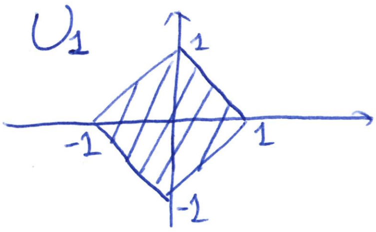
TD 1.

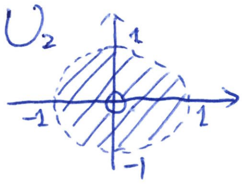
1. U_1



$\partial U_1 = \{(x,y) \mid |x|+|y|=1\}$

U_1 : fermé, borné dans $\mathbb{R}^2$ donc compact

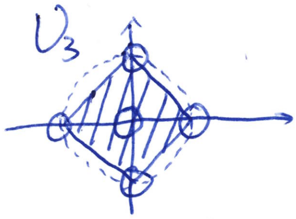
U_2



$\partial U_2 = \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\}$

U_2 : ouvert, borné mais non compact

U_3



$\partial U_3 = \{(x,y) \mid |x|+|y|=1\} \cup \{(0,0)\}$

U_3 : ni ouvert, ni fermé, ni compact.

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ln(1+n^2) = 0$, de plus cette fct est positive, donc on a

$$0 < \frac{1}{n}\ln(1+n^2) \leq m := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\ln(1+n^2)$$

D'autre part, cos est toujours borné entre -1 et 1.

On en déduit que U est borné.

• $\boxed{U \text{ fermé} \Rightarrow U^c \text{ ouvert}} \iff \boxed{U^c \text{ non ouvert} \Rightarrow U \text{ non fermé}}$

Prenons $a=(0,1)$ un point dans U^c.

On a $\frac{1}{n}\ln(1+n^2) \xrightarrow[\infty]{} 0$, et pour $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$,

on a aussi $\cos(e^{n\cos(\pi n)}) = \cos(e^{-n}) \xrightarrow[\infty]{} 1$.

Ainsi, lorsque n est grand, on a $\forall \delta > 0$, les couples

$$\left(\frac{1}{n}\ln(1+n^2), \cos(e^{n\cos(\pi n)})\right) \in B(a,\delta).$$

Donc U^c non ouvert $\Rightarrow$ U non fermé.

3. a) $$\frac{\cos(x_1)-\cos(x_2)}{|x_1|+|x_2|} \underset{(0,0)}{\sim} \frac{1-\frac{1}{2}x_1^2-(1-\frac{1}{2}x_2^2)}{|x_1|+|x_2|} = \frac{1}{2}\frac{x_2^2-x_1^2}{|x_1|+|x_1|}$$
$$= \frac{1}{2}(|x_2|-|x_1|) \xrightarrow[(0,0)]{} 0$$

b) Prenons $u_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^4})$, on a $f(u_n) = \frac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^3}\frac{1}{n^4}}{\frac{1}{n^9} + \frac{1}{n}\frac{1}{n^8}} = \frac{1}{2}$.

Donc $\frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq f(0) = 0$, f n'est pas C^0 en X_0.

4.a) Prenons la suite $u_n = (\frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^2})$, on a

$$f(u_n) = \frac{\frac{1}{n^6}\frac{1}{n^4}}{(\frac{1}{n})^{\frac{21}{2}} + \frac{1}{n^6}\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^{10}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2} + 1}$$

$1 = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq f(0) = 0$, donc f n'est pas c^0 en X_0.

b) Montrons que $\frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}}$ est borné.

On a $\lim_{x_1\to 0} \frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}} = \lim_{y\to\infty} y^2 e^{-y} = 0$, et $\lim_{x_1\to\infty} \frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}} = 0$.

Par la continuité de $\frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}}$, elle est bornée sur $(0,\infty)$.

De plus, pour $x_1 > 0$, on a

$(\frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}})' = -\frac{2}{x_1^3} e^{-\frac{1}{|x_1|}} + \frac{1}{x_1^4} e^{-\frac{1}{|x_1|}} \Rightarrow (\frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}})' = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

Donc $\frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}} \leq 4e^{-2} < 1$.

On a $|f(x) - f(x_0)| = \ln(1 + |x_2|) \leq |x_2|$, si $x_1 = 0$

$|f(x) - f(x_0)| = |x_2| \frac{1}{x_1^2} e^{-\frac{1}{|x_1|}} < |x_2|$, si $x_1 \neq 0$

Donc on a trouvé un $g(x) = |x_2|$ t.q $|f(x) - f(x_0)| \leq g(x)$.

Comme $g(x)$ est c^0 et $g(x_0) = 0$, on a f c^0 en X_0.

I. Soit $\varepsilon > 0$, pour $x_0 \in E$, on fixe d'abord $a = f(x_0) + \varepsilon$.

Comme $U = \{x \in E \mid f(x) < f(x_0) + \varepsilon\}$ est un ouvert, $\exists \delta > 0$ t.q $B(x_0, \delta) \subset U$, $\forall x \in B(x_0, \delta)$, on a $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$.

Fixons ensuite $a = f(x_0) - \varepsilon$. Comme $U' = \{x \in E \mid f(x) > f(x_0) - \varepsilon\}$ est un ouvert, $\exists \delta' > 0$, t.q $B(x_0, \delta') \subset U$. $\forall x \in B(x_0, \delta')$, on a $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$.

Prenons $\delta'' = \min(\delta', \delta)$, alors $\forall x \in B(x_0, \delta'')$

$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, autrement dit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\square$