吉 林 大 学

2013~2014 学年第一学期《高等数学 AI》试卷

2014 年 1 月 6 日

一	二	三	四	总　分

得 分

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{2x+3\sin x}{x-\cos x}$ 的水平渐近线是（　　　）

（A） $y=0$.　　（B） $y=2$.　　（C） $y=3$.　　（D） $y=4$.

2. 设 $y=x^2+\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 为函数的（　　　）

（A）跳跃间断点.　　（B） 可去间断点.

（C）无穷间断点.　　（D） 振荡间断点.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ 3x+2, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$（　　　）

（A） 0.　　（B） 1.　　（C） 2.　　（D） 3.

4．设方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 确定 $y=y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$（　　　）

（A）1.　　（B）-1.　　（C）$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.　　（D）$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

5. 函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调增加且为下凸的区间是（　　）

（A）$(-\infty,-3)$.　（B）$(-3,-2)$.　（C）$(-2,0)$.　（D）$(0,+\infty)$.

6. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$（　　）

（A）不可导.　（B）可导且 $f'(a)\neq 0$.

（C）取得极小值.　（D）取得极大值.

得 分

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^k}=\dfrac{1}{2}$，则 $k=$ ________.

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $f'(0)=$ ________.

3. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$，则 $\mathrm{d}F(x)=$ ________________.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=$ ____________.

5. 曲线 $\begin{cases} x=1+t^3 \\ y=5t+\ln(2+\mathrm{t}) \end{cases}$ 在对应 $t=-1$ 处的切线方程是____________.

6. $\int_{-2}^{2}\dfrac{x^2\arcsin x}{1+x^4}\mathrm{d}x=$ ________.

得 分

三、解答题（共 6 道小题，每小题 8 分，满分 48 分）.

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}-1})$.

2．设 $y=x2^{x}+\ln(x+\sqrt{x^{2}+4})$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$ 讨论当 α 满足什么条件时，$f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

4. 设函数 $y=\dfrac{x^n-1}{x-1}+\sin 2x$， $n\in N^+$, 求 $y^{(n)}(x)$.

5. 求 $\int (\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}})dx$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x \geq 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1 \leq x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)dx$.

得 分

四、按要求解答下列各题（共 2 道小题，每题 8 分，满分 16 分）.

1．设函数 $f(x)$ 的$[2, 4]$上连续，在$(2, 4)$内可导，且满足 $f(2)=\int_3^4 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$，证明在$(2, 4)$内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

2.（1）证明：对于任意正整数 n，不等式 $\dfrac{1}{n+1} < \ln(1+\dfrac{1}{n}) < \dfrac{1}{n}$ 成立；

（2）设数列 $x_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.