2012- 2013 学年第二学期《医科数学 AⅡ》试卷

2013 年 6 月 27 日

一	二	三	四	五	六	总分

得 分

一、填空题(共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分)

1．设 A 为三阶非奇异阵，且 $\left|A^{-1}\right|=-\dfrac{1}{2}$，则 $\left|A^{*}\right|=$______________.

2．设 n 阶方阵 A 满足 $A^3-E=\mathbf{0}$，则 A 可逆，且 $A^{-1}=$_____________.

3．设 A 是 4×3 矩阵，列向量组线性无关，B 为 3 阶可逆矩阵，则 $R(AB)=$__________.

4.设在一次试验中,事件 A 发生的概率为 p.现将该试验独立进行 n 次,则 A 至少发生一次的概率为 _______.

5. 随机地向半圆形区域 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$ (a 为正常数)内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\dfrac{\pi}{4}$ 的概率为_________________.

6. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 $X_i \sim B(1,p),\ 0<p<1$，$i=1,2,\cdots,n$，则 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i \sim$_____.

得 分

二、选择题(共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分)

1．设 A、B、C 为同阶方阵，且 A 可逆，则下列命题正确的是 (　　).

(A)．若 $BA=BC$，则 $A=C$；　　(B)．若 $AB=CB$，则 $A=C$；

(C)．若 $AB=\mathbf{0}$，则 $B=\mathbf{0}$；　　(D)．若 $BC=\mathbf{0}$，则 $C=\mathbf{0}$.

2．向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a+1,\ 1,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a+1,\ 1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,\ a+1)^T$ 线性无关，则有 (　　).

(A)．$a=0$ 或 $a=-3$；　(B)．$a\neq 0$，且 $a\neq -3$；　(C)．$a=0$ 或 $a=3$；　(D)．$a\neq 0$，且 $a\neq 3$.

3．线性方程组 $\begin{cases} x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3, \\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3, \\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3. \end{cases}$ 若 a_1, a_2, a_3 两两不等，则方程组 (　　).

(A)．有唯一解；　(B)．无穷多个解；　(C)．无解；　(D)．不一定有解.

4．设 A、B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1$，$P(B)>0$，$P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有 (　　).

(A)．$P(A|B)=P(\overline{A}|B)$；　　(B)．$P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$；

(C)．$P(AB)=P(A)P(B)$；　　(D)．$P(AB)\neq P(A)P(B)$.

5．设随机变量 X，Y 相互独立，$X \sim B(1, p)$，$0 < p < 1$，$Y \sim P(\lambda)$，$\lambda > 0$，则 $X + Y$ (　　).

（A）．服从泊松分布；　（B）．服从两点分布；　（C）．为二维随机变量；　（D）．仍为离散型随机变量.

6．设 $\overline{X}$ 和 S^2 分别为正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本均值和样本方差，则 (　　).

（A）．$\overline{X}$ 与 S^2 不独立；　（B）．$\overline{X}$ 与 S^2 不相关；　（C）．$\overline{X}$ 与 S^2 成比例；　（D）．$\dfrac{\overline{X}^2}{S^2} \sim F(1, n-1)$.

得　分

三、计算与证明(共 3 道小题，第 1，2 小题各 8 分，第 3 小题 6 分，满分 22 分)

1．设三阶方阵 A、B 满足 $A^* B = A^{-1} + 2B$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求矩阵 B.

2．已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ 1,3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1,\ -3,\ 5,\ 1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,\ 2,\ 7,\lambda+2)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,\ 2,\ -3,\lambda)^T$，

⑴．λ为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性无关？

⑵．λ为何值时，向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$线性相关？并在此时求向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$的秩和一个极大无关向量组，并将其余向量用此极大无关向量组线性表示．

3．设向量组α_1，α_2，α_3是向量空间V的一个基, 且$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\beta_3=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$．试证$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$也是向量空间$V$的一个基；并求从基$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$到基$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$的过渡矩阵．

得　分

四、(共 1 道小题，满分 10 分)

设 A 为齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + \lambda x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ 的系数矩阵，若有三阶方阵 $B \neq \mathbf{0}$，使得 $AB = \mathbf{0}$，

求 ⑴ λ；⑵ $R(B)$；⑶ 此齐次线性方程组的通解.

得　分

五、（共 3 道小题，第 1，2 小题 7 分，第 3 小题 8 分，满分 22 分）

1．假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中随意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取两个零件(取出的零件均不放回).试求：(1)先取出的零件是一等品的概率 p；(2)在先取出的零件是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

2．设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

3．设总体 X 的概率密度为 $p(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$ 其中 $\lambda>0$ 是未知参数，$\alpha>0$ 是已知常数，

试根据来自总体 X 的简单随机样本 X_1，X_2，…，X_n，求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

得　分

六、计算题(共 1 道小题，满分 10 分)

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}e^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 试求：

(1)．$P\{X<Y\}$；(2)．$E(XY)$.