李代数就是  $\tilde{\mathfrak{g}}(s)$ ; 之后我们将略去式(8.11-7)中  $\mathfrak{g}$  上的波浪号, 直接使用记号  $\mathfrak{g}(s)$ 。

对于各种不同的对称方阵  $S$ , 可以得到一系列重要的典型群。当  $S$  非退化时, 它可被理解成某种空间的度规。

#### 8.11.4 正交群

在实数域  $\mathbb{R}$  中, 取  $S$  为单位矩阵  $I$ , 则

$$G(I) = O(m) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) | AA^T = I\}. \quad (8.11-9)$$

称它为实数正交群 (Orthogonal group); 其中元素是正交矩阵。我们不讨论复数域上的正交群  $O(m, \mathbb{C})$ , 它的数学、物理意义都不那么清晰。由式(8.11-7)可得  $O(m)$  李代数

$$\mathfrak{o}(m) = \{A \in \mathfrak{gl}(m, \mathbb{R}) | A + A^T = 0\}. \quad (8.11-10)$$

由上式可知其李代数是反对称矩阵, 从而可得  $\mathfrak{o}(m)$  及  $O(m)$  维数:  $m(m-1)/2$ 。

由式(8.11-9)可得正交矩阵行列式

$$\det A \cdot \det A^T = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1. \quad (8.11-11)$$

群元行列式不是 1 就是 -1, 也就注定了  $O(m)$  不是连通的。它有一个连通分支,

$$SO(m) = O(m) \cap SL(m, \mathbb{R}) = \{A \in GL(m, \mathbb{R}) | AA^T = I \text{ 且 } \det A = 1\}. \quad (8.11-12)$$

称为特殊正交群。 $SO(m)$  对应着欧氏空间  $E^m$  的转动, 故通常也称之为转动群。我们会在 §9.4.1.2 专门讨论  $SO(3)$  群。

## 第八章参考文献

- [1] ARNOLD(阿诺尔德) V. 常微分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2001 (引用页: 236).
- [2] HALL B C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction[M]. 2nd ed. DE: Springer, 2015 (引用页: 222, 239, 244).
- [3] HELGASON S. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces[M]. US: American Mathematical Society, 2001 (引用页: 222, 237).
- [4] MUNKRES J R. Topology[M]. 2nd ed. US: Person, 2000 (引用页: 232).

- [5] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2001 (引用页: 226, 231).
- [6] 黄宣国. 李群基础[M]. 2 版. 上海: 复旦大学出版社, 2007 (引用页: 222, 232).
- [7] 万哲先. 李代数[M]. 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2013 (引用页: 244).

## 第九章 Clifford 代数与旋量

本章主要讲述 Clifford 代数，进而介绍旋量；这是深入了解狄拉克方程必备的数学知识；同时叙述了洛伦兹群知识。数学部分主要参考了文献 [2]；狄拉克方程描述主要参考了文献 [1,4] 相应章节。

如果读者不想了解过多的数学，可以从 §9.4 开始阅读；单纯的狄拉克旋量也可以从  $SL(2, \mathbb{C})$  来定义，见 §9.6。

### 9.1 Clifford 代数

我们先叙述结合代数的定义。

**定义 9.1** 设  $V$  是复数域  $\mathbb{C}$  上的线性空间（包括有限维、无限维）。设在  $V$  中定义了一个乘法运算，即  $\forall x, y \in V$  都有唯一确定元素  $z \in V$  与之对应，称  $z$  为  $x, y$  的积，记作  $z = xy$ 。如果此乘法满足如下条件（ $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ ）：

$$\begin{aligned} \text{分配律: } & x(y+z) = xy + xz, & (y+z)x = yx + zx; \\ \text{结合律: } & (xy)z = x(yz), & (\lambda x)y = \lambda(xy) = x(\lambda y). \end{aligned} \tag{9.1-1}$$

那么，称  $V$  是  $\mathbb{C}$  上的一个**结合代数**。结合代数的维数是指  $V$  的维数。

### 9.2 Pin 群和 Spin 群

### 9.3 旋量

### 9.4 洛伦兹群

#### 9.4.1 任意洛伦兹变换

我们假设读者学过狭义相对论，也可参考第??章。在 §?? 给出的洛伦兹变换中，两个坐标系的速度差与  $x$  轴平行；这一节我们给出速度差与  $x$  轴不平行的洛伦兹变换，数学上复杂了许多，但实质物理内容没有任何改变。

把一般洛伦兹变换 (变换矩阵为  $\Lambda$ ), 即  $\Lambda^T \eta \Lambda = \eta$ , 写成分量

$$(\Lambda_{.0}^0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Lambda_{.0}^j)^2 = 1 \quad = (\Lambda_{.0}^0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Lambda_{.j}^0)^2, \quad (9.4-1)$$

$$\Lambda_{.0}^0 \Lambda_{.i}^0 - \sum_{j=1}^3 \Lambda_{.0}^j \Lambda_{.i}^j = 0 \quad = \Lambda_{.0}^i \Lambda_{.0}^0 - \sum_{j=1}^3 \Lambda_{.j}^i \Lambda_{.j}^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9.4-2)$$

$$-\Lambda_{.i}^0 \Lambda_{.k}^0 + \sum_{j=1}^3 \Lambda_{.i}^j \Lambda_{.k}^j = \delta_{ik} \quad = -\Lambda_{.0}^i \Lambda_{.0}^k + \sum_{j=1}^3 \Lambda_{.j}^i \Lambda_{.j}^k, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (9.4-3)$$

从洛伦兹变换的另一形式,  $\Lambda \eta^{-1} \Lambda^T = \eta^{-1}$ , 出发可证明上面三式红色等号后面的半段; 其中(9.4-3)的后半段也是对角单位矩阵, 只不过指标在上面. 由式(9.4-1) 可以看到: 要么  $\Lambda_{.0}^0 \geq +1$ , 要么  $\Lambda_{.0}^0 \leq -1$ . 依照  $\Lambda_{.0}^0$  的符号和  $\det(\Lambda)$  的符号, 我们把洛伦兹变换分为四类 (如表9.1). 这四片洛伦兹变换是互相不连通的, 其中固有正时部分包含单位变换, 是我们主要研究的部分. 其它三个部分可以通过离散变换 (空间反射 ( $\mathcal{P}$ ) 与时间反演 ( $\mathcal{T}$ )) 与固有正时部分相联系. 在前面推导时空洛伦兹变换(??)时曾假定洛伦兹变换不改变时间方向, 也不改变空间坐标轴方向. 时间反演、空间反射是将两者都换了方向; 是对那里内容的补充. 下面分别介绍几种常用的洛伦兹变换.

表 9.1: 洛伦兹变换分类

$\det(\Lambda)$	$\Lambda_{.0}^0$	记号	名称
+1	$\geq +1$	$L_+^\uparrow$	固有正时 (proper orthochronous)
+1	$\leq -1$	$L_+^\downarrow$	固有非正时 (proper non-orthochronous)
-1	$\geq +1$	$L_-^\uparrow$	非固有正时 (improper orthochronous)
-1	$\leq -1$	$L_-^\downarrow$	非固有非正时 (improper non-orthochronous)

#### 9.4.1.1 空间反射、时间反演

空间反射变换只将空间坐标反号, 矩阵是  $\mathcal{P} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ . 作变换  $x'^\mu = \mathcal{P}_\nu^\mu x^\nu$  后, 有  $x'^0 = +x^0, x'^i = -x^i$ . 显然这种变换属于  $L_+^\uparrow$ .

时间反演变换只将时间坐标反号, 矩阵是  $\mathcal{T} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ . 作变换  $x'^\mu = \mathcal{T}_\nu^\mu x^\nu$  后, 有  $x'^0 = -x^0, x'^i = +x^i$ . 显然这种变换属于  $L_-^\downarrow$ .

全反演就是时间反演和空间反射的联合变换, 矩阵是  $\mathcal{PT}$ . 作变换  $x'^\mu = (\mathcal{PT})_\nu^\mu x^\nu$  后, 有  $x'^0 = -x^0, x'^i = -x^i$ . 显然这种变换属于  $L_+^\downarrow$ .

以上三种变换是离散变换.

假设我们选定  $\Lambda \in L_+^\uparrow$ , 则  $\mathcal{P}\Lambda \in L_-^\uparrow, \mathcal{T}\Lambda \in L_-^\downarrow, \mathcal{PT}\Lambda \in L_+^\downarrow$ . 洛伦兹变换  $L_+^\uparrow$  本身以及通过三个分立变换  $\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathcal{PT}$  作用后可以遍历整个洛伦兹变换, 所以我们只需要研究  $L_+^\uparrow$  就足够了. 而  $L_+^\uparrow$  只包含纯空间固有转动和伪转动, 这两种变换是连续的.

## 9.4.1.2 纯空间固有转动

纯空间固有转动  $R$  是洛伦兹变换的一个子类，它不涉及时间轴，所以它属于同一惯性参考系中两个不同坐标系的变换；我们先看这种简单的情形。最一般的情形就是把三个空间轴绕原点转动任意角，其矩阵形式为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_{.1}^1 & R_{.2}^1 & R_{.3}^1 \\ 0 & R_{.1}^2 & R_{.2}^2 & R_{.3}^2 \\ 0 & R_{.1}^3 & R_{.2}^3 & R_{.3}^3 \end{pmatrix}. \quad (9.4-4)$$

其中  $R_{.j}^i$  是三维空间的固有转动，此转动是包含单位变换在内连续变换，所以不含空间反射。这个部分变换  $\Lambda_{.0}^0 \geq +1, \det(\Lambda) = +1$ ，此种洛伦兹变换属于  $L_+^\uparrow$ 。可以用三个欧拉角来描述纯空间固有转动。

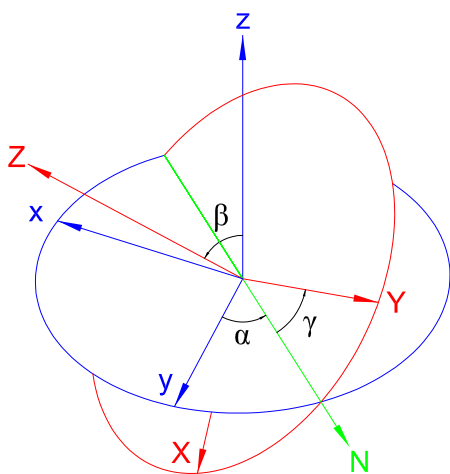
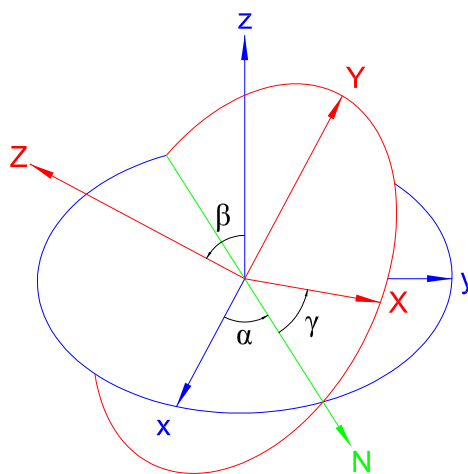
图 9.1: 欧拉角：临时轴  $N$  是  $y$  轴图 9.2: 欧拉角：临时轴  $N$  是  $x$  轴

图9.1蓝色标小写字母  $xyz$  的坐标轴为未转动的，红色标大写字母  $XYZ$  的坐标轴为转动后最终位置，绿色标字母  $N$  的轴为中间步骤。我们用  $C_k(\psi)$  表示绕  $k$  轴旋转  $\psi$  角。第一步是进动，绕  $z$  轴转动  $\alpha$  角，即  $C_z(\alpha)$ ，转动后， $y$  轴就转到了  $N$  轴位置， $z$  轴不动。第二步是章动<sup>1</sup>，绕  $N$  轴转动  $\beta$  角，即  $C_N(\beta)$ ，蓝色小写  $z$  轴转到了红色大写  $Z$  轴位置；蓝色的小写  $xy$  平面也旋转到了红色大写  $XY$  平面。第三步是自转，绕红色大写  $Z$  轴转动  $\gamma$  角，即  $C_Z(\gamma)$ ，此时就得到了坐标轴最终位置。我们将这三次转动记为

$$R(\alpha\beta\gamma) = C_Z(\gamma)C_N(\beta)C_z(\alpha). \quad (9.4-5)$$

<sup>1</sup>章动英文是 nutation，本意点头。地球除了进动（岁差），还有章动，周期大约 18.6 年。我国《周髀算经》中记载十九为一“章”，这就是此词翻译的由来。地球章动和天文观测光行差皆由英国天文学家 James Bradley 发现。

注意转动的乘积顺序不能随意改变. 但这个表示不是很方便, 需要进行化简. 我们注意到

$$C_N(\beta) = C_z(\alpha)C_y(\beta)C_z(-\alpha), \quad (9.4-6)$$

$$C_Z(\gamma) = C_z(\alpha)C_y(\beta)C_z(\gamma)C_y(-\beta)C_z(-\alpha). \quad (9.4-7)$$

代入上面的转动矩阵后, 就得到了式(9.4-4)的欧拉角表示

$$R(\alpha\beta\gamma) = C_z(\alpha)C_y(\beta)C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (9.4-8)$$

上面已经用到了绕坐标轴的旋转

$$C_z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (9.4-9)$$

在此, 我们用三维矩阵来表示纯空间转动, 就是式(9.4-4) 中右下角那个矩阵  $R_{ij}^i$ , 这里的三维转动矩阵与式(9.4-4) 有一一对应关系, 联系上下文不会引起误解.

图9.1中绿色临时轴  $N$  是  $y$  轴. 很多文献将  $N$  选为  $x$  轴, 如图9.2, 此时式(9.4-4)为

$$R(\alpha\beta\gamma) = C_z(\alpha)C_x(\beta)C_z(\gamma) = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta\sin\gamma & \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\sin\beta \\ \sin\beta\sin\gamma & \sin\beta\cos\gamma & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (9.4-10)$$

其中

$$C_x(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}. \quad (9.4-11)$$

两者没有本质差别. 两种变换方法中, 欧拉角的取值范围是:  $0 \leq \alpha, \gamma < 2\pi, 0 \leq \beta \leq \pi$ . 用欧拉角表示转动时, 当  $\beta = 0$  时, 只要  $\alpha + \gamma$  的值相等就代表同一转动, 有无穷多种表示; 同理, 当  $\beta = \pi$  时, 只要  $\alpha - \gamma$  的值相等就代表同一转动, 有无穷多种表示; 这是需要注意的.

### 9.4.1.3 伪转动

选两个惯性系, 系  $O'$  相对于  $O$  以速度  $\mathbf{v}$  运动, 这两个惯性系间的变换是伪转动<sup>2</sup>. 前面介绍的沿  $x$  轴洛伦兹变换就是最简单的伪转动. 首先, 我们选择两个坐标系的相应坐标

<sup>2</sup>boost 这个词儿翻译众多, 比如伪转动、推进、推动、平动等. 在此我们选用伪转动.

轴互相平行且正方向相同, 即  $x$  平行于  $x'$ , 等等. 选择  $x$  轴平行于  $\mathbf{v}$ . 伪转动为

$$x'^\mu = B_x(v)^\mu_\nu x^\nu. \quad (9.4-12)$$

其中  $B_x(v)$  就是式(??)中的  $\Lambda$ , 换成了英文单词 Boost 首字母来标记.

如果两惯性系  $\tilde{O}$  和  $\tilde{O}'$  的速度差  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  不与坐标轴平行, 但  $\tilde{O}$  和  $\tilde{O}'$  系中的坐标系相应轴仍旧相互平行、同向, 我们来看此时洛伦兹变换的伪转动  $B(\mathbf{v})$  是什么样子.  $\mathbf{v}$  如图9.3所示.

在  $t = 0 = t'$  时刻, 两参考系的相应坐标轴是重合的. 我们可以把  $\tilde{O}$  和  $\tilde{O}'$  系同时进行旋转, 把坐标轴  $\tilde{x}(\tilde{x}')$  旋转到的速度  $\mathbf{v}$  方向上; 即,  $X = R^{-1}\tilde{X}$  和  $X' = R^{-1}\tilde{X}'$ , 我们把  $x^\mu$  简记为  $X$ , 略去了上下标. 旋转后为  $O(O')$  系, 其坐标为  $X(X')$ , 且坐标轴  $x(x')$  平行于速度  $\mathbf{v}$ ; 为了区别起见, 我们记  $O$  和  $O'$  系的速度差为  $u$ , 方向沿  $x$  轴, 大小当然为  $|u| = |\mathbf{v}|$ ; 联系  $O$  和  $O'$  系的伪转动是  $X' = B_x(u)X$ , 即式(9.4-12). 最后, 再旋转回  $\tilde{O}$  和  $\tilde{O}'$  系.

$$X' = B_x(u)X \Rightarrow RX' = RB_x(u)X \Rightarrow \tilde{X}' = RB_x(u)R^{-1}\tilde{X}. \quad (9.4-13)$$

关键是求解旋转矩阵  $R$  的表达式.

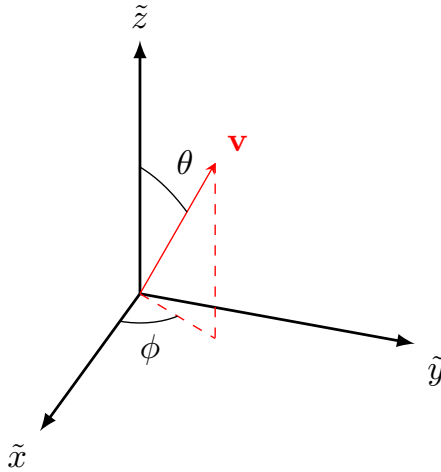


图 9.3: 两参考系速度差  $\mathbf{v}$  与坐标系的关系

我们知道, 整体矢量表示  $x^\mu \mathbf{e}_\mu$  是洛伦兹变换下的不变形式, 即  $x'^\mu \mathbf{e}'_\mu = x^\nu \mathbf{e}_\nu$ , 也就是  $\mathbf{e}'X' = \mathbf{e}X \Rightarrow (\mathbf{e}'R^{-1})(RX') = (\mathbf{e}R^{-1})(RX) \Rightarrow \tilde{\mathbf{e}}'\tilde{X}' = \tilde{\mathbf{e}}\tilde{X}$ . 基矢  $\mathbf{e}$  的旋转矩阵与坐标  $X$  的旋转矩阵互逆.

现在考虑如图9.3所示的  $\mathbf{v}$ , 纯空间固有旋转  $R^{-1}(\theta\phi)$  相当于将  $\mathbf{v}$ (对应基矢  $\mathbf{e}$ ) 旋转到  $\tilde{x}$ (对应基矢  $\tilde{\mathbf{e}}$ ) 的方向. 依照上面欧拉角的变换规则, 不难求得

$$R^{-1}(\theta\phi) = C_{\tilde{y}}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) C_{\tilde{z}}(-\phi) \Rightarrow R(\theta\phi) = C_{\tilde{z}}(\phi) C_{\tilde{y}}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right). \quad (9.4-14)$$

上式计算中用到了  $C_k^{-1}(\psi) = C_k(-\psi)$ . 则有

$$B(\mathbf{v}) = R B_x(u) R^{-1} = C_{\bar{z}}(\phi) C_{\bar{y}}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) B_x(u) C_{\bar{y}}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) C_{\bar{z}}(-\phi). \quad (9.4-15)$$

经过矩阵乘法计算可以得到

$$B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \frac{v_x}{c} & -\gamma \frac{v_y}{c} & -\gamma \frac{v_z}{c} \\ -\gamma \frac{v_x}{c} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_x^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_x v_y}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_x v_z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v_y}{c} & \frac{(\gamma-1)v_x v_y}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_y^2}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_y v_z}{v^2} \\ -\gamma \frac{v_z}{c} & \frac{(\gamma-1)v_x v_z}{v^2} & \frac{(\gamma-1)v_y v_z}{v^2} & 1 + \frac{(\gamma-1)v_z^2}{v^2} \end{pmatrix}. \quad (9.4-16)$$

其中  $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$ ; 为了和式(??)比对, 显示写出了光速  $c$ . 速度  $\mathbf{v}$  的分量可以由图9.3计算求得

$$v_x = v \sin \theta \cos \phi, \quad v_y = v \sin \theta \sin \phi, \quad v_z = v \cos \theta. \quad (9.4-17)$$

计算中需注意  $|\mathbf{u}| = |\mathbf{v}|$ , 即原来沿  $x$  轴的速度  $u$  的大小与任意方向速度  $\mathbf{v}$  的大小相等. 从上面伪转动矩阵可见它必然是对称的. 它穷尽了两惯性系  $O$  和  $O'$  间满足如下条件的坐标变换: ①两坐标系相应轴是相互平行且同向; ②两坐标系的空间坐标原点在  $t = 0 = t'$  时重合; ③两坐标系速度差  $\mathbf{v}$  是常数, 且方向任意. 符合这三条的洛伦兹变换叫作**伪转动**.

从物理思辨显然可得  $B^{-1}(\mathbf{v}) = B(-\mathbf{v})$ . 由于只是速度前添加负号, 所以式(9.4-16)只有第一行、第一列前添加负号即可, 且 00 分量符号不变; 右下角的  $3 \times 3$  矩阵因负负得正, 符号不变.

式(9.4-16)作用到时空坐标, 也常写成另外一种形式

$$ct' = \gamma \left( ct - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c} \right), \quad \mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma \frac{\mathbf{v}}{c} ct. \quad (9.4-18)$$

#### 9.4.1.4 洛伦兹矩阵分解

在狭义相对论发展的初期, 学者们就基本解决了洛伦兹变换矩阵的分解问题, 此处的叙述参考了较新的文献 [3]<sup>§4.5</sup> 以及 [7] 附录 G.9, 而没有去寻找最原始的证明.

全部三维坐标空间的固有转动群是  $SO(3)$ , 也就是所有(9.4-4)组成的集合.

**命题 9.2** 如果两个惯性坐标系  $X$  和  $X'$  由伪转动  $B(\mathbf{v})$  联系, 并且  $R \in SO(3)$ , 则  $\tilde{X} \equiv RX$  和  $\tilde{X}' \equiv RX'$  也由伪转动联系.

**证明.** 设  $X' = B(\mathbf{v})X$ , 并且  $B(\mathbf{v})$  是伪转动, 则上节证明过程可以看出存在  $R_0 \in SO(3)$  使得  $B(\mathbf{v}) = R_0 B_x(u) R_0^{-1}$ , 因此  $X' = R_0 B_x(u) R_0^{-1} X$ , 从而  $R_0^{-1} X' = B_x(u) R_0^{-1} X$ , 与  $\tilde{X} \equiv RX$  和  $\tilde{X}' \equiv RX'$  结合就给出  $R_0^{-1} R^{-1} \tilde{X}' = B_x(u) R_0^{-1} R^{-1} \tilde{X}$ . 令  $R_1 = R R_0$ , 则  $\tilde{X}' = R_1 B_x(u) R_1^{-1} \tilde{X}$ . 因此  $\tilde{X}$  和  $\tilde{X}'$  也由伪转动联系. ■



**命题 9.3** 对于任意伪转动  $B(\mathbf{v})$ , 以及任意  $R \in SO(3)$ , 都有

$$B(R\mathbf{v}) = RB(\mathbf{v})R^{-1}. \quad (9.4-19)$$

左边  $R\mathbf{v}$  的分量是  $(R\mathbf{v})^i = R^i_j v^j$ , 是三维空间矢量. 右边的  $R$  是四维时空的转动, 两者有一一对应关系(9.4-4). 联系上下文不会引起误解.

**证明.** 设有两个惯性参考系  $O$  和  $O'$ , 在它们中分别建立直角坐标系  $O-xyz$  和  $O'-x'y'z'$ ; 这两个坐标系符合上一节末尾给出的伪转动定义中的三个条件;  $O'$  系相对于  $O$  系以常速度  $\mathbf{v}$  运动,  $\mathbf{v}$  在  $O$  系的分量是  $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$ . 由于  $O$  和  $O'$  都是惯性系, 那就存在联系两个坐标系的伪转动  $B(\mathbf{v})$ , 其表达式是(9.4-16), 即  $X' = B(\mathbf{v})X$ .

设  $R$  是纯空间固有转动, 再令  $\tilde{X} = RX$ ,  $\tilde{X}' = RX'$ ; 显然  $\tilde{X}$  和  $\tilde{X}'$  都是惯性坐标系, 那么由命题9.2可知  $\tilde{X}$  和  $\tilde{X}'$  也由某个伪转动联系着. 两个惯性系参考系  $\tilde{X}$  和  $\tilde{X}'$  的速度差仍旧是  $\mathbf{v}$ , 只不过  $\mathbf{v}$  在  $\tilde{X}$  坐标系中的分量变成了  $\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{v}^i \tilde{\mathbf{e}}_i = v^i \mathbf{e}_i$ , 其中  $\tilde{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_j R^j_i$ ,  $\tilde{v}^i = R^i_k v^k$ . 纯空间转动不改变  $\mathbf{v}$  的大小, 只改变它的分量值. 联系两个坐标系  $\tilde{X}$  和  $\tilde{X}'$  的伪转动是  $B(\tilde{\mathbf{v}})$ , 其表达式仍旧是(9.4-16), 只不过, 速度的分量变成了  $\tilde{\mathbf{v}}$  的分量. 读者需注意式(9.4-16)的具体表达式是和速度的分量相关的. 因此有  $\tilde{X}' = B(\tilde{\mathbf{v}})\tilde{X} = B(R^i_j v^j)\tilde{X}$ . 再与式  $\tilde{X}' = RX' = RB(\mathbf{v})X = [RB(\mathbf{v})R^{-1}]\tilde{X}$  相比较, 就可以得到式(9.4-19). ■

**定理 9.4** 对于任意的  $\Lambda \in L_+^\uparrow$ , 存在唯一的伪转动  $B(\mathbf{v})$  以及唯一的纯空间固有转动  $R$ , 使得  $\Lambda = B(\mathbf{v})R$ , 具体表达式见证明过程.

**证明.** [甲] 如果  $\Lambda$  是伪转动, 那么只需取  $B(\mathbf{v}) = \Lambda, R = I$  即可, 唯一性证明见[丙].

[乙] 下面证明  $\Lambda$  不是伪转动情形. 已知伪转动  $B(\mathbf{v})$  是对称的, 纯空间转动  $R$  形式是(9.4-4). 把  $B(\mathbf{v})$  和  $R$  分别记成

$$B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} B^0_0 & B^0_1 & B^0_2 & B^0_3 \\ B^1_0 & B^1_1 & B^1_2 & B^1_3 \\ B^2_0 & B^2_1 & B^2_2 & B^2_3 \\ B^3_0 & B^3_1 & B^3_2 & B^3_3 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^1_1 & R^1_2 & R^1_3 \\ 0 & R^2_1 & R^2_2 & R^2_3 \\ 0 & R^3_1 & R^3_2 & R^3_3 \end{pmatrix}. \quad (9.4-20)$$

那么  $B(\mathbf{v})$  和  $R$  相乘的第一列是

$$B(\mathbf{v})R = \begin{pmatrix} B^0_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ B^1_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ B^2_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ B^3_0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \quad \text{而 } \Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^0_0 & \Lambda^0_1 & \Lambda^0_2 & \Lambda^0_3 \\ \Lambda^1_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda^2_0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \Lambda^3_0 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}. \quad (9.4-21)$$

本定理中要证明  $\Lambda = B(\mathbf{v})R$ , 根据式(9.4-16)以及上式我们可以令

$$B^0_0(\mathbf{v}) = \gamma = \Lambda^0_0, \quad B^i_0(\mathbf{v}) = -\gamma \frac{v^i}{c} = \Lambda^i_0, \quad \text{即 } v^i = -c \frac{\Lambda^i_0}{\Lambda^0_0}. \quad (9.4-22)$$

洛伦兹度规并不改变 4-矢量空间分量的正负号, 所以  $v_i = v^i$ . 利用(9.4-1)可证明  $|v| < c$ ,

$$\sum_{i=1}^3 \left( \frac{v^i}{c} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\Lambda_{i0}^i}{\Lambda_{00}^0} \right)^2 = \frac{1}{(\Lambda_{00}^0)^2} \sum_{i=1}^3 (\Lambda_{i0}^i)^2 = \frac{1}{1 + \sum_j (\Lambda_{j0}^j)^2} \sum_{i=1}^3 (\Lambda_{i0}^i)^2 < 1.$$

即上面定义的速度是亚光速的. 先求速度  $\mathbf{v}$  的大小, 会用到(9.4-1),

$$v^2 = \sum_{i=1}^3 v_i^2 = \frac{c^2}{(\Lambda_{00}^0)^2} \sum_{i=1}^3 (\Lambda_{i0}^i)^2 = \frac{c^2}{(\Lambda_{00}^0)^2} ((\Lambda_{00}^0)^2 - 1) = \frac{c^2}{\gamma^2} (\gamma^2 - 1). \quad (9.4-23)$$

有了速度分量, 根据式(9.4-16)就可以构造出一伪转动  $B(\mathbf{v})$ ,

$$\begin{aligned} B_{00}^0(\mathbf{v}) &= B_{00}^0(-\mathbf{v}) = \Lambda_{00}^0, & B_{0i}^i(\pm\mathbf{v}) &= \pm\Lambda_{0i}^i, \\ B_{ij}^i(\mathbf{v}) &= B_{ij}^i(-\mathbf{v}) = \delta_j^i + (\gamma - 1) \frac{v_i v_j}{v^2} = \delta_j^i + \frac{\Lambda_{0i}^i \Lambda_{0j}^j}{1 + \Lambda_{00}^0}. \end{aligned} \quad (9.4-24)$$

需要注意  $B_{ij}^i$  值右端  $\Lambda_{0j}^j$  中的  $j$  是上标. 我们已经构造出一个伪转动(9.4-24), 由于我们要证明  $\Lambda = B(\mathbf{v})R$ , 只需令  $R = B^{-1}(\mathbf{v})\Lambda = B(-\mathbf{v})\Lambda$ , 把式(9.4-24)带入此式就可以得到

$$R_{00}^0 = 1, \quad R_{0i}^i = R_{i0}^0 = 0, \quad R_{ij}^i = \Lambda_{ij}^i - \frac{\Lambda_{0i}^i \Lambda_{0j}^j}{1 + \Lambda_{00}^0}. \quad (9.4-25)$$

可以验证这个矩阵是正交矩阵, 可见  $R \in SO(3)$ <sup>3</sup>. 这步验证十分重要, 必不可少.

现在我们回顾一下证明的大体过程, 我们按照一定规则先构造出伪转动(9.4-24), 然后求出了一个矩阵(9.4-25), 在验证了(9.4-25)是正交矩阵后, 就证明了任意洛伦兹矩阵  $\Lambda$  都可进行分解  $\Lambda = B(\mathbf{v})R$ , 分解后的  $B(\mathbf{v})$  与  $R$  表达式见上.

〔丙〕下面证明分解的唯一性. 设  $\Lambda$  另有分解  $\Lambda = B(\mathbf{u})\tilde{R}$ , 则有  $B(\mathbf{u})\tilde{R} = B(\mathbf{v})R$ , 由此容易得到  $B(\mathbf{u}) = B(\mathbf{v})R\tilde{R}^{-1}$ , 而  $R\tilde{R}^{-1}$  依旧是纯空间转动. 由式(9.4-21)易得

$$B_{00}^0(\mathbf{u}) = \Lambda_{00}^0 = B_{00}^0(\mathbf{v}), \quad B_{0i}^i(\mathbf{u}) = \Lambda_{0i}^i = B_{0i}^i(\mathbf{v}). \quad (9.4-26)$$

这说明  $\gamma_u = \gamma_v$ ,  $\gamma_u u^i = \gamma_v v^i \Rightarrow u^i = v^i$ , 也就是  $B(\mathbf{u}) \equiv B(\mathbf{v})$ , 从而  $\tilde{R} \equiv R$ . ■

## 9.5 $SU(2)$ 与 $SO(3)$

在讨论  $SL(2, \mathbb{C})$  群之前, 讨论一下复数域上  $SU(2)$  群与实数域上的  $SO(3)$  群是大有裨益的.  $SO(3)$  群是紧致、道路连通的; 但不是单连通的, 它是两度连通的. 它的通用覆盖群是  $SU(2)$ , 此群是紧致、单连通的. 我们再次给出  $SU(2)$  的定义: 行列式为 1 的  $2 \times 2$  复么正矩阵群, 其一般形式为

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad u^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}. \quad (9.5-1)$$

<sup>3</sup>验证过程中的矩阵乘法会用到 (9.4-1), (9.4-2)和(9.4-3).

行列式等于 1, 以及么正条件 ( $u^\dagger u = I = uu^\dagger$ ) 导致

$$ad - bc = 1; \quad a^*a + b^*b = 1 = c^*c + d^*d, \quad c^*a + d^*b = 0. \quad (9.5-2)$$

在上述条件约束下,  $SU(2)$  群元只由三个实参数决定; 其一般形式为

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad aa^* + bb^* = 1, \quad a, b \in \mathbb{C}. \quad (9.5-3)$$

### 9.5.1 $SU(2)$ 与 $SO(3)$ 的同态关系

下面, 我们来证明两个群的同态关系。二维单位矩阵和 Pauli 矩阵为

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.5-4)$$

其中  $I_2$  是二维单位矩阵, 在不引起误解时也写作  $I$ ; 三个 Pauli 矩阵是无迹、厄米的。任意一个二维复数矩阵都可以由式(9.5-4)组合得到; 任意一个无迹、厄米矩阵都能由三个 Pauli 矩阵组合得到。我们定义一个无迹厄米矩阵  $h$

$$h = \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix}; \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad x, y, z \in \mathbb{R}. \quad (9.5-5)$$

需要注意: 本节中的 Pauli 矩阵仅仅是一个符号, 没有自旋的含义。我们将借助  $h$  来找到  $SU(2)$  与  $SO(3)$  的同态关系。

当  $SU(2)$  中的群元  $u$  (式(9.5-3)) 对  $h$  作么正变换时, 有

$$h' = uhu^{-1}. \quad (9.5-6)$$

新得到的  $h'$  与位型空间的一个新点  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  相对应, 并且

$$h' = \mathbf{r}' \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} z' & x' - iy' \\ x' + iy' & -z' \end{pmatrix}. \quad (9.5-7)$$

容易得到

$$x^2 + y^2 + z^2 = -\det h = -\det(uhu^{-1}) = -\det h' = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (9.5-8)$$

由上式可以看到任一个  $SU(2)$  的群元  $u$ , 作用在  $h$  上的效果是把  $\mathbf{r}$  变为  $\mathbf{r}'$ , 并且保持  $|\mathbf{r}| = |\mathbf{r}'|$ 。这个结果说明  $u$  与  $SO(3)$  中的某一个元素等价, 我们把它记为  $R_u$ 。也就是式(9.5-6)–(9.5-9)的变换过程, 可以转化为

$$\mathbf{r}' = R_u \mathbf{r} \Leftrightarrow (x', y', z')^T = R_u (x, y, z)^T. \quad (9.5-9)$$

由式(9.5-6)–(9.5-9)以及式(9.5-3)可以导出  $R_u$  的表达式

$$R_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + a^{*2} - b^{*2}) & \frac{i}{2}(a^{*2} + b^{*2} - a^2 - b^2) & -ab - a^*b^* \\ \frac{i}{2}(a^2 - b^2 - a^{*2} + b^{*2}) & \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + a^{*2} + b^{*2}) & i(a^*b^* - ab) \\ ba^* + ab^* & i(ba^* - ab^*) & aa^* - bb^* \end{pmatrix}. \quad (9.5-10)$$

可以验证  $R_u$  是实正交矩阵; 最简单的是取  $u$  为单位矩阵 (即  $a = 1, b = 0$ ), 此时  $R_u$  也是单位矩阵。可见  $R_u$  是  $SO(3)$  中的元素。

借助  $h$ , 我们找到了映射关系  $h: SU(2) \rightarrow SO(3)$ ; 有关  $h$  的运算只有加法和乘法, 故它是光滑的。下面验证此变换保持群乘法不变,  $\forall u, v \in SU(2)$

$$(uv)h(uv)^{-1} = uv(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{r})v^{-1}u^{-1} = u(\boldsymbol{\sigma} \cdot R_v \mathbf{r})u^{-1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot R_u R_v \mathbf{r} \quad (9.5-11)$$

显然, 我们还有  $(uv)h(uv)^{-1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot R_{uv} \mathbf{r}$ , 故可以得到映射  $h$  保群乘法不变, 即  $R_{uv} = R_u R_v$ 。所以  $h: SU(2) \rightarrow SO(3)$  是同态映射。

同态映射  $h$  将  $SU(2)$  中单位矩阵映射为  $SO(3)$  中的单位矩阵。除此以外,  $h$  还将负的单位矩阵映射为  $SO(3)$  中的单位矩阵; 即取  $a = -1, b = 0$  (式(9.5-3)), 带入式(9.5-10)中立即可知。  $\{I_2, -I_2\}$  是同态核, 由二维单位矩阵和负单位矩阵组成, 商群  $SU(2)/\{I_2, -I_2\}$  微分同胚于  $SO(3)$ 。

留几个练习, 请读者完成。(1) 取式(9.5-3)中  $a = \exp(-i\alpha/2), b = 0$ , 记为  $u_1(\alpha)$ ; 带入式(9.5-10), 看对应怎样的三维转动。(2) 取式(9.5-3)中  $a = \cos(\beta/2), b = -\sin(\beta/2)$ , 记为  $u_2(\beta)$ ; 带入式(9.5-10), 看对应怎样的三维转动。(3) 取  $u_3(\alpha\beta\gamma) = u_1(\alpha)u_2(\beta)u_1(\gamma)$ ; 带入式(9.5-10), 看对应怎样的三维转动。

### 9.5.2 $SU(2)$ 群表示

依照 §8.6 开头所述, 我们需要构建表示空间。因  $SU(2)$  是 2 维复矩阵群, 我们先建立一个二维复矢量空间 (还不是表示空间), 空间中的矢量有两个分量  $\xi, \zeta$ , 它们是一般的复数; 将其记为  $C^2 = \{(\xi, \zeta)^T\}$ 。定义映射  $F: SU(2) \times C^2 \rightarrow C^2$  如下

$$F\left(\begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a\xi + b\zeta \\ -b^*\xi + a^*\zeta \end{pmatrix}. \quad (9.5-12)$$

$F$  称为  $SU(2)$  在  $C^2$  上的左作用。可以验证  $F$  满足 ( $\forall u, v \in SU(2)$ )

$$F\left(uv, \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = F\left(u, F\left(v, \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right)\right); \quad F\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (9.5-13)$$

下面构造群表示空间  $V_n$ , 它是由两个复变元的  $n$  次齐次多项式组成的  $n+1$  维复线性空间。属性(9.5-13)保证了任意函数变换后仍是同次的齐次多项式, 因此表示空间满足封闭性, 也就是说  $V_n$  中矢量经历变换(9.5-12)作用后仍在  $V_n$  中。

$\xi, \zeta$  可能的齐次多项式如下,

$$\begin{aligned}
 &0 \text{ 次}; \quad 1; \quad \text{即 } \xi^0 \zeta^0 \\
 &1 \text{ 次}; \quad \xi, \zeta; \quad \text{即 } \xi^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}, \xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} \\
 &2 \text{ 次}; \quad \xi^2, \xi\zeta, \zeta^2; \quad \text{即 } \xi^{1+1} \zeta^{1-1}, \xi^{1+0} \zeta^{1-0}, \xi^{1-1} \zeta^{1+1} \\
 &\cdots; \quad \cdots; \quad \cdots \\
 &2j \text{ 次}; \quad \xi^{2j}, \dots, \zeta^{2j}; \quad \text{即 } \xi^{j+j} \zeta^{j-j}, \xi^{j+(j-1)} \zeta^{j-(j-1)}, \dots, \xi^{j+(-j)} \zeta^{j-(-j)}
 \end{aligned} \tag{9.5-14}$$

$2j$  次齐次多项式共有  $2j+1$  个线性无关项。所以欲求  $n$  维 (整数) 表示, 可取  $2j = n-1$ 。我们将式(9.5-14)中基矢略作改变, 以更加适合量子力学。

$$B_m^j(\xi, \zeta) = \frac{\xi^{j-m} \zeta^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} \tag{9.5-15}$$

我们曾经约定小写字母  $m$  一般只当作流形的维数; 此处的角标  $m$  在量子力学中表示磁量子数, 故用之。指标的取值范围是:  $j = (n-1)/2$ , 即  $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ ;  $m = j, j-1, j-2, \dots, -j+1, -j$ 。现在我们用式(9.5-15)当成  $SU(2)$  群表示空间的基矢量, 也就是说  $V_n = \text{Span}\{B_m^j(\xi, \zeta)\}$ ; 然后运用式(9.5-12), 便可一次求出各种维数的表示。

**例 9.5** 量子物理中单粒子态函数变换。

考虑量子物理中一个单粒子态  $|\psi\rangle$ , 在位型空间表象中态函数是  $\psi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \psi \rangle$ ; 它是 Hilbert 空间的标量函数场。用  $Q$  表示某种对称作用, 它会把态函数作整体变换; 变换后在新的位置  $\mathbf{r}' = Q\mathbf{r}$  的态函数与老位置的态函数是相等的, 这是对称变换的要求; 用数学公式表示为

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}') \tag{9.5-16}$$

我们将新旧位置关系 ( $\mathbf{r}' = Q\mathbf{r}$ ) 带入上式, 有

$$\psi(\mathbf{r}) = \psi'(Q\mathbf{r}) \Leftrightarrow \psi(Q^{-1}\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}). \tag{9.5-17}$$

在对称变换  $Q$  的作用下, 新的态矢量  $\psi'$  可用一个函数变换算符来表示, 即

$$\psi(Q^{-1}\mathbf{r}) = \psi'(\mathbf{r}) \equiv \hat{D}(Q)\psi(\mathbf{r}). \tag{9.5-18}$$

上式便是态矢量在对称变换下的变化关系式。 ■

前面我们已经指出  $SU(2)$  群元作用在位置矢量  $\mathbf{r}$  上相当于空间转动, 自然是一种对称变换; 故可以式(9.5-18)。而基矢量(9.5-15)在物理上就是粒子角动量 (包括自旋角动量) 的态矢量 (Hilbert 空间矢量)。我们将式(9.5-18)中的  $Q$  取为  $SU(2)$  中的群元, 由式(9.5-12)可得 (注意  $u^\dagger = u^{-1}$ )

$$\begin{aligned}
 \hat{D}(u)B_m^j(\xi, \zeta) &= B_m^j \left( u^\dagger \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = B_m^j \left( \begin{pmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \zeta \end{pmatrix} \right) = B_m^j \left( \begin{pmatrix} a^*\xi - b\zeta \\ b^*\xi + a\zeta \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{(a^*\xi - b\zeta)^{j-m} (b^*\xi + a\zeta)^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}}.
 \end{aligned} \tag{9.5-19}$$

将上式用基矢  $B_{m'}^j(\xi, \zeta)$  展开, 得到的展开系数  $D_{m'm}^j(u)$  即为群表示矩阵,

$$\hat{D}(u)B_m^j(\xi, \zeta) = \sum_{m'=-j}^j B_{m'}^j(\xi, \zeta)D_{m'm}^j(u). \quad (9.5-20)$$

我们要处理式(9.5-19)最后一项, 需用二项式展开定理,

$$(x+y)^r = \sum_{s=0}^r \frac{r!}{s!(r-s)!} x^s y^{r-s}. \quad (9.5-21)$$

利用上式, 式(9.5-19)展开后, 得

$$\begin{aligned} \hat{D}(u)B_m^j(\xi, \zeta) &= \frac{(a^*\xi - b\zeta)^{j-m}(b^*\xi + a\zeta)^{j+m}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} \\ &= \sum_{p=0}^{j-m} \sum_{q=0}^{j+m} (-)^{j-m-p} \frac{(j-m)!(j+m)!}{p!(j-m-p)!q!(j+m-q)!} \frac{(a^*\xi)^p (b\zeta)^{j-m-p} (b^*\xi)^q (a\zeta)^{j+m-q}}{\sqrt{(j-m)!(j+m)!}} \\ &= \sum_{p=0}^{j-m} \sum_{q=0}^{j+m} \frac{(-)^{j-m-p} \sqrt{(j-m)!(j+m)!}}{p!(j-m-p)!q!(j+m-q)!} a^{*p} a^{j+m-q} b^{*q} b^{j-m-p} \xi^{p+q} \zeta^{2j-p-q}. \end{aligned}$$

对上式最后一行的求和指标作代换  $m' = j - p - q$ , 继续计算有

$$\hat{D}(u)B_m^j(\xi, \zeta) = \sum_{p=0}^{j-m} \sum_{m'=-j}^j \frac{(-)^{j-m-p} \sqrt{(j-m)!(j+m)!} \xi^{j-m'} \zeta^{j+m'}}{p!(j-m-p)!(j-p-m')!(m+p+m')!} a^{*p} a^{m+p+m'} b^{*j-p-m'} b^{j-m-p}$$

将上式的求和符号作调换, 即

$$\sum_{p=0}^{j-m} \sum_{m'=-j}^j = \sum_{m'=-j}^j \sum_p \quad (9.5-22)$$

作调换之后  $p$  的求和范围不易说清楚, 好在分母上有四个阶乘, 我们将  $p$  的取值限定为将四个阶乘取值“有意义”的最大范围, “有意义”是指阶乘字不为负数即可。继续计算有

$$\begin{aligned} \hat{D}(u)B_m^j(\xi, \zeta) &= \sum_{m'=-j}^j \sum_p \frac{(-)^{j-m-p} \sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{p!(j-m-p)!(j-p-m')!(m+p+m')!} \\ &\quad \times a^{*p} a^{m+p+m'} b^{*j-p-m'} b^{j-m-p} \times B_{m'}^j(\xi, \zeta). \end{aligned} \quad (9.5-23)$$

由上式可得  $SU(2)$  群的矩阵表示 ( $u$  表示式(9.5-3))

$$\begin{aligned} D_{m'm}^j(u) &= \sum_p \frac{(-)^{j-m'-p} \sqrt{(j-m)!(j+m)!(j-m')!(j+m')!}}{p!(j-m-p)!(j-m'-p)!(m+m'+p)!} \\ &\quad \times a^{*p} a^{m+m'+p} b^{*j-m'-p} b^{j-m-p}. \end{aligned} \quad (9.5-24)$$

为了调整表示的相位, 式(9.5-24)中的结果已对式(9.5-23) (记作  ${}_oD_{m'm}^j$ ) 作了一次相似变换, 相当于乘上因子  $(-)^{m-m'}$ 。这个相似变换的矩阵是  $X_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}i^{-2\mu}$ , 即

$$D_{m'm}^j = X_{m'\nu} {}_oD_{\nu\mu}^j X_{\mu m}^{-1} = \delta_{m'\nu} i^{-2m'} {}_oD_{\nu\mu}^j \delta_{\mu m} i^{2m} = (-1)^{(m-m')} {}_oD_{m'm}^j. \quad (9.5-25)$$

令  $j = 0$ , 则  $m = m' = p = 0$ ; 表示为  $D^0(u) = 1$ 。

令  $j = 1/2$ , 表示为  $D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}$ 。

令  $j = 1$ , 表示为

$$D^1 = \begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2 \\ -\sqrt{2}ab^* & aa^* - bb^* & \sqrt{2}ba^* \\ b^{*2} & -\sqrt{2}a^*b^* & a^{*2} \end{pmatrix}. \quad (9.5-26)$$

令  $j = 3/2$ , 表示为

$$D^{\frac{3}{2}} = \begin{pmatrix} a^3 & \sqrt{3}a^2b & \sqrt{3}ab^2 & b^3 \\ -\sqrt{3}a^2b^* & a^2a^* - 2abb^* & 2aba^* - b^2b^* & \sqrt{3}b^2a^* \\ \sqrt{3}ab^{*2} & bb^{*2} - 2aa^*b^* & aa^{*2} - 2ba^*b^* & \sqrt{3}ba^{*2} \\ -b^{*3} & \sqrt{3}a^*b^{*2} & -\sqrt{3}a^{*2}b^* & a^{*3} \end{pmatrix}. \quad (9.5-27)$$

以上矩阵的指标都是从大排到小, 比如  $j = 1$  时,  $m', m$  的排列顺序是  $1, 0, -1$ 。

从式(9.5-24)可以看出, 当  $j$  是整数时,  $D^j(u) = D^j(-u)$ ; 我们称此时的表示  $D^j(u)$  为  $SU(2)$  的偶表示, 例如  $D^0, D^1$ 。当  $j$  是半奇数时,  $D^j(u) = -D^j(-u)$ ; 我们称此时的表示  $D^j(u)$  为  $SU(2)$  的奇表示, 例如  $D^{\frac{1}{2}}, D^{\frac{3}{2}}$ 。

### 9.5.3 $SO(3)$ 群表示

$SU(2)$  群中的两个元素,  $u$  和  $-u$ , 对应  $SO(3)$  群中的一个元素, 见式(9.5-10); 这种同态关系使得  $SO(3)$  群的任意表示  $A(R_u)$  都是  $SU(2)$  群的表示  $D(u)$ , 即  $A(R_u) = D(u)$ ,

$$D(u)D(v) = A(R_u)A(R_v) = A(R_{uv}) = D(uv). \quad (9.5-28)$$

可见此表示保群乘法不变。

反之, 则未必。 $SU(2)$  群的元素  $\pm u$  对应  $SO(3)$  群中的元素  $R_u$ 。 $SU(2)$  群的偶表示  $D^j(u) = D^j(-u)$  ( $j$  是整数); 此时可令  $SO(3)$  群的表示  $A^j(R_u) = D^j(\pm u)$ , 则有,

$$A^j(R_u)A^j(R_v) = D^j(\pm u)D^j(\pm v) = D^j(\pm uv) = A^j(R_{uv}) = A^j(R_u R_v). \quad (9.5-29)$$

由上式可见: 偶表示保持  $SO(3)$  的群乘法不变, 是它的表示。

当  $j$  是半奇数时,  $SU(2)$  群的奇表示  $D^j(u) = -D^j(-u)$ , 很明显  $D^j(u) \neq D^j(-u)$ ; 而根据对应关系,  $D^j(u)$  和  $D^j(-u)$  都与  $SO(3)$  群的  $A^j(R_u)$  对应, 此时有  $A^j(R_u) = \pm D^j(u) = D^j(\pm u)$ ; 得到了双值表示, 它不能保持乘法不变,

$$A^j(R_u)A^j(R_v) = D^j(\pm u)D^j(\pm v) = \pm D^j(\pm uv) = \pm A^j(R_{uv}) = \pm A^j(R_u R_v). \quad (9.5-30)$$

它与群乘法规律差一个负号, 故从纯数学角度来说它不是  $SO(3)$  群的群表示。然而物理上通常会说它是“双值表示”, 例如见 [5]<sup>§7.3</sup> 定理 7.5; 采取双值表示概念是为了描述半奇数自旋 (如电子自旋)。我们不打算引入双值表示这一概念 (纯数学中没有此概念), 而用另外一个变通的方式来处理此问题, 见 §9.5.5。

#### 9.5.4 李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{so}(3)$

#### 9.5.5 经典到量子的实用性约定

在经典宏观物理中, 描述自然运动的数域是实数域  $\mathbb{R}$ ; 比如牛顿力学、电磁动力学、广义相对论等等。可能为了描述方便会引入虚数, 但这些不是必要的, 可以通过其它方式予以规避掉。

在量子世界中, 描述物理的是复数域  $\mathbb{C}$ ; 不论量子力学还是量子场论皆如此。量子物理中, 描述粒子处于何种状态需用 Hilbert 空间的态矢量; 而 Hilbert 空间本身是一种复数线性空间, 所以量子物理从定义伊始就是复数, 不是实数。描述物质运动的方程, 比如薛定谔方程等, 也无法避免地引入了虚数单位  $i$ 。

在经典物理中, 描述转动的是  $SO(3)$  群; 在宏观物理中此群的表示完全够用。当我们把  $SO(3)$  群推广到量子物理时; 前面说了  $SO(3)$  在纯粹的数学上只有整数维表示, 没有半奇数维表示, 这导致  $SO(3)$  无法描述半奇数自旋粒子 (比如电子)。必须引入数学上不存在“双值表示”才能描述。这多少有些不便!

用不那么准确的数学语言来说复数域比实数域大两倍;  $SU(2)$  群是  $SO(3)$  群的双重通用覆盖群, 两个  $SU(2)$  群元同态于一个  $SO(3)$  群元。我们 (其实是笔者自己) 引入一个人约定: 在量子物理中描述转动的是  $SU(2)$  群, 不再是  $SO(3)$  群。有了这个约定就不用再引入数学上不存在“双值表示”了。

与此类似还可约定: 在量子物理中描述洛伦兹变换的是  $SL(2, \mathbb{C})$  群, 不再是  $SO(1, 3)$  群。这两个群的关系见 §9.6。

如果愿意, 还可进一步约定: 在经典物理中用  $SO(m)$  群描述的现象, 推广到量子物理时, 采用  $SO(m)$  群的双重通用覆盖群  $Spin(m)$ , 不再采用  $SO(m)$  群。

## 9.6 $SL(2, \mathbb{C})$ 群

$SL(2, \mathbb{C})$  群是固有正时洛伦兹群  $SO(1, 3)$  的双重通用覆盖群, 我们详细研究一下。



## 9.7 狄拉克方程

### 第九章参考文献

- [1] CHANDRASEKHAR S. The Mathematical Theory of Black Holes[M]. UK: Oxford University Press, 1983 (引用页: 249).
- [2] LAWSON H B, MICHELSON M L. Spin Geometry[M]. US: Princeton University Press, 1990 (引用页: 249).
- [3] SCHECK F. Mechanics: From Newton's Laws to Deterministic Chaos[M]. 5th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2010 (引用页: 254).
- [4] STEPHANI H, et al. Exact Solutions of Einstein's Field Equations[M]. 2nd ed. UK: Cambridge University Press, 2003 (引用页: 249).
- [5] TUNG W K. Group Theory in Physics[M]. UK: World Scientific Publishing Company, 1985 (引用页: 262).
- [6] 黄宣国. 李群基础[M]. 2 版. 上海: 复旦大学出版社, 2007.
- [7] 梁灿彬, 周彬. 微分几何入门与广义相对论 (中) [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2009 (引用页: 254).