

# Méthodes de décomposition de domaines et quelques applications pour les problèmes du contrôle

Martin J. Gander, Liu-Di Lu

Section de Mathématiques  
Université de Genève

Mars 6, 2023

# Historique de DD

## ★ Problème:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f && \text{dans } \Omega, \\ y &= g && \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{1}$$

# Historique de DD

## ★ Problème:

$$\begin{aligned}\Delta y = f &\quad \text{dans } \Omega, \\ y = g &\quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{1}$$

★ Fourier (1807) pour domaines rectangulaires et Poisson (1815) pour domaines circulaires.

# Historique de DD

## ★ Problème:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f \quad \text{dans } \Omega, \\ y &= g \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{1}$$

★ Fourier (1807) pour domaines rectangulaires et Poisson (1815) pour domaines circulaires.

★ Riemann (1851): Principe de Dirichlet:

$$J(v) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf \right) dx.$$

## ★ Problème:

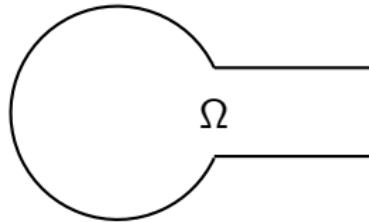
$$\begin{aligned}\Delta y = f &\quad \text{dans } \Omega, \\ y = g &\quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}\tag{1}$$

★ Fourier (1807) pour domaines rectangulaires et Poisson (1815) pour domaines circulaires.

★ Riemann (1851): Principe de Dirichlet:

$$J(v) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - vf \right) dx.$$

★ Schwarz (1870): Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren (Sur un passage de frontière par une procédure alternée)



# Interprétation physique

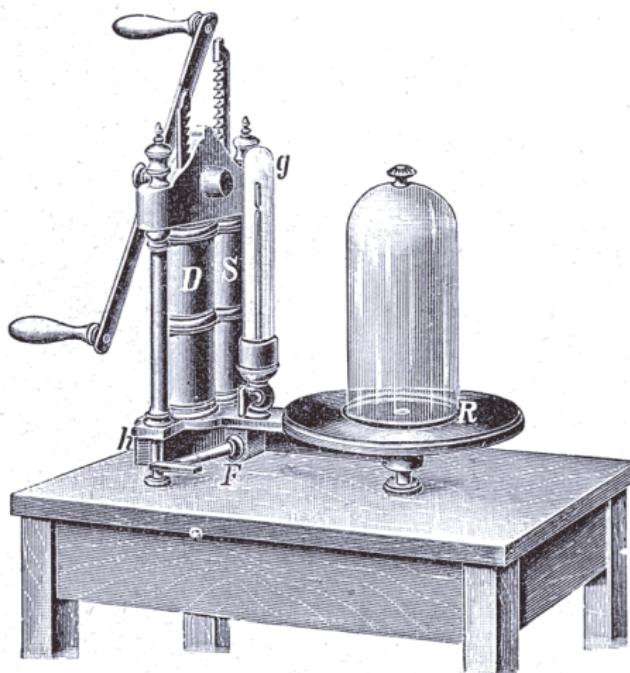
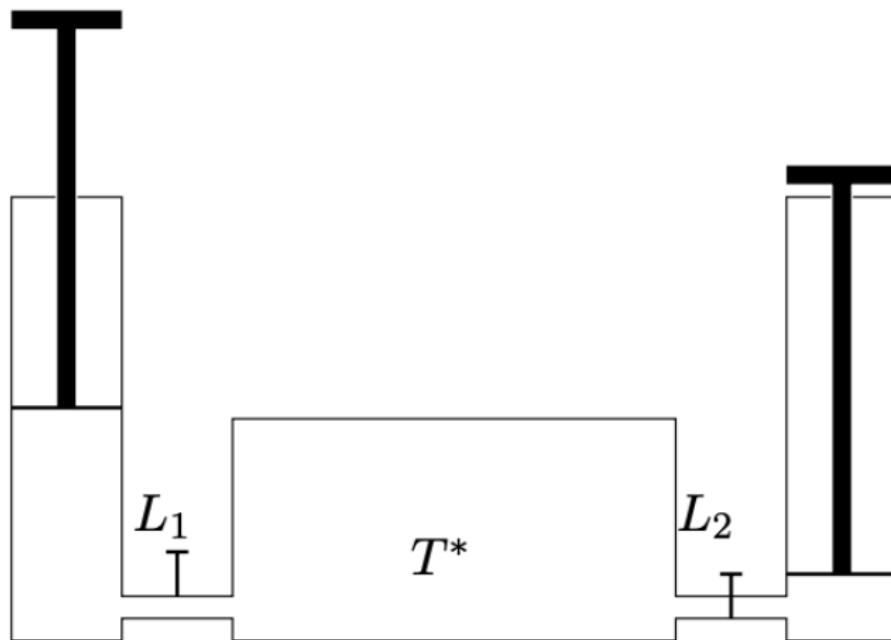


Fig. 103. Zweistielige Hahnluftpumpe

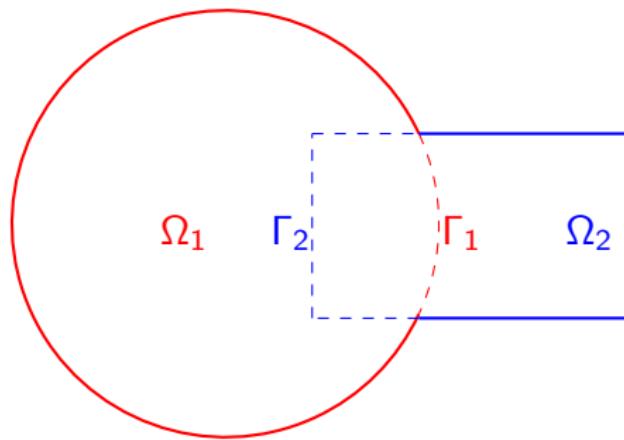
# Interprétation physique



**Figure:** Schéma d'une deux niveaux pompe à vide.

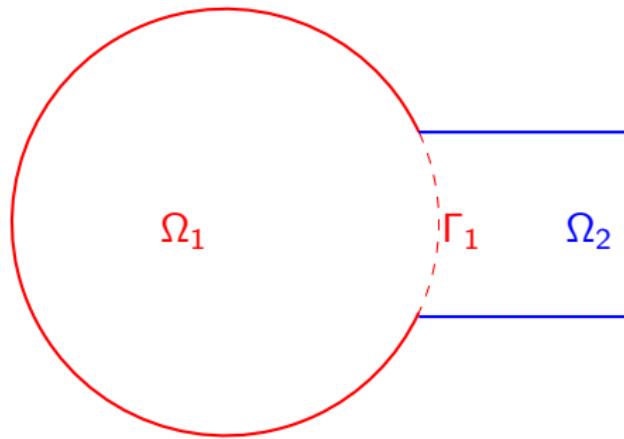
# Méthode de Schwarz Alternée

**Domaine:**  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$



# Méthode de Schwarz Alternée

**Domaine:**  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$



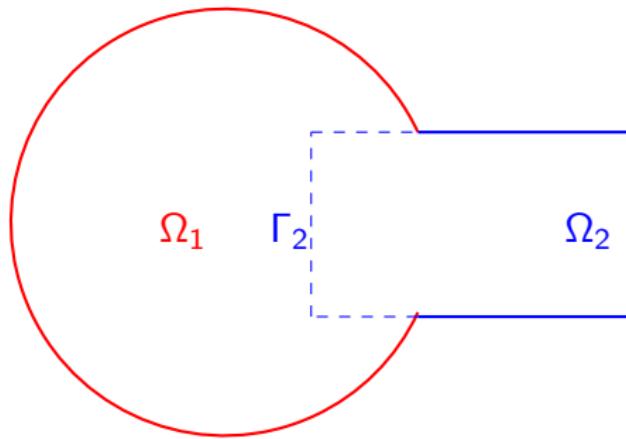
$$\Delta y_1^1 = f \quad \text{dans } \Omega_1,$$

$$y_1^1 = g \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \bar{\Omega}_1,$$

$$y_1^1 = y_2^0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

# Méthode de Schwarz Alternée

**Domaine:**  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$



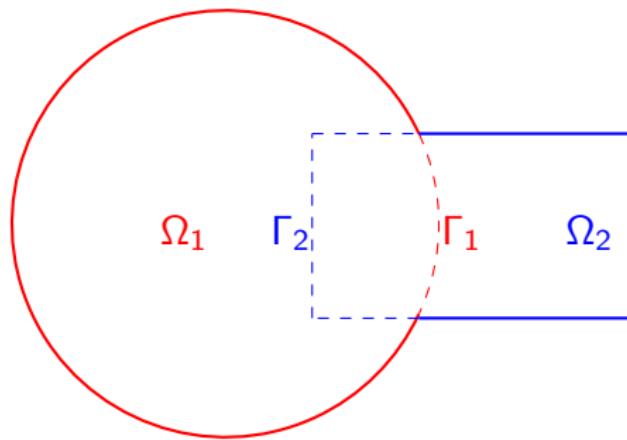
$$\Delta y_2^1 = f \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$y_2^1 = g \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \bar{\Omega}_2,$$

$$y_2^1 = y_1^1 \quad \text{sur } \Gamma_2$$

# Méthode de Schwarz Alternée

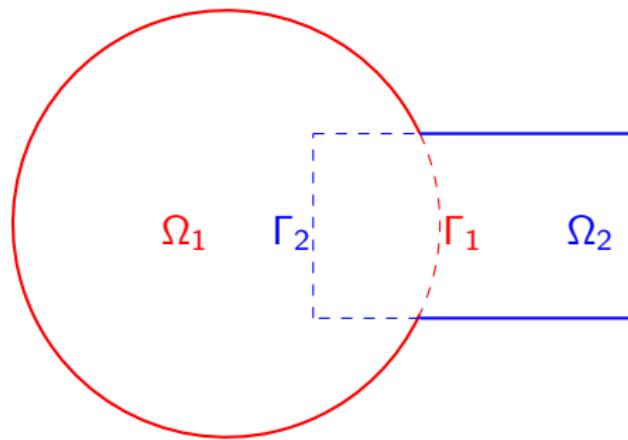
**Domaine:**  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{array}{ll} \Delta y_1^n = f & \text{dans } \Omega_1, \\ y_1^n = g & \text{sur } \partial\Omega \cap \bar{\Omega}_1, \\ y_1^n = y_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \Delta y_2^n = f & \text{dans } \Omega_2, \\ y_2^n = g & \text{sur } \partial\Omega \cap \bar{\Omega}_2, \\ y_2^n = y_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{array}$$

# Méthode de Schwarz Alternée

**Domaine:**  $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$



$$\begin{array}{ll} \Delta y_1^n = f & \text{dans } \Omega_1, \\ y_1^n = g & \text{sur } \partial\Omega \cap \bar{\Omega}_1, \\ y_1^n = y_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \Delta y_2^n = f & \text{dans } \Omega_2, \\ y_2^n = g & \text{sur } \partial\Omega \cap \bar{\Omega}_2, \\ y_2^n = y_1^n & \text{sur } \Gamma_2 \end{array}$$

**Convergence:** Schwarz a prouvé par le principe du maximum.

# Vers un outil computationnel

★ **Hilbert (1904,1905):** Méthode directe dans le calcul des variations.

# Vers un outil computationnel

- ★ **Hilbert (1904,1905):** Méthode directe dans le calcul des variations.
- ★ **Miller (1965):** La méthode de Schwarz offre des possibilités intéressantes pour les méthodes numériques.

# Vers un outil computationnel

- ★ **Hilbert (1904,1905):** Méthode directe dans le calcul des variations.
- ★ **Miller (1965):** La méthode de Schwarz offre des possibilités intéressantes pour les méthodes numériques.
- ★ **Dryja and Widlund (1987):** Une variante additive de la méthode alternée de Schwarz pour le cas de nombreuses sous-régions.

- ★ **Hilbert (1904,1905):** Méthode directe dans le calcul des variations.
- ★ **Miller (1965):** La méthode de Schwarz offre des possibilités intéressantes pour les méthodes numériques.
- ★ **Dryja and Widlund (1987):** Une variante additive de la méthode alternée de Schwarz pour le cas de nombreuses sous-régions.
- ★ **Lions (1988,1989,1990):** Sans recouvrement et Parallèle.
- ★ ...

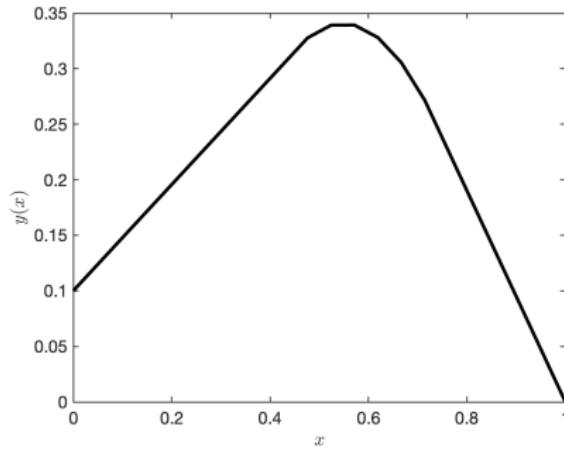
# Exemple 1D

## Problème:

$$\begin{aligned}-\partial_{xx}y &= f \quad \text{dans } \Omega = (0, 1), \\ y(0) &= 0.1, \quad y(1) = 0,\end{aligned}$$

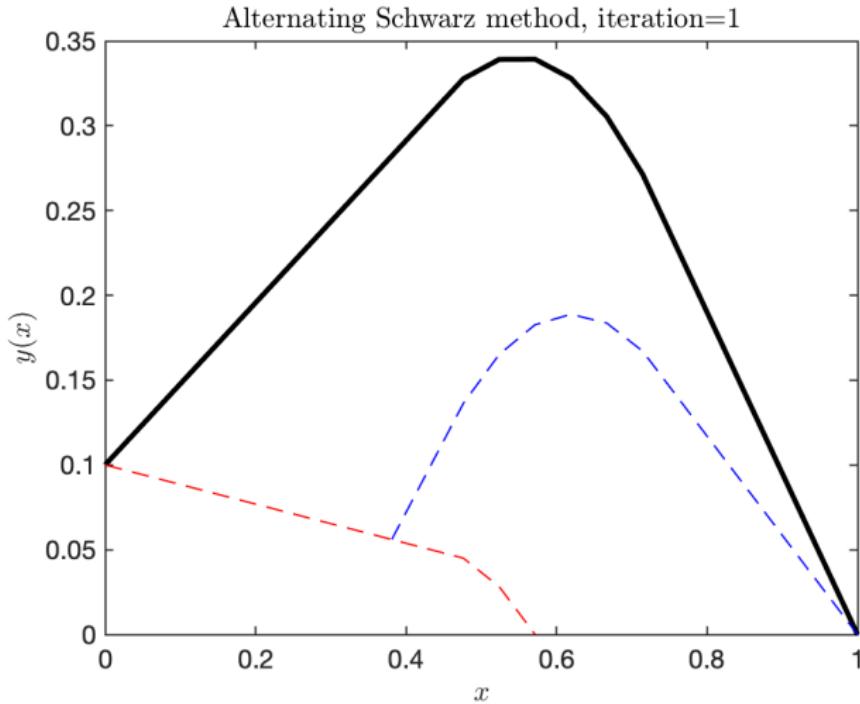
avec

$$f = \begin{cases} 5 & \text{si } 0.4 < x < 0.7, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



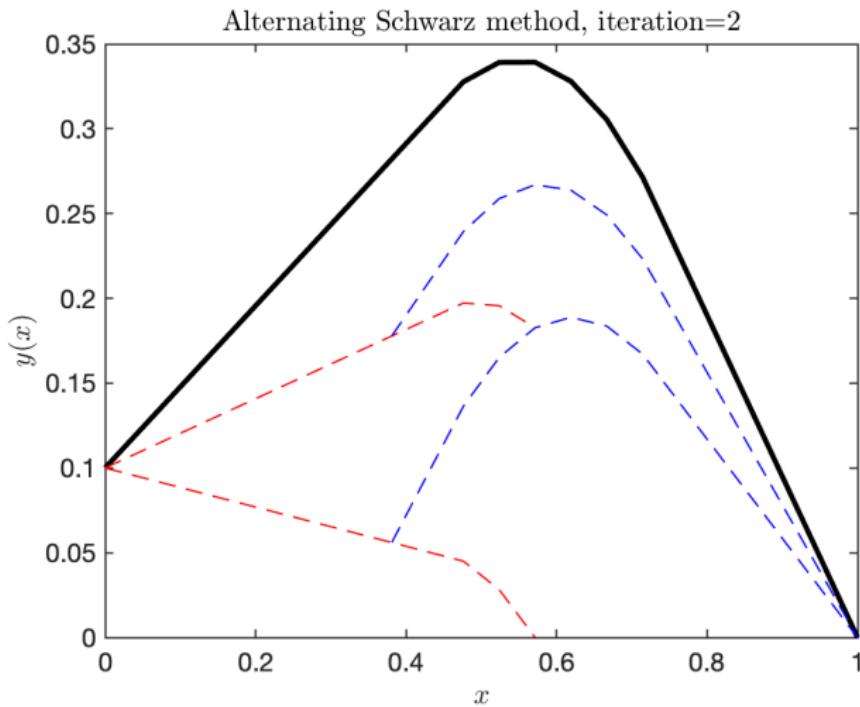
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57) = 0$ .



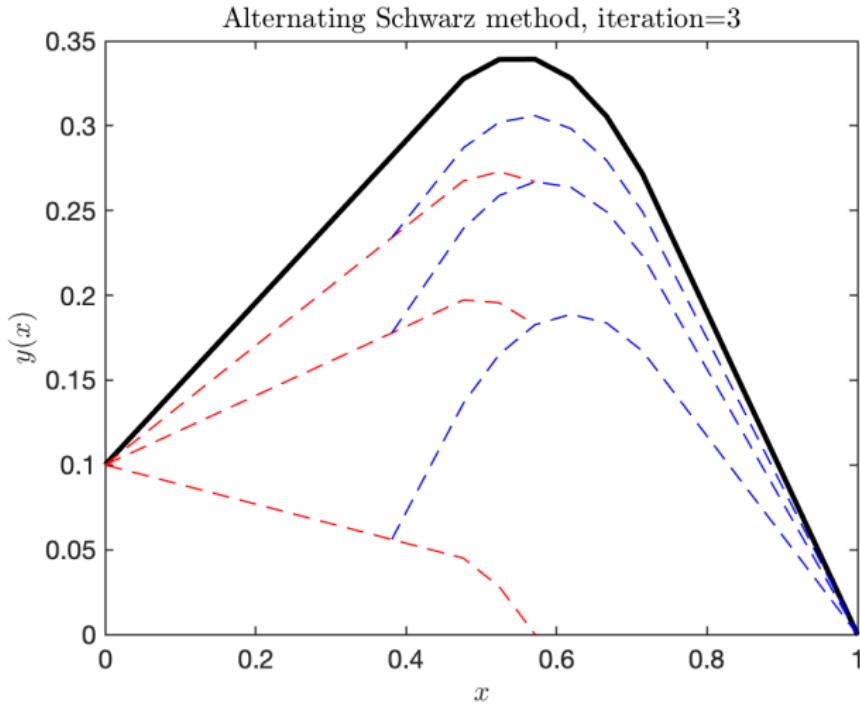
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57) = 0$ .



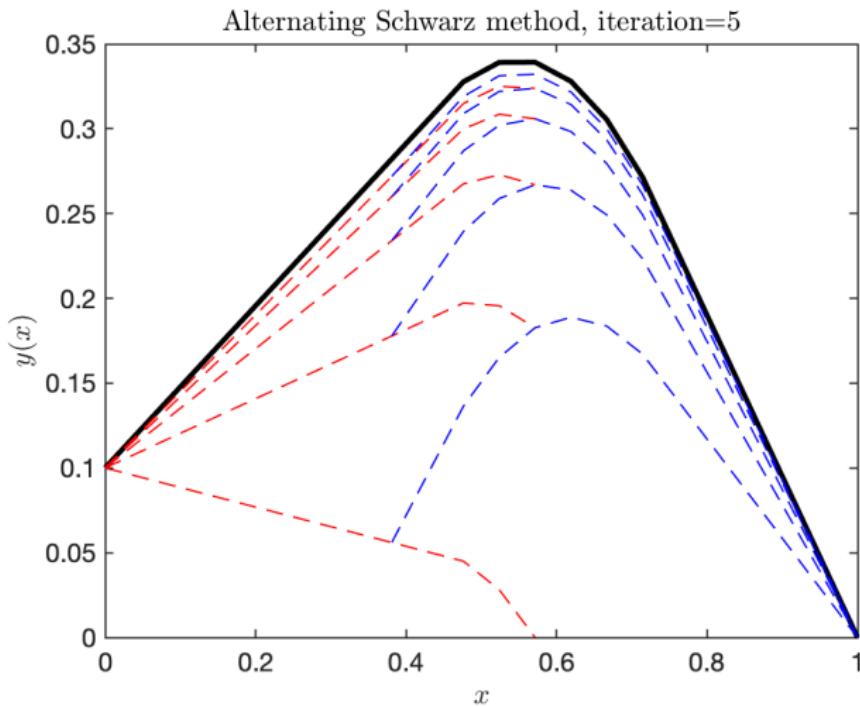
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57) = 0$ .



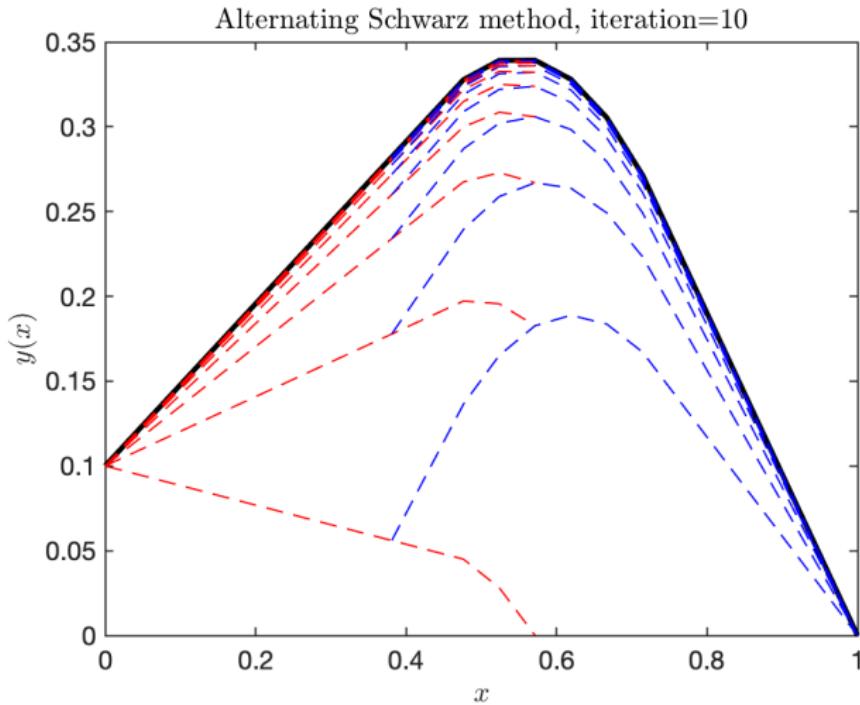
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57) = 0$ .



## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57) = 0$ .



# Analyse de l'erreur

## ► Problème:

$$\begin{aligned} -\partial_{xx}y &= f && \text{dans } \Omega = (0, 1), \\ y &= g && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur

## ► Problème:

$$\begin{aligned}-\partial_{xx}y &= f \quad \text{dans } \Omega = (0, 1), \\ y &= g \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

## ► Sous-domaines $\Omega_1 = (0, a)$ et $\Omega_2 = (b, 1)$ , $a > b$ avec une initialisation $y_2^0$ , on résout

$$\begin{aligned}-\partial_{xx}y_1^n &= f \quad \text{dans } \Omega_1, & -\partial_{xx}y_2^n &= f \quad \text{dans } \Omega_2, \\ y_1^n(0) &= g(0), & y_2^n(1) &= g(1), \\ y_1^n(a) &= y_2^{n-1}(a), & y_2^n(b) &= y_1^n(b).\end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur

## ► Problème:

$$\begin{aligned}-\partial_{xx}y &= f \quad \text{dans } \Omega = (0, 1), \\ y &= g \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

## ► Sous-domaines $\Omega_1 = (0, a)$ et $\Omega_2 = (b, 1)$ , $a > b$ avec une initialisation $y_2^0$ , on résout

$$\begin{aligned}-\partial_{xx}y_1^n &= f \quad \text{dans } \Omega_1, & -\partial_{xx}y_2^n &= f \quad \text{dans } \Omega_2, \\ y_1^n(0) &= g(0), & y_2^n(1) &= g(1), \\ y_1^n(a) &= y_2^{n-1}(a), & y_2^n(b) &= y_1^n(b).\end{aligned}$$

## ► Notons l'erreur $e_j^n := y - y_j^n$ qui satisfait

$$\begin{aligned}\partial_{xx}e_1^n &= 0 \quad \text{dans } \Omega_1, & \partial_{xx}e_2^n &= 0 \quad \text{dans } \Omega_2, \\ e_1^n(0) &= 0, & e_2^n(1) &= 0, \\ e_1^n(a) &= e_2^{n-1}(a), & e_2^n(b) &= e_1^n(b).\end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \partial_{xx} e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^n(b).$$

- ▶ On trouve les solutions  $e_1^n(x) = C_1^n x$  et  $e_2^n(x) = C_2^n(x-1)$ .

# Analyse de l'erreur

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \partial_{xx} e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^n(b).$$

- ▶ On trouve les solutions  $e_1^n(x) = C_1^n x$  et  $e_2^n(x) = C_2^n (x - 1)$ .
- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$ :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{a}, \quad C_2^n = \frac{e_1^n(b)}{b-1} = e_2^{n-1}(a) \frac{1}{b-1} \frac{b}{a}.$$

# Analyse de l'erreur

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \partial_{xx} e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^n(b).$$

- ▶ On trouve les solutions  $e_1^n(x) = C_1^n x$  et  $e_2^n(x) = C_2^n(x-1)$ .
- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$ :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{a}, \quad C_2^n = \frac{e_1^n(b)}{b-1} = e_2^{n-1}(a) \frac{1}{b-1} \frac{b}{a}.$$

- ▶ On obtient le facteur de convergence

$$e_2^n(a) = e_2^{n-1}(a) \frac{a-1}{b-1} \frac{b}{a}.$$

# Analyse de l'erreur

Facteur de convergence

$$\rho(a, b) = \frac{a - 1}{b - 1} \frac{b}{a}$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .

# Analyse de l'erreur

Facteur de convergence

$$\rho(a, b) = \frac{a - 1}{b - 1} \frac{b}{a}$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .
- ▶ La convergence est garantie s'il y a un recouvrement.

# Analyse de l'erreur

## Facteur de convergence

$$\rho(a, b) = \frac{a - 1}{b - 1} \frac{b}{a}$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .
- ▶ La convergence est garantie s'il y a un recouvrement.
- ▶ La méthode converge mieux si le recouvrement est grand.

# Analyse de l'erreur

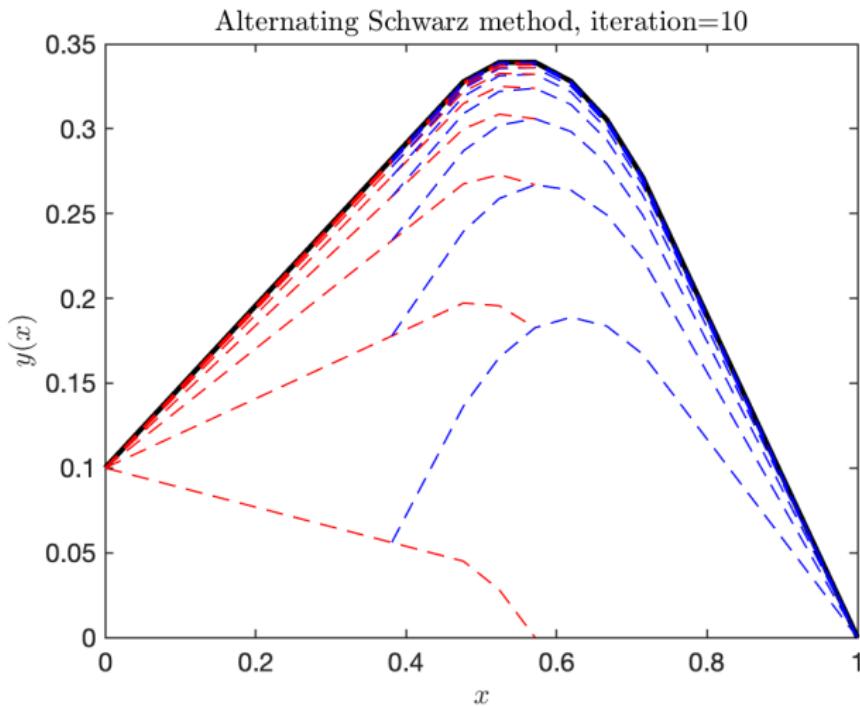
## Facteur de convergence

$$\rho(a, b) = \frac{a - 1}{b - 1} \frac{b}{a}$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .
- ▶ La convergence est garantie s'il y a un recouvrement.
- ▶ La méthode converge mieux si le recouvrement est grand.
- ▶ La méthode est un solveur direct si  $a = 1$  ou  $b = 0$ .

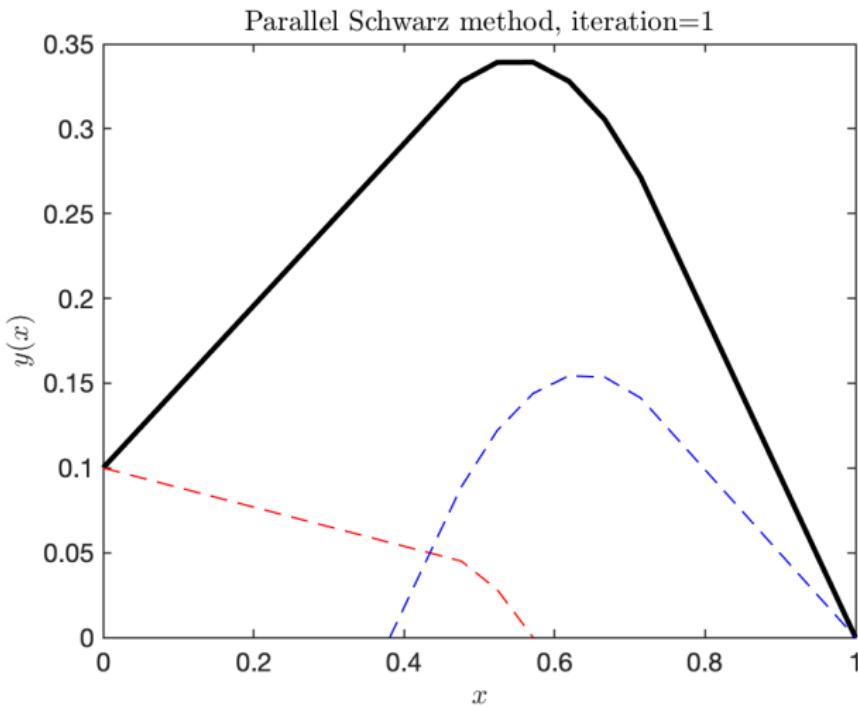
# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57) = 0$ .



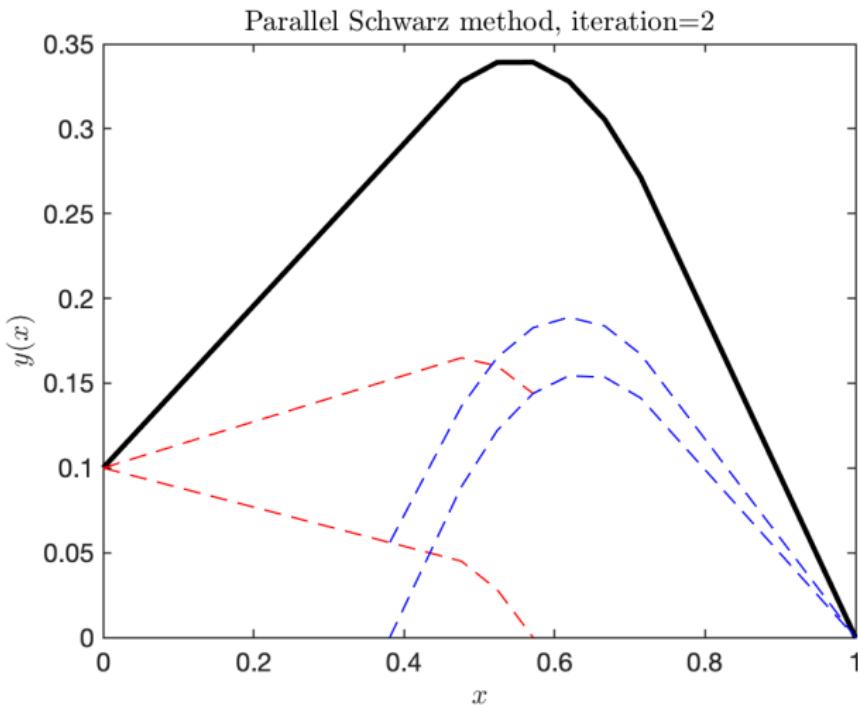
# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $y_1^0(0.38) = 0$ .



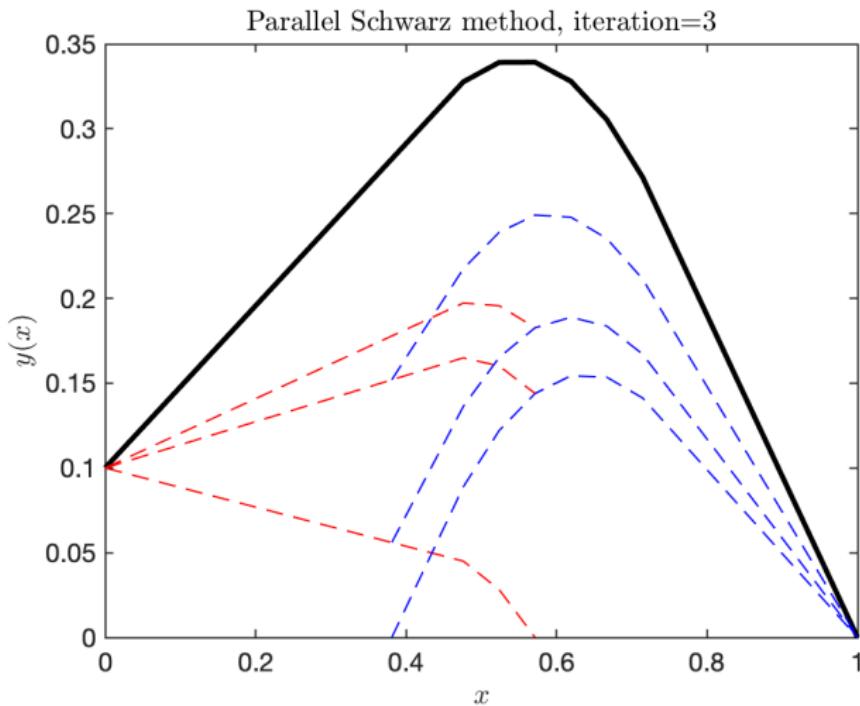
# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $y_1^0(0.38) = 0$ .



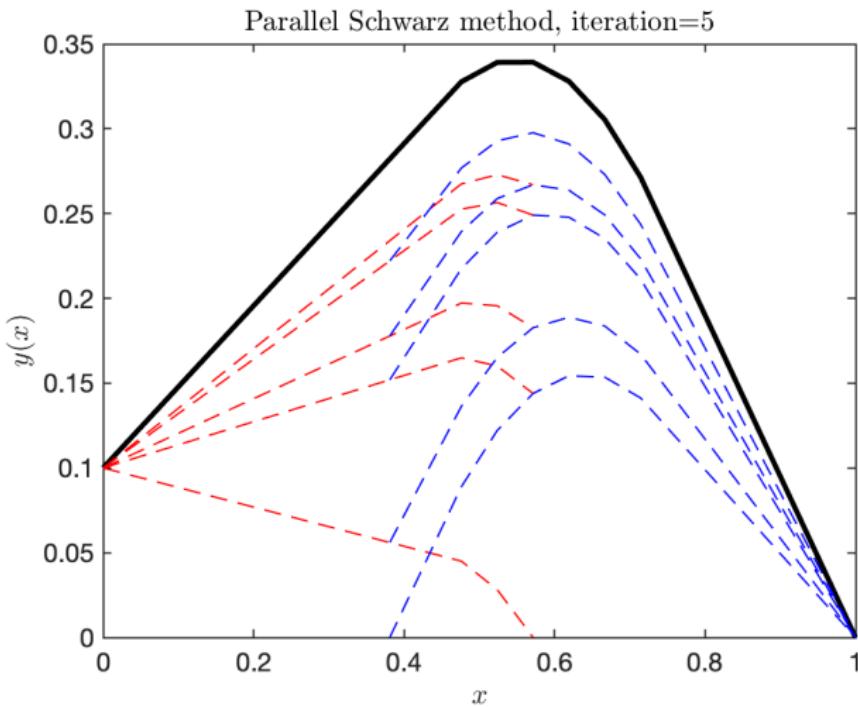
# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $y_1^0(0.38) = 0$ .



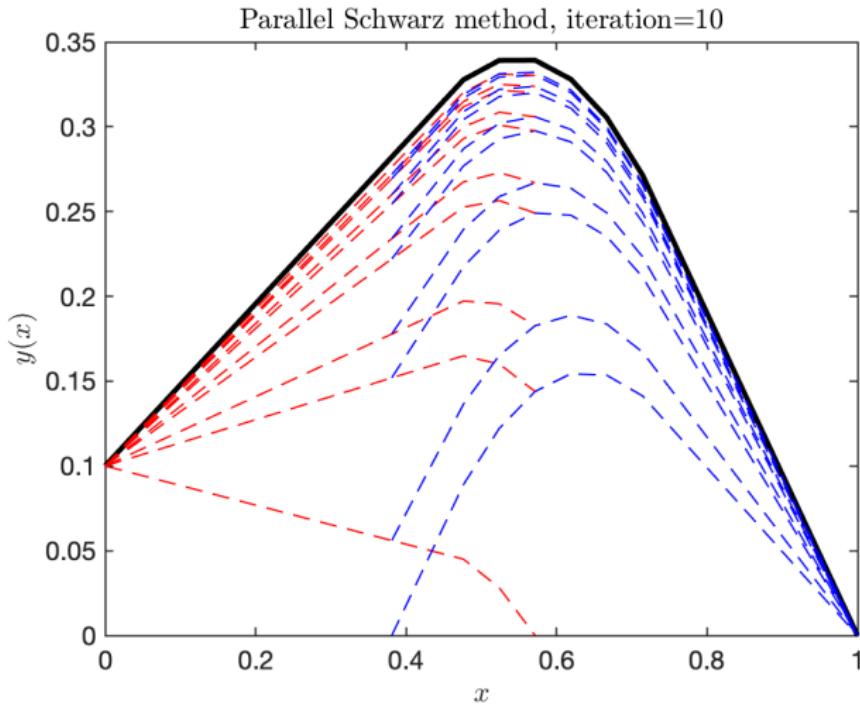
# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $y_1^0(0.38) = 0$ .



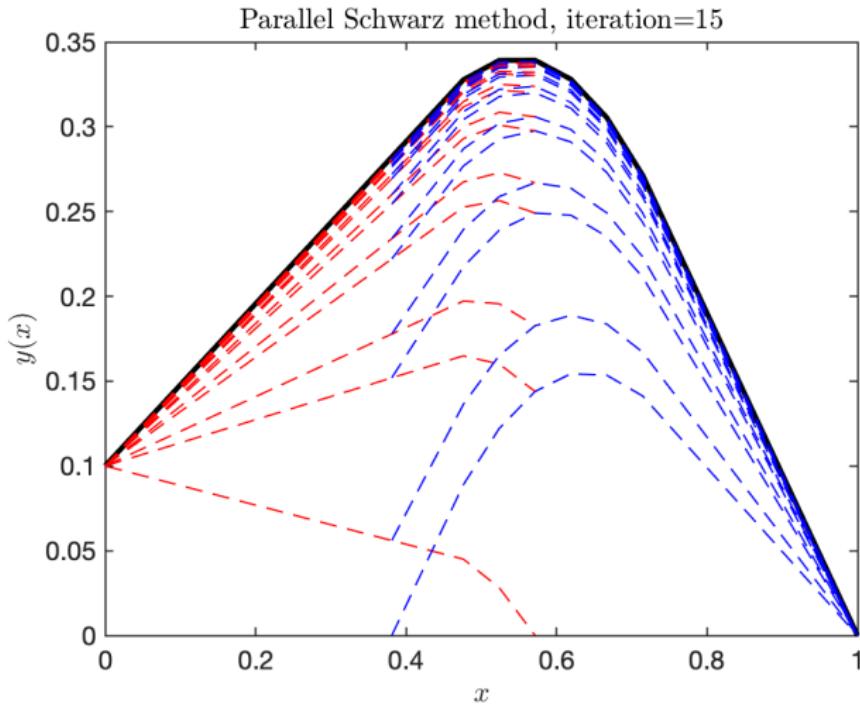
# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $y_1^0(0.38) = 0$ .



# Schwarz Parallèle

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $y_1^0(0.38) = 0$ .



# Analyse de l'erreur

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \partial_{xx} e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^{n-1}(b).$$

# Analyse de l'erreur

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \partial_{xx} e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^{n-1}(b).$$

- ▶ On trouve les solutions  $e_1^n(x) = C_1^n x$  et  $e_2^n(x) = C_2^n(x - 1)$ .
- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$ :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{a}, \quad C_2^n = \frac{e_1^{n-1}(b)}{b - 1}.$$

# Analyse de l'erreur

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \partial_{xx} e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^{n-1}(b).$$

- ▶ On trouve les solutions  $e_1^n(x) = C_1^n x$  et  $e_2^n(x) = C_2^n(x - 1)$ .
- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$ :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{a}, \quad C_2^n = \frac{e_1^{n-1}(b)}{b - 1}.$$

- ▶ On obtient le facteur de convergence

$$e_2^{n+1}(a) = e_2^{n-1}(a) \frac{a - 1}{b - 1} \frac{b}{a}.$$

## Exemple 2D

### Problème:

$$\begin{aligned}-\Delta y &= f \quad \text{dans } \Omega = (0, 1)^2, \\ y &= g \quad \text{sur } \partial\Omega.\end{aligned}$$

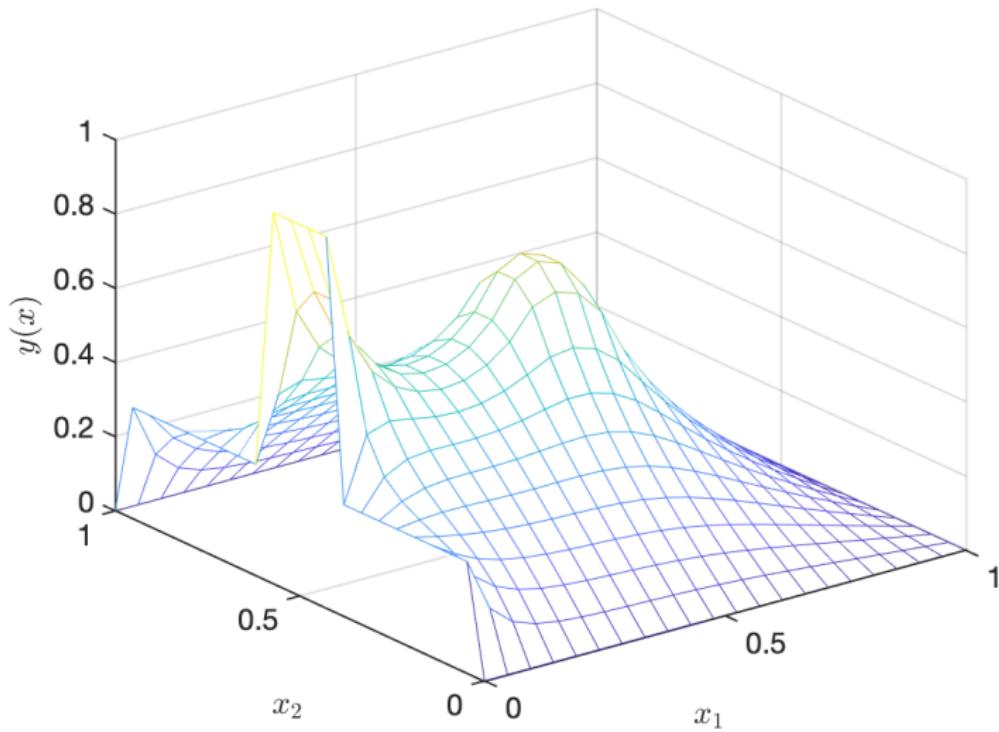
avec

$$f = \begin{cases} 50 & \text{si } (x_1, x_2) \in (0.4, 0.6)^2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$g = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = 0, 0.4 < x_2 < 0.6, \\ 0.3 & \text{si } x_1 = 0, 0 < x_2 < 0.4, 0.6 < x_2 < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

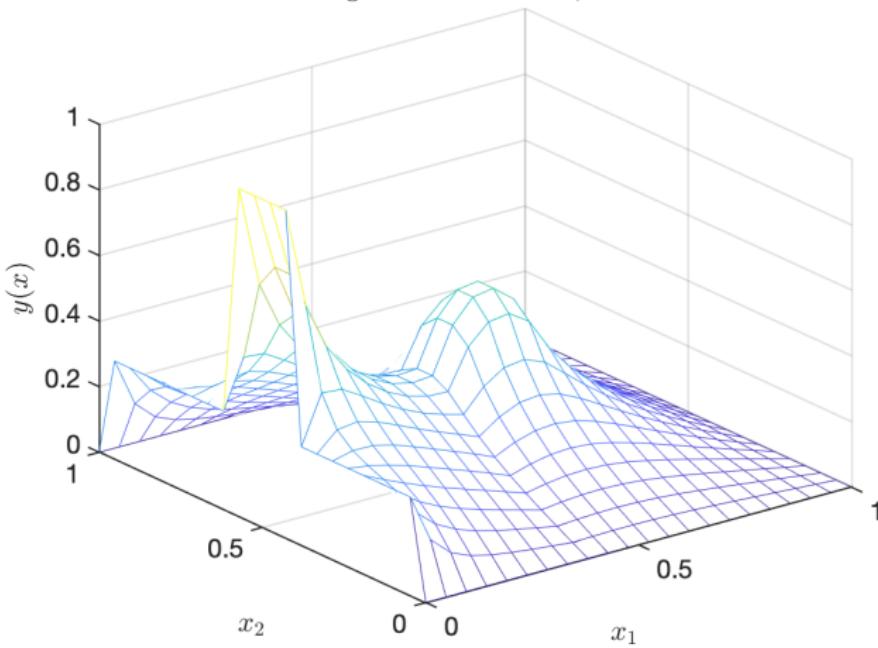
## Exemple 2D



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

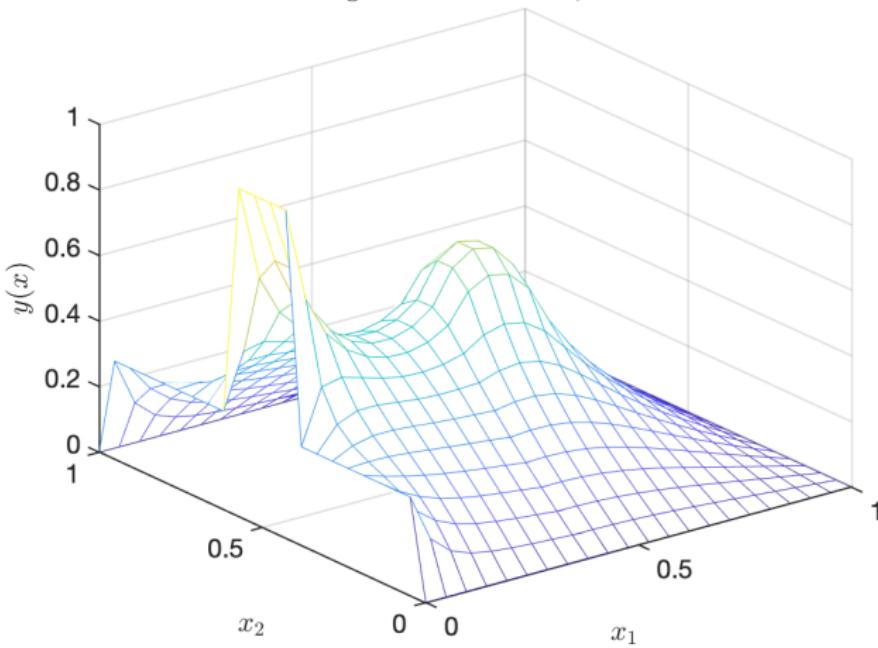
Alternating Schwarz method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

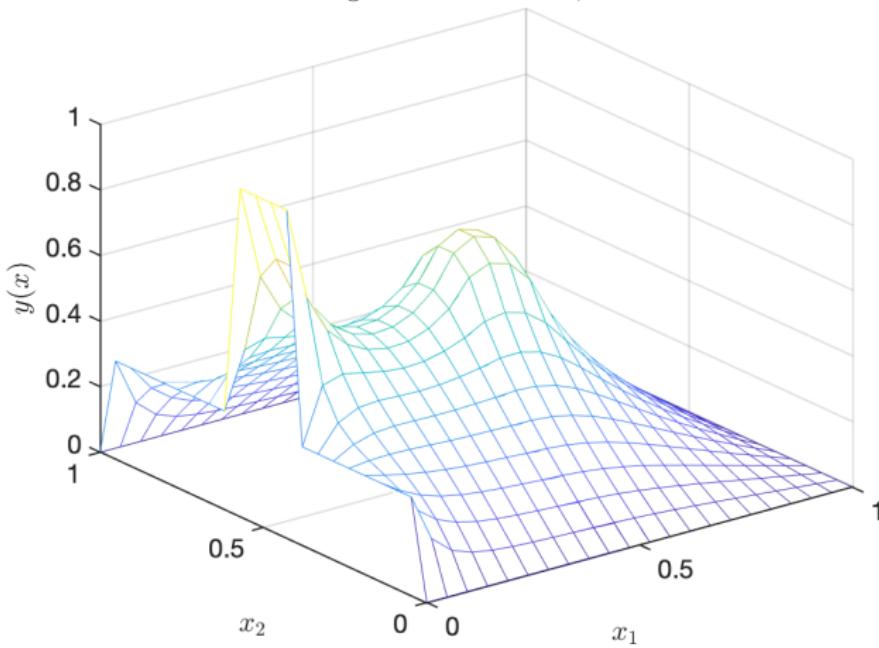
Alternating Schwarz method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

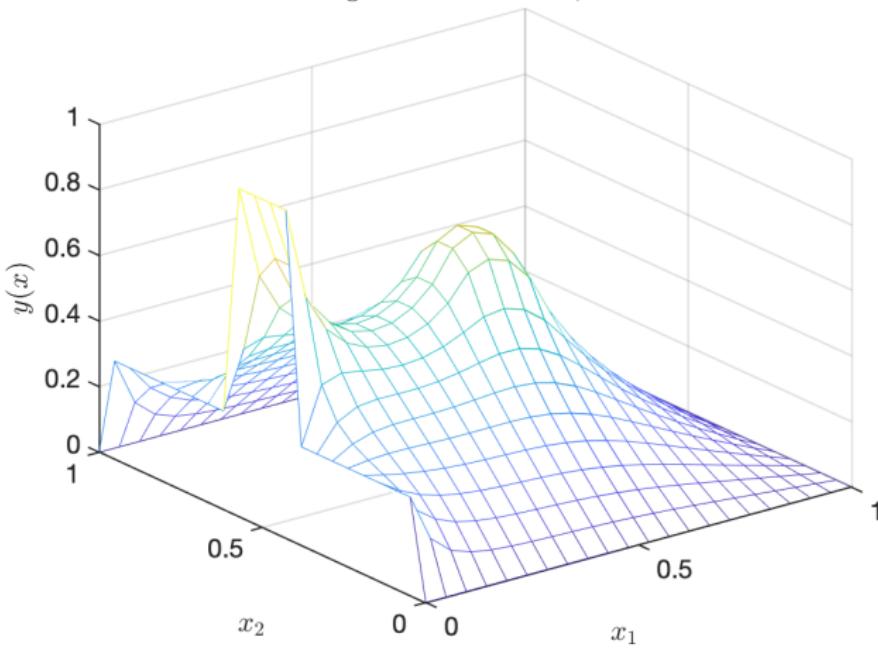
Alternating Schwarz method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

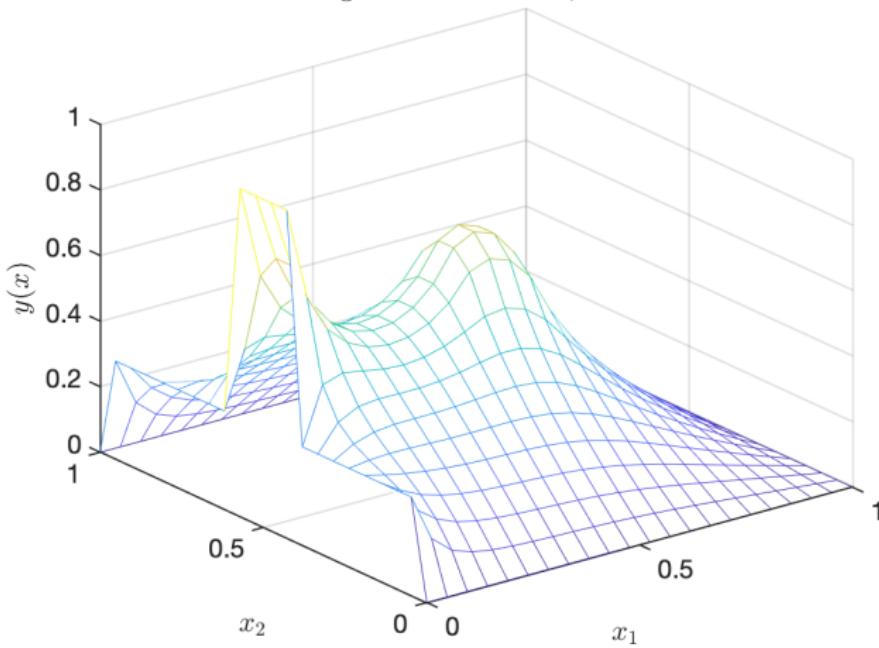
Alternating Schwarz method, iteration=5



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

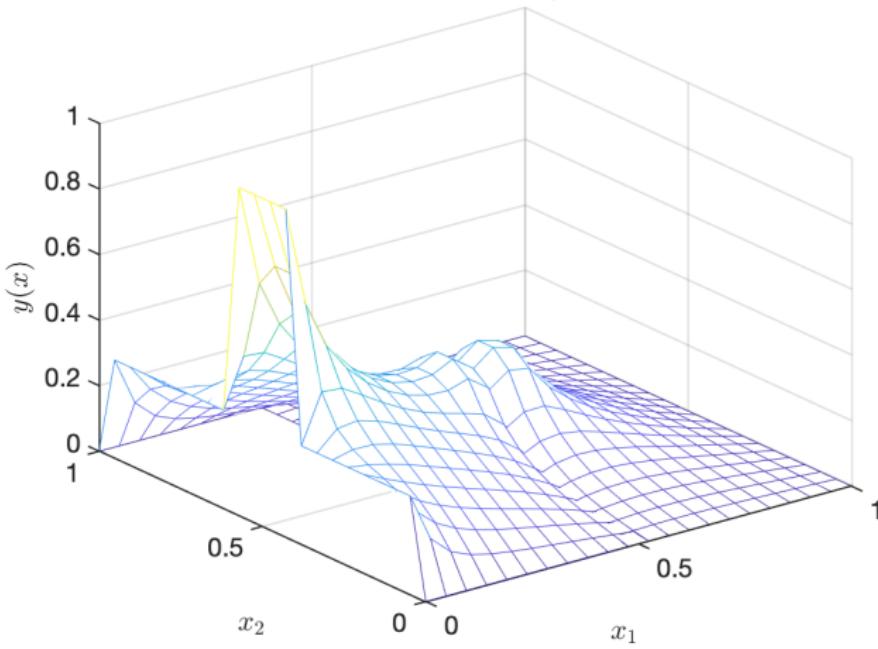
Alternating Schwarz method, iteration=10



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ .

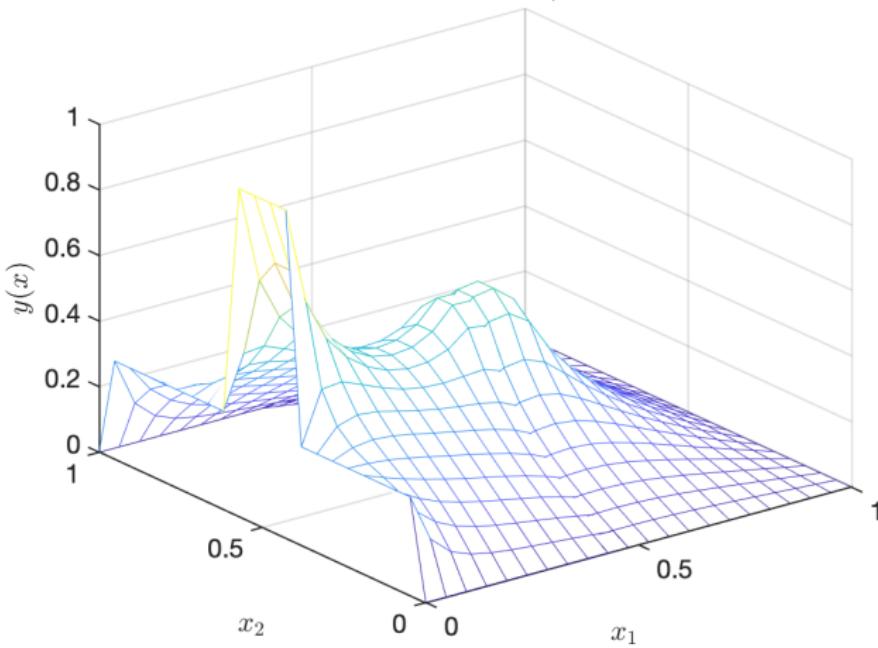
Parallel Schwarz method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ .

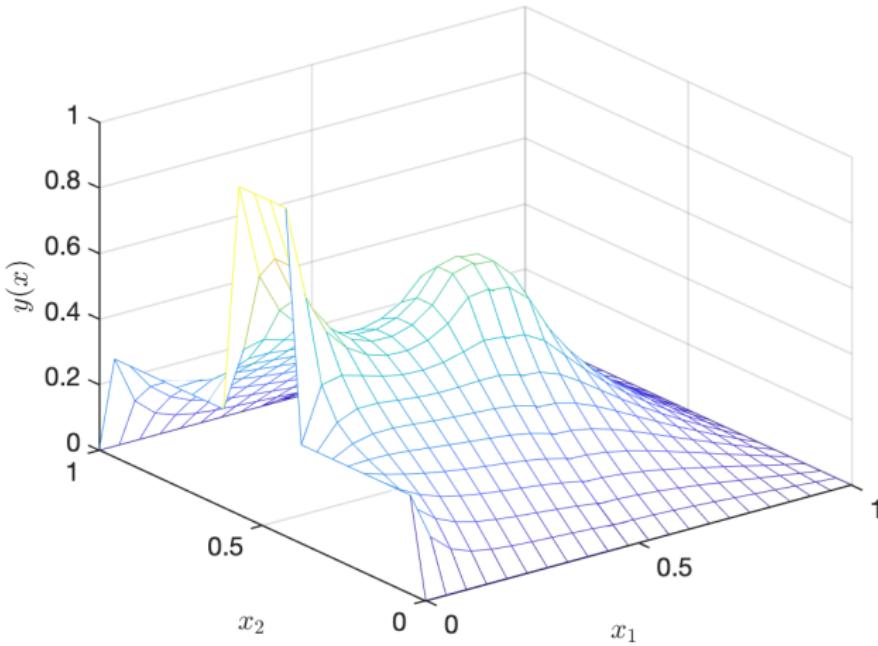
Parallel Schwarz method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ .

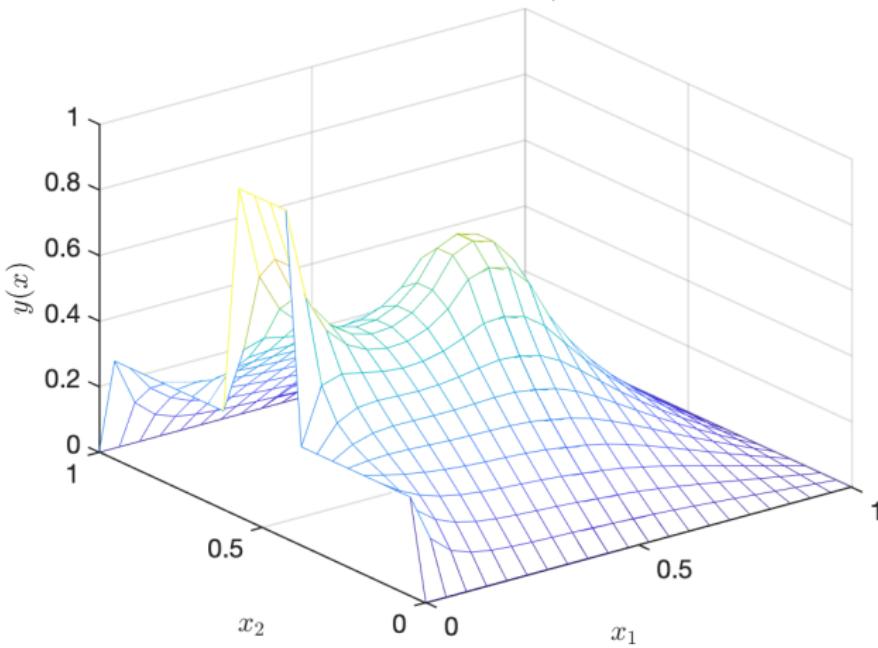
Parallel Schwarz method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ .

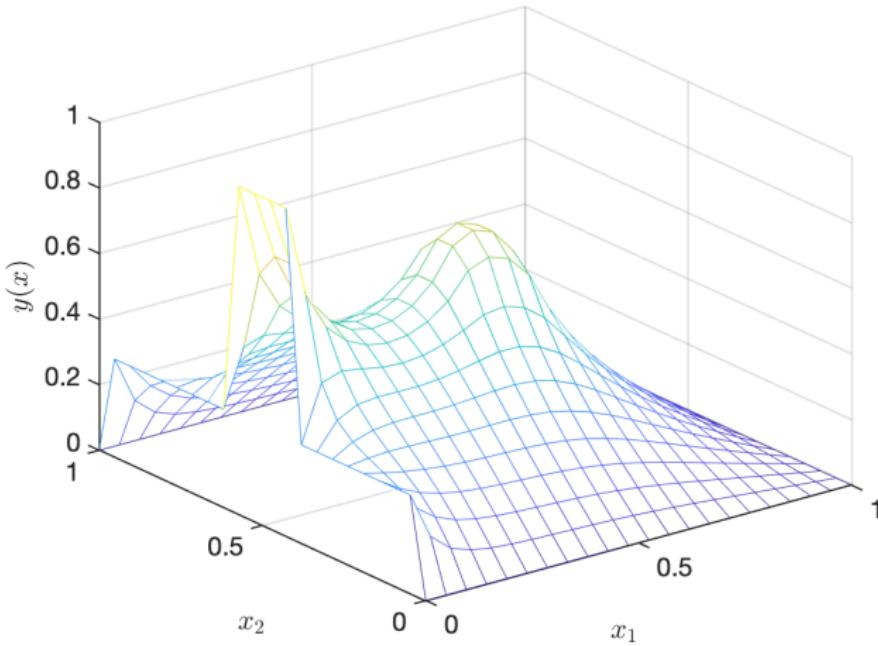
Parallel Schwarz method, iteration=5



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ .

Parallel Schwarz method, iteration=10



# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\Delta e_1^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_1, \quad \Delta e_2^n = 0 \quad \text{dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \quad e_2^n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2,$$

$$e_1^n = e_2^{n-1} \quad \text{sur } \Gamma_1, \quad e_2^n = e_1^n \quad \text{sur } \Gamma_2.$$

# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\begin{aligned} \Delta e_1^n &= 0 && \text{dans } \Omega_1, & \Delta e_2^n &= 0 && \text{dans } \Omega_2, \\ e_1^n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & e_2^n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ e_1^n &= e_2^{n-1} && \text{sur } \Gamma_1, & e_2^n &= e_1^n && \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

- ▶ À l'aide des séries de Fourier, on développe sur  $x_2$ ,

$$e_j^n(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2).$$

# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\begin{aligned}\Delta e_1^n &= 0 && \text{dans } \Omega_1, & \Delta e_2^n &= 0 && \text{dans } \Omega_2, \\ e_1^n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & e_2^n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ e_1^n &= e_2^{n-1} && \text{sur } \Gamma_1, & e_2^n &= e_1^n && \text{sur } \Gamma_2.\end{aligned}$$

- ▶ À l'aide des séries de Fourier, on développe sur  $x_2$ ,

$$e_j^n(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2).$$

- ▶ Le Laplacien devient:

$$\Delta e_j^n(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} (\partial_{x_1 x_1} - k^2) \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2) = 0.$$

# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\begin{aligned} \Delta e_1^n &= 0 && \text{dans } \Omega_1, & \Delta e_2^n &= 0 && \text{dans } \Omega_2, \\ e_1^n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & e_2^n &= 0 && \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ e_1^n &= e_2^{n-1} && \text{sur } \Gamma_1, & e_2^n &= e_1^n && \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

- ▶ À l'aide des séries de Fourier, on développe sur  $x_2$ ,

$$e_j^n(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2).$$

- ▶ Pour chaque mode de Fourier:

$$\begin{aligned} (\partial_{xx} - k^2) \hat{e}_1^n(x, k) &= 0 \text{ dans } (0, a), & (\partial_{xx} - k^2) \hat{e}_2^n(x, k) &= 0 \text{ dans } (b, 1), \\ \hat{e}_1^n(0, k) &= 0, & \hat{e}_2^n(1, k) &= 0, \\ \hat{e}_1^n(a, k) &= \hat{e}_2^{n-1}(a, k), & \hat{e}_2^n(b, k) &= \hat{e}_1^n(b, k). \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Pour chaque mode de Fourier:

$$(\partial_{xx} - k^2)\hat{e}_1^n(x, k) = 0 \text{ dans } (0, a), (\partial_{xx} - k^2)\hat{e}_2^n(x, k) = 0 \text{ dans } (b, 1),$$

$$\hat{e}_1^n(0, k) = 0, \quad \hat{e}_2^n(1, k) = 0,$$

$$\hat{e}_1^n(a, k) = \hat{e}_2^{n-1}(a, k), \quad \hat{e}_2^n(b, k) = \hat{e}_1^n(b, k).$$

- ▶ On trouve les solutions  $\hat{e}_1^n(x, k) = C_{1,k}^n \sinh(kx)$  and  $\hat{e}_2^n(x, k) = C_{2,k}^n \sinh(k(1-x))$ .

# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Pour chaque mode de Fourier:

$$(\partial_{xx} - k^2)\hat{e}_1^n(x, k) = 0 \text{ dans } (0, a), (\partial_{xx} - k^2)\hat{e}_2^n(x, k) = 0 \text{ dans } (b, 1),$$

$$\hat{e}_1^n(0, k) = 0, \quad \hat{e}_2^n(1, k) = 0,$$

$$\hat{e}_1^n(a, k) = \hat{e}_2^{n-1}(a, k), \quad \hat{e}_2^n(b, k) = \hat{e}_1^n(b, k).$$

- ▶ On trouve les solutions  $\hat{e}_1^n(x, k) = C_{1,k}^n \sinh(kx)$  and  $\hat{e}_2^n(x, k) = C_{2,k}^n \sinh(k(1-x))$ .
- ▶ On évalue les coefficients  $C_{1,k}^n$  et  $C_{2,k}^n$

$$C_{1,k}^n = \frac{\hat{e}_2^{n-1}(a, k)}{\sinh(ka)}, \quad C_{2,k}^n = \frac{\hat{e}_1^n(b, k)}{\sinh(k(1-b))} = \frac{\hat{e}_2^{n-1}(a, k)}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$

# Analyse de l'erreur 2D

- ▶ Pour chaque mode de Fourier:

$$(\partial_{xx} - k^2)\hat{e}_1^n(x, k) = 0 \text{ dans } (0, a), (\partial_{xx} - k^2)\hat{e}_2^n(x, k) = 0 \text{ dans } (b, 1),$$

$$\hat{e}_1^n(0, k) = 0, \quad \hat{e}_2^n(1, k) = 0,$$

$$\hat{e}_1^n(a, k) = \hat{e}_2^{n-1}(a, k), \quad \hat{e}_2^n(b, k) = \hat{e}_1^n(b, k).$$

- ▶ On trouve les solutions  $\hat{e}_1^n(x, k) = C_{1,k}^n \sinh(kx)$  and  $\hat{e}_2^n(x, k) = C_{2,k}^n \sinh(k(1-x))$ .
- ▶ On évalue les coefficients  $C_{1,k}^n$  et  $C_{2,k}^n$

$$C_{1,k}^n = \frac{\hat{e}_2^{n-1}(a, k)}{\sinh(ka)}, \quad C_{2,k}^n = \frac{\hat{e}_1^n(b, k)}{\sinh(k(1-b))} = \frac{\hat{e}_2^{n-1}(a, k)}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$

- ▶ On obtient le facteur de convergence

$$\hat{e}_2^n(a, k) = \hat{e}_2^{n-1}(a, k) \frac{\sinh(k(1-a))}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$

# Analyse de l'erreur 2D

## Facteur de convergence

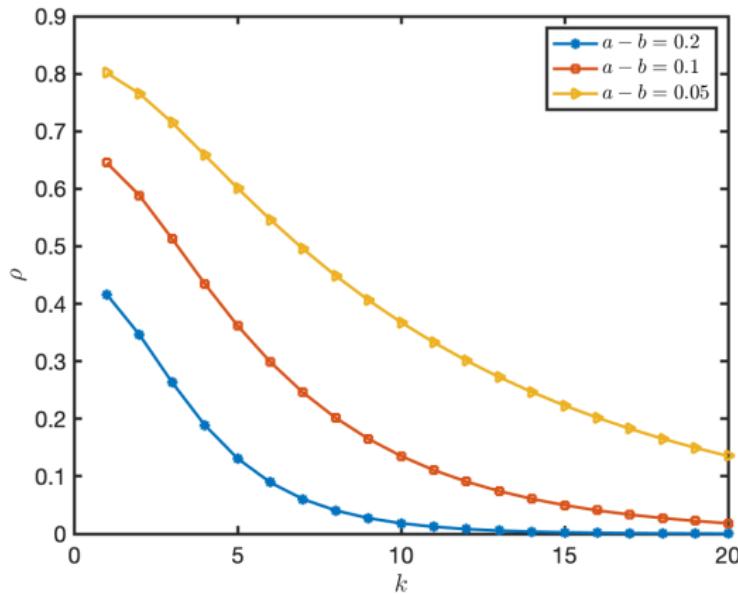
$$\rho(k, a, b) = \frac{\sinh(k(1-a))}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .
- ▶ La convergence est garantie s'il y a un recouvrement.
- ▶ La méthode converge mieux si le recouvrement est grand.
- ▶ La méthode est un solveur direct si  $a = 1$  ou  $b = 0$ .

# Analyse de l'erreur 2D

## Facteur de convergence

$$\rho(k, a, b) = \frac{\sinh(k(1-a))}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$



# Analyse de l'erreur 2D

## Facteur de convergence

$$\rho(k, a, b) = \frac{\sinh(k(1-a))}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .
- ▶ La convergence est garantie s'il y a un recouvrement.
- ▶ La méthode converge mieux si le recouvrement est grand.
- ▶ La méthode est un solveur direct si  $a = 1$  ou  $b = 0$ .
- ▶ Chaque mode de Fourier converge avec une vitesse différente.

# Analyse de l'erreur 2D

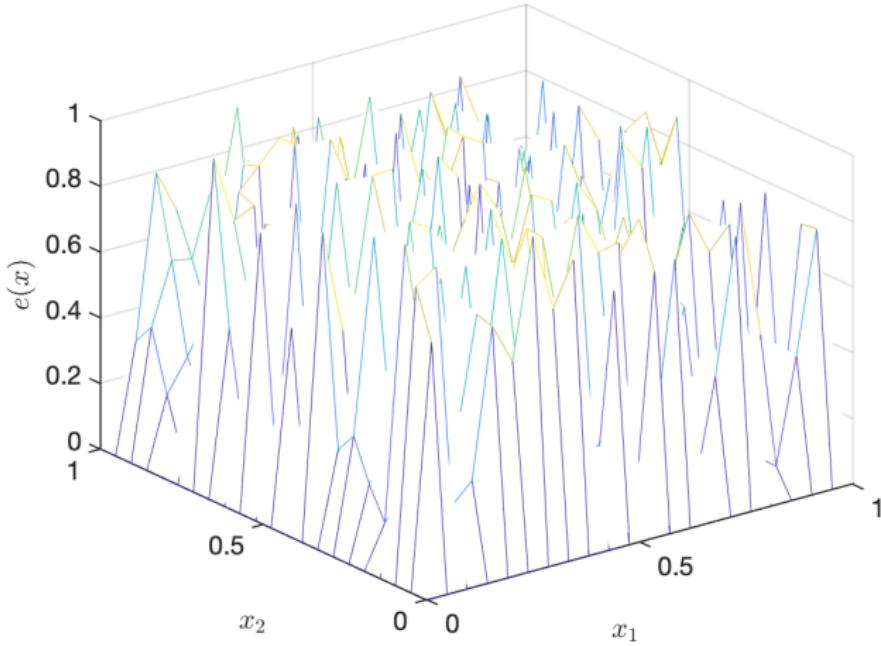
## Facteur de convergence

$$\rho(k, a, b) = \frac{\sinh(k(1-a))}{\sinh(k(1-b))} \frac{\sinh(kb)}{\sinh(ka)}.$$

- ▶ La méthode ne converge pas sans recouvrement, i.e.,  $a = b$ .
- ▶ La convergence est garantie s'il y a un recouvrement.
- ▶ La méthode converge mieux si le recouvrement est grand.
- ▶ La méthode est un solveur direct si  $a = 1$  ou  $b = 0$ .
- ▶ Chaque mode de Fourier converge avec une vitesse différente.
- ▶ La méthode converge mieux pour haute fréquence.

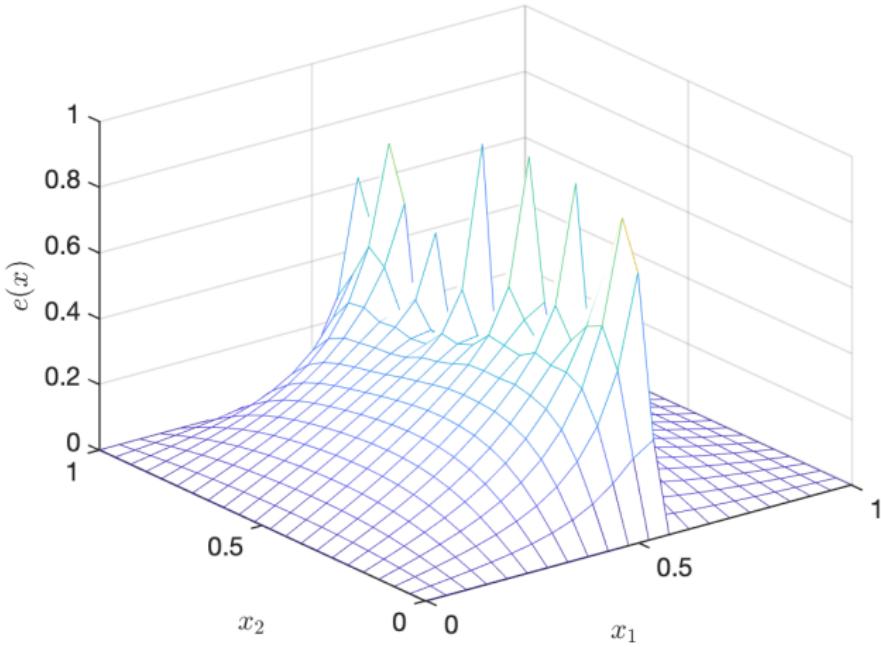
# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=0



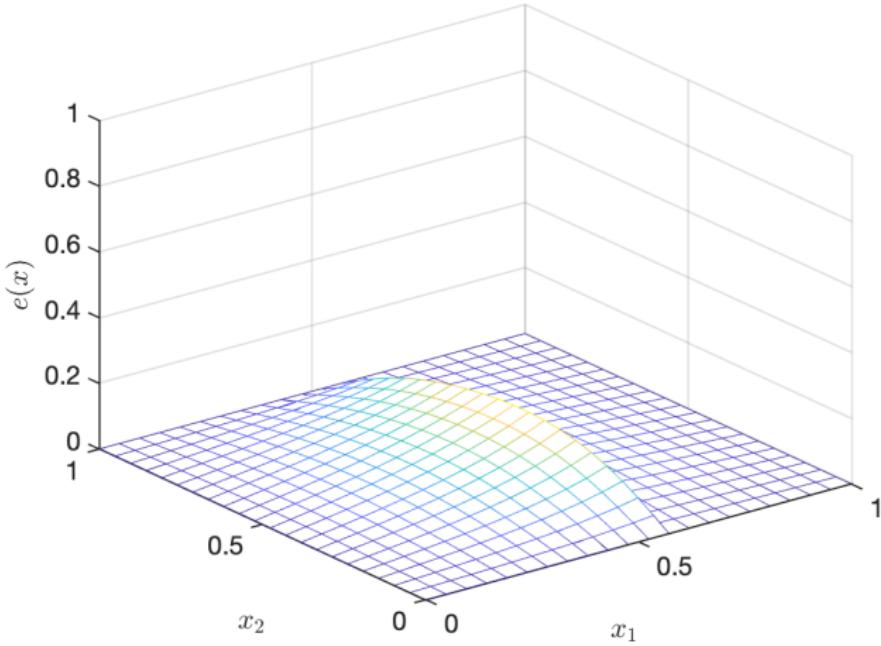
# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=1



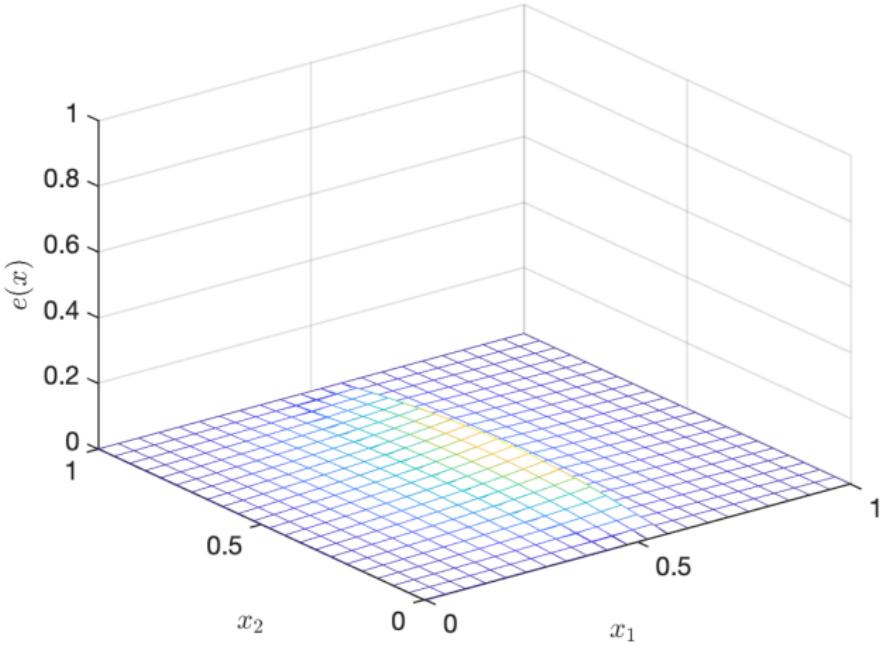
# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=2



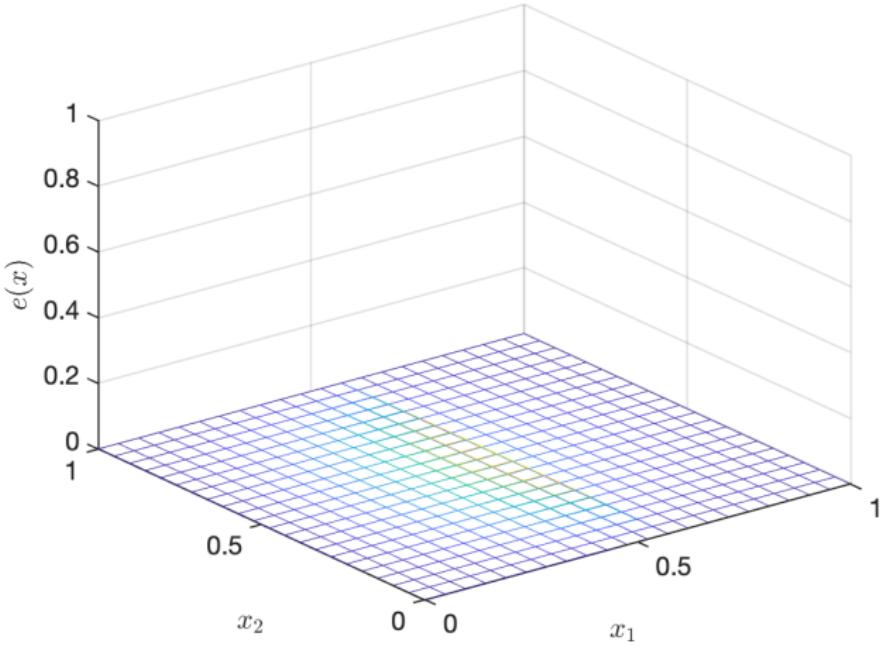
# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=3



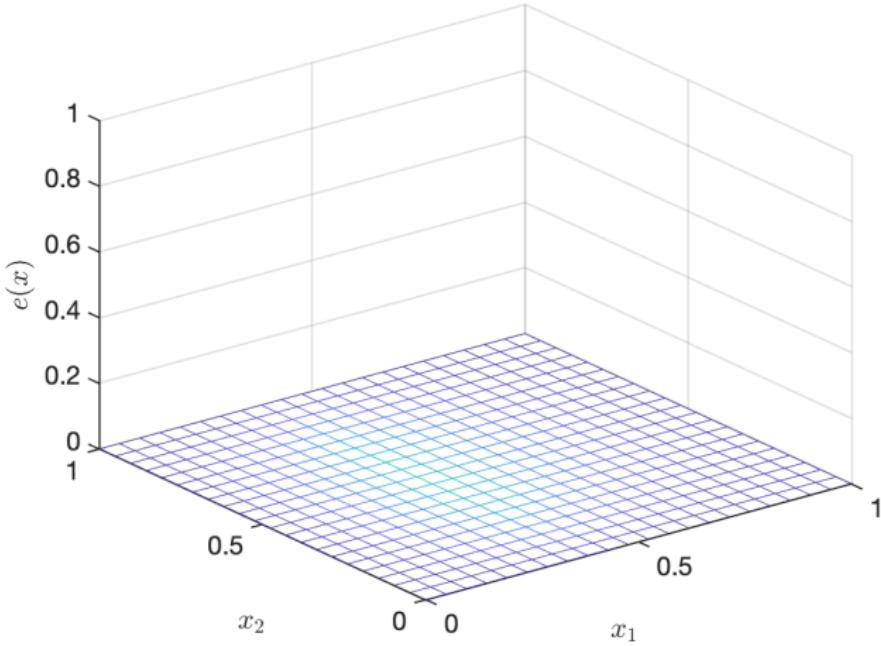
# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=5



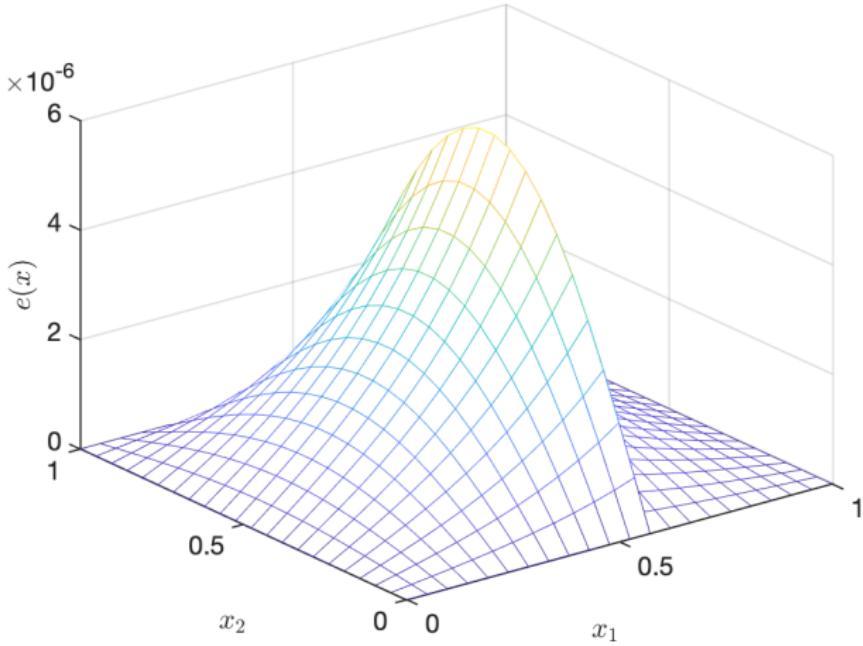
# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=10



# Analyse de l'erreur 2D

Alternating Schwarz method, iteration=10



# Contrôle optimal

## ★ Ingrédients:

- ▶ Un *système* décrit par une EDO/EDP (état  $y$ ),
- ▶ Une *fonction de contrôle*  $u$  comme l'entrée du système,
- ▶ Un état ciblé  $\hat{y}$  comme l'état désiré du système,
- ▶ Une *fonction de coût*  $J$ , par exemple, le coût de  $u$ , l'écart entre  $y$  et  $\hat{y}$ , etc.

# Contrôle optimal

## ★ Ingrédients:

- ▶ Un *système* décrit par une EDO/EDP (état  $y$ ),
- ▶ Une *fonction de contrôle*  $u$  comme l'entrée du système,
- ▶ Un état ciblé  $\hat{y}$  comme l'état désiré du système,
- ▶ Une *fonction de coût*  $J$ , par exemple, le coût de  $u$ , l'écart entre  $y$  et  $\hat{y}$ , etc.

## ★ Objectif:

- ▶ Trouver le contrôle  $u^*$  qui minimise le coût de telle sorte que le système atteigne l'état désiré.

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Lagrangien:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, \lambda) &= J(y, u) + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle, \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |y - \hat{y}|^2 + \frac{\nu}{2} |u|^2 + \nabla y \cdot \nabla \lambda - u \lambda \right) dx. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Lagrangien:**

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y, u, \lambda) &= J(y, u) + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle, \\ &= \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |y - \hat{y}|^2 + \frac{\nu}{2} |u|^2 + \nabla y \cdot \nabla \lambda - u \lambda \right) dx. \end{aligned}$$

**Système d'optimalité:**

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega \text{ avec } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ -\Delta \lambda &= \hat{y} - y && \text{dans } \Omega \text{ avec } \lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \nu u &= \lambda && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

# Schwarz Alternée

Considérons une décomposition avec recouvrement  $\Gamma_1, \Gamma_2$ . On résout

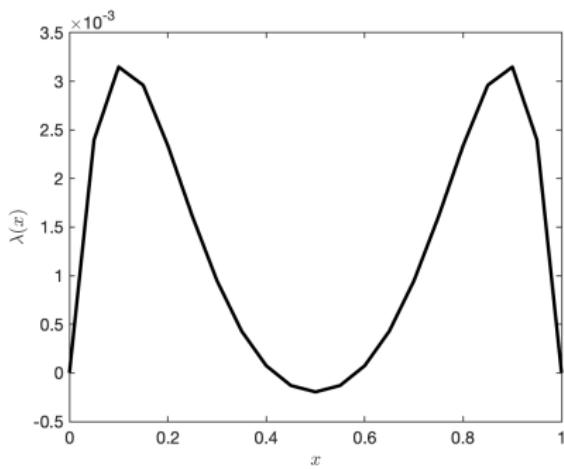
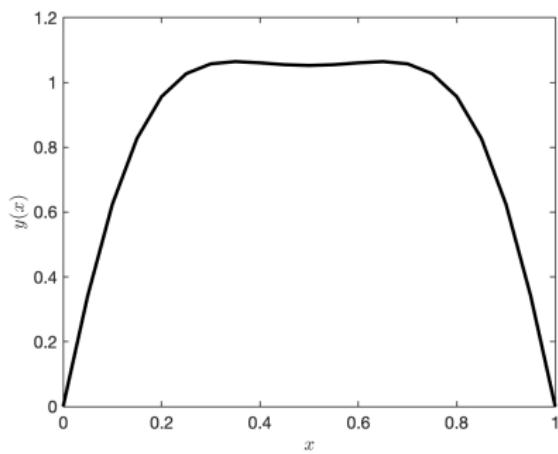
$$\begin{array}{lll} -\Delta y_1^n = \nu^{-1} \lambda_1^n & \text{dans } \Omega_1, & -\Delta y_2^n = \nu^{-1} \lambda_2^n \\ y_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & y_2^n = 0 \\ y_1^n = y_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1, & y_2^n = y_1^n \\ -\Delta \lambda_1^n = \hat{y} - y_1^n & \text{dans } \Omega_1, & -\Delta \lambda_2^n = \hat{y} - y_2^n \\ \lambda_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & \lambda_2^n = 0 \\ \lambda_1^n = \lambda_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma_1, & \lambda_2^n = \lambda_1^n \end{array} \quad \begin{array}{lll} \text{dans } \Omega_2, \\ \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ \text{sur } \Gamma_2, \\ \text{dans } \Omega_2, \\ \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ \text{sur } \Gamma_2. \end{array}$$

# Exemple 1D

## Problème:

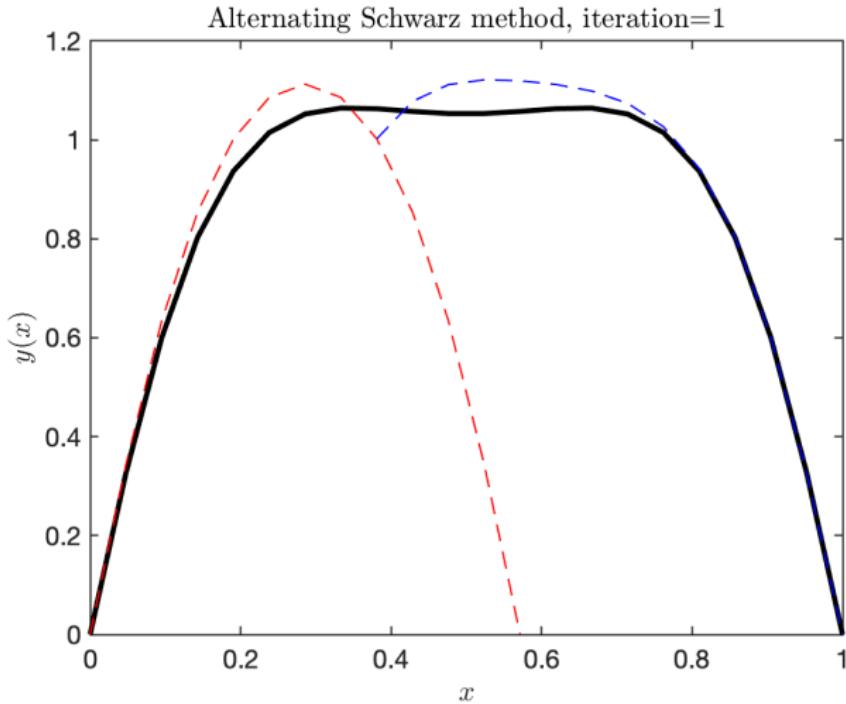
$$\begin{aligned}-\partial_{xx}y &= \nu^{-1}\lambda && \text{dans } \Omega = (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0, \\ -\partial_{xx}\lambda &= \hat{y} - y && \text{dans } \Omega = (0, 1), \quad \lambda(0) = \lambda(1) = 0,\end{aligned}$$

avec  $\hat{y} \equiv 1$  dans  $\Omega = (0, 1)$  et  $\nu = 10^{-4}$ .



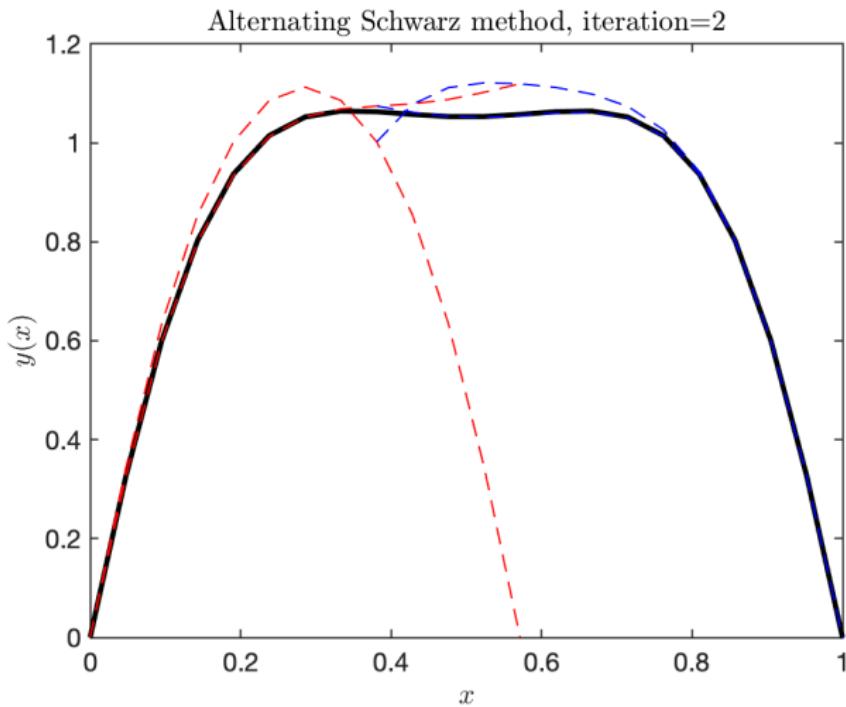
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



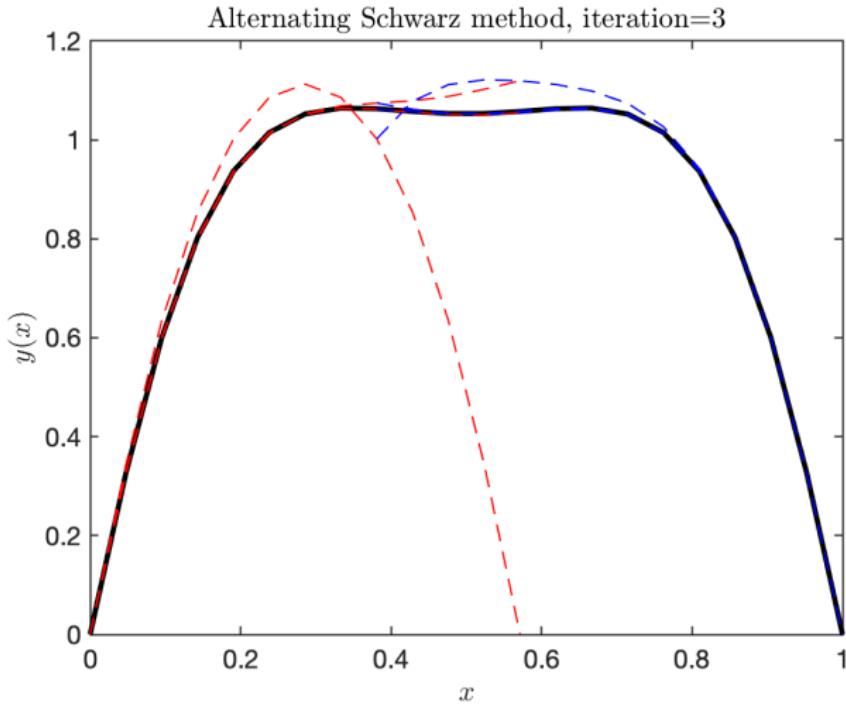
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



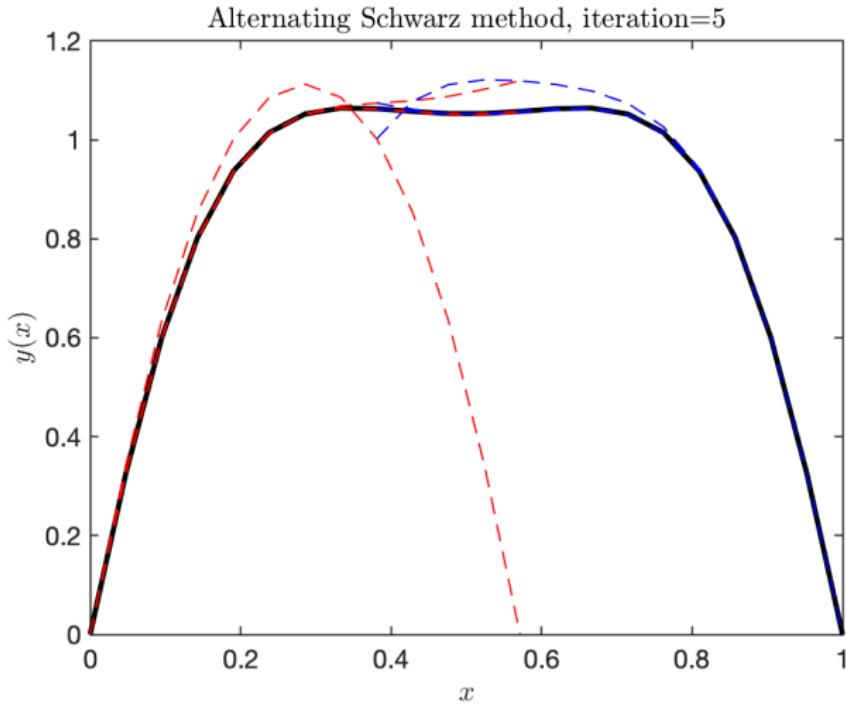
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



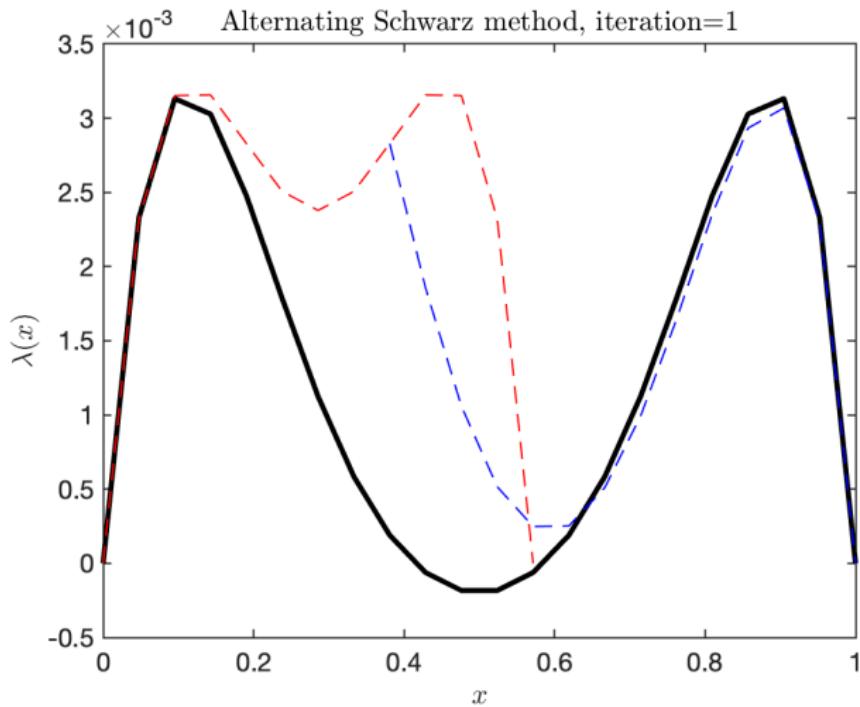
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



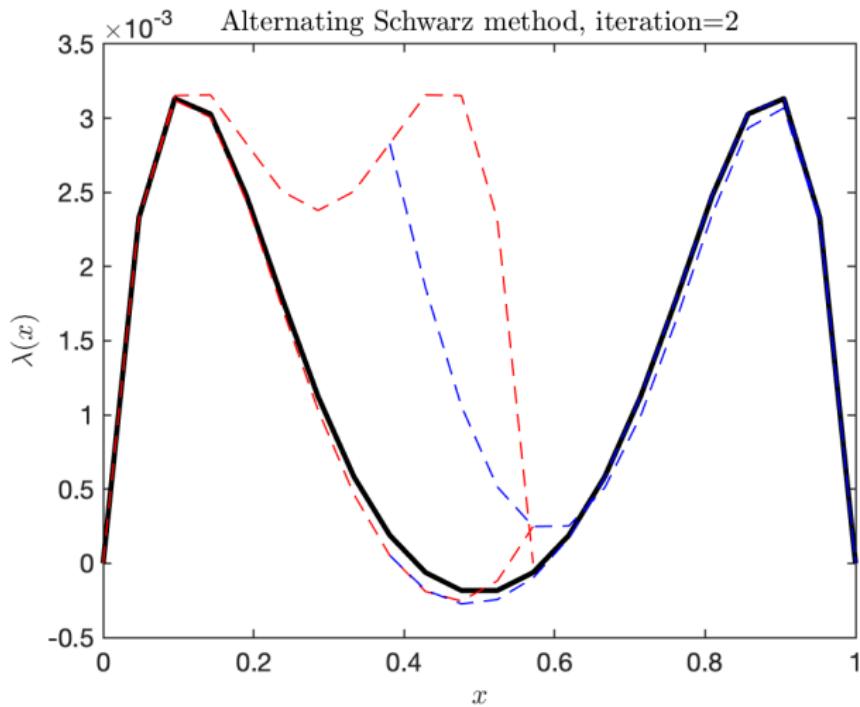
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



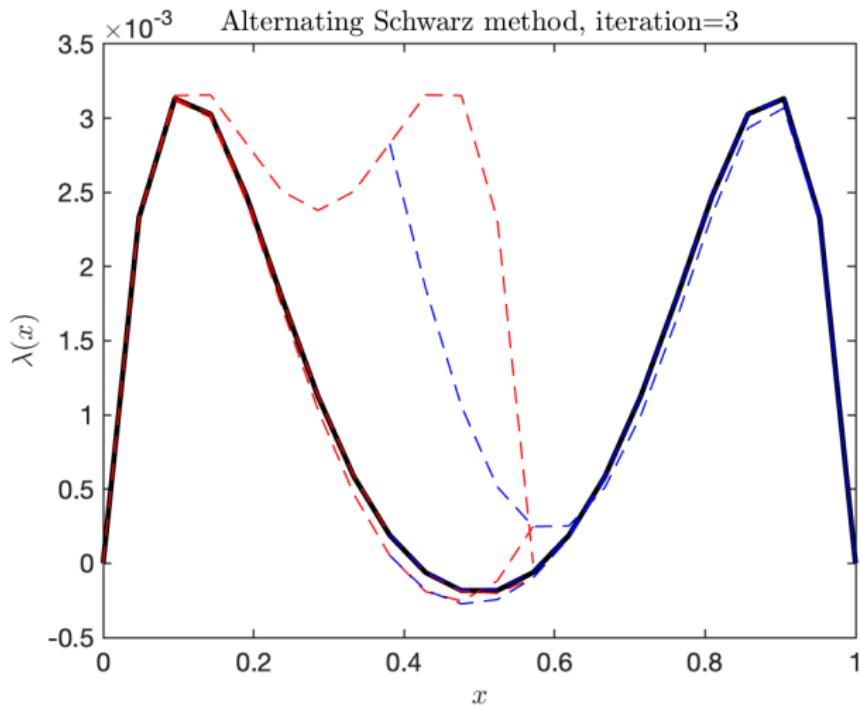
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



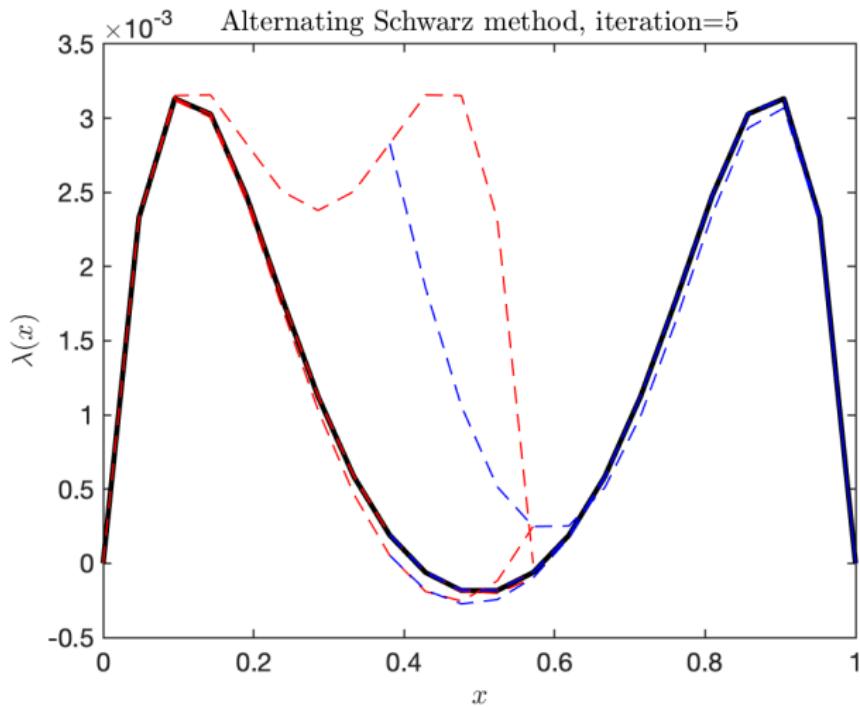
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



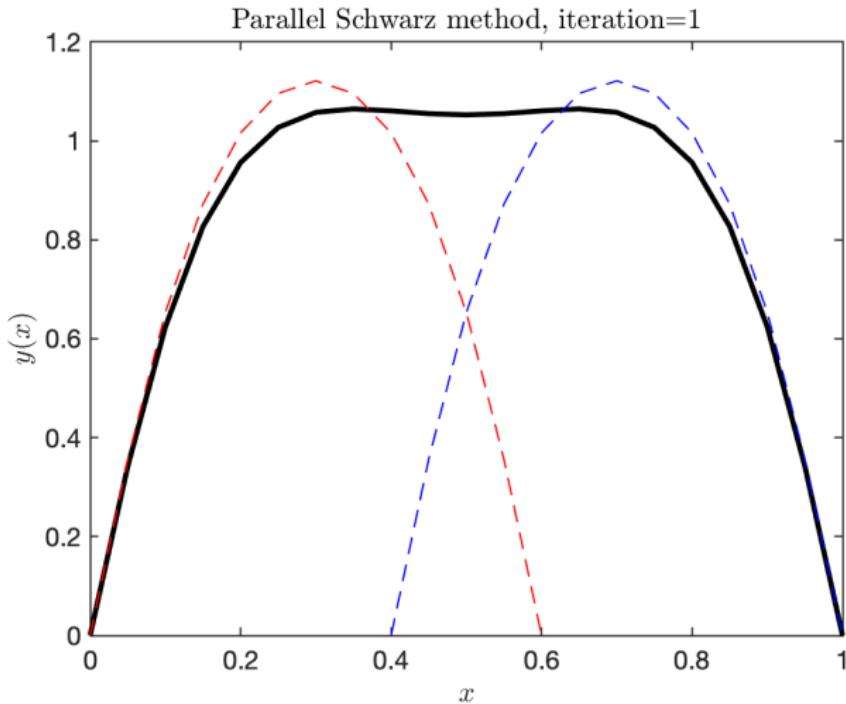
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



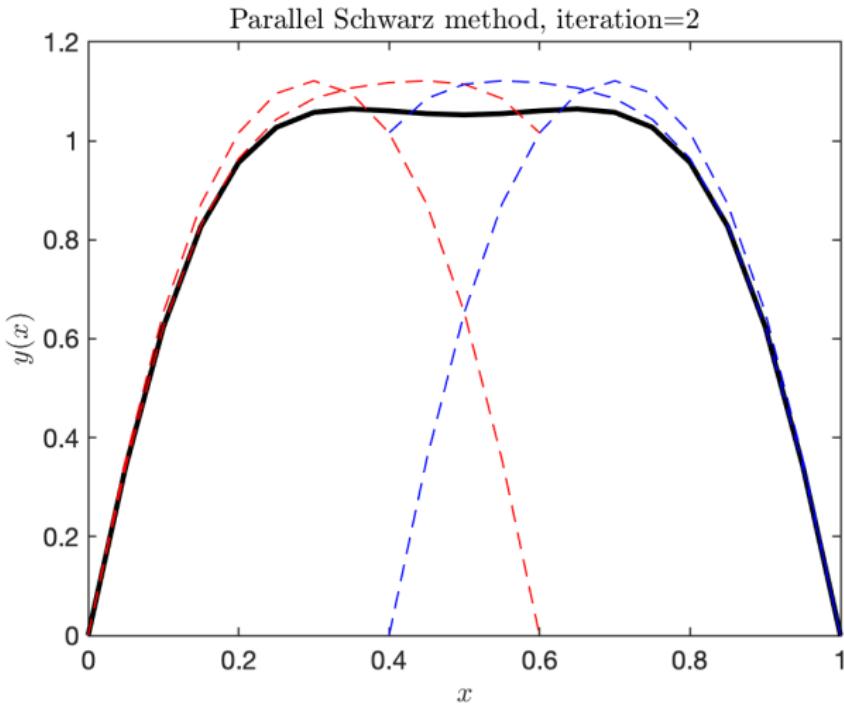
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



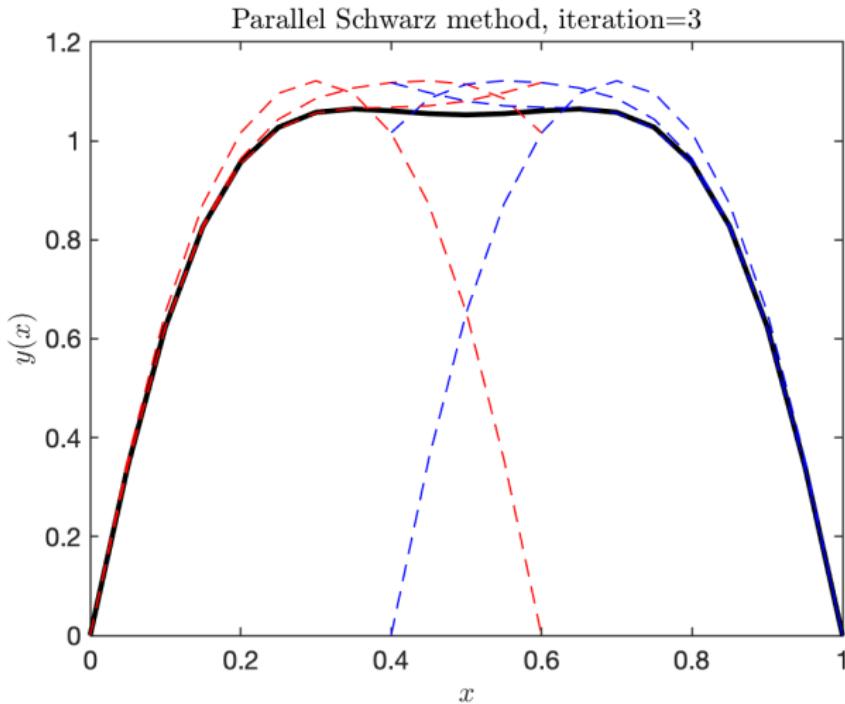
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



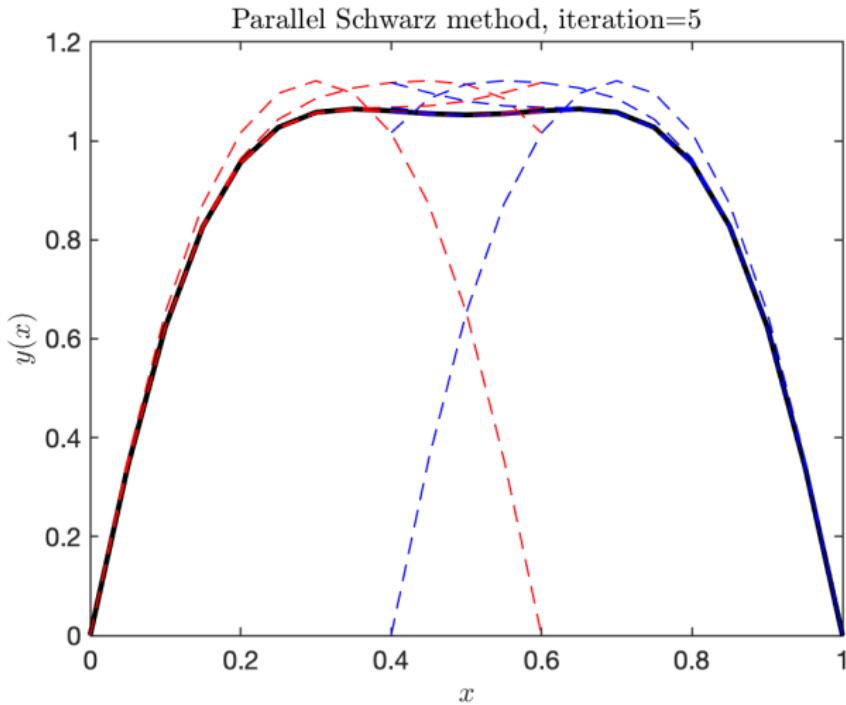
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



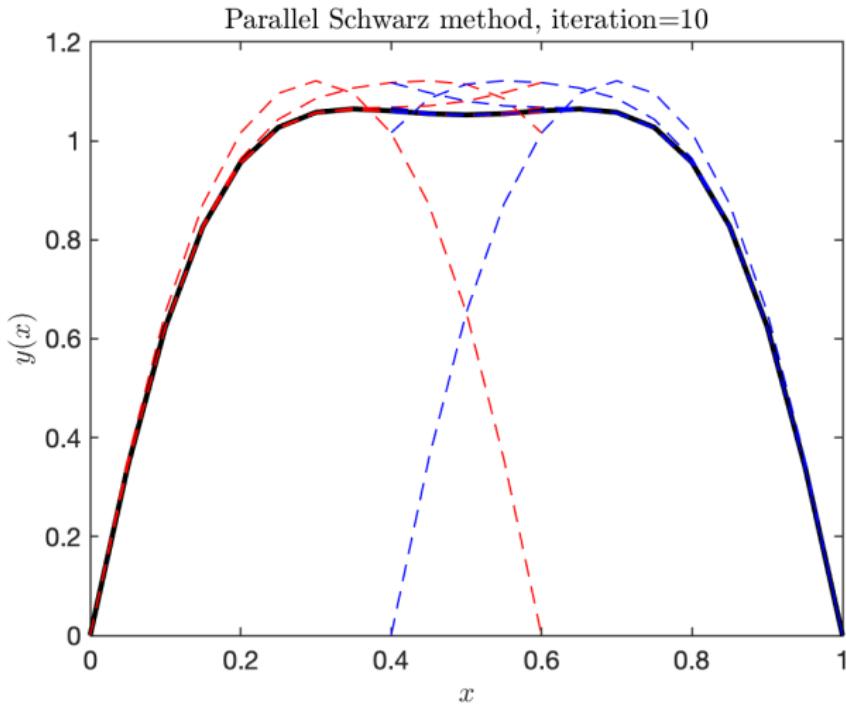
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



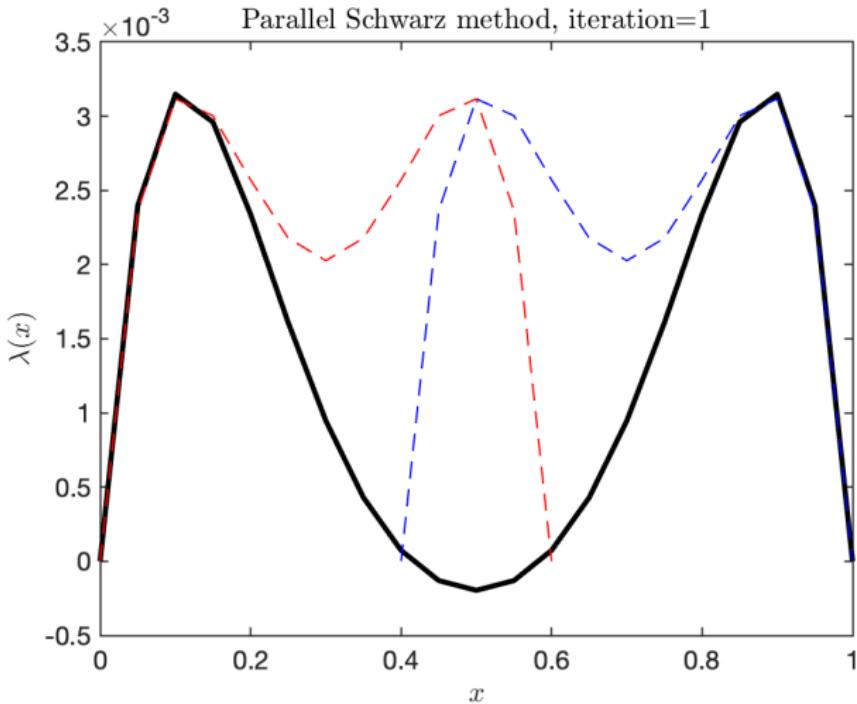
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



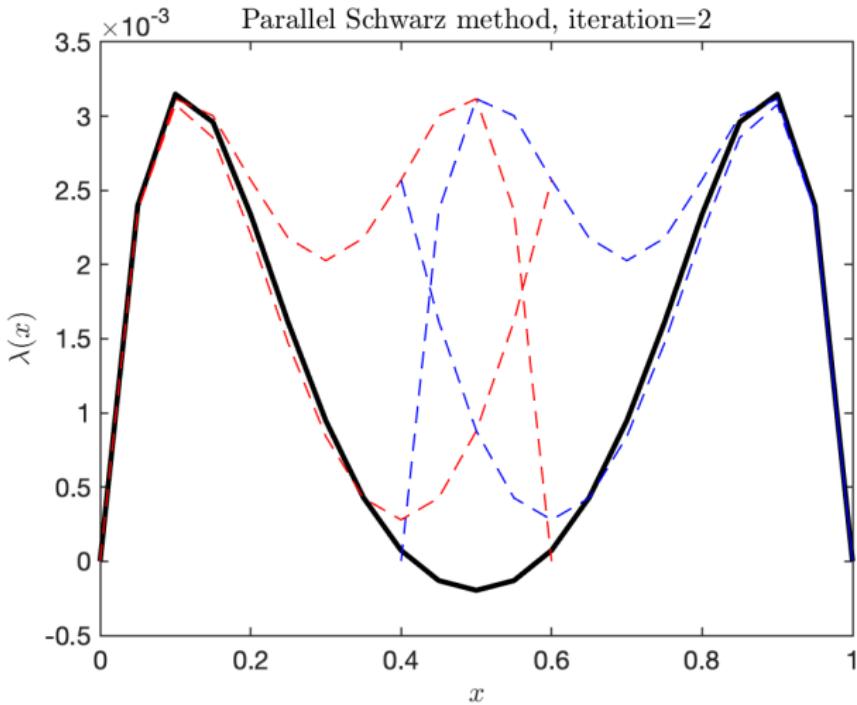
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



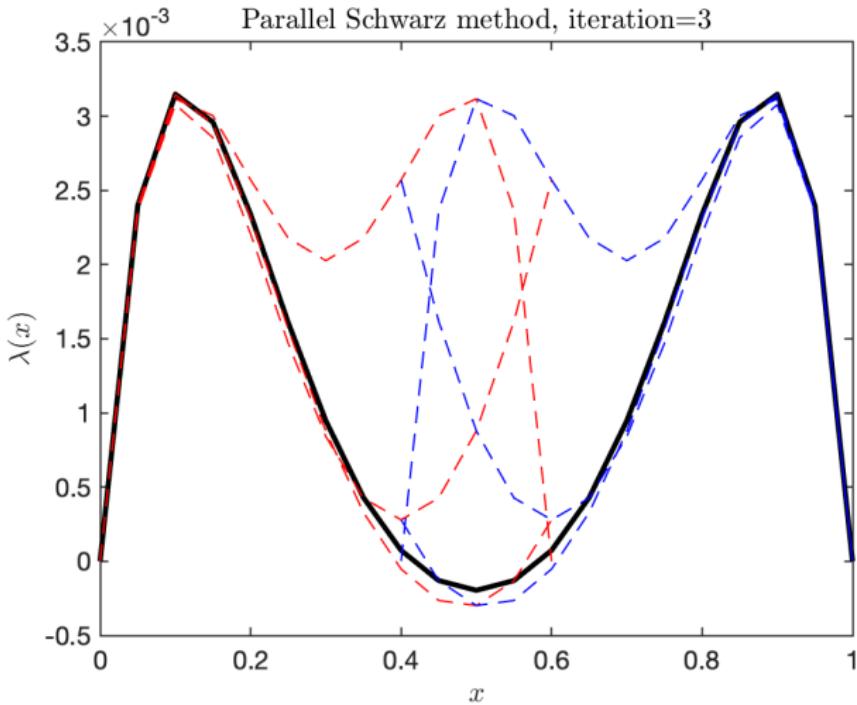
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



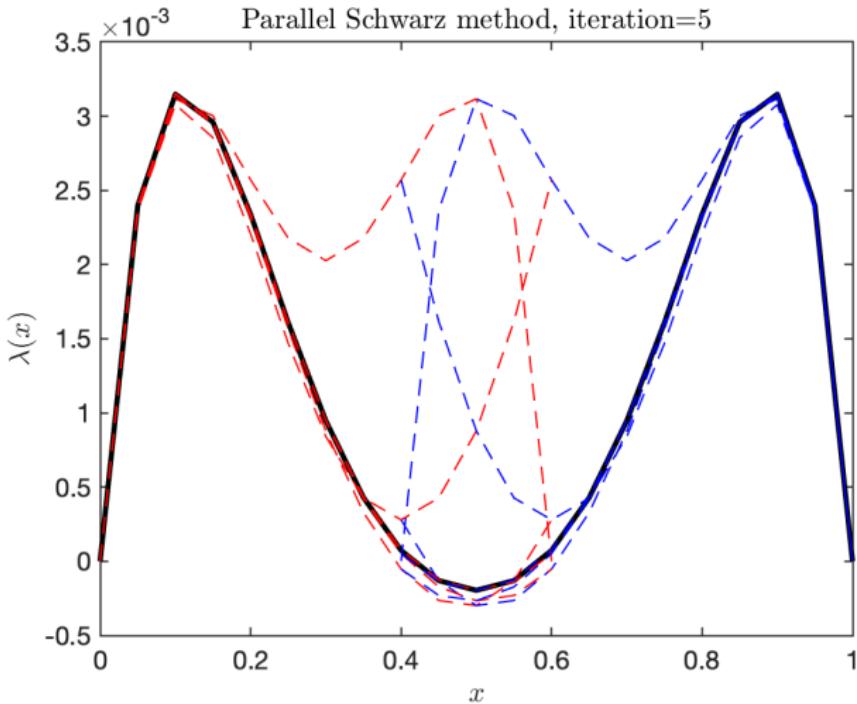
# Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



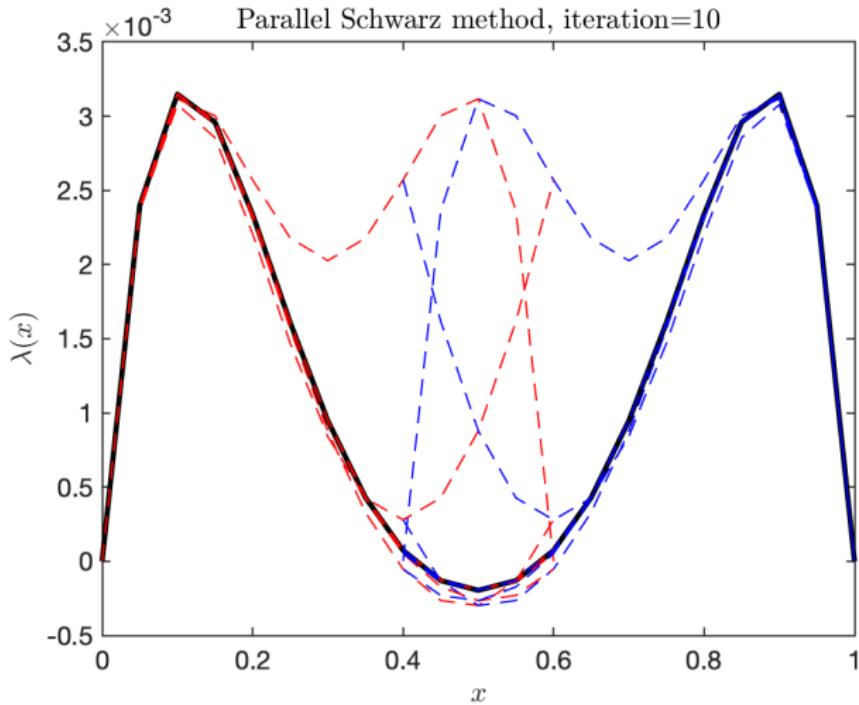
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



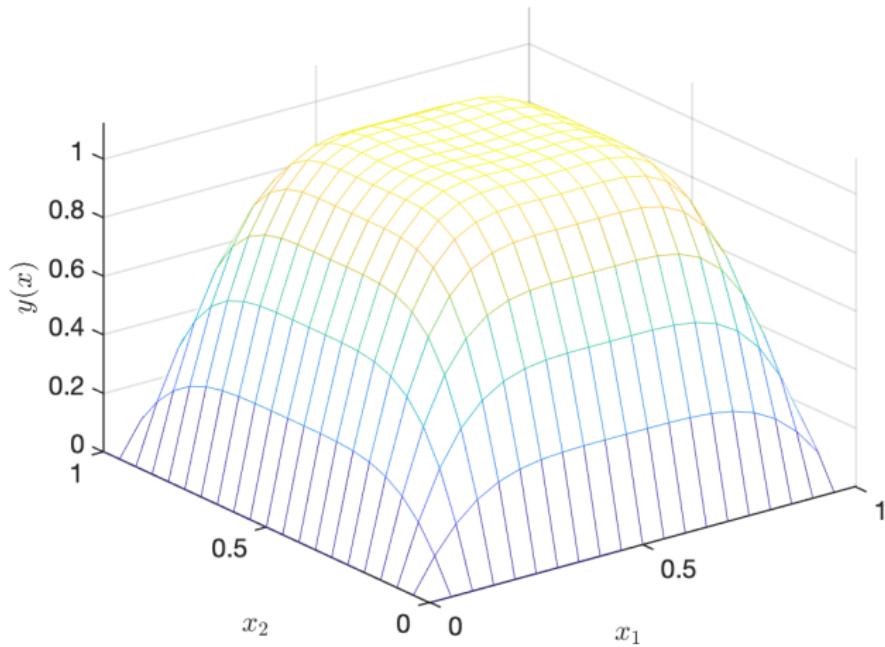
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38) = 0$ ,  $y_2^0(0.57) = 0$ ,  $\lambda_2^0(0.38) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57) = 0$ .



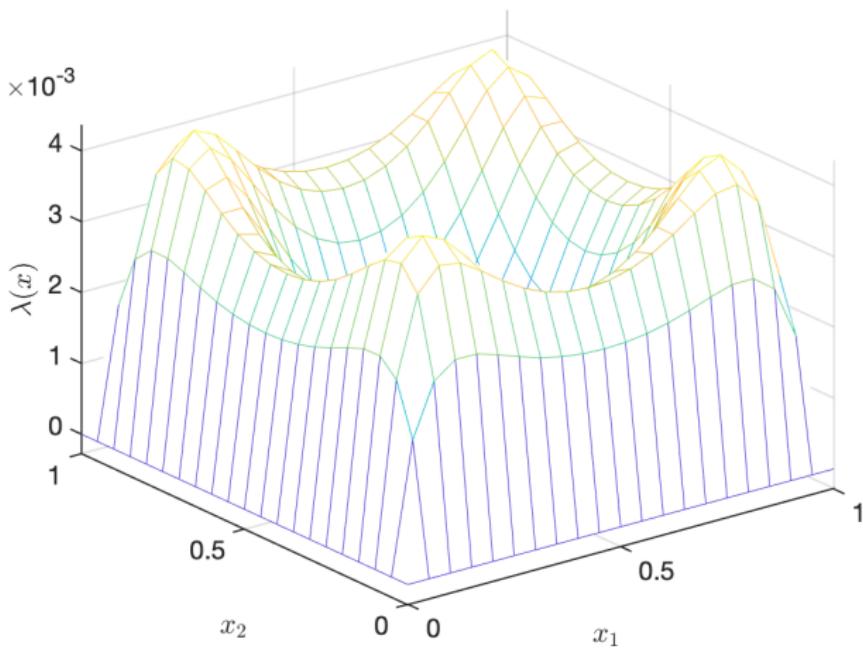
## Exemple 2D

Fonction ciblé:  $\hat{y} \equiv 1$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$  et  $\nu = 10^{-4}$ .



## Exemple 2D

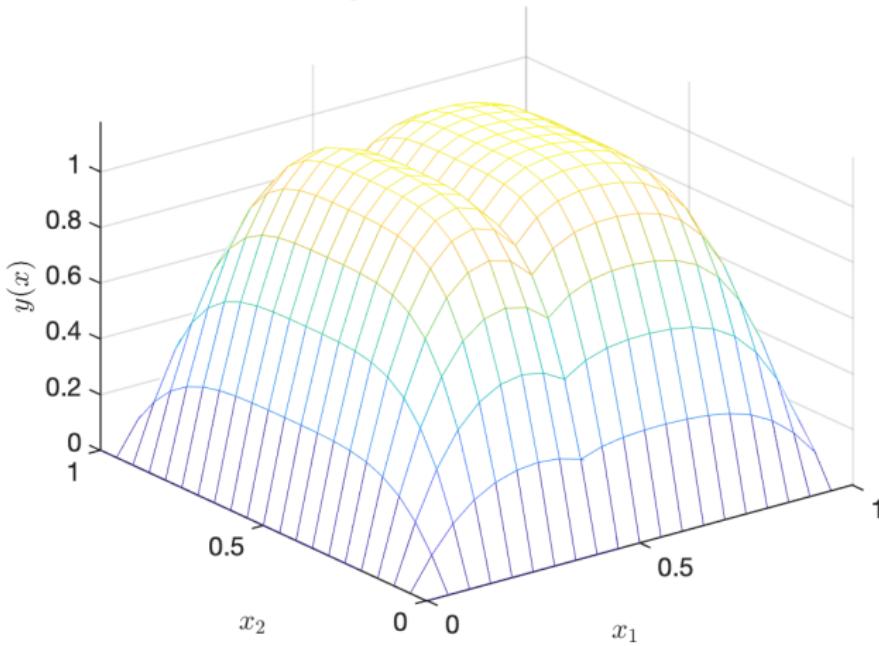
Fonction ciblé:  $\hat{y} \equiv 1$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$  et  $\nu = 10^{-4}$ .



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

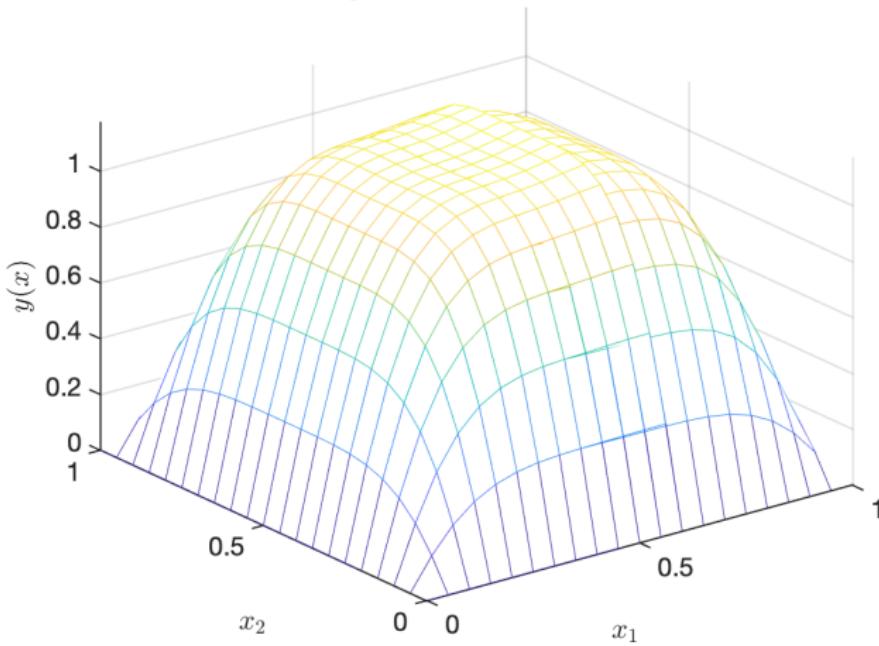
Alternating Schwarz method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

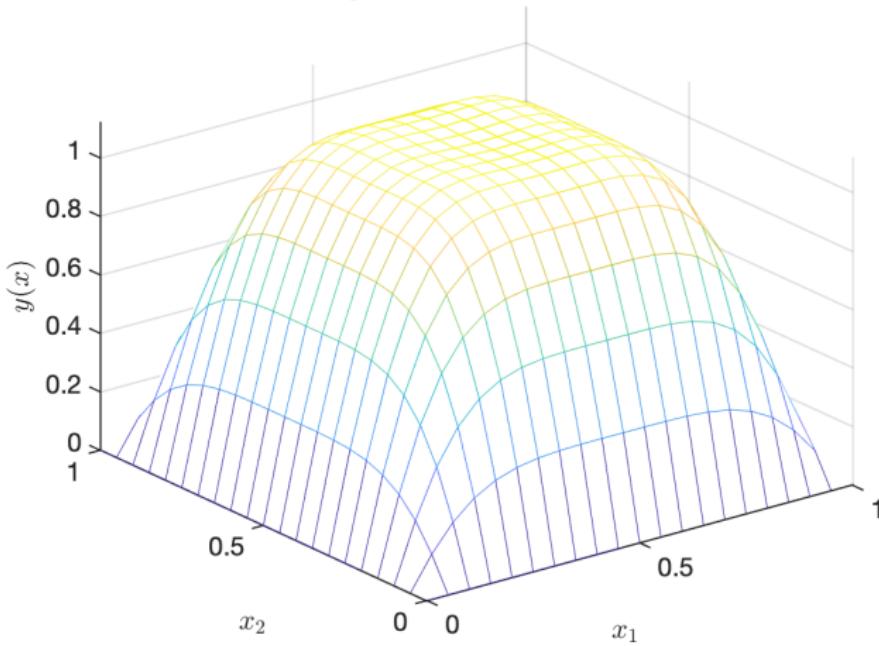
Alternating Schwarz method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

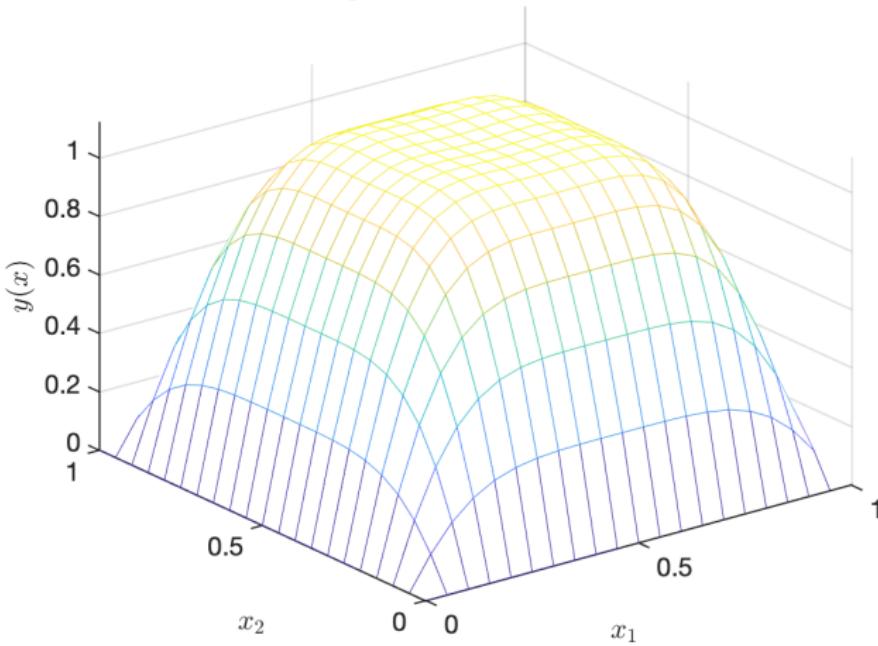
Alternating Schwarz method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

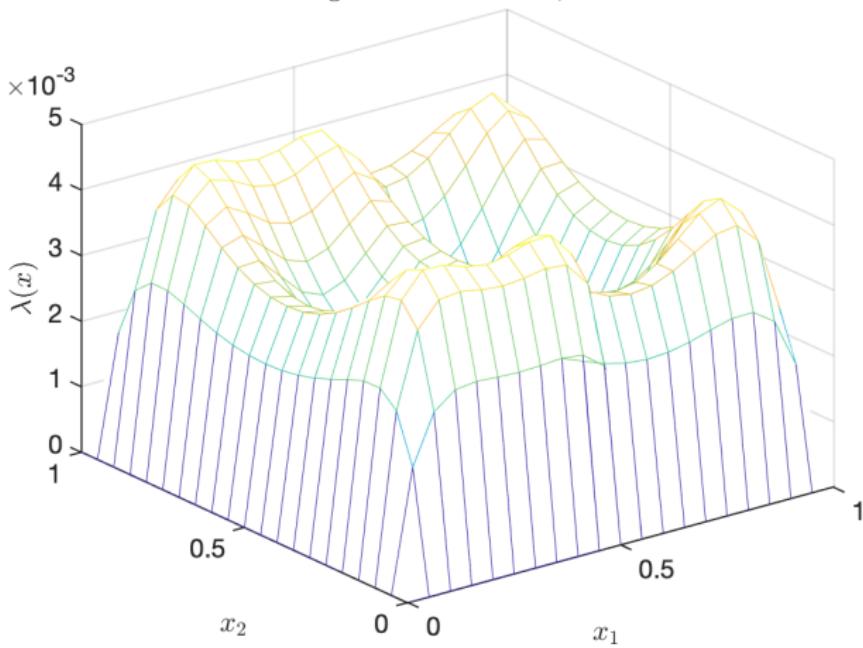
Alternating Schwarz method, iteration=5



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

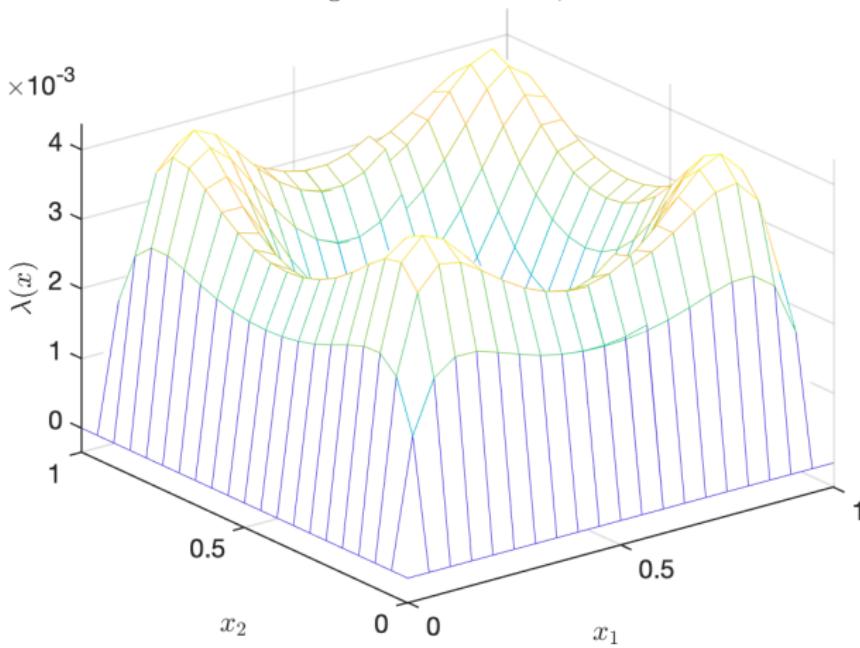
Alternating Schwarz method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

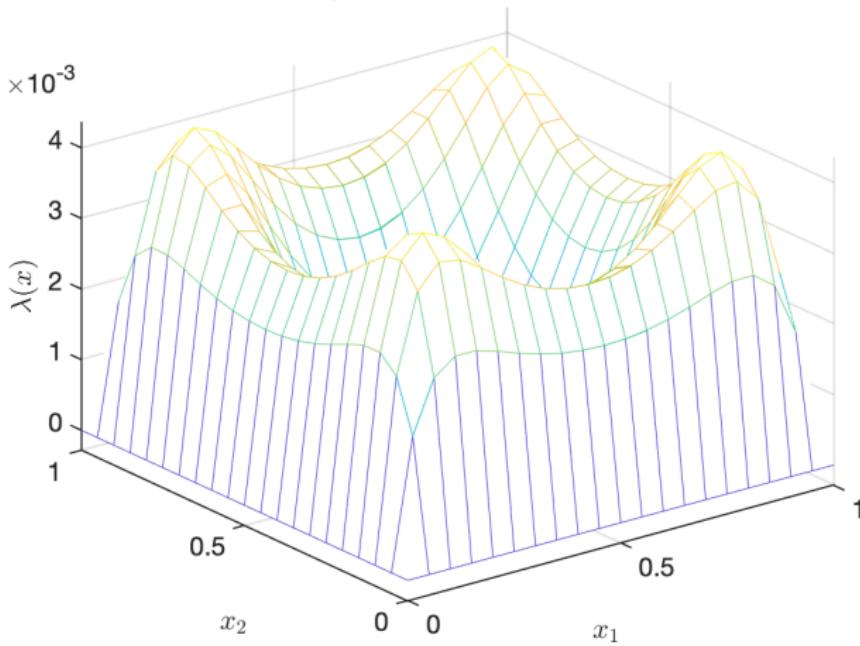
Alternating Schwarz method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

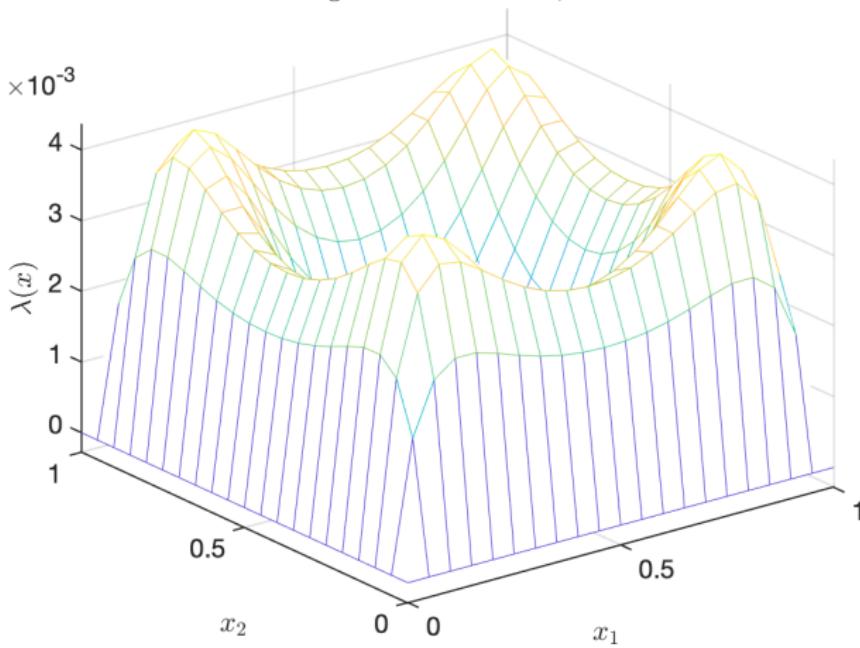
Alternating Schwarz method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

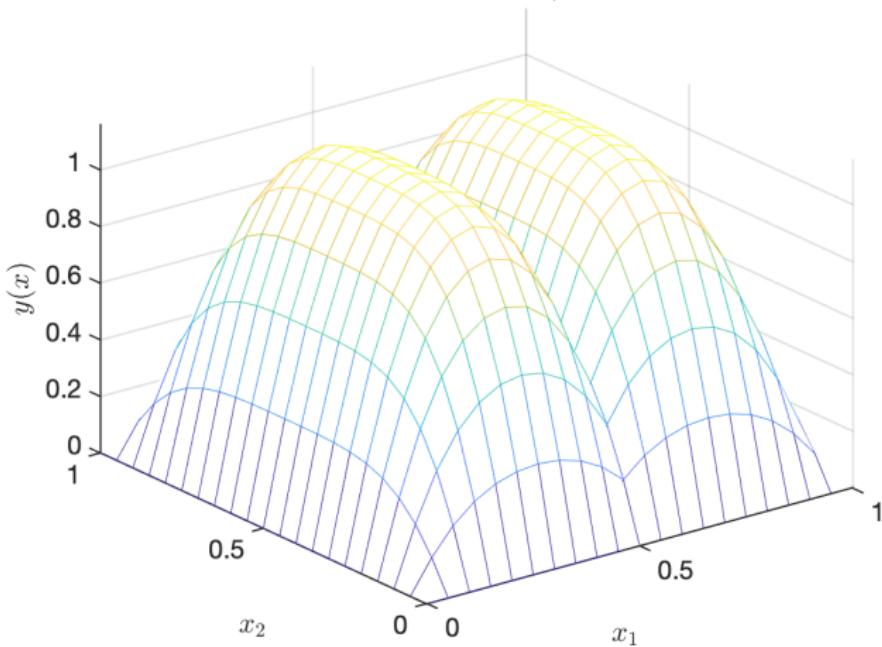
Alternating Schwarz method, iteration=5



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

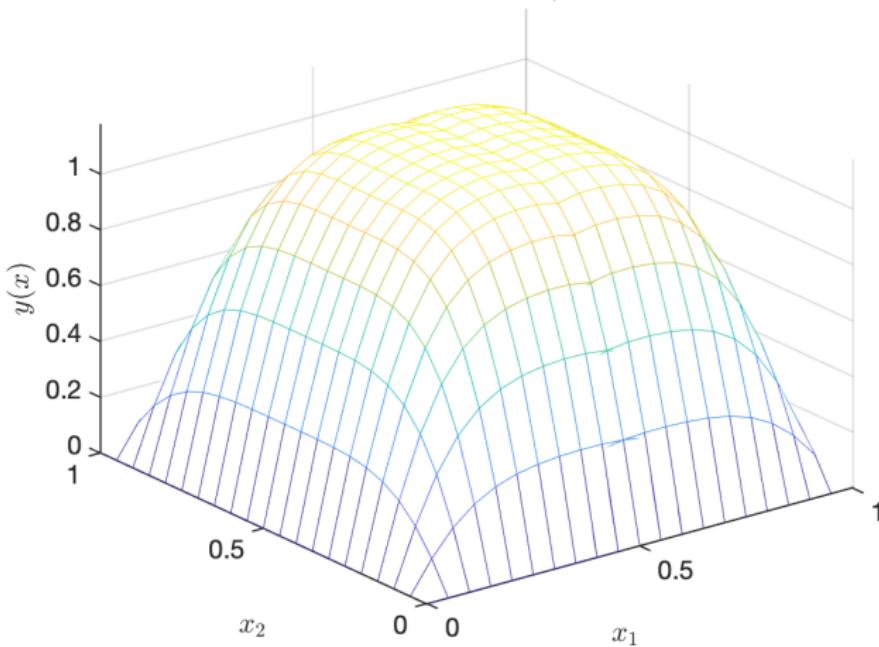
Parallel Schwarz method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

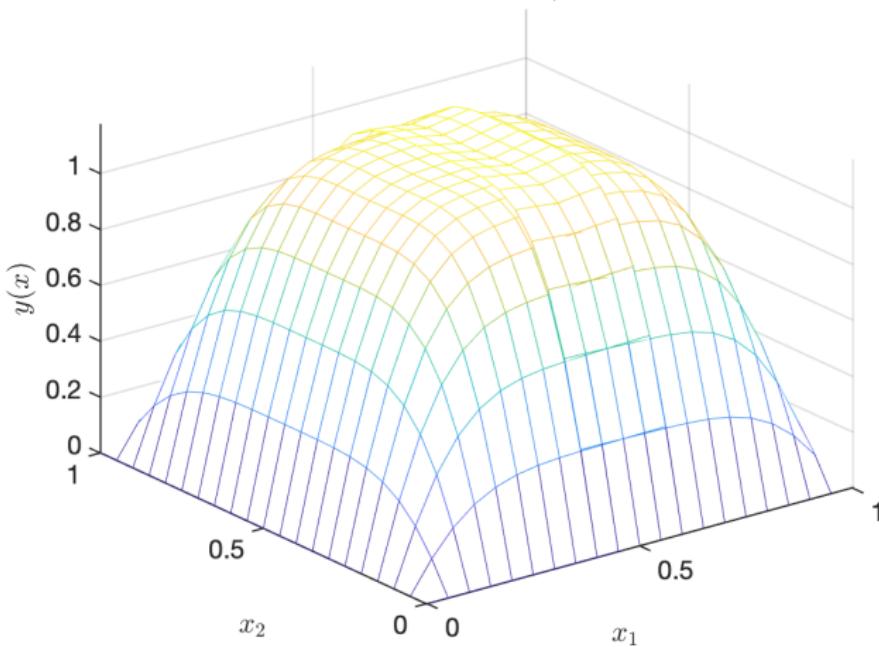
Parallel Schwarz method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

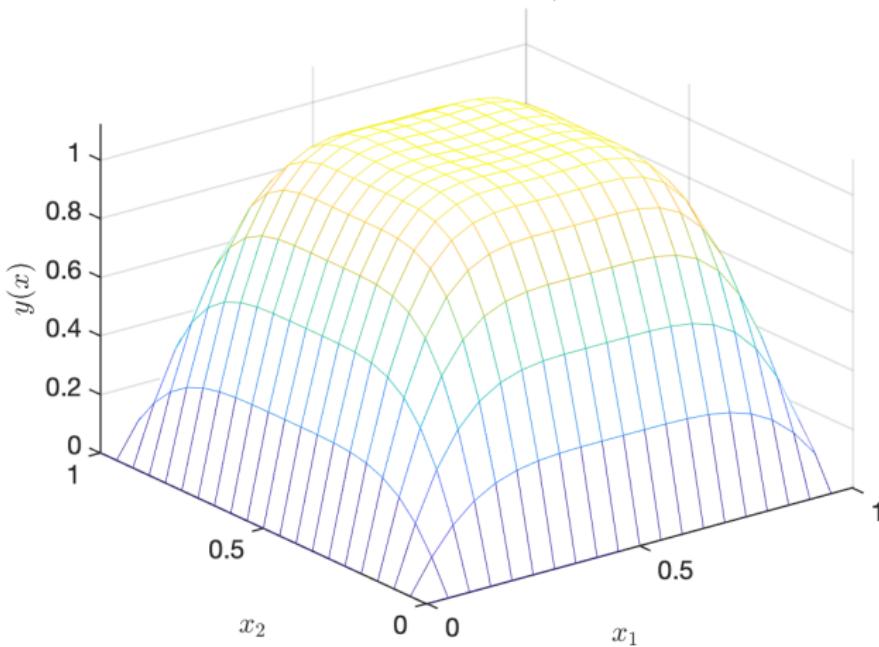
Parallel Schwarz method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

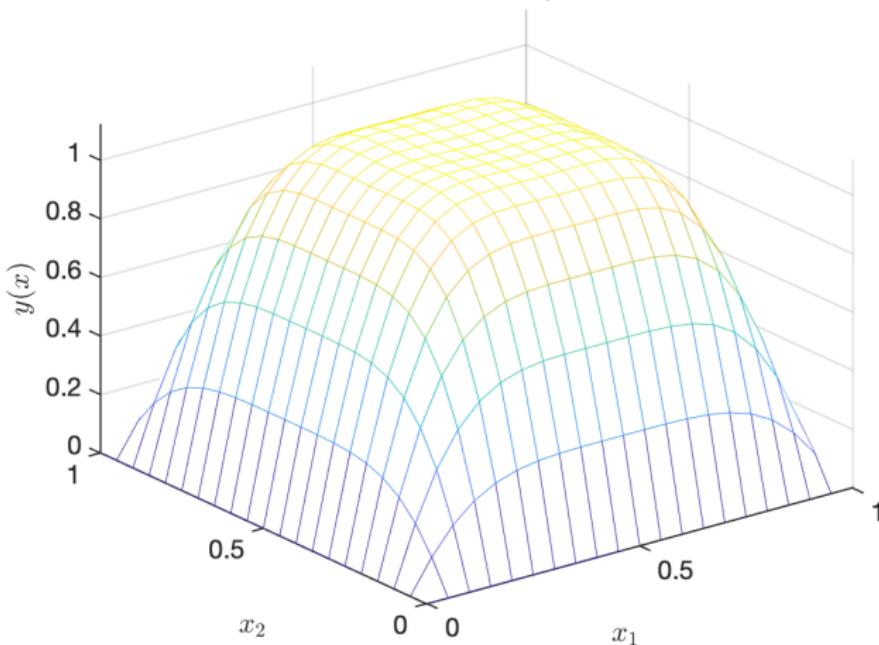
Parallel Schwarz method, iteration=5



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

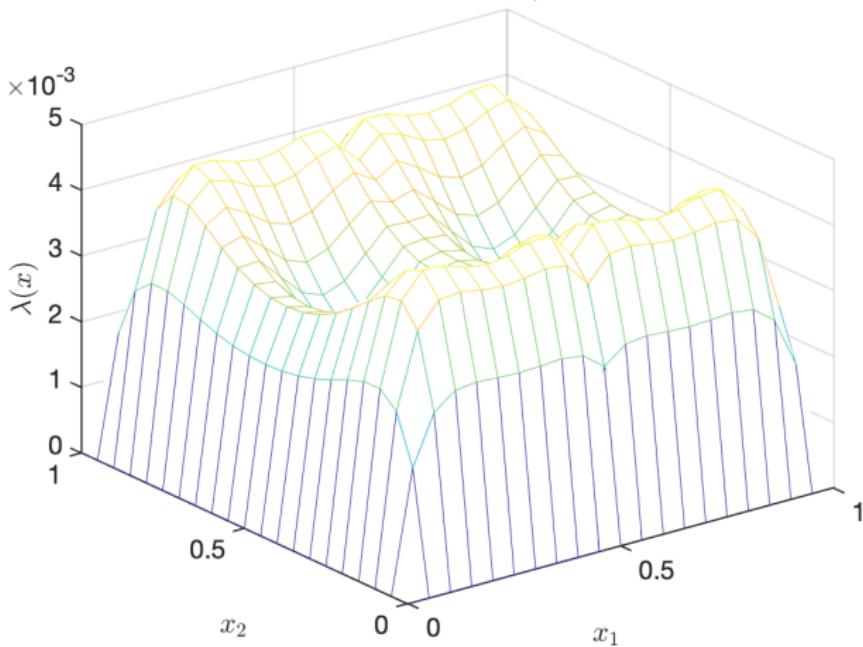
Parallel Schwarz method, iteration=10



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

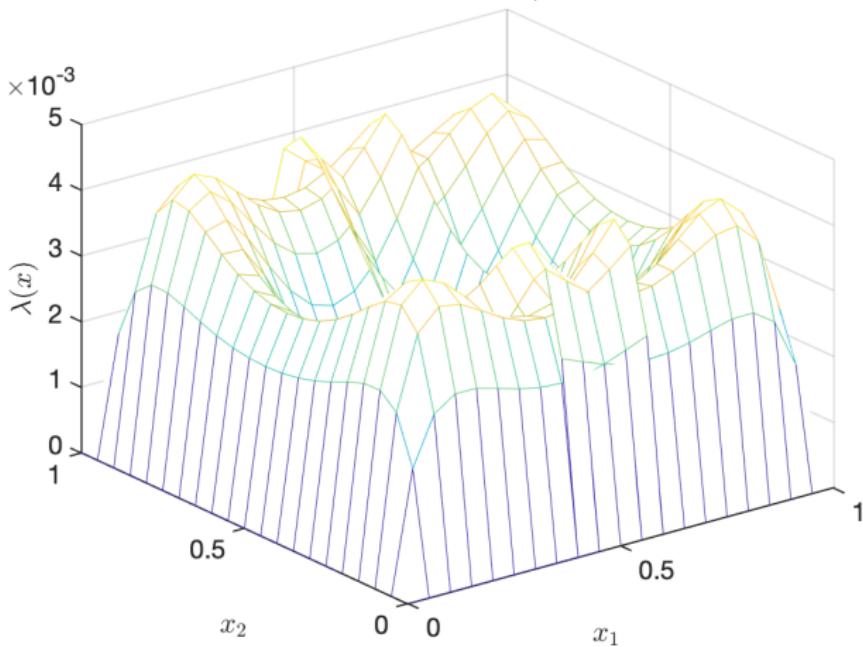
Parallel Schwarz method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

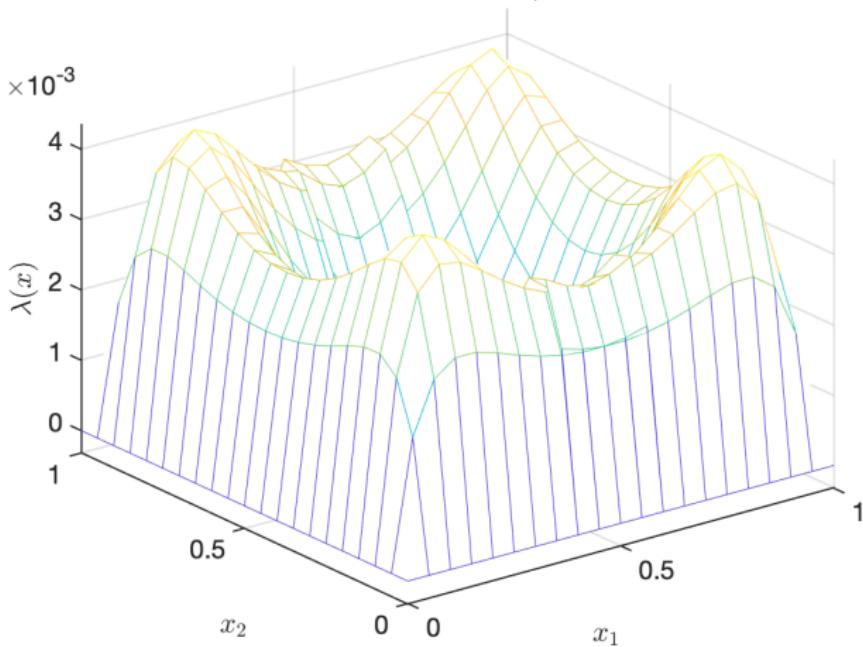
Parallel Schwarz method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

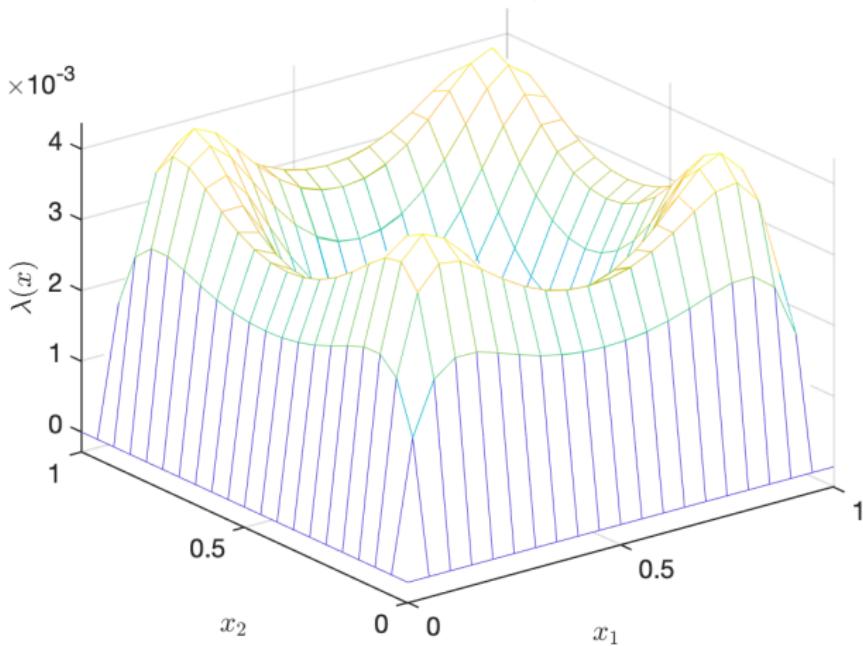
Parallel Schwarz method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

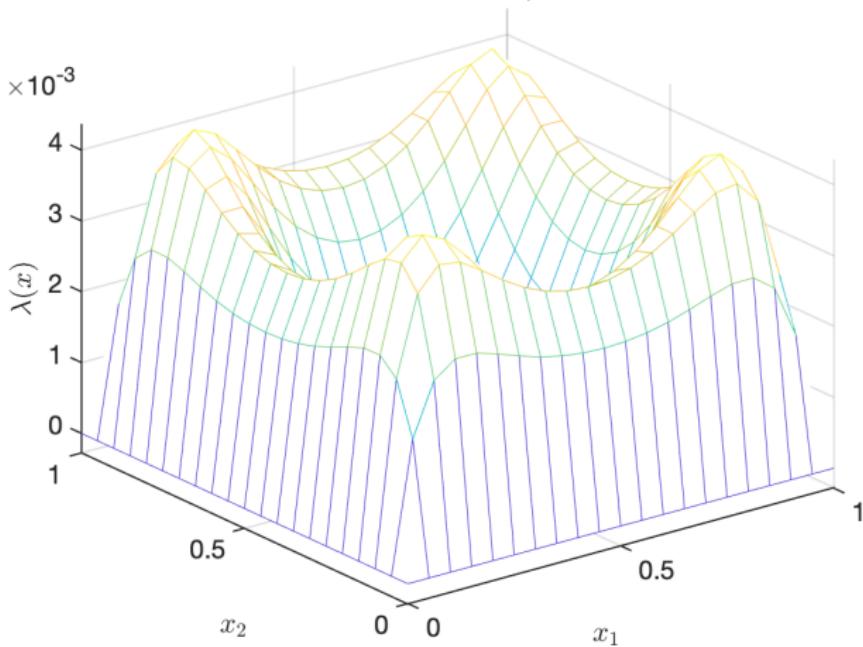
Parallel Schwarz method, iteration=5



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.57) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.38, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_1^0(0.38, \cdot) = 0$ ,  $y_2^0(0.57, \cdot) = 0$ ,  $\lambda_1^0(0.38, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.57, \cdot) = 0$ .

Parallel Schwarz method, iteration=10



# Analyse de l'erreur 1D

- Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  et  $\xi_j^n := \lambda - \lambda_j^n$  qui satisfont

$$-\partial_{xx} e_1^n = \nu^{-1} \xi_1^n \quad \text{dans } (0, a), \quad -\partial_{xx} e_2^n = \nu^{-1} \xi_2^n \quad \text{dans } (b, 1),$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad e_2^n(b) = e_1^n(b),$$

$$\partial_{xx} \xi_1^n = e_1^n \quad \text{dans } (0, a), \quad \partial_{xx} \xi_2^n = e_2^n \quad \text{dans } (b, 1),$$

$$\xi_1^n(0) = 0, \quad \xi_2^n(1) = 0,$$

$$\xi_1^n(a) = \xi_2^{n-1}(a), \quad \xi_2^n(b) = \xi_1^n(b).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  et  $\xi_j^n := \lambda - \lambda_j^n$  qui satisfont

$$\begin{aligned} -\partial_{xx} e_1^n &= \nu^{-1} \xi_1^n && \text{dans } (0, a), & -\partial_{xx} e_2^n &= \nu^{-1} \xi_2^n && \text{dans } (b, 1), \\ e_1^n(0) &= 0, & & & e_2^n(1) &= 0, \\ e_1^n(a) &= e_2^{n-1}(a), & & & e_2^n(b) &= e_1^n(b), \\ \partial_{xx} \xi_1^n &= e_1^n && \text{dans } (0, a), & \partial_{xx} \xi_2^n &= e_2^n && \text{dans } (b, 1), \\ \xi_1^n(0) &= 0, & & & \xi_2^n(1) &= 0, \\ \xi_1^n(a) &= \xi_2^{n-1}(a), & & & \xi_2^n(b) &= \xi_1^n(b). \end{aligned}$$

- Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\partial_{xxxx} + \nu^{-1}) e_1^n &= 0 && \text{dans } (0, a), & (\partial_{xxxx} + \nu^{-1}) e_2^n &= 0 && \text{dans } (b, 1), \\ e_1^n(0) &= 0, & & & e_2^n(1) &= 0, \\ e_1^n(a) &= e_2^{n-1}(a), & & & e_2^n(b) &= e_1^n(b), \\ \partial_{xx} e_1^n(0) &= 0, & & & \partial_{xx} e_2^n(1) &= 0, \\ \partial_{xx} e_1^n(a) &= \partial_{xx} e_2^{n-1}(a), & & & \partial_{xx} e_2^n(b) &= \partial_{xx} e_1^n(b). \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur 1D

► Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$(\partial_{xxxx} + \nu^{-1})e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad (\partial_{xxxx} + \nu^{-1})e_2^n = 0 \text{ dans } (b, 1),$$

$$e_1^n(0) = 0,$$

$$e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a),$$

$$e_2^n(b) = e_1^n(b),$$

$$\partial_{xx} e_1^n(0) = 0,$$

$$\partial_{xx} e_2^n(1) = 0,$$

$$\partial_{xx} e_1^n(a) = \partial_{xx} e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n(b) = \partial_{xx} e_1^n(b).$$

► On trouve les solutions avec  $\mu^4 = \nu^{-1}$ :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) + C_2^n \cosh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$e_2^n(x) = C_3^n \sinh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+ C_4^n \cosh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- On trouve les solutions avec  $\mu^4 = \nu^{-1}$ :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) + C_2^n \cosh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\begin{aligned} e_2^n(x) &= C_3^n \sinh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + C_4^n \cosh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_2^n(a) \\ \partial_{xx} e_2^n(a) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 - \mu^4 \alpha_2 \beta_2 & \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \\ -\mu^4 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) & \alpha_1 \beta_1 - \mu^4 \alpha_2 \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx} e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx} e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur 1D

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} e_2^n(a) \\ \partial_{xx}e_2^n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx}e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix}.$$

avec  $M_1 = \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2$ ,  $M_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$  et

$$\alpha_1 := \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu b}{\sqrt{2}}) + \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})},$$

$$\alpha_2 := \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu b}{\sqrt{2}}) - \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})}$$

$\beta_1, \beta_2$  ont les même formats avec  $a, b$  remplacés par  $1 - a, 1 - b$ .

# Analyse de l'erreur 1D

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} e_2^n(a) \\ \partial_{xx}e_2^n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx}e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix}.$$

avec  $M_1 = \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2$ ,  $M_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$  et

$$\alpha_1 := \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu b}{\sqrt{2}}) + \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})},$$

$$\alpha_2 := \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu b}{\sqrt{2}}) - \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})}$$

$\beta_1, \beta_2$  ont les même formats avec  $a, b$  remplacés par  $1 - a, 1 - b$ .

- Si  $a = b$ , alors  $\alpha_1 = \beta_1 = 1$  et  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ , la méthode ne converge pas sans recouvrement.

# Analyse de l'erreur 1D

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$ , on obtient

$$\begin{pmatrix} e_2^n(a) \\ \partial_{xx}e_2^n(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx}e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix}.$$

avec  $M_1 = \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2$ ,  $M_2 = \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$  et

$$\alpha_1 := \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu b}{\sqrt{2}}) + \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})},$$

$$\alpha_2 := \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cosh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu b}{\sqrt{2}}) - \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sinh(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})\cos(\frac{\mu b}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})\cos^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})}$$

$\beta_1, \beta_2$  ont les même formats avec  $a, b$  remplacés par  $1 - a, 1 - b$ .

- Si  $a = b$ , alors  $\alpha_1 = \beta_1 = 1$  et  $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ , la méthode ne converge pas sans recouvrement.
- Si  $b = 0$  (ou  $a = 1$ ),  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , la méthode est un solveur direct.

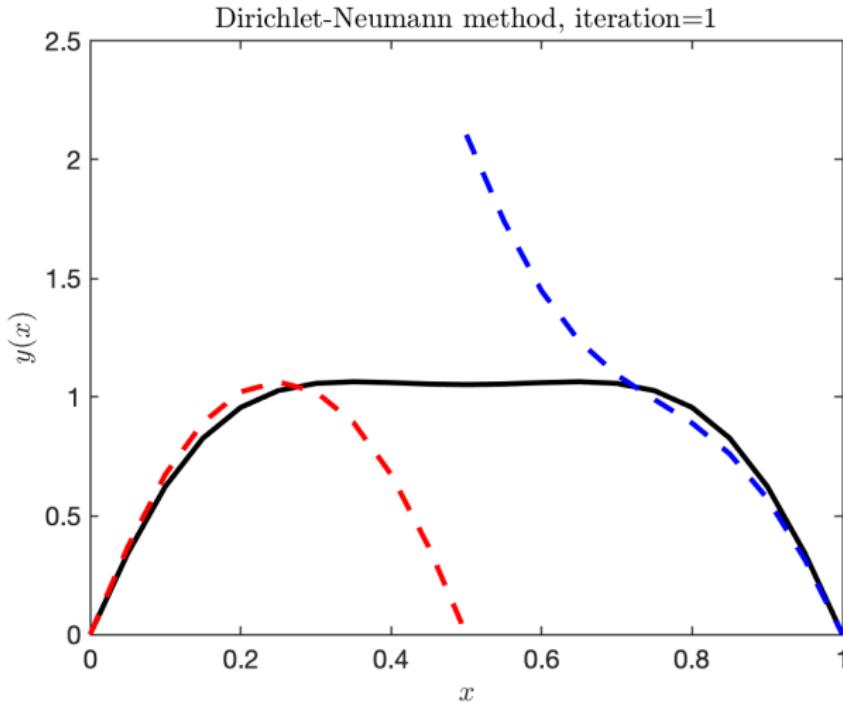
## Dirichlet-Neumann (Bjørstad, Widlund 1986)

Considérons une décomposition sans recouvrement  $\Gamma$ . On résout

$$\begin{array}{lll} -\Delta y_1^n = \nu^{-1} \lambda_1^n & \text{dans } \Omega_1, & -\Delta y_2^n = \nu^{-1} \lambda_2^n \quad \text{dans } \Omega_2, \\ y_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & y_2^n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ y_1^n = y_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma, & \partial_n y_2^n = \partial_n y_1^n \quad \text{sur } \Gamma, \\ -\Delta \lambda_1^n = \hat{y} - y_1^n & \text{dans } \Omega_1, & -\Delta \lambda_2^n = \hat{y} - y_2^n \quad \text{dans } \Omega_2, \\ \lambda_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & \lambda_2^n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ \lambda_1^n = \lambda_2^{n-1} & \text{sur } \Gamma. & \partial_n \lambda_2^n = \partial_n \lambda_1^n \quad \text{sur } \Gamma. \end{array}$$

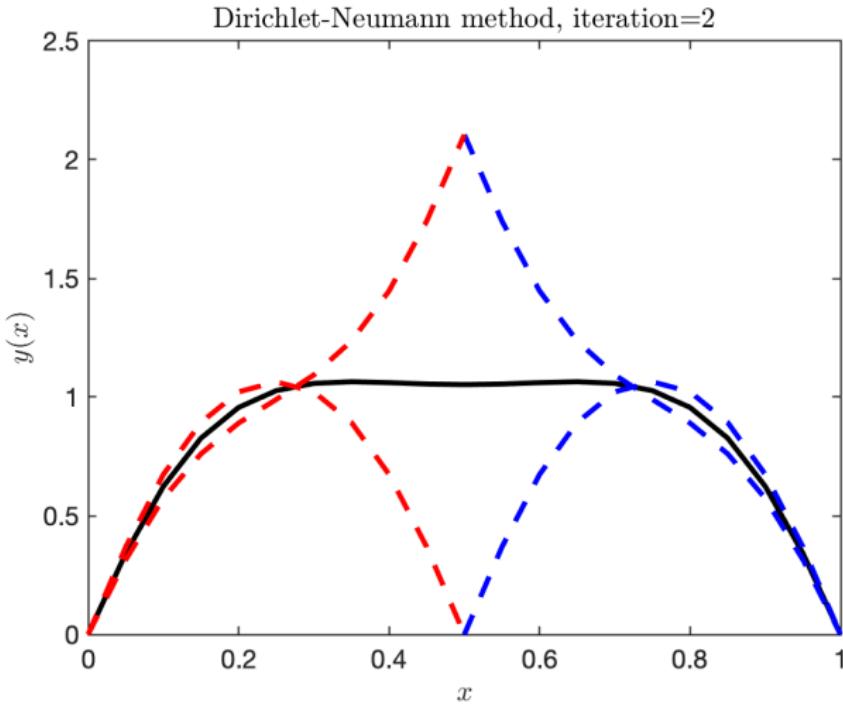
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



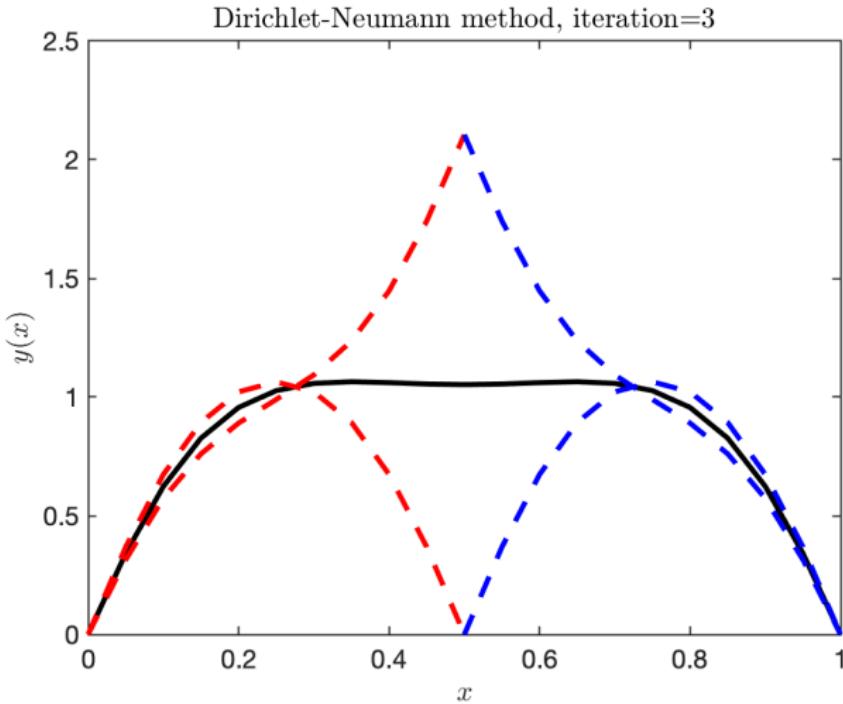
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



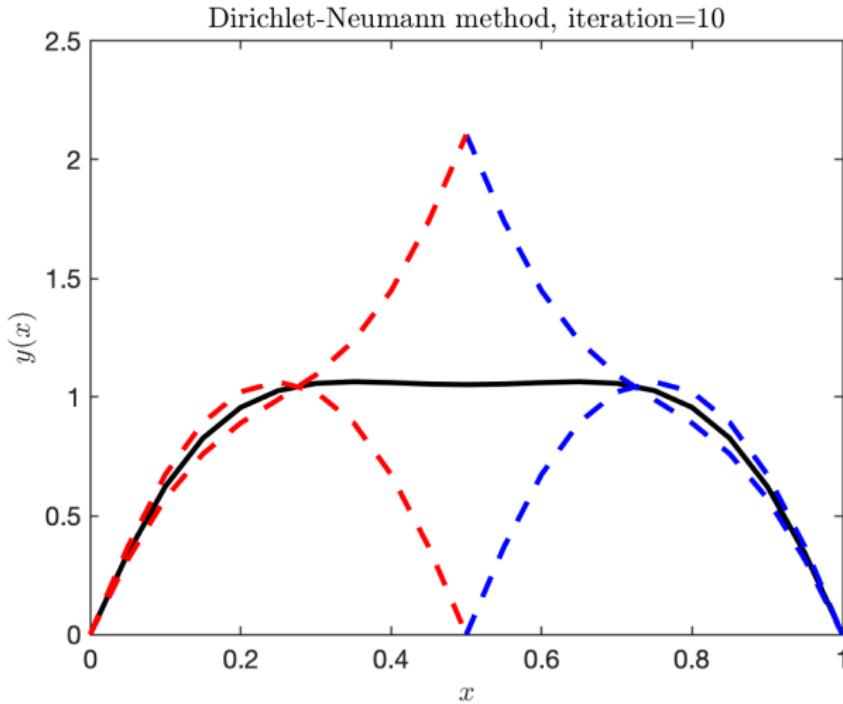
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



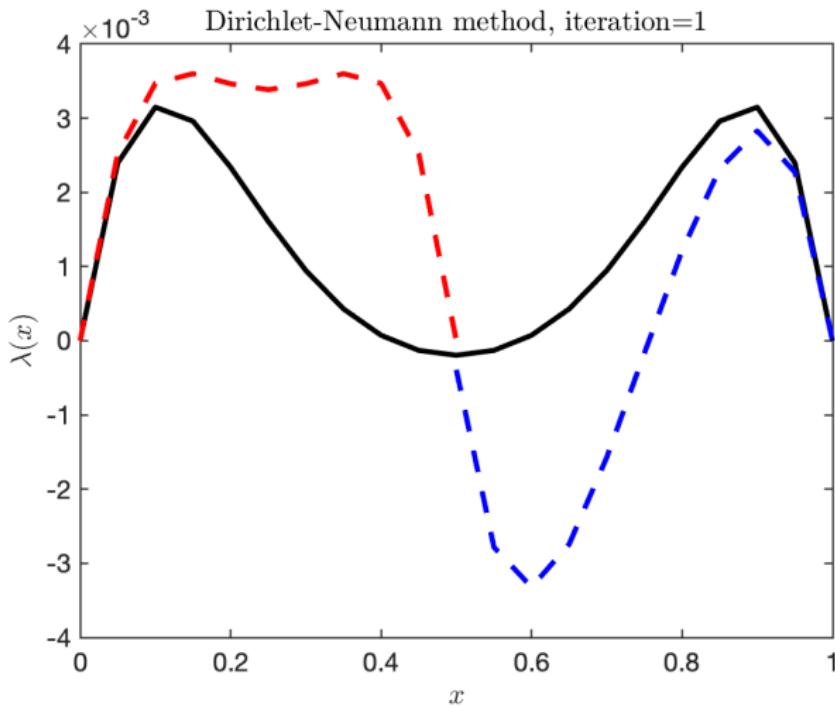
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



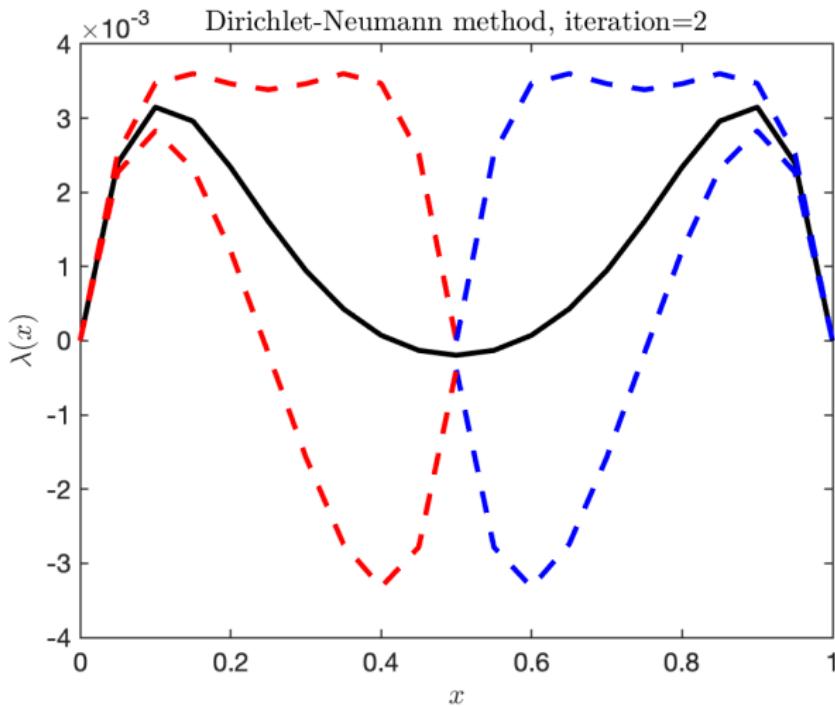
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



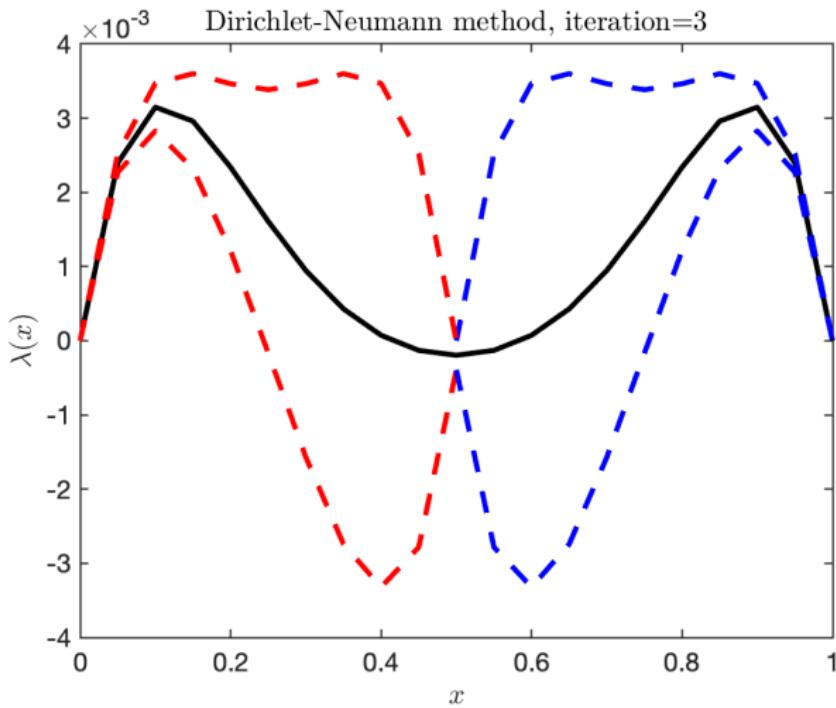
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



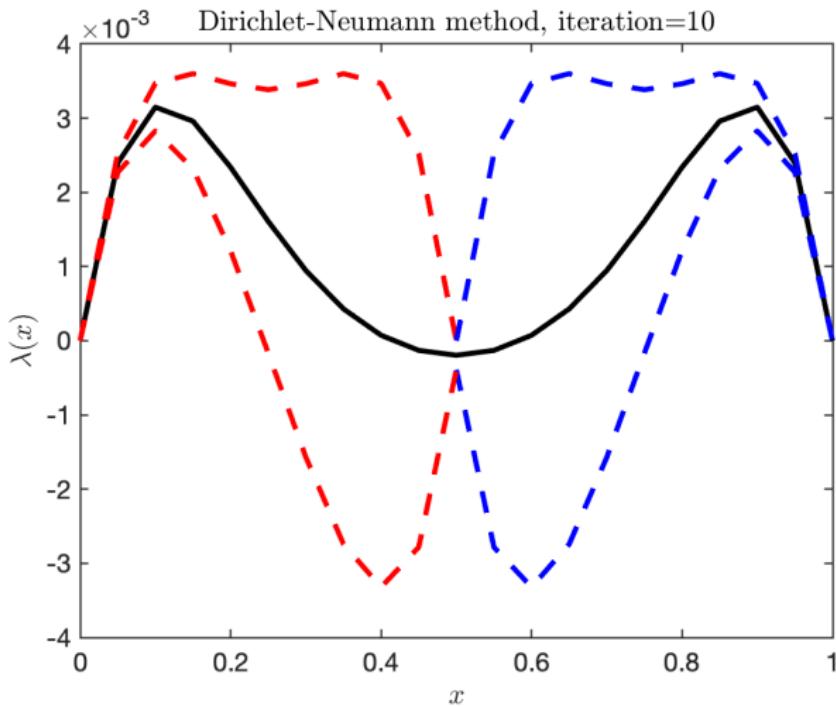
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



## Exemple 1D

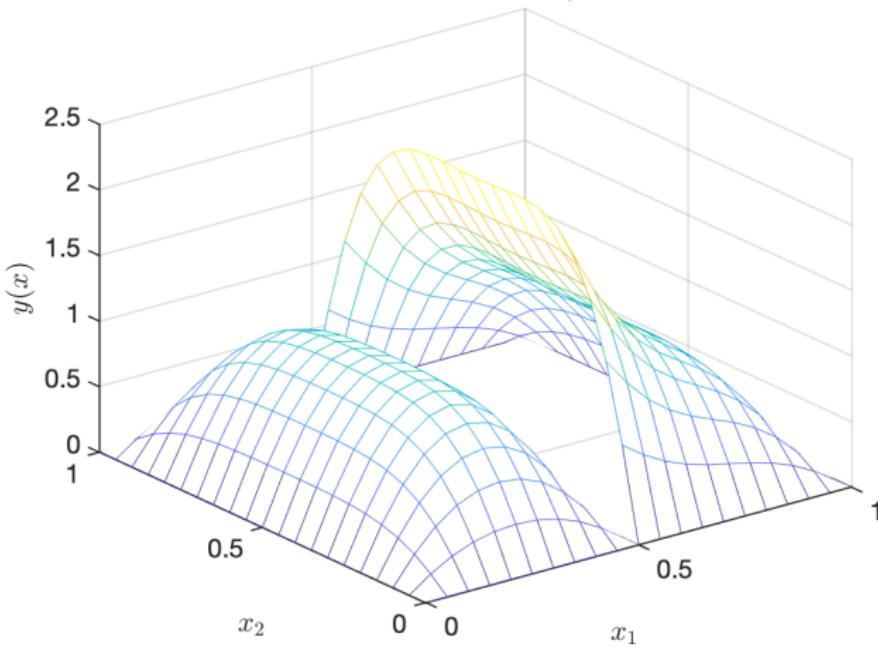
Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ .



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

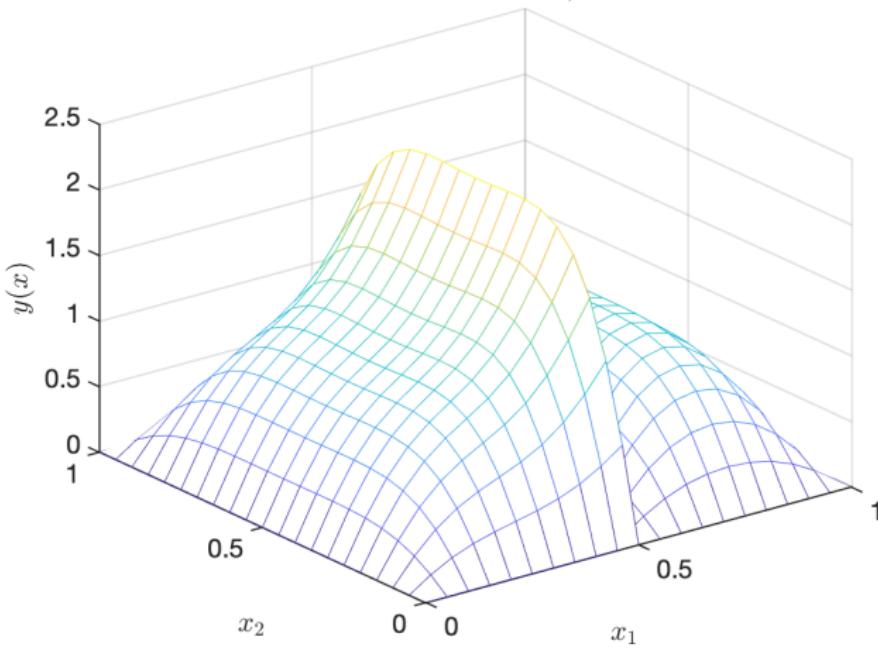
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

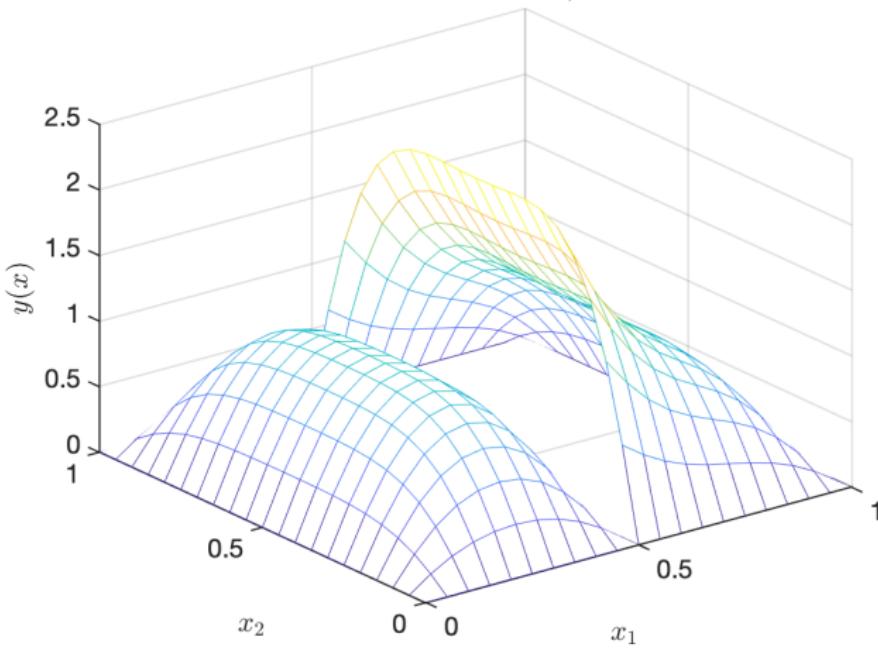
Dirichlet-Neumann method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

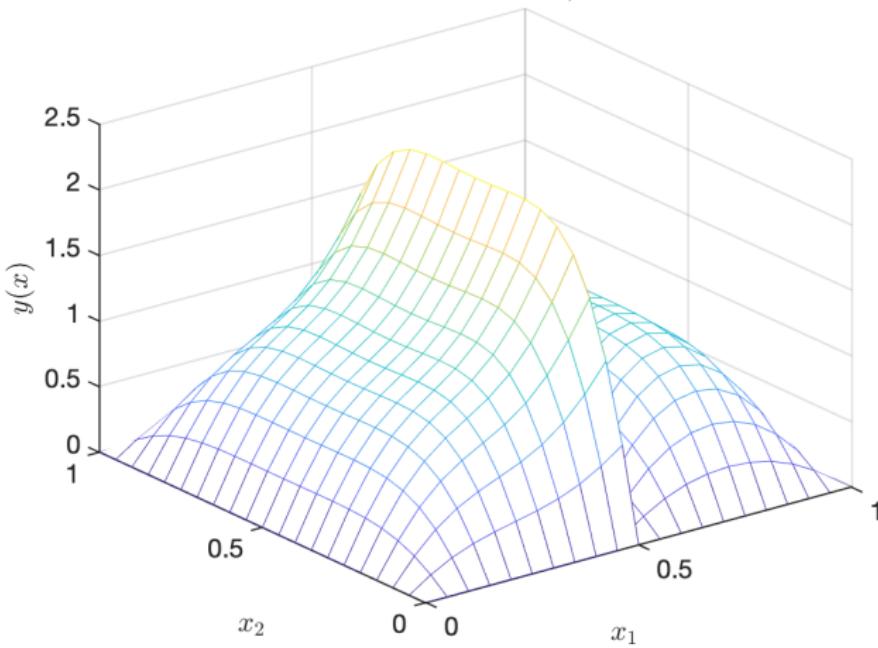
Dirichlet-Neumann method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

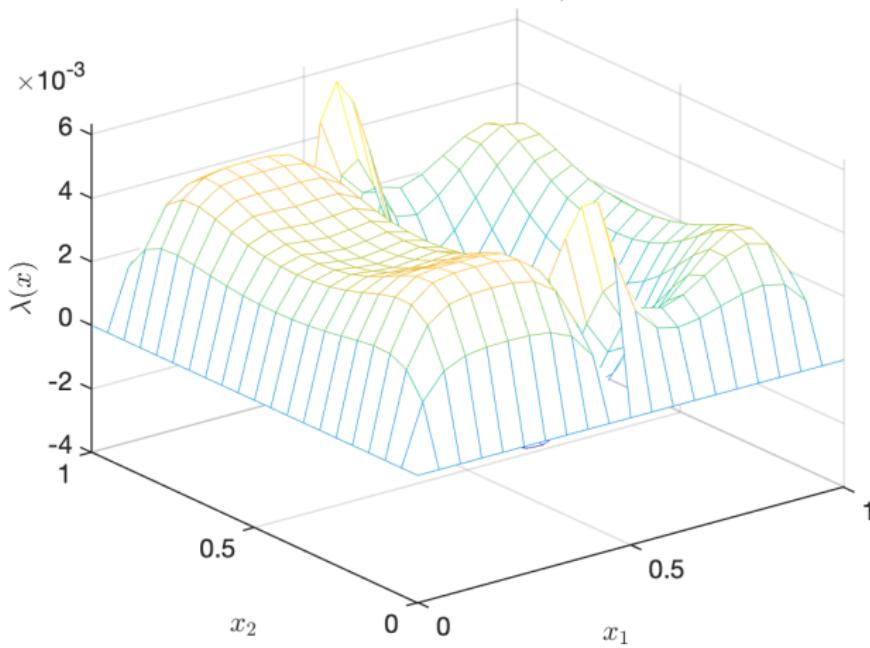
Dirichlet-Neumann method, iteration=4



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

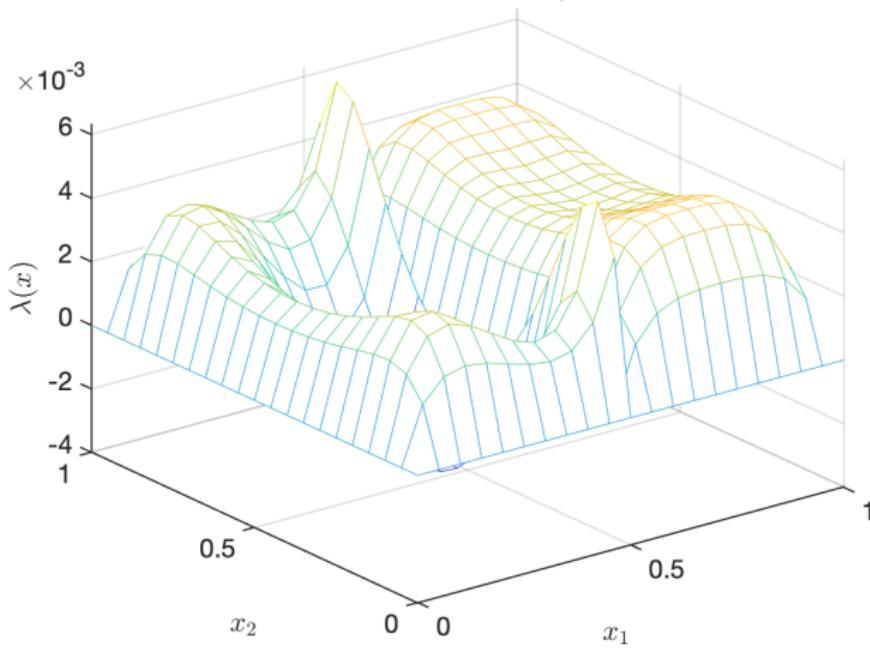
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

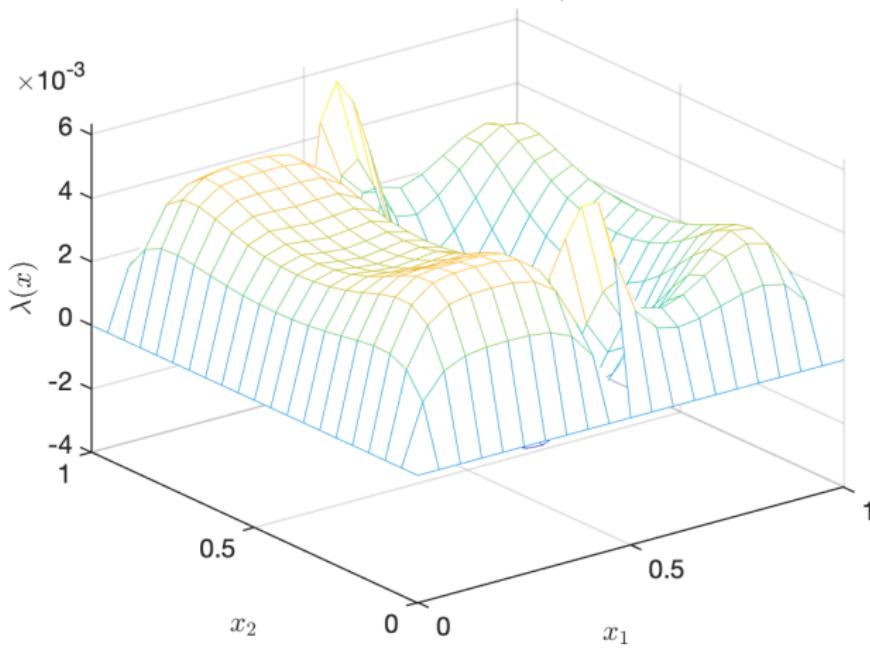
Dirichlet-Neumann method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

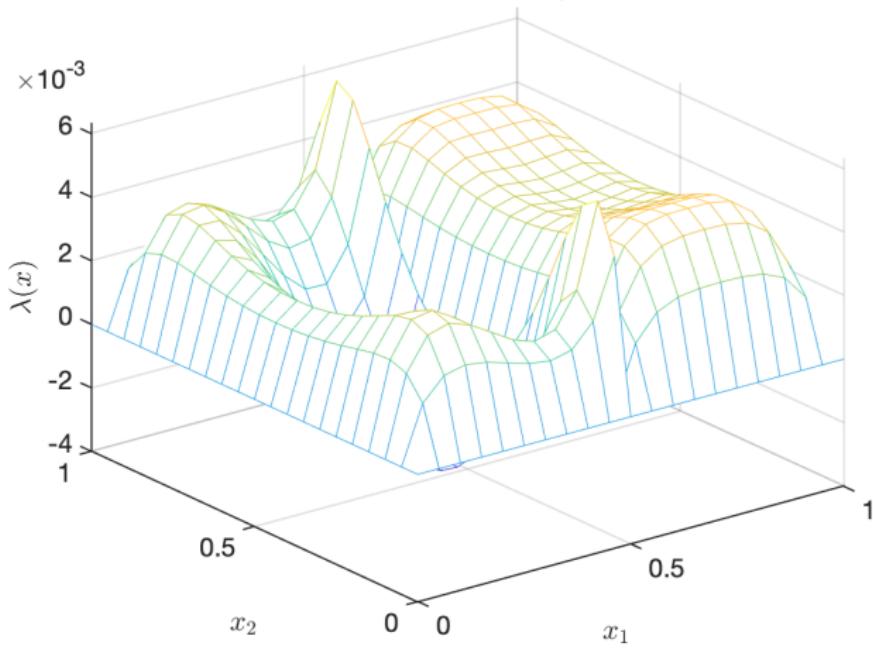
Dirichlet-Neumann method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

Dirichlet-Neumann method, iteration=4



# Analyse de l'erreur 1D

- Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  et  $\xi_j^n := \lambda - \lambda_j^n$  qui satisfont

$$-\partial_{xx} e_1^n = \nu^{-1} \xi_1^n \quad \text{dans } (0, a), \quad -\partial_{xx} e_2^n = \nu^{-1} \xi_2^n \quad \text{dans } (a, 1),$$

$$e_1^n(0) = 0, \quad e_2^n(1) = 0,$$

$$e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a),$$

$$\partial_{xx} \xi_1^n = e_1^n \quad \text{dans } (0, a), \quad \partial_{xx} \xi_2^n = e_2^n \quad \text{dans } (a, 1),$$

$$\xi_1^n(0) = 0, \quad \xi_2^n(1) = 0,$$

$$\xi_1^n(a) = \xi_2^{n-1}(a), \quad \partial_x \xi_2^n(a) = \partial_x \xi_1^n(a).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  et  $\xi_j^n := \lambda - \lambda_j^n$  qui satisfont

$$\begin{aligned} -\partial_{xx} e_1^n &= \nu^{-1} \xi_1^n && \text{dans } (0, a), & -\partial_{xx} e_2^n &= \nu^{-1} \xi_2^n && \text{dans } (a, 1), \\ e_1^n(0) &= 0, & & & e_2^n(1) &= 0, \\ e_1^n(a) &= e_2^{n-1}(a), & & & \partial_x e_2^n(a) &= \partial_x e_1^n(a), \\ \partial_{xx} \xi_1^n &= e_1^n && \text{dans } (0, a), & \partial_{xx} \xi_2^n &= e_2^n && \text{dans } (a, 1), \\ \xi_1^n(0) &= 0, & & & \xi_2^n(1) &= 0, \\ \xi_1^n(a) &= \xi_2^{n-1}(a), & & & \partial_x \xi_2^n(a) &= \partial_x \xi_1^n(a). \end{aligned}$$

- Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\partial_{xxxx} + \nu^{-1}) e_1^n &= 0 && \text{dans } (0, a), & (\partial_{xxxx} + \nu^{-1}) e_2^n &= 0 && \text{dans } (a, 1), \\ e_1^n(0) &= 0, & & & e_2^n(1) &= 0, \\ e_1^n(a) &= e_2^{n-1}(a), & & & \partial_x e_2^n(a) &= \partial_x e_1^n(a), \\ \partial_{xx} e_1^n(0) &= 0, & & & \partial_{xx} e_2^n(1) &= 0, \\ \partial_{xx} e_1^n(a) &= \partial_{xx} e_2^{n-1}(a), & & & \partial_{xxx} e_2^n(a) &= \partial_{xxx} e_1^n(a). \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur 1D

► Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} & (\partial_{xxxx} + \nu^{-1})e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), & (\partial_{xxxx} + \nu^{-1})e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \\ & e_1^n(0) = 0, & e_2^n(1) = 0, \\ & e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a), & \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a), \\ & \partial_{xx} e_1^n(0) = 0, & \partial_{xx} e_2^n(1) = 0, \\ & \partial_{xx} e_1^n(a) = \partial_{xx} e_2^{n-1}(a), & \partial_{xxx} e_2^n(a) = \partial_{xxx} e_1^n(a). \end{aligned}$$

► On trouve les solutions avec  $\mu^4 = \nu^{-1}$ :

$$\begin{aligned} e_1^n(x) &= C_1^n \sinh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) + C_2^n \cosh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right), \\ e_2^n(x) &= C_3^n \sinh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + C_4^n \cosh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur 1D

- On trouve les solutions avec  $\mu^4 = \nu^{-1}$ :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) + C_2^n \cosh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\begin{aligned} e_2^n(x) &= C_3^n \sinh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \\ &\quad + C_4^n \cosh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} e_2^n(a) \\ \partial_{xx} e_2^n(a) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1 - \mu^4 \alpha_2 \beta_2 & \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 \\ -\mu^4 (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) & \alpha_1 \beta_1 - \mu^4 \alpha_2 \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx} e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2^{n-1}(a) \\ \partial_{xx} e_2^{n-1}(a) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

# Analyse de l'erreur 1D

- La matrice est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix}, \quad M_1 = \alpha_1 \beta_1 - \mu^4 \alpha_2 \beta_2, \quad M_2 = \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1.$$

avec

$$\alpha_1 := \frac{\mu}{\sqrt{2}} \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})}{\sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})},$$

$$\alpha_2 := \frac{1}{\sqrt{2}\mu} \frac{\sinh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) - \sin(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})}{\sinh^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}}) + \sin^2(\frac{\mu a}{\sqrt{2}})},$$

$$\beta_1 := -\frac{1}{\sqrt{2}\mu} \frac{\sinh(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) + \sin(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}})}{\sinh^2(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) + \cos^2(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}})},$$

$$\beta_2 := \frac{1}{\sqrt{2}\mu^3} \frac{\sinh(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) \cosh(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) - \sin(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) \cos(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}})}{\sinh^2(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}}) + \cos^2(\frac{\mu(1-a)}{\sqrt{2}})}.$$

- Si  $a = 1 - a$ , alors  $\alpha_1 \beta_1 - \mu^4 \alpha_2 \beta_2 = 1$  et  $\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1 = 0$ , la méthode ne converge pas.

# Dirichlet-Neumann avec relaxation

Considérons une décomposition sans recouvrement  $\Gamma$ . On résout

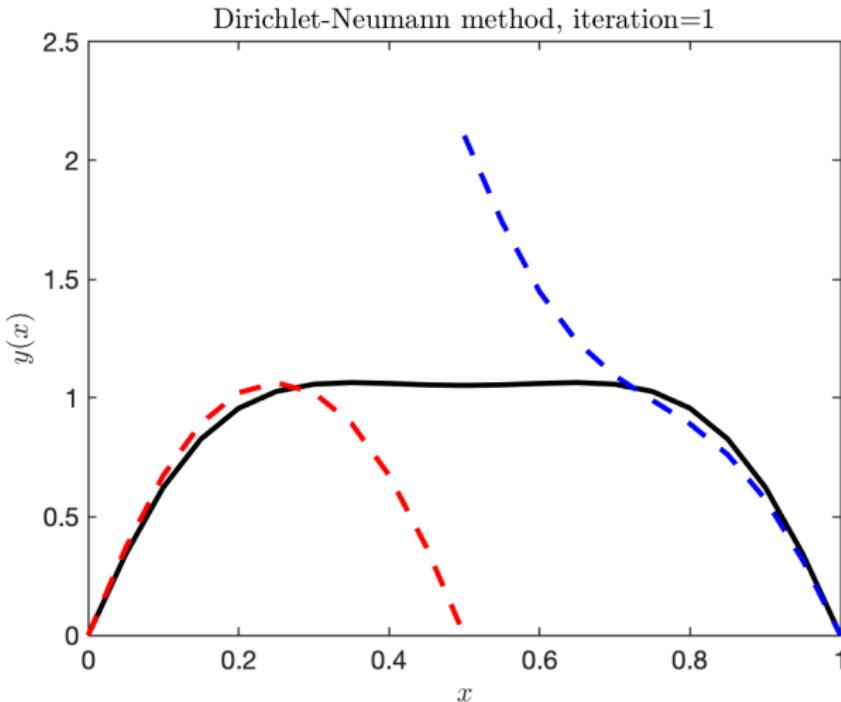
$$\begin{array}{lll} -\Delta y_1^n = \nu^{-1} \lambda_1^n & \text{dans } \Omega_1, & -\Delta y_2^n = \nu^{-1} \lambda_2^n \\ y_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & y_2^n = 0 \\ y_1^n = y_\Gamma^{n-1} & \text{sur } \Gamma, & \partial_n y_2^n = \partial_n y_1^n \\ -\Delta \lambda_1^n = \hat{y} - y_1^n & \text{dans } \Omega_1, & -\Delta \lambda_2^n = \hat{y} - y_2^n \\ \lambda_1^n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & \lambda_2^n = 0 \\ \lambda_1^n = \lambda_\Gamma^{n-1} & \text{sur } \Gamma, & \partial_n \lambda_2^n = \partial_n \lambda_1^n \end{array} \quad \begin{array}{lll} & & \text{dans } \Omega_2, \\ & & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ & & \text{sur } \Gamma, \\ & & \text{dans } \Omega_2, \\ & & \text{sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ & & \text{sur } \Gamma. \end{array}$$

avec

$$y_\Gamma^n = \theta_y y_2^n|_\Gamma + (1 - \theta_y) y_\Gamma^{n-1}, \quad \lambda_\Gamma^n = \theta_\lambda \lambda_2^n|_\Gamma + (1 - \theta_\lambda) \lambda_\Gamma^{n-1}.$$

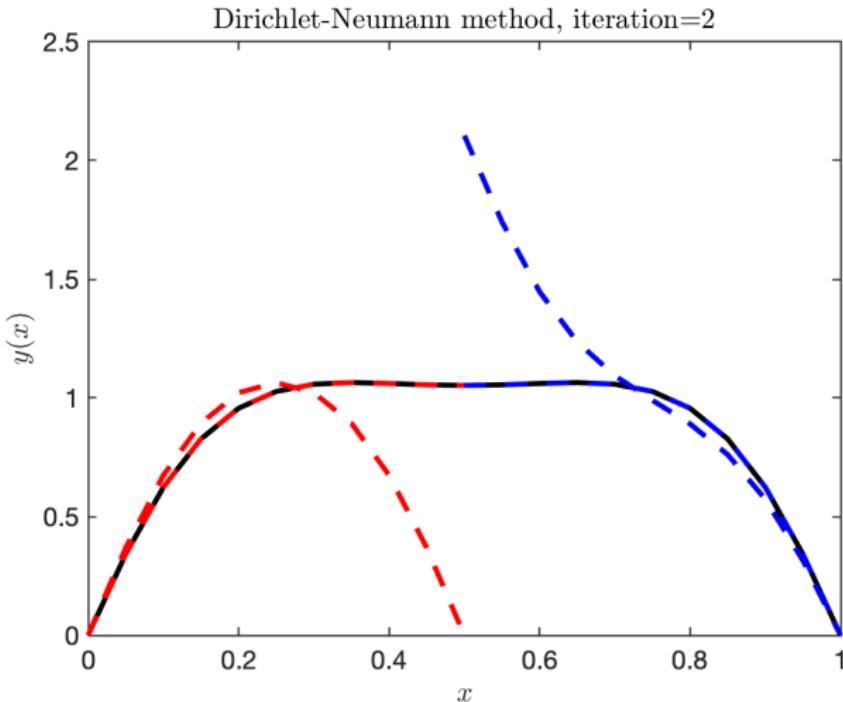
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ . Les paramètres  $\theta_y = \theta_\lambda = \frac{1}{2}$ .



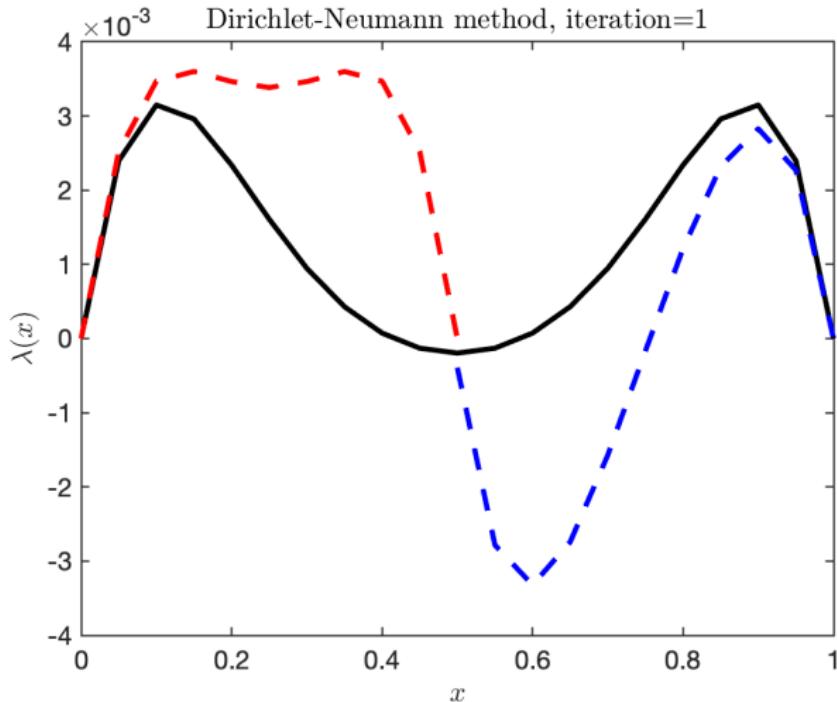
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ . Les paramètres  $\theta_y = \theta_\lambda = \frac{1}{2}$ .



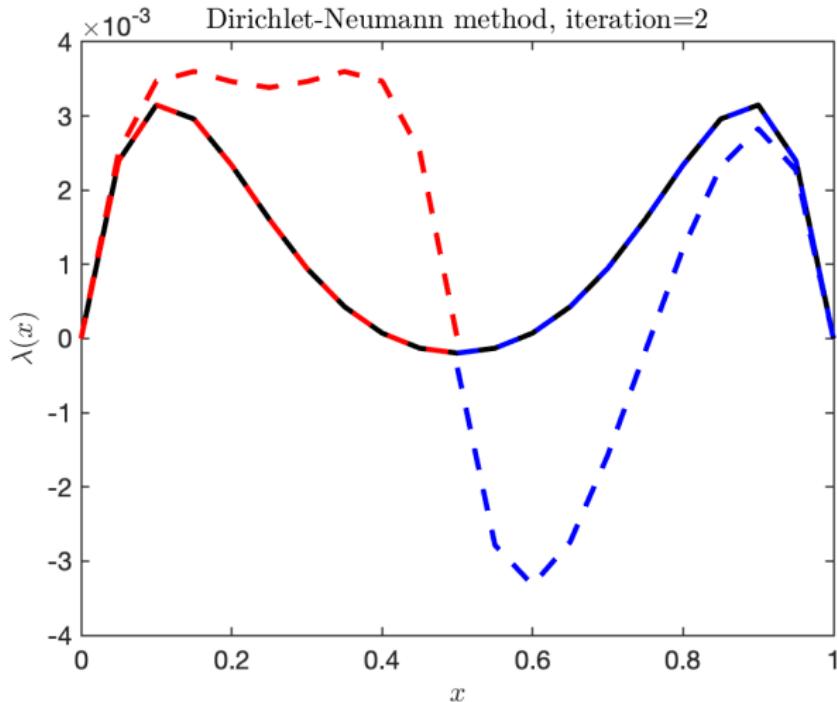
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ . Les paramètres  $\theta_y = \theta_\lambda = \frac{1}{2}$ .



## Exemple 1D

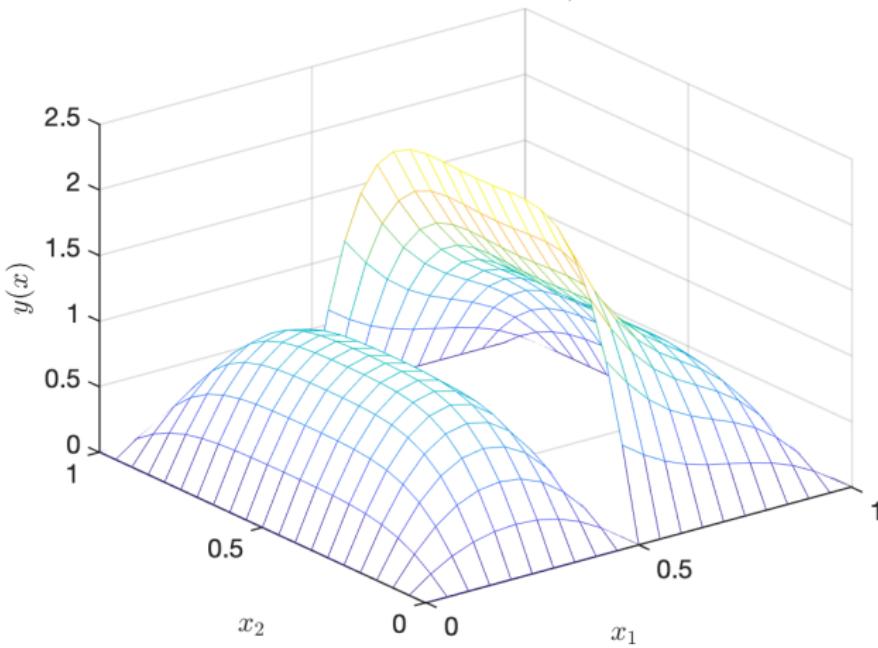
Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5) = 0$ . Les paramètres  $\theta_y = \theta_\lambda = \frac{1}{2}$ .



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

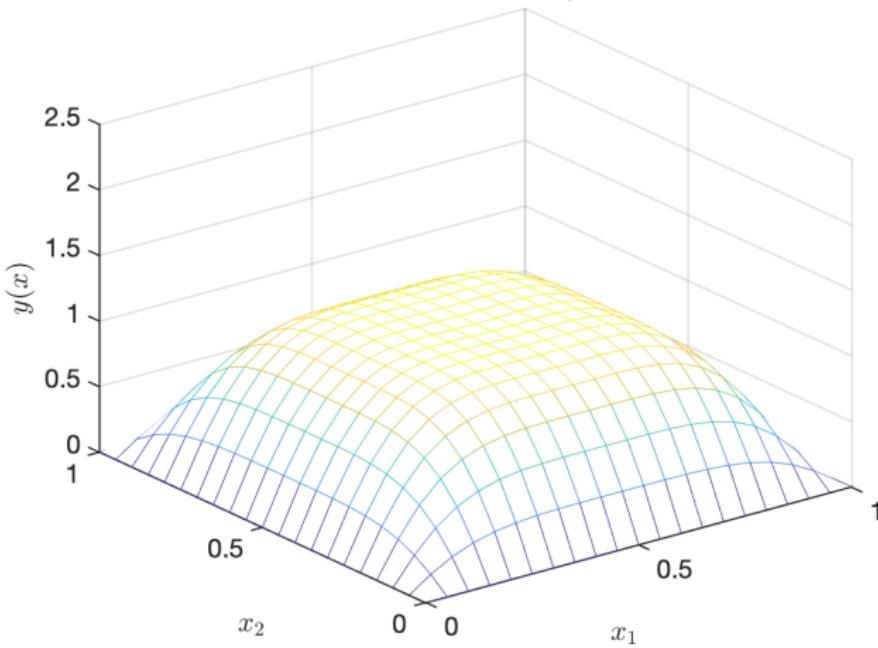
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

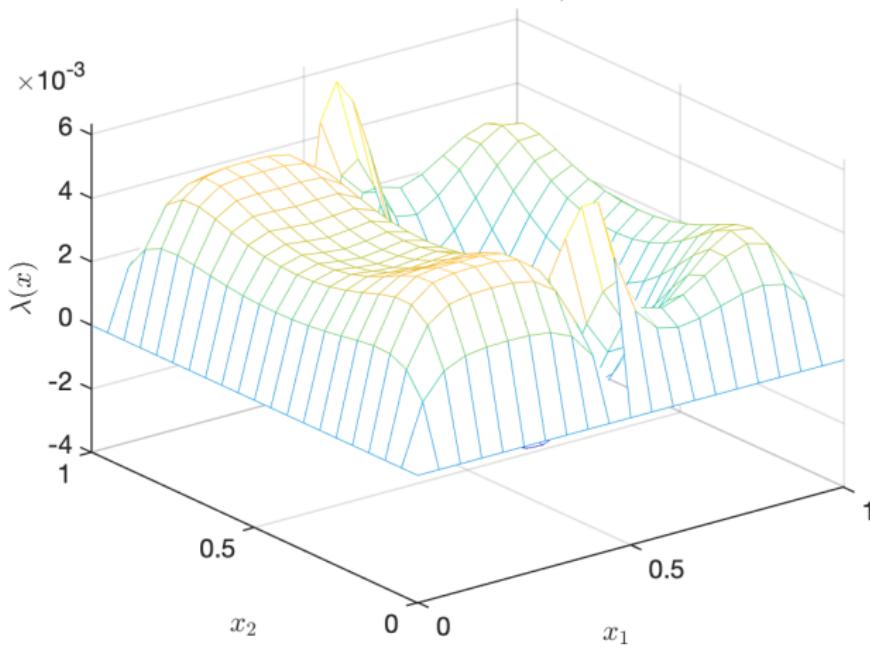
Dirichlet-Neumann method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

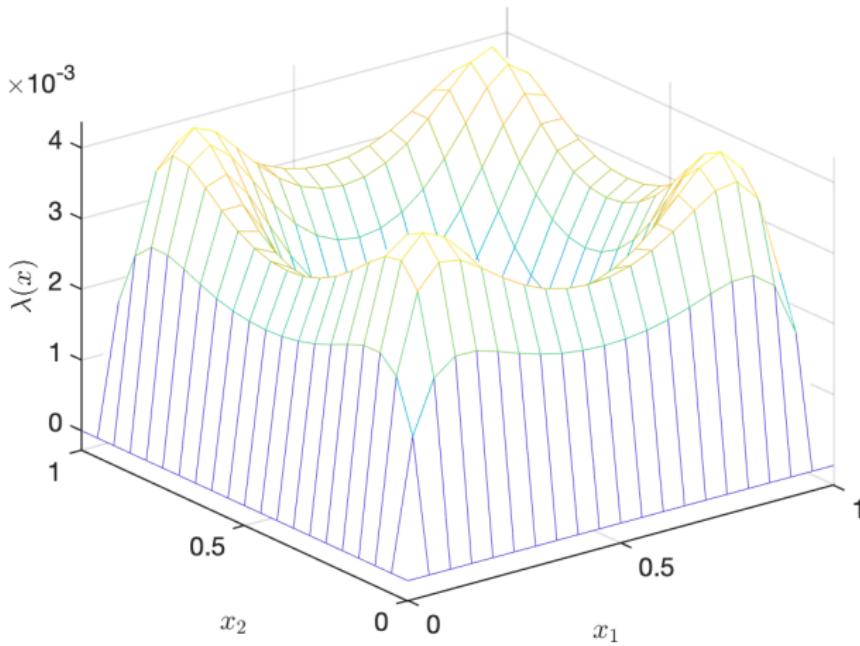
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec les initialisations  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$  et  $\lambda_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

Dirichlet-Neumann method, iteration=2



# Analyse de l'erreur 1D

- On trouve les solutions avec  $\mu^4 = \nu^{-1}$ :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) + C_2^n \cosh\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu x}{\sqrt{2}}\right),$$
$$e_2^n(x) = C_3^n \sinh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right)$$
$$+ C_4^n \cosh\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\mu(1-x)}{\sqrt{2}}\right).$$

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$  avec

$$e_\Gamma^n = \theta_y e_2^n(a) + (1 - \theta_y) e_\Gamma^{n-1}, \quad \xi_\Gamma^n = \theta_\lambda \partial_{xx} e_2^n(a) + (1 - \theta_\lambda) \xi_\Gamma^{n-1}.$$

- On note la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ -\mu^4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix}.$$

# Analyse de l'erreur 1D

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$  avec

$$e_\Gamma^n = \theta_y e_2^n(a) + (1 - \theta_y) e_\Gamma^{n-1}, \quad \xi_\Gamma^n = \theta_\lambda \partial_{xx} e_2^n(a) + (1 - \theta_\lambda) \xi_\Gamma^{n-1}.$$

- On note la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ -\mu^4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix}.$$

- On obtient

$$\begin{pmatrix} e_\Gamma^n \\ \xi_\Gamma^n \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 - \theta_y & 0 \\ 0 & 1 - \theta_\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_y M_1 & \theta_y M_2 \\ -\theta_\lambda \mu^4 M_2 & \theta_\lambda M_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e_\Gamma^{n-1} \\ \xi_\Gamma^{n-1} \end{pmatrix}.$$

# Analyse de l'erreur 1D

- On évalue les coefficients  $C_1^n, C_2^n, C_3^n$  et  $C_4^n$  avec

$$e_\Gamma^n = \theta_y e_2^n(a) + (1 - \theta_y) e_\Gamma^{n-1}, \quad \xi_\Gamma^n = \theta_\lambda \partial_{xx} e_2^n(a) + (1 - \theta_\lambda) \xi_\Gamma^{n-1}.$$

- On note la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2 & \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 \\ -\mu^4(\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) & \alpha_1\beta_1 - \mu^4\alpha_2\beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -\mu^4 M_2 & M_1 \end{pmatrix}.$$

- On obtient

$$\begin{pmatrix} e_\Gamma^n \\ \xi_\Gamma^n \end{pmatrix} = \left[ \begin{pmatrix} 1 - \theta_y & 0 \\ 0 & 1 - \theta_\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_y M_1 & \theta_y M_2 \\ -\theta_\lambda \mu^4 M_2 & \theta_\lambda M_1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} e_\Gamma^{n-1} \\ \xi_\Gamma^{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Si  $a = 1 - a$ , alors  $M_1 = 1$  et  $M_2 = 0$ ,

$$\begin{pmatrix} e_\Gamma^n \\ \xi_\Gamma^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2\theta_y & 0 \\ 0 & 1 - 2\theta_\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_\Gamma^{n-1} \\ \xi_\Gamma^{n-1} \end{pmatrix},$$

on trouve les meilleurs parameters  $\theta_y = \theta_\lambda = \frac{1}{2}$ .

# Analyse de l'erreur 2D

► Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$(\Delta^2 + \nu^{-1})e_1^n = 0 \text{ dans } \Omega_1, \quad (\Delta^2 + \nu^{-1})e_2^n = 0 \text{ dans } \Omega_2,$$

$$e_1^n = \Delta e_1^n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \quad e_2^n = \Delta e_2^n = 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2$$

$$e_1^n = e_2^{n-1} \text{ sur } \Gamma_1, \quad \partial_n e_2^n = \partial_n e_1^n \text{ sur } \Gamma_2,$$

$$\Delta e_1^n = \Delta e_2^{n-1} \text{ sur } \Gamma_1, \quad \partial_n \Delta e_2^n = \partial_n \Delta e_1^n \text{ sur } \Gamma_2.$$

# Analyse de l'erreur 2D

- Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + \nu^{-1})e_1^n &= 0 \text{ dans } \Omega_1, & (\Delta^2 + \nu^{-1})e_2^n &= 0 \text{ dans } \Omega_2, \\ e_1^n = \Delta e_1^n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & e_2^n = \Delta e_2^n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2 \\ e_1^n &= e_2^{n-1} \text{ sur } \Gamma_1, & \partial_n e_2^n &= \partial_n e_1^n \text{ sur } \Gamma_2, \\ \Delta e_1^n &= \Delta e_2^{n-1} \text{ sur } \Gamma_1, & \partial_n \Delta e_2^n &= \partial_n \Delta e_1^n \text{ sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

- À l'aide des séries de Fourier, on développe sur  $x_2$ ,

$$e_j^n(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2).$$

# Analyse de l'erreur 2D

- Éliminons  $\xi_j^n$ , on obtient

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + \nu^{-1})e_1^n &= 0 \text{ dans } \Omega_1, & (\Delta^2 + \nu^{-1})e_2^n &= 0 \text{ dans } \Omega_2, \\ e_1^n = \Delta e_1^n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, & e_2^n = \Delta e_2^n &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2 \\ e_1^n &= e_2^{n-1} \text{ sur } \Gamma_1, & \partial_n e_2^n &= \partial_n e_1^n \text{ sur } \Gamma_2, \\ \Delta e_1^n &= \Delta e_2^{n-1} \text{ sur } \Gamma_1, & \partial_n \Delta e_2^n &= \partial_n \Delta e_1^n \text{ sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

- À l'aide des séries de Fourier, on développe sur  $x_2$ ,

$$e_j^n(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2).$$

- L'équation devient:

$$\begin{aligned} (\Delta^2 + \nu^{-1})e_j^n(x_1, x_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} (\partial_{x_1 x_1 x_1 x_1} - 2k^2 \partial_{x_1 x_1} + k^4 \\ &\quad + \nu^{-1}) \hat{e}_j^n(x_1, k) \sin(kx_2) = 0. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$-\Delta y = u \quad \text{dans } \Omega,$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Lagrangien:**  $\mathcal{L}(y, u, \lambda) = J(y, u) + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle$  avec  $U_{\text{ad}} = H^{-1}(\Omega)$ .

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Lagrangien:**  $\mathcal{L}(y, u, \lambda) = J(y, u) + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle$  avec  $U_{\text{ad}} = H^{-1}(\Omega)$ .

**Système d'optimalité:**

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega \text{ avec } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ -\Delta \lambda &= \hat{y} - y && \text{dans } \Omega \text{ avec } \lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ u &=? && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathcal{H}u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathcal{H}u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

La norme en  $H^{-1}(\Omega)$  est équivalente à la norme d'énergie avec l'identité  
 $y = \mathcal{H}u$

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 := \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

# Contrôle optimal elliptique

**Problème:** Pour  $\nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |y - \hat{y}|^2 \, dx + \frac{\nu}{2} \|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega, \\ y &= 0 && \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathcal{H}u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

La norme en  $H^{-1}(\Omega)$  est équivalente à la norme d'énergie avec l'identité  
 $y = \mathcal{H}u$

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 := \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Lagrangien:**

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle.$$

# Contrôle optimal elliptique

Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathcal{H} u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

La norme en  $H^{-1}(\Omega)$  est équivalente à la norme d'énergie avec l'identité  
 $y = \mathcal{H}u$

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 := \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Lagrangien:**

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle.$$

**Système d'optimalité:**

$$\begin{aligned} -\Delta y &= u && \text{dans } \Omega \text{ avec } y = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ -\Delta \lambda &= \hat{y} - y && \text{dans } \Omega \text{ avec } \lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \nu \mathcal{H}u &= \lambda && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal elliptique

Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathcal{H} u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

La norme en  $H^{-1}(\Omega)$  est équivalente à la norme d'énergie avec l'identité  
 $y = \mathcal{H}u$

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 := \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Lagrangien:**

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle.$$

**Système d'optimalité:**

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{H}u && \text{dans } \Omega \\ -\Delta \lambda &= \hat{y} - y && \text{dans } \Omega \text{ avec } \lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \nu \mathcal{H}u &= \lambda && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal elliptique

Un opérateur linéaire  $\mathcal{H} : H^{-1}(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathcal{H} u(x) \cdot \nabla v(x) \, dx = \langle u, v \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

La norme en  $H^{-1}(\Omega)$  est équivalente à la norme d'énergie avec l'identité  
 $y = \mathcal{H}u$

$$\|u\|_{H^{-1}(\Omega)}^2 := \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = \|\nabla y\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

**Lagrangien:**

$$\mathcal{L}(y, u, \lambda) = \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \langle u, \mathcal{H}u \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + \langle \lambda, -\Delta y - u \rangle.$$

**Système d'optimalité:**

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{H}u && \text{dans } \Omega \\ -\Delta \lambda &= \hat{y} - y && \text{dans } \Omega \text{ avec } \lambda = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \nu \mathcal{H}u &= \lambda && \text{dans } \Omega. \end{aligned}$$

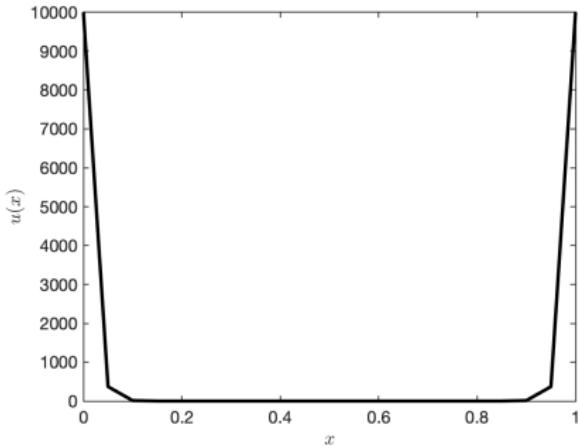
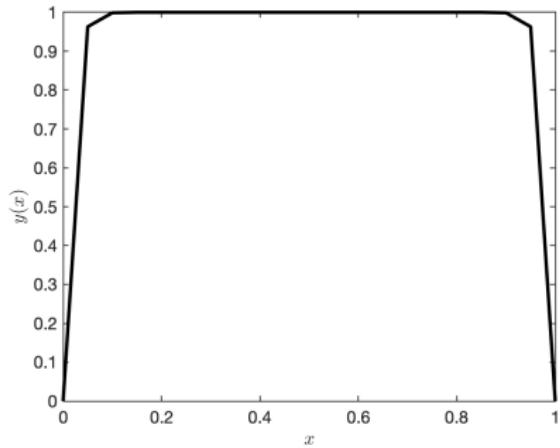
**Système d'optimalité réduit:**  $-\nu \Delta y + y = \hat{y}, y = 0 \text{ on } \partial\Omega.$

# Exemple 1D

## Problème:

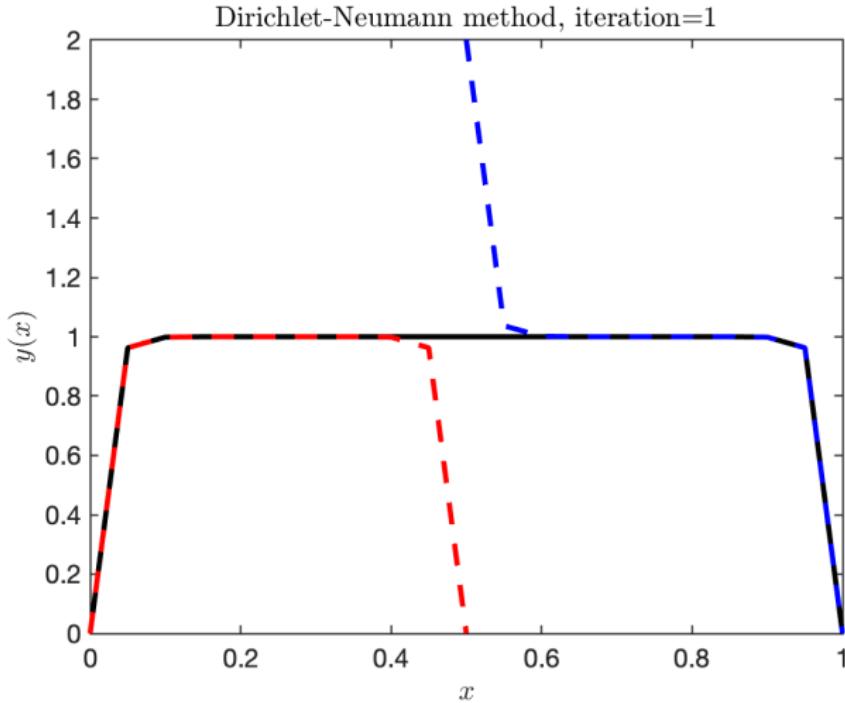
$$-\partial_{xx}y + \nu^{-1}y = \nu^{-1}\hat{y} \quad \text{dans } \Omega = (0, 1), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

avec  $\hat{y} \equiv 1$  dans  $\Omega = (0, 1)$  et  $\nu = 10^{-4}$ .



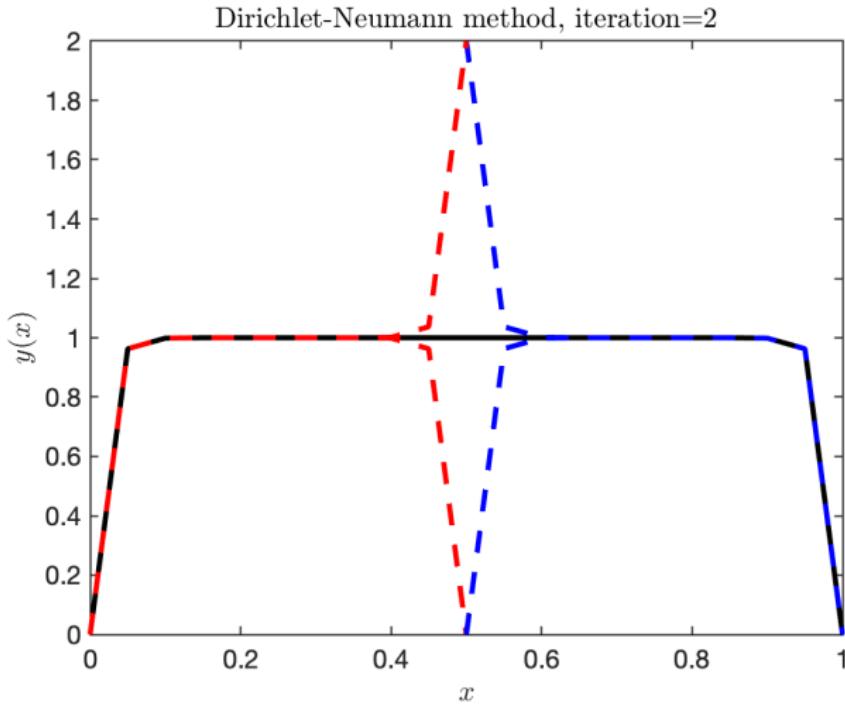
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



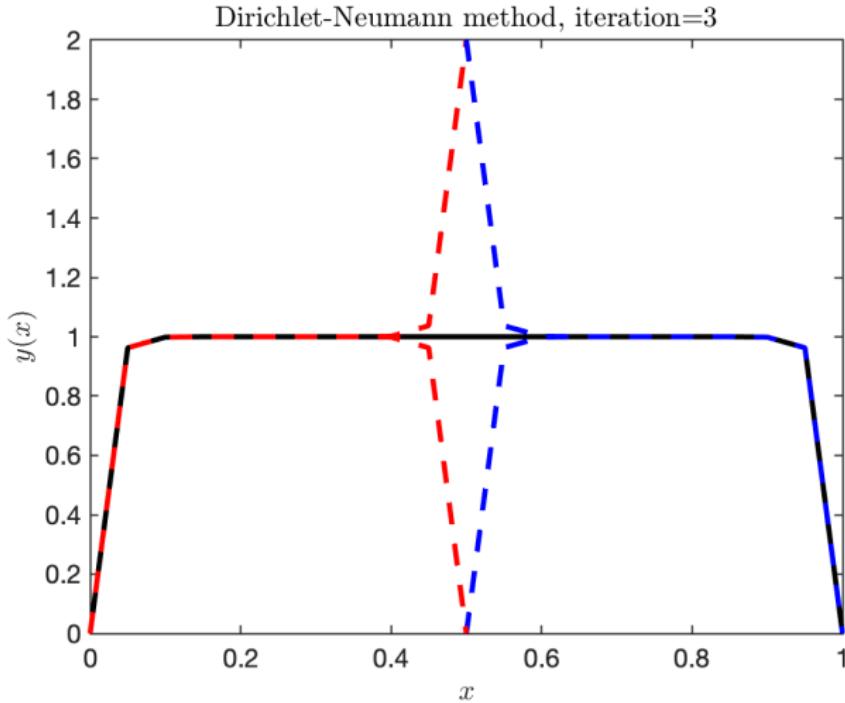
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



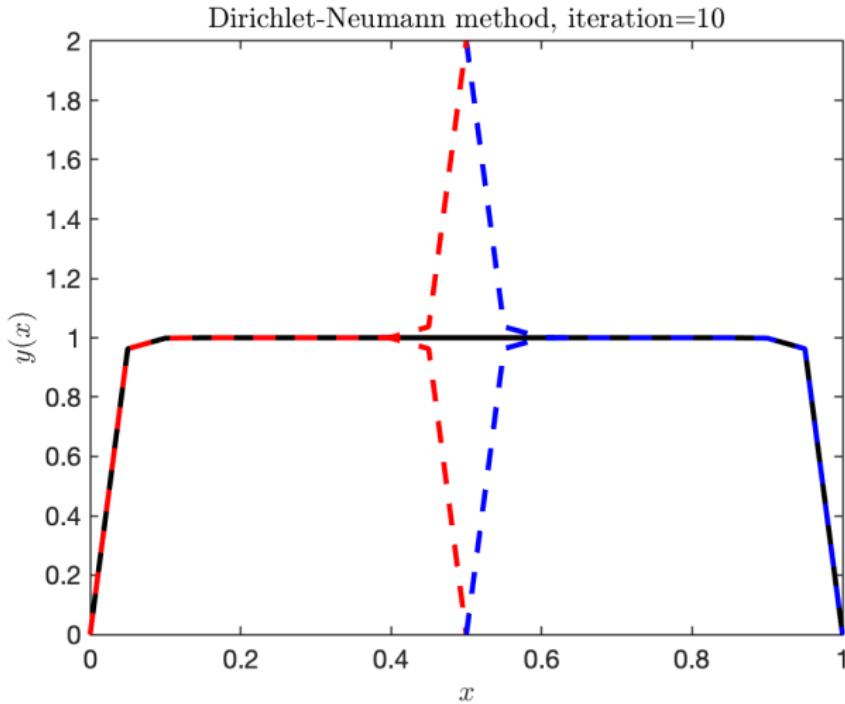
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



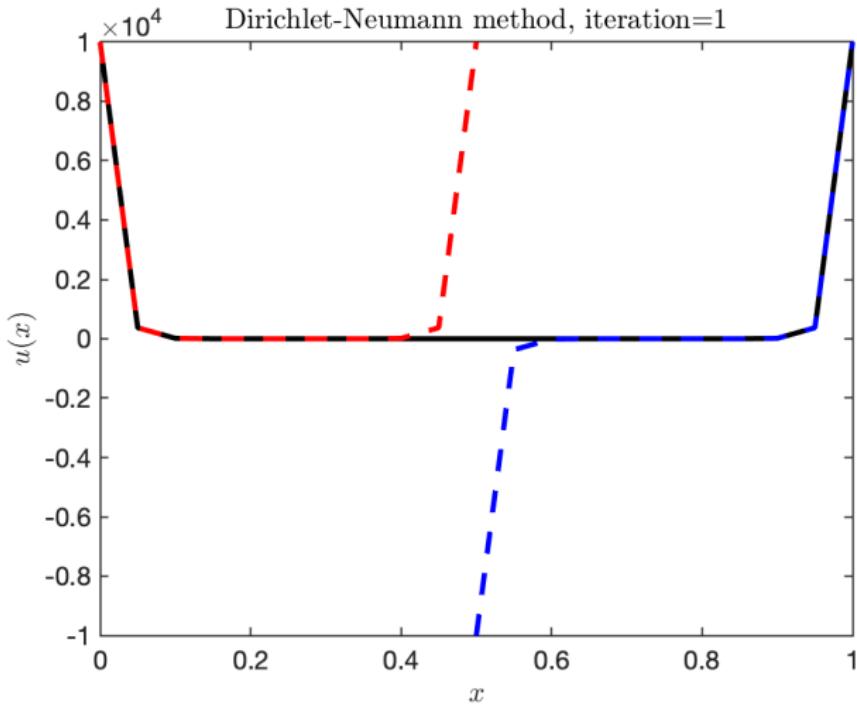
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



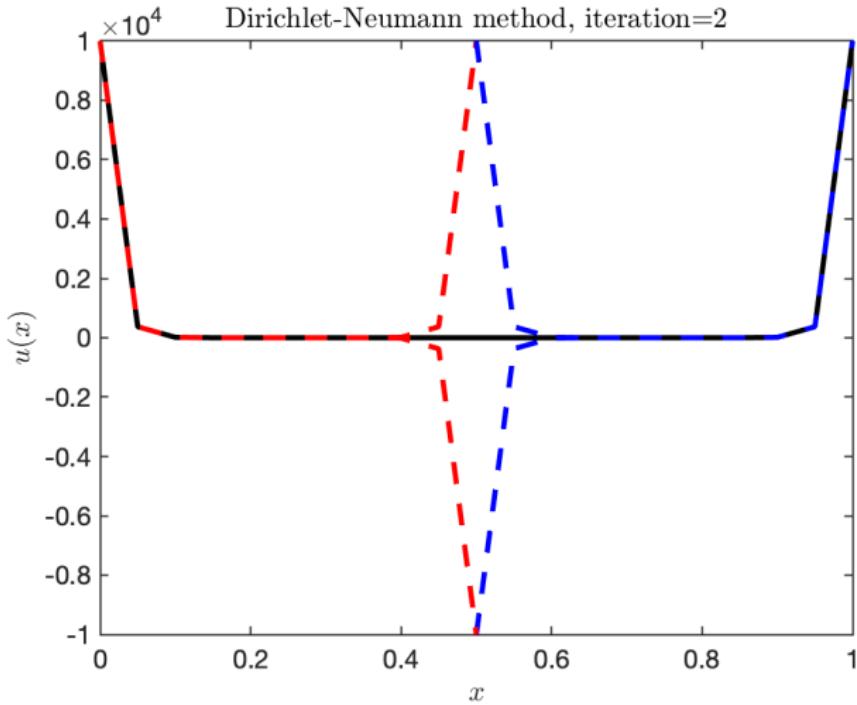
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



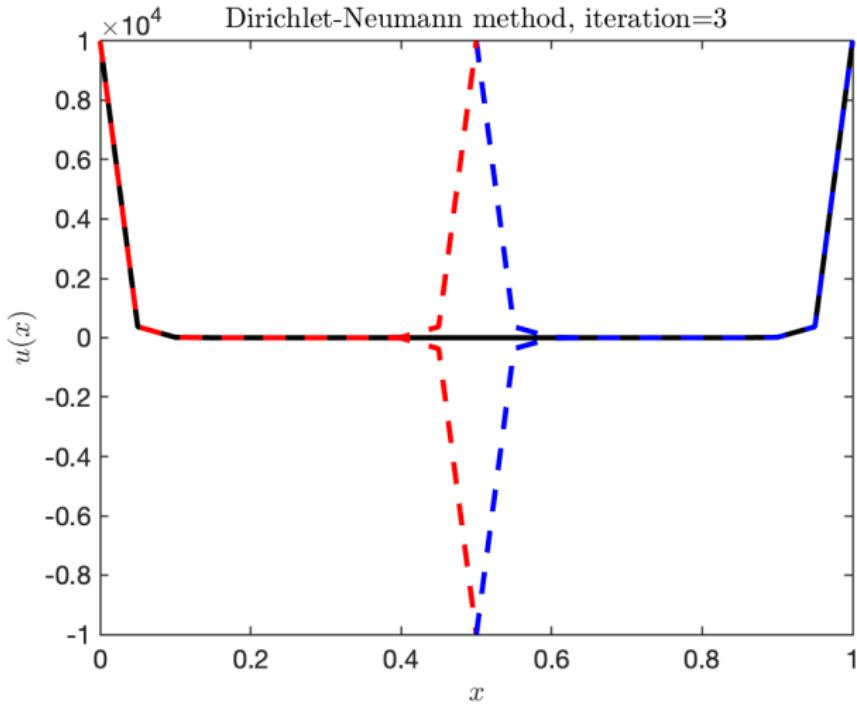
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



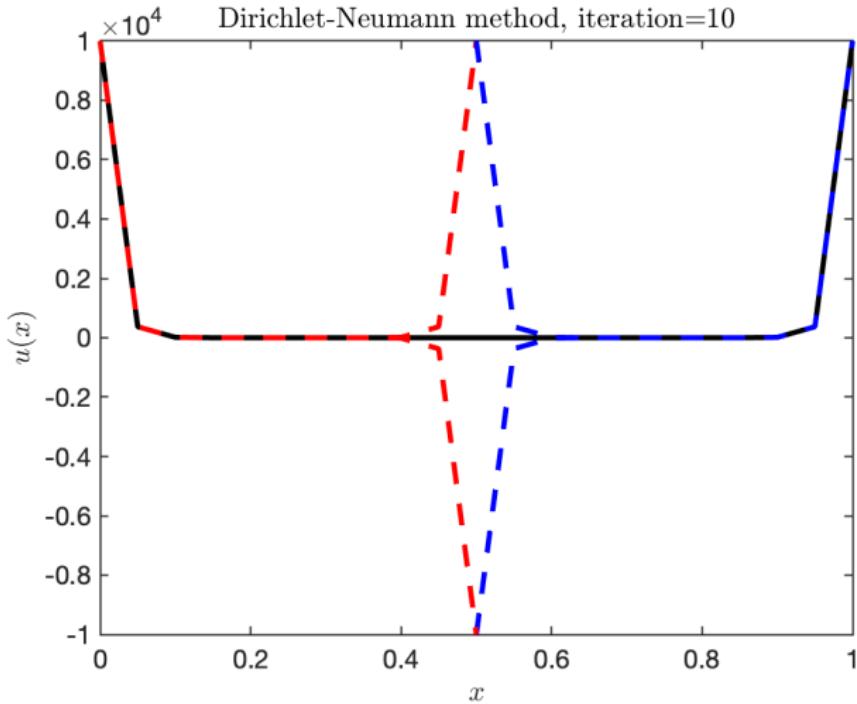
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



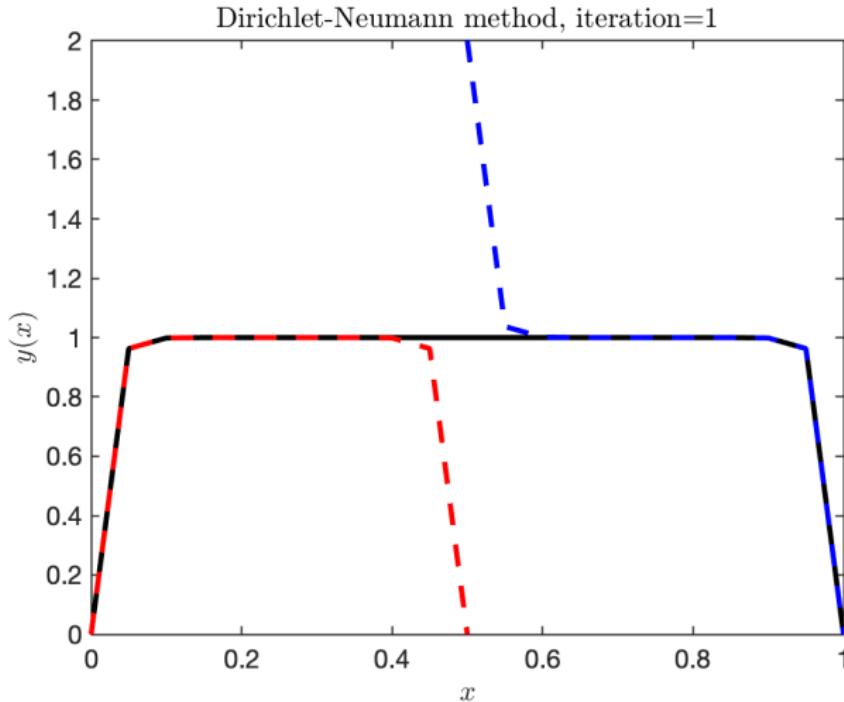
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$ .



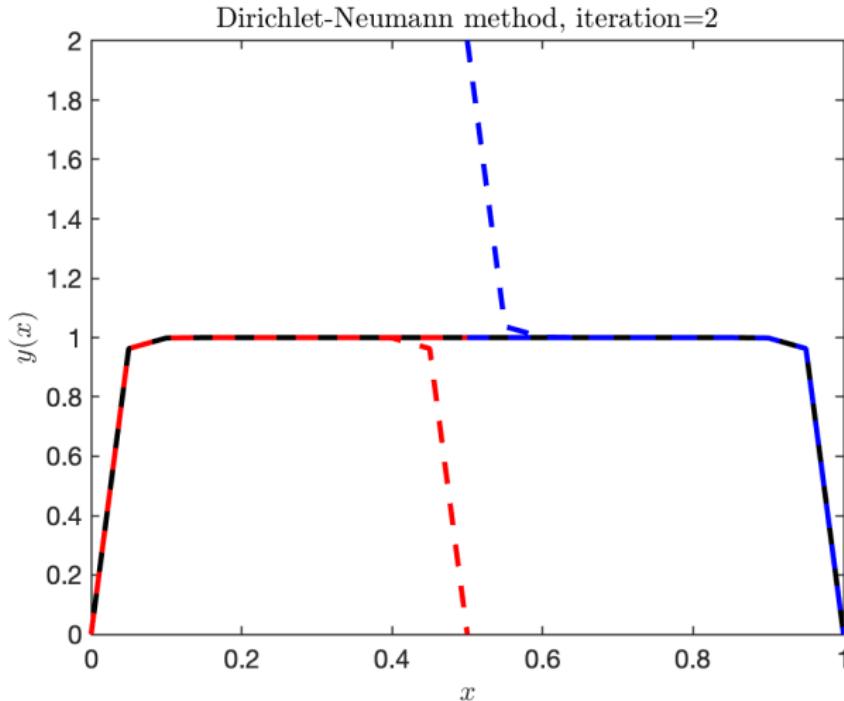
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\theta = \frac{1}{2}$ .



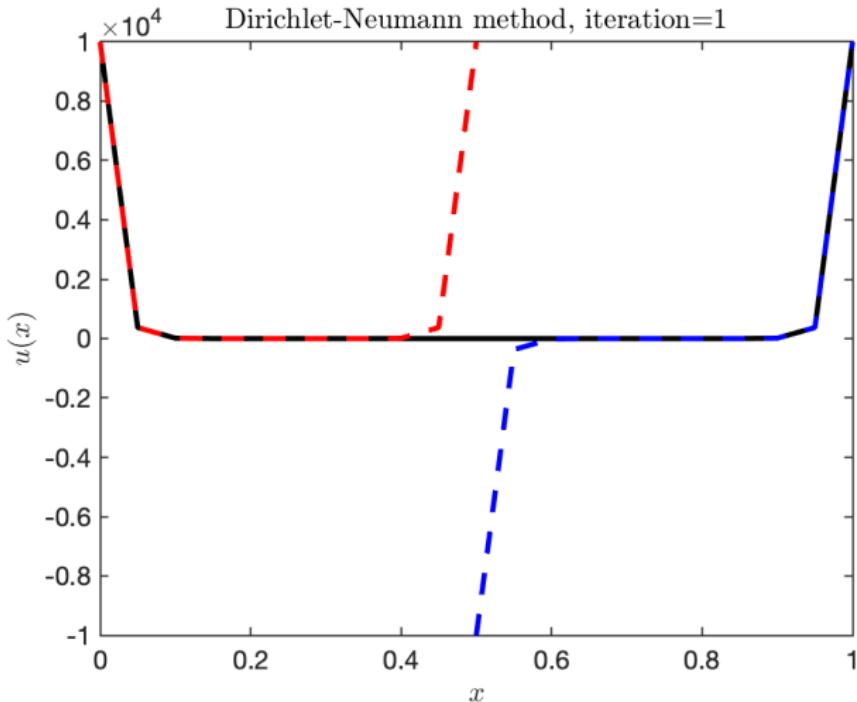
## Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\theta = \frac{1}{2}$ .



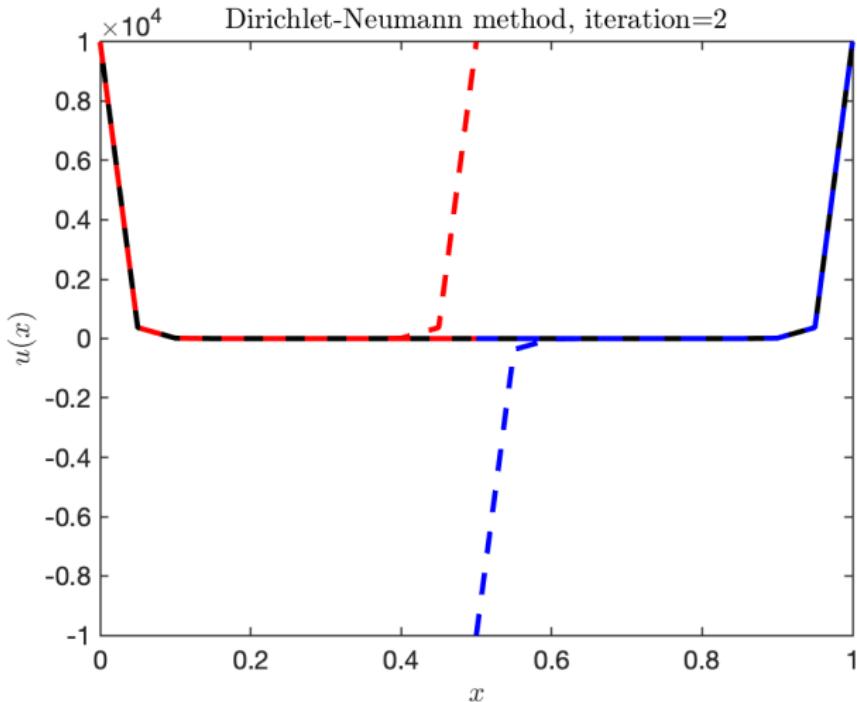
# Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\theta = \frac{1}{2}$ .



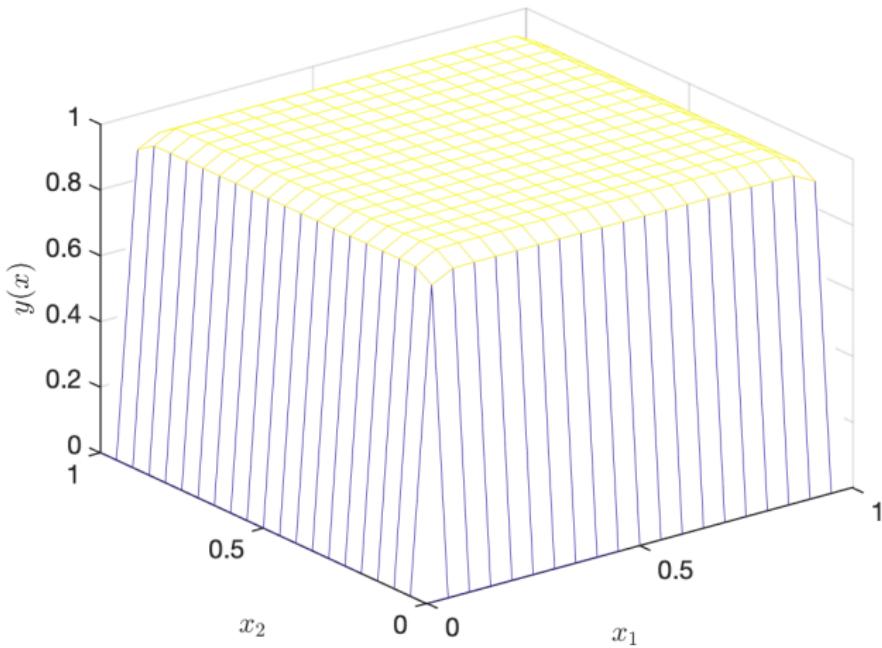
# Exemple 1D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5) = 0$  et  $\theta = \frac{1}{2}$ .



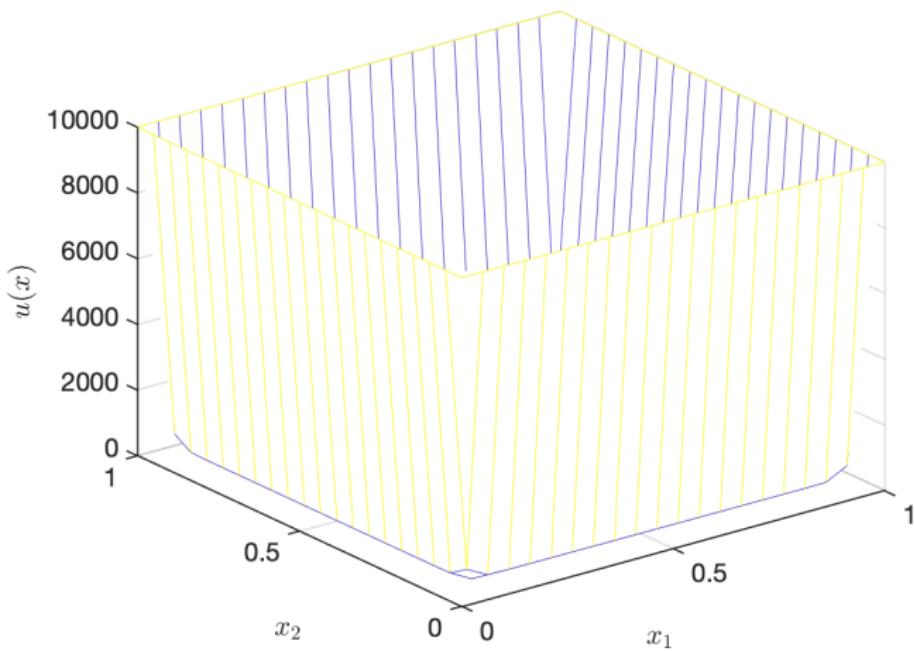
## Exemple 2D

Fonction ciblé:  $\hat{y} \equiv 1$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$  et  $\nu = 10^{-4}$ .



## Exemple 2D

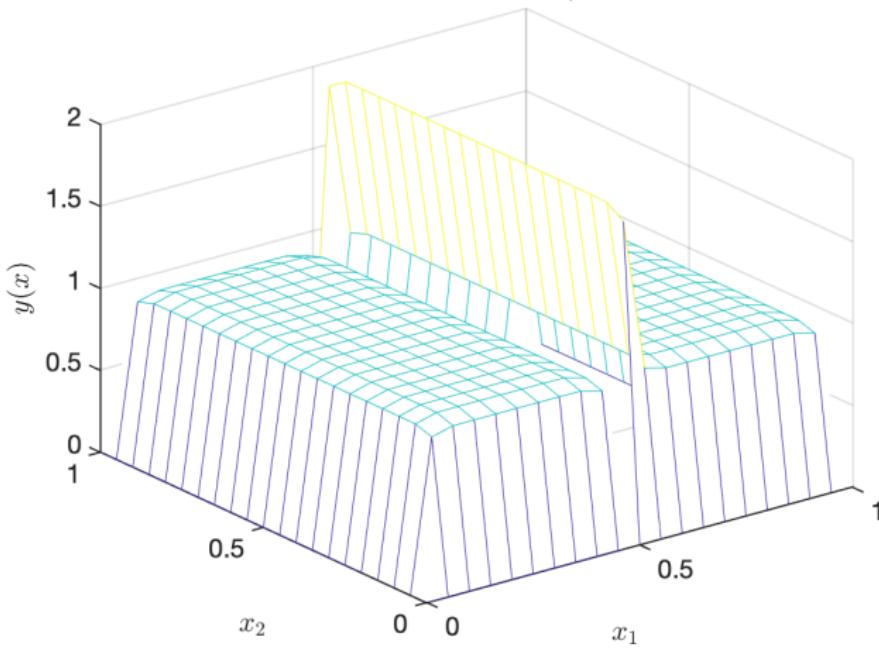
Fonction ciblé:  $\hat{y} \equiv 1$  dans  $\Omega = (0, 1)^2$  et  $\nu = 10^{-4}$ .



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

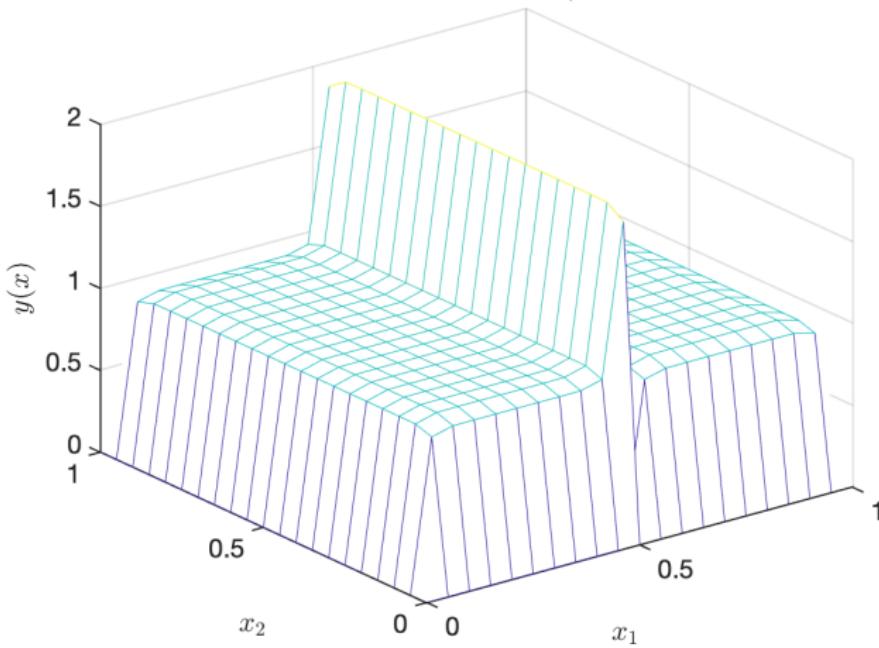
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

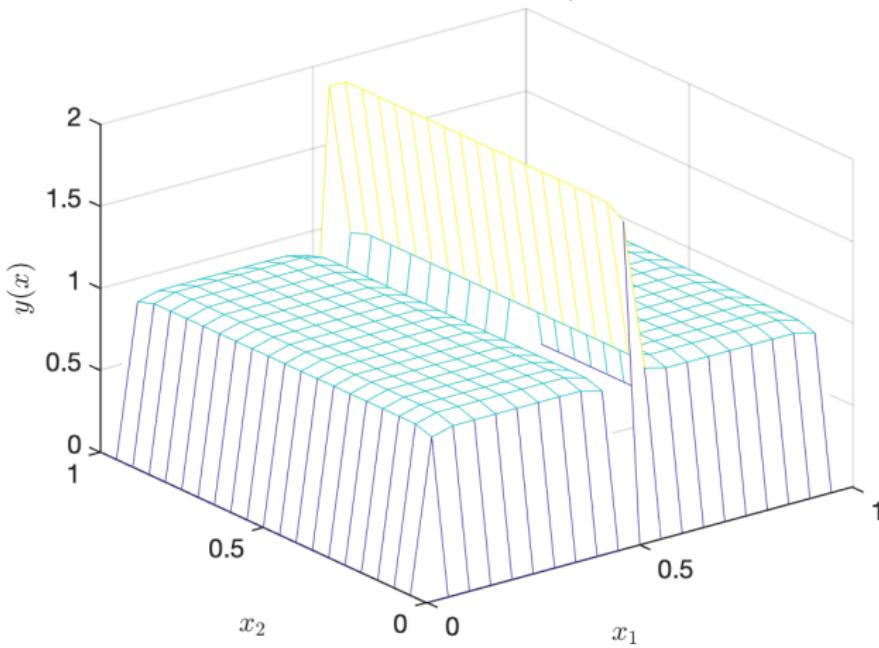
Dirichlet-Neumann method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

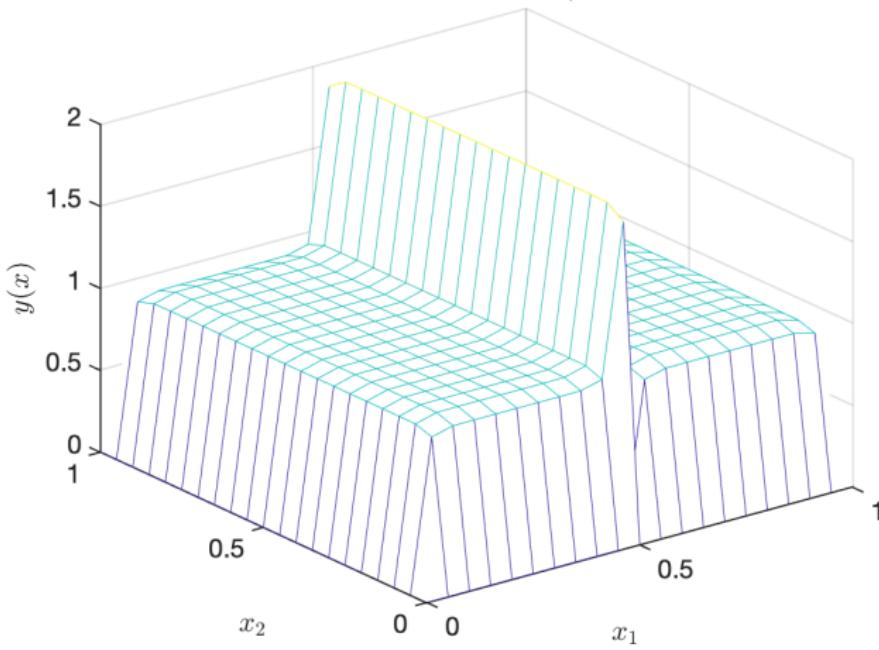
Dirichlet-Neumann method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

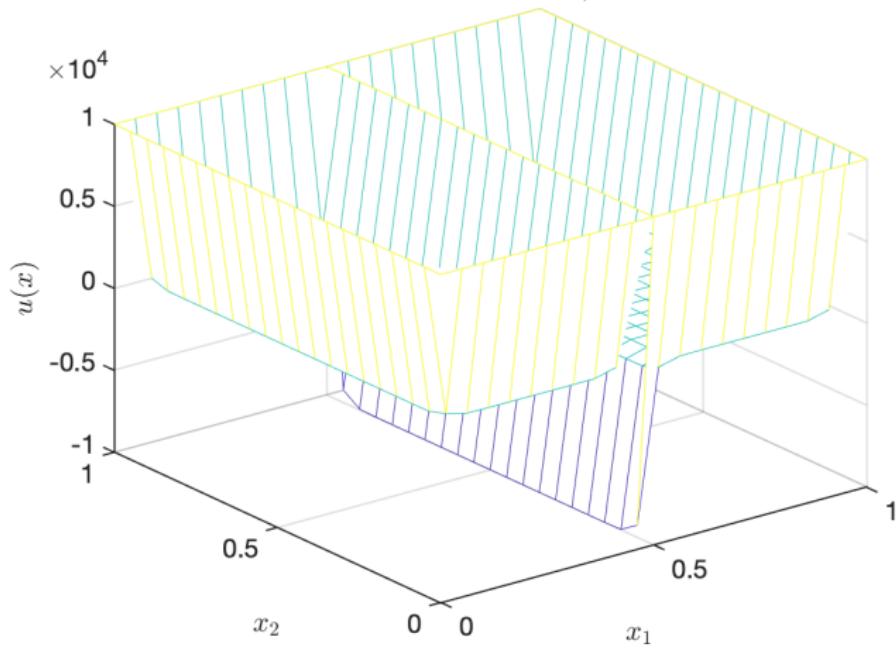
Dirichlet-Neumann method, iteration=4



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

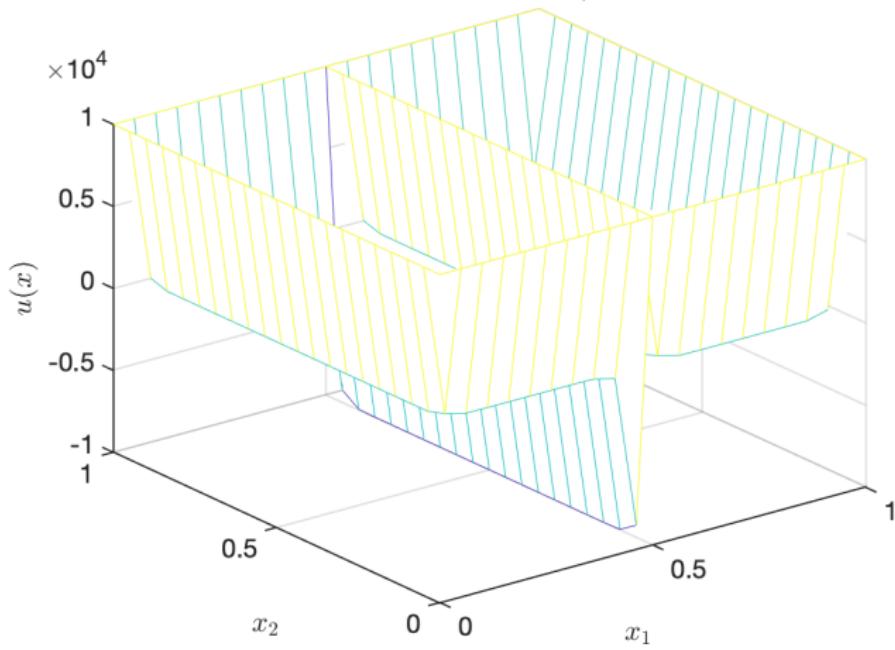
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

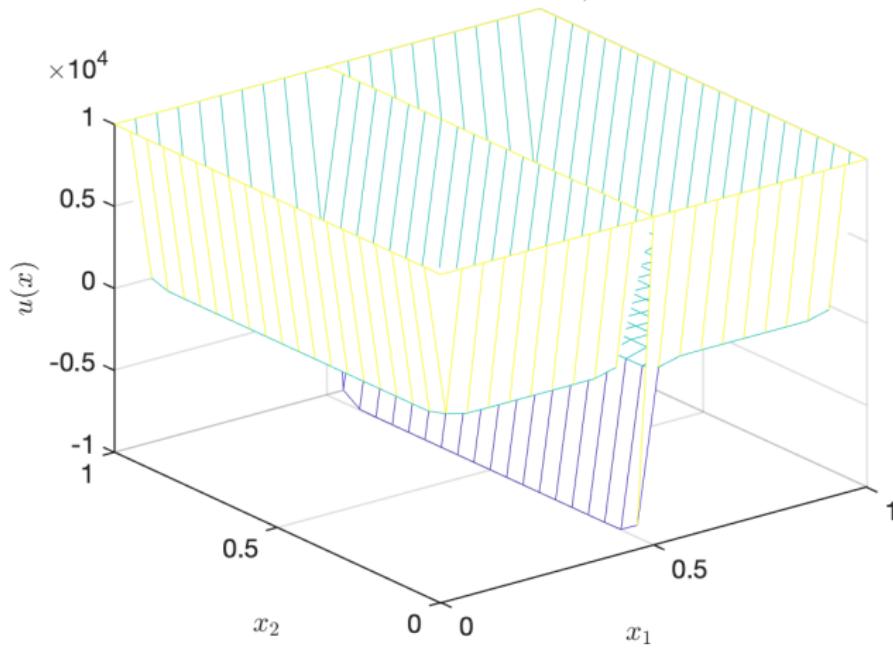
Dirichlet-Neumann method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

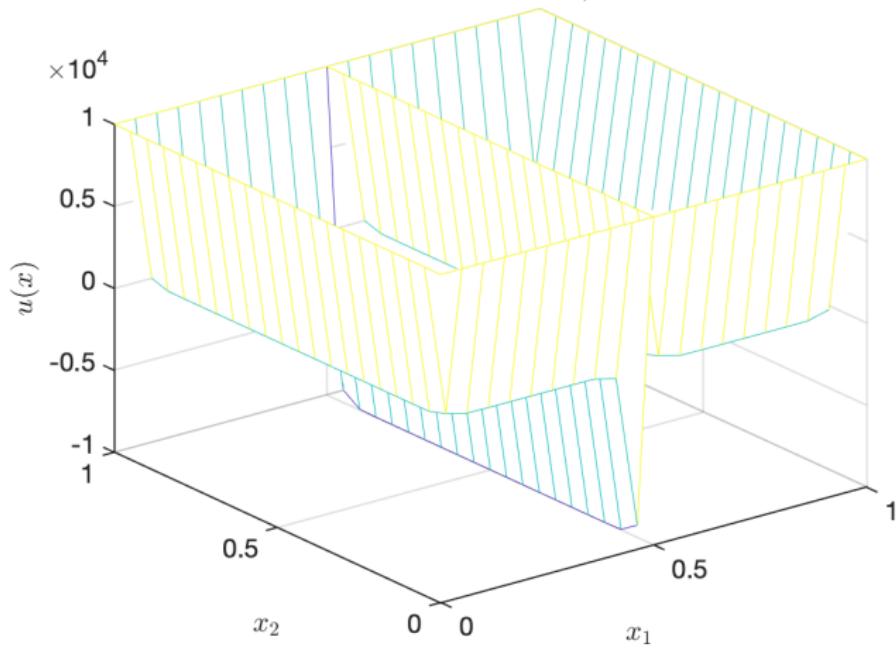
Dirichlet-Neumann method, iteration=3



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

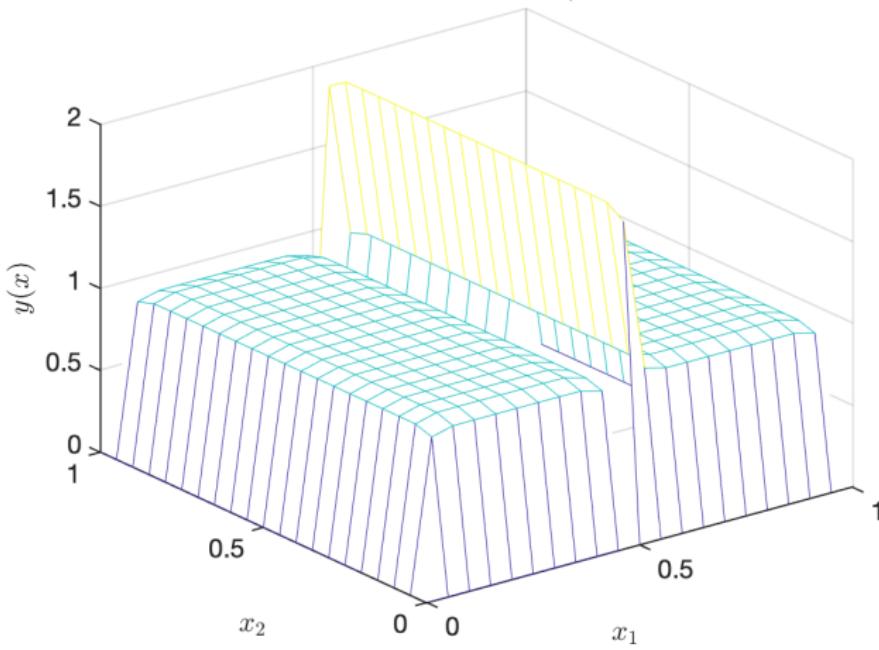
Dirichlet-Neumann method, iteration=4



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

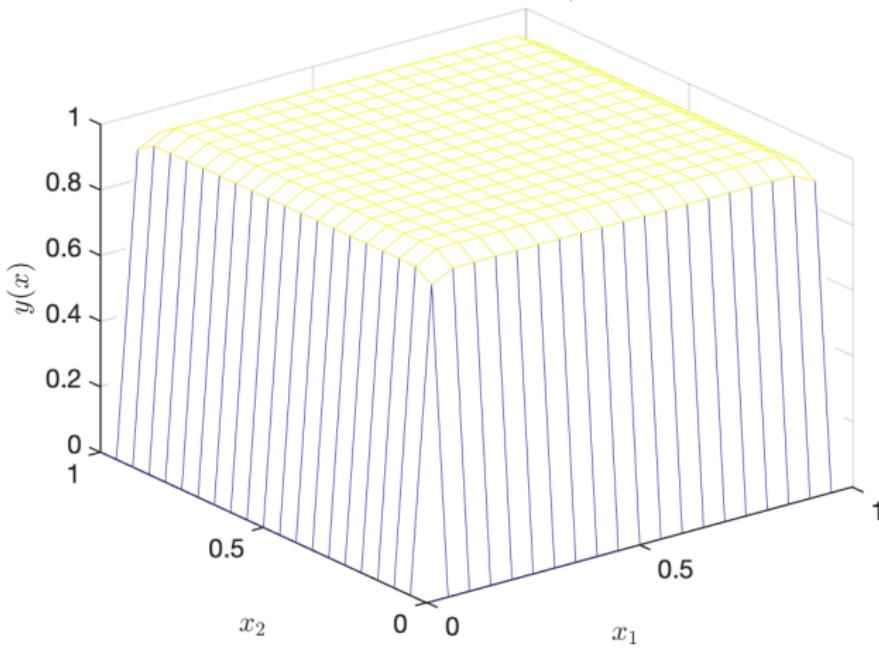
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

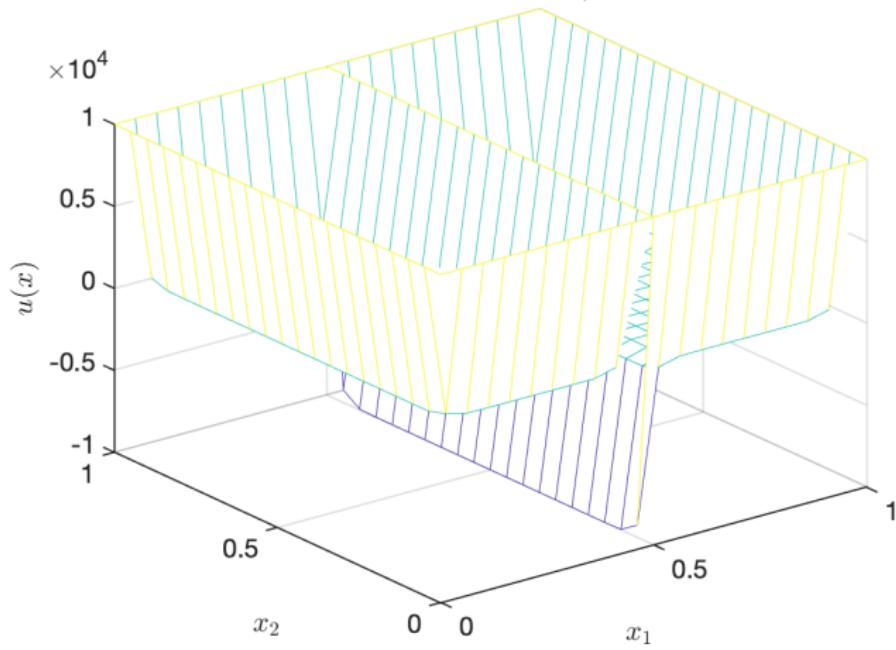
Dirichlet-Neumann method, iteration=2



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

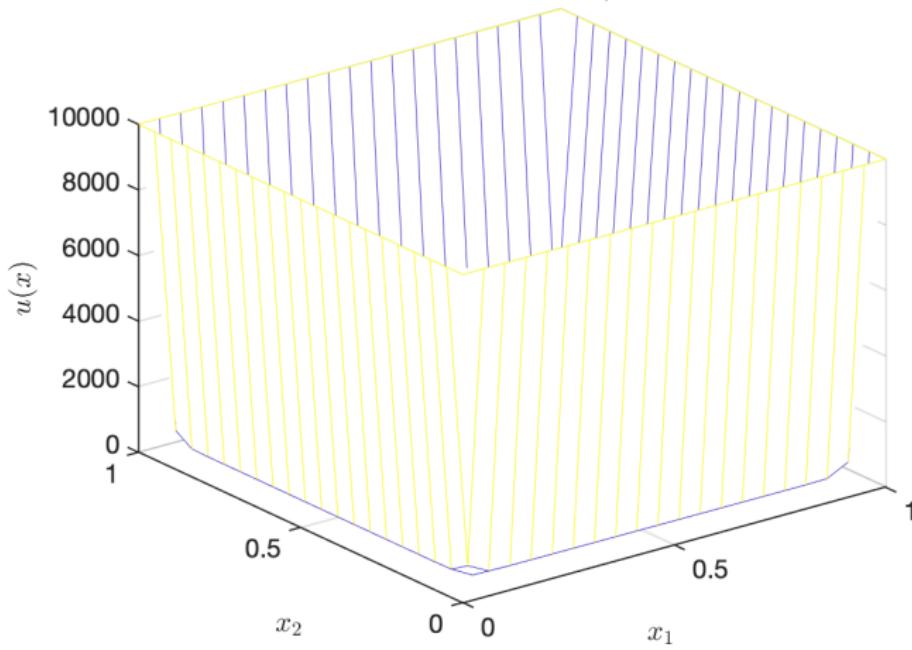
Dirichlet-Neumann method, iteration=1



## Exemple 2D

Sous-domaines  $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$  et  $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$  avec une initialisation  $y_2^0(0.5, \cdot) = 0$ .

Dirichlet-Neumann method, iteration=2



# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a).$$

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a).$$

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -e_2^{n-1}(a) \frac{\coth(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a).$$

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -e_2^{n-1}(a) \frac{\coth(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}$$

- ▶ Facteur de convergence:

$$e_2^n(a) = -e_2^{n-1}(a) \tanh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right) \coth\left(\sqrt{\nu^{-1}}a\right).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_\Gamma^{n-1},$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a),$$

avec  $e_\Gamma^n = (1 - \theta)e_\Gamma^{n-1} + \theta e_2^n(a)$ .

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = \frac{e_\Gamma^{n-1}}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -e_\Gamma^{n-1} \frac{\coth(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_\Gamma^{n-1},$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a),$$

avec  $e_\Gamma^n = (1 - \theta)e_\Gamma^{n-1} + \theta e_2^n(a)$ .

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = \frac{e_\Gamma^{n-1}}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -e_\Gamma^{n-1} \frac{\coth(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}$$

- ▶ Facteur de convergence:

$$\rho(\nu, a, \theta) := 1 - \theta \left[ 1 + \tanh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right) \coth\left(\sqrt{\nu^{-1}}a\right) \right].$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a).$$

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = \frac{e_2^{n-1}(a)}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -e_2^{n-1}(a) \frac{\coth(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}.$$

- ▶ Facteur de convergence:

$$e_2^n(a) = -e_2^{n-1}(a) \tanh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right) \coth\left(\sqrt{\nu^{-1}}a\right).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad \partial_x e_1^n(a) = \partial_x e_2^{n-1}(a),$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad e_2^n(a) = e_1^n(a).$$

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = -\frac{C_2^{n-1} \cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}{\cosh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = \frac{C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}.$$

- ▶ Facteur de convergence:

$$C_2^n = -C_2^{n-1} \coth\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right) \tanh\left(\sqrt{\nu^{-1}}a\right).$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n = 0 \text{ dans } (0, a), \quad e_1^n(0) = 0, \quad e_1^n(a) = e_\Gamma^{n-1},$$

$$\partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n = 0 \text{ dans } (a, 1), \quad e_2^n(1) = 0, \quad \partial_x e_2^n(a) = \partial_x e_1^n(a),$$

avec  $e_\Gamma^n = (1 - \theta)e_\Gamma^{n-1} + \theta e_2^n(a)$ .

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = \frac{e_\Gamma^{n-1}}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -e_\Gamma^{n-1} \frac{\coth(\sqrt{\nu^{-1}}a)}{\cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}$$

- ▶ Facteur de convergence:

$$\rho(\nu, a, \theta) := 1 - \theta \left[ 1 + \tanh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right) \coth\left(\sqrt{\nu^{-1}}a\right) \right].$$

# Analyse de l'erreur 1D

- ▶ Notons l'erreur  $e_j^n := y - y_j^n$  qui satisfait

$$\begin{aligned}\partial_{xx} e_1^n - \nu^{-1} e_1^n &= 0 \text{ dans } (0, a), & e_1^n(0) &= 0, & e_1^n(a) &= e_2^n(a), \\ \partial_{xx} e_2^n - \nu^{-1} e_2^n &= 0 \text{ dans } (a, 1), & e_2^n(1) &= 0, & \partial_x e_2^n(a) &= e_\Gamma^{n-1},\end{aligned}$$

avec  $e_\Gamma^n = (1 - \theta)e_\Gamma^{n-1} + \theta \partial_x e_1^n(a)$ .

- ▶ On trouve les solutions :

$$e_1^n(x) = C_1^n \sinh(\sqrt{\nu^{-1}}x), \quad e_2^n(x) = C_2^n \sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-x)\right).$$

- ▶ On évalue les coefficients  $C_1^n$  et  $C_2^n$  :

$$C_1^n = C_2^n \frac{\sinh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}{\sinh(\sqrt{\nu^{-1}}a)}, \quad C_2^n = -\frac{e_\Gamma^{n-1}}{\sqrt{\nu^{-1}} \cosh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right)}$$

- ▶ Facteur de convergence:

$$\rho(\nu, a, \theta) := 1 - \theta \left[ 1 + \tanh\left(\sqrt{\nu^{-1}}(1-a)\right) \coth\left(\sqrt{\nu^{-1}}a\right) \right].$$

# Contrôle optimal parabolique

**Problème:** Pour  $\gamma, \nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|y(T) - \hat{y}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\partial_t y - \Delta y = u \quad \text{dans } Q,$$

$$y = 0 \quad \text{sur } \Sigma,$$

$$y = y_0 \quad \text{sur } \Sigma_0.$$

# Contrôle optimal parabolique

**Problème:** Pour  $\gamma, \nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|y(T) - \hat{y}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= u && \text{dans } Q, \\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ y &= y_0 && \text{sur } \Sigma_0. \end{aligned}$$

**Lagrangien:**  $\mathcal{L}(y, u, \lambda) = J(y, u) + \langle \lambda, \partial_t y - \Delta y - u \rangle$ .

# Contrôle optimal parabolique

**Problème:** Pour  $\gamma, \nu > 0$ , trouver

$$\min_{y,u} J(y, u) := \frac{1}{2} \|y - \hat{y}\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma}{2} \|y(T) - \hat{y}(T)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\nu}{2} \|u\|_{U_{\text{ad}}}^2,$$

tel que

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= u && \text{dans } Q, \\ y &= 0 && \text{sur } \Sigma, \\ y &= y_0 && \text{sur } \Sigma_0. \end{aligned}$$

**Lagrangien:**  $\mathcal{L}(y, u, \lambda) = J(y, u) + \langle \lambda, \partial_t y - \Delta y - u \rangle$ .

**Système d'optimalité:**

$$\begin{aligned} \partial_t y - \Delta y &= u && \text{dans } \Omega \text{ avec } y(0) = y_0, \\ \partial_t \lambda + \Delta \lambda &= y - \hat{y} && \text{dans } \Omega \text{ avec } \lambda(T) = -\gamma(y(T) - \hat{y}(T)), \\ \nu u &= \lambda && \text{dans } Q. \end{aligned}$$

# Contrôle optimal parabolique

**Système d'optimalité** (forward-backward):

$$\partial_t y - \Delta y = \nu^{-1} \lambda, \quad \partial_t \lambda + \Delta \lambda = y - \hat{y},$$

$$y(\cdot, x) = 0, \quad \lambda(\cdot, x) = 0,$$

$$y(0, \cdot) = y_0, \quad \lambda(T, \cdot) = -\gamma(y(T, \cdot) - \hat{y}(T, \cdot)).$$

# Contrôle optimal parabolique

**Système d'optimalité** (forward-backward):

$$\begin{aligned}\partial_t y - \Delta y &= \nu^{-1} \lambda, & \partial_t \lambda + \Delta \lambda &= y - \hat{y}, \\ y(\cdot, x) &= 0, & \lambda(\cdot, x) &= 0, \\ y(0, \cdot) &= y_0, & \lambda(T, \cdot) &= -\gamma(y(T, \cdot) - \hat{y}(T, \cdot)).\end{aligned}$$

**Semi-discretization:**

$$\begin{aligned}\dot{y} + A y &= \nu^{-1} \lambda, & \dot{\lambda} - A^T \lambda &= y - \hat{y}, \\ y(0) &= 0, & \lambda(T) &= -\gamma(y(T) - \hat{y}(T)),\end{aligned}$$

# Contrôle optimal parabolique

**Système d'optimalité** (forward-backward):

$$\begin{aligned}\partial_t y - \Delta y &= \nu^{-1} \lambda, & \partial_t \lambda + \Delta \lambda &= y - \hat{y}, \\ y(\cdot, x) &= 0, & \lambda(\cdot, x) &= 0, \\ y(0, \cdot) &= y_0, & \lambda(T, \cdot) &= -\gamma(y(T, \cdot) - \hat{y}(T, \cdot)).\end{aligned}$$

**Semi-discretization:**

$$\begin{aligned}\dot{y} + Ay &= \nu^{-1} \lambda, & \dot{\lambda} - A^T \lambda &= y - \hat{y}, \\ y(0) &= 0, & \lambda(T) &= -\gamma(y(T) - \hat{y}(T)),\end{aligned}$$

**Supposons:**  $A = A^T \Rightarrow A = QDQ^T$  avec  $Q^T Q = I$  et  
 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ .

$$\begin{aligned}\dot{z} + Dz &= \nu^{-1} \mu, & \dot{\mu} - D\mu &= z - \hat{z}, \\ z(0) &= 0, & \mu(T) &= -\gamma(z(T) - \hat{z}(T)),\end{aligned}$$

with  $z = Q^T y$ ,  $\hat{z} = Q^T \hat{y}$  and  $\mu = Q^T \lambda$ .

# Contrôle optimal parabolique

**Semi-discretization:**

$$\begin{aligned}\dot{y} + Ay &= \nu^{-1}\lambda, & \dot{\lambda} - A^T\lambda &= y - \hat{y}, \\ y(0) &= 0, & \lambda(T) &= -\gamma(y(T) - \hat{y}(T)),\end{aligned}$$

**Supposons:**  $A = A^T \Rightarrow A = QDQ^T$  avec  $Q^TQ = I$  et  
 $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ .

$$\begin{aligned}\dot{z} + Dz &= \nu^{-1}\mu, & \dot{\mu} - D\mu &= z - \hat{z}, \\ z(0) &= 0, & \mu(T) &= -\gamma(z(T) - \hat{z}(T)),\end{aligned}$$

with  $z = Q^T y$ ,  $\hat{z} = Q^T \hat{y}$  and  $\mu = Q^T \lambda$ .

**Système indépendant:**  $m$  systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{z}_{(i)} \\ \dot{\mu}_{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_i & -\nu^{-1} \\ -1 & -d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{(i)} \\ \mu_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{z}_{(i)} \end{pmatrix}, \\ z_{(i)}(0) = z_{(i),0}, \\ \mu_{(i)}(T) + \gamma z_{(i)}(T) = \gamma \hat{z}_{(i)}(T), \end{array} \right.$$

# Contrôle optimal parabolique

$(z_{(i)}, \mu_{(i)})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{z}_{(i)} \\ \dot{\mu}_{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_i & -\nu^{-1} \\ -1 & -d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{(i)} \\ \mu_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{z}_{(i)} \end{pmatrix}, \\ z_{(i)}(0) = z_{(i),0}, \\ \mu_{(i)}(T) + \gamma z_{(i)}(T) = \gamma \hat{z}_{(i)}(T). \end{array} \right.$$

# Contrôle optimal parabolique

$(z_{(i)}, \mu_{(i)})$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} \dot{z}_{(i)} \\ \dot{\mu}_{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_i & -\nu^{-1} \\ -1 & -d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{(i)} \\ \mu_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{z}_{(i)} \end{pmatrix}, \\ z_{(i)}(0) = z_{(i),0}, \\ \mu_{(i)}(T) + \gamma z_{(i)}(T) = \gamma \hat{z}_{(i)}(T). \end{array} \right.$$

$z_{(i)}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{z}_{(i)} - (d_i^2 + \nu^{-1}) z_{(i)} = -\nu^{-1} \hat{z}_{(i)}, \\ z_{(i)}(0) = z_{(i),0}, \\ \dot{z}_{(i)}(T) + (\nu^{-1} \gamma + d_i) z_{(i)}(T) = \nu^{-1} \gamma \hat{z}_{(i)}(T). \end{array} \right.$$

# Contrôle optimal parabolique

$(z_{(i)}, \mu_{(i)})$ :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{z}_{(i)} \\ \dot{\mu}_{(i)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_i & -\nu^{-1} \\ -1 & -d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{(i)} \\ \mu_{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\hat{z}_{(i)} \end{pmatrix}, \\ z_{(i)}(0) = z_{(i),0}, \\ \mu_{(i)}(T) + \gamma z_{(i)}(T) = \gamma \hat{z}_{(i)}(T). \end{cases}$$

$z_{(i)}$ :

$$\begin{cases} \ddot{z}_{(i)} - (d_i^2 + \nu^{-1}) z_{(i)} = -\nu^{-1} \hat{z}_{(i)}, \\ z_{(i)}(0) = z_{(i),0}, \\ \dot{z}_{(i)}(T) + (\nu^{-1} \gamma + d_i) z_{(i)}(T) = \nu^{-1} \gamma \hat{z}_{(i)}(T). \end{cases}$$

$\mu_{(i)}$ :

$$\begin{cases} \ddot{\mu}_{(i)} - (d_i^2 + \nu^{-1}) \mu_{(i)} = -\dot{\hat{z}}_{(i)} - d_i \hat{z}_{(i)}, \\ \dot{\mu}_{(i)}(0) - d_i \mu_{(i)}(0) = z_{(i),0} - \hat{z}_{(i)}(0), \\ \gamma \dot{\mu}_{(i)}(T) + \beta_i \mu_{(i)}(T) = 0. \end{cases}$$

# Contrôle optimal parabolique

	$\Omega_1$	$\Omega_2$	algorithm type
$(z(i), \mu(i))$	$\mu(i)$	$\dot{z}(i)$	(DN)
	$\dot{z}(i) + d_i z(i)$	$\dot{z}(i)$	(RN)
	$\mu(i)$	$\ddot{\mu}(i) - d_i \dot{\mu}(i)$	(DR)
$z(i)$	$z(i)$	$\dot{z}(i)$	(DN)
	$z(i)$	$\dot{z}(i)$	(DN)
	$\dot{\mu}(i) - d_i \mu(i)$	$\ddot{\mu}(i) - d_i \dot{\mu}(i)$	(RR)
$\mu(i)$	$\mu(i)$	$\dot{\mu}(i)$	(DN)
	$\dot{z}(i) + d_i z(i)$	$\ddot{z}(i) + d_i \dot{z}(i)$	(RR)
	$\mu(i)$	$\dot{\mu}(i)$	(DN)

# Reference

-  Gander and Halpern, *Méthodes de décomposition de domaine*, 2012.
-  Gander and Kwok, *Schwarz Methods for the Time-Parallel Solution of Parabolic Control Problems*, 2016.
-  Gander, Kwok and Mandal, *Convergence of Substructuring Methods for Elliptic Optimal Control Problems*, 2018
-  Langer, Steinbach, Tröltzsch and Yang, *Space-time finite element discretization of parabolic optimal control problems with energy regularization*, 2021
-  Neumüller and Steinbach, *Regularization error estimates for distributed control problems in energy spaces*, 2021

**Merci pour votre attention !**