吉林大学 **2013~2014** 学年第一学期

《高等数学 AⅢ》试卷

2014 年 1 月 9 日

一	二	三	总分

得 分

一、 填空题（每小题 3 分，满分 15 分，把答案填在题中横线上）

1．$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$____________，其中曲线 $L: x^2+y^2=a^2$．

2．设曲面 Σ 为 $x^2+y^2=9$ 介于 $z=0$ 及 $z=3$ 间的部分，$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+1)\mathrm{d}S=$________．

3．级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 的和为__________________.

4．微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$ 的通解为_______________.

5．设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x<\pi,\end{cases}$ 则它的 Fourier 级数展开式中的系数

$a_n=$_________.

得 分

二、选择题（每小题 3 分，满分 15 分．每小题只有一个选项符合题目要求）

1．设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$ $(\alpha\le t\le\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\ne 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=$（　　　　）

（A）$\int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$．　　（B）$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\mathrm{d}t$．

（C）$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$．　　（D）$\int_{\beta}^{\alpha} f(\varphi(t),\psi(t))\mathrm{d}t$．

2．设有界闭区域D由分段光滑曲线 L 所围成，L 取正向，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在D上具有一阶连续偏导数，则 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=($　　$)$

（A）$\iint\limits_D (\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　（B）$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

（C）$\iint\limits_D (\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.　　（D）$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

3．设 Σ 是取外侧的单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$，则曲面积分 $\iint\limits_\Sigma x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ =（　　）

（A）0.　　（B）2π.　　（C）π.　　（D）4π.

4．下列说法中错误的是（　　）

（A）方程 $xy'''+2y''+x^2y=0$ 是三阶微分方程.

（B）方程 $y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\sin x$ 是一阶微分方程.

（C）方程 $(x^2+2xy^3)\mathrm{d}x+(y^2+3x^2y^2)\mathrm{d}y=0$ 是全微分方程.

（D）方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}x=\frac{2y}{x}$ 是 Bernoulli 方程.

5.已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛,则(　　)

（A）$0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.　　（B）$\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.

（C）$1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$.　　（D）$\frac{3}{2}<\alpha<2$.

得 分

三、解答下列各题（前 7 小题每小题 9 分，第 8 小题 7 分，满分 70 分）

1. 求下列微分方程的通解

（1） $y'+y\tan x=\sin 2x$

（2） $(2xye^{x^2}-2x)\mathrm{d}x+e^{x^2}\mathrm{d}y=0$

2．求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域.

3．计算$I=\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 是 xoy 面上的任一条无重点且分段光滑不经过原点$O(0,0)$ 的正向闭曲线．

4．求 $I=\int_L (e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sqrt{ax-x^2}$ 上从 $A(a,0)$ 到 $O(0,0)$ 的弧，m 为常数．

5．计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $x^2+y^2=z^2(0\le z\le a)$ 的外侧．

6．计算 $I=\oint_{\Gamma} y^2\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z$，其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 位于第一卦限部分的边界曲线，从 x 轴正向看去，Γ 为逆时针方向．

7．设函数$\varphi(x)$具有连续的二阶导数，并使曲线积分

$$\int_L [3\varphi'(x) - 2\varphi(x) + xe^{2x}]ydx + \varphi'(x)dy$$

与路径无关，求函数$\varphi(x)$．

8．将函数 $f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3)$ 展开成x的幂级数.