吉 林 大 学

2013~2014 学年第一学期《高等数学 AI》试卷

2014 年 1 月 6 日

一	二	三	四	总　分

得 分

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{2x+3\sin x}{x-\cos x}$ 的水平渐近线是（　B　）

（A）$y=0$.　　（B）$y=2$.　　（C）$y=3$.　　（D）$y=4$.

2. 设 $y=x^2+\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 为函数的（　A　）

（A）跳跃间断点.　　（B）可去间断点.

（C）无穷间断点.　　（D）振荡间断点.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x}{x}, & x<0\\ a, & x=0\\ 3x+2, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则常数 $a=$（　C　）

（A）0.　　（B）1.　　（C）2.　　（D）3.

4．设方程 $e^y+xy=e$ 确定 $y=y(x)$，则 $\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}=$（　C　）

（A）1.　　（B）-1.　　（C）$-\dfrac{1}{e^2}$.　　（D）$\dfrac{1}{e^2}$.

5. 函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调增加且为下凸的区间是（　C　）

（A）$(-\infty,-3)$.　　（B）$(-3,-2)$.　　（C）$(-2,0)$.　　（D）$(0,+\infty)$.

6.　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$

（　D　）

（A）不可导.　　　　（B）可导且 $f'(a)\neq 0$.

（C）取得极小值.　　　　（D）取得极大值.

得 分

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^k}=\dfrac{1}{2}$，则 $k=$ <u>3</u>.

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $f'(0)=$ <u>1</u>.

3. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$，则 $\mathrm{d}F(x)=\underline{2x\,\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x}$.

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^5 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x=\underline{\dfrac{8}{15}-\dfrac{3\pi}{16}}$.

5. 曲线 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=5t+\ln(2+t)\end{cases}$ 在对应 $t=-1$ 处的切线方程是 $\underline{y=2x-5}$.

6. $\int_{-2}^{2}\dfrac{x^2\arcsin x}{1+x^4}\mathrm{d}x=$ <u>0</u>.

得 分

三、解答题（共 6 道小题，每小题 8 分，满分 48 分）.

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ ……………………………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ ……………………………2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ ……………………………2 分

$=\frac{1}{2}$ ……………………………1 分

2．设 $y=x2^x+\ln(x+\sqrt{x^2+4})$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解： $\frac{dy}{dx}=2^x+x2^x\ln 2+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ ……………………4 分

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{3}{2}$ ……………………………4 分

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$ 讨论当 α 满足什么条件时，$f'(x)$ 在点 $x=0$ 处连续.

解：　$\alpha>1$ 时 $f'_{+}(0)=\lim\limits_{x\to 0^{+}}\dfrac{x^{\alpha}\cdot\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^{+}}x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}=0$

$f'_{-}(0)=0$　　$\therefore\ f'(0)=0$　　. . . . . 3 分

$x\neq 0$ 时，$f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}+x^{\alpha}\cdot\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^{2}}\right)$

$=\alpha x^{\alpha-1}\sin\dfrac{1}{x}-x^{\alpha-2}\cos\dfrac{1}{x}$　　. . . . . 3 分

$\therefore$ 当 $\alpha>2$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=0=f'(0)$

$f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.　　. . . . . 2 分

4. 设函数 $y=\dfrac{x^{n}-1}{x-1}+\sin 2x$，$n\in N^{+}$, 求 $y^{(n)}(x)$.

$y^{(n)}(x)=2^{n}\sin(2x+n\dfrac{\pi}{2})$　　. . . . . 8 分

5. 求 $\int (\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}})dx$.

$$=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx-\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$$

(令 $t=\sqrt{1+e^x}$，则 $x=\ln(t^2-1)$， $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$)

$$=-\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-2\int\ln(t^2-1)dt \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4\text{ 分}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2t\ln(t^2-1)+4\int\frac{t^2}{t^2-1}dt$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2t\ln(t^2-1)+4t+2\ln\frac{t-1}{t+1}+C \qquad \ldots\ldots\ldots\ 3\text{ 分}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2x\sqrt{1+e^x}+4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C \ \ldots 1\text{ 分}$$

6. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)\,dx.$

解：令 $x-2=t$，则

$$\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 xe^{-x^2}dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 3\text{ 分}$$

$$=\int_{-1}^0\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}d(-x^2) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2\text{ 分}$$

$$=\tan\frac{x}{2}\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 2\text{ 分}$$

$$=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-e^{-4}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 1\text{ 分}$$

得 分

四、按要求解答下列各题（共 2 道小题，每题 8 分，满分 16 分）.

1．设函数 $f(x)$ 的[2, 4]上连续，在(2, 4)内可导，且满足 $f(2)=\int_3^4 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$，证明在(2, 4)内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

证：$f(x)$ 在[3, 4]上连续，在(3, 4)内至少存在一点 ξ_1，使

$$\int_3^4 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=(\xi_1-1)^2 f(\xi_1) \qquad \text{.....................4 分}$$

设 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，则 $F(x)$ 的[2, ξ_1]上连续，在(2, ξ_1)内可导，

$$F(2)=f(2)=F(\xi_1) \qquad \text{.....................2 分}$$

由 Rolle 定理，在(2, ξ_1)内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即在(2, 4)内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)^2 f'(\xi)=2(1-\xi)f(\xi)$，即

$$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi) \qquad \text{.....................2 分}$$

2.（1）证明：对于任意正整数 n，不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立；

（2）设数列 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证明：（1）设 $f(t)=\ln(1+t)$，对 $f(t)$ 在 $[0,x]$ 应用 Lagrange 中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

即有

$$\frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

由于 $0<\xi<x$，则有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

取 $x=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则有

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n} \qquad \text{.....................4 分}$$

（2）先证单调性：

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$$

故数列$\{x_n\}$单调减少.

再证有界性：

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+...+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$$

$$=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+...+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln(n+1)>0$$

故数列$\{x_n\}$有下界. 由单调有界原理，此数列收敛. .... 4 分