一、填空题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．设Σ是上半椭球面$\frac{x^2}{2}+y^2+z^2=1\,(z\ge 0)$，已知$\Sigma$的面积为$\frac{A}{2}$，则$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+2z^2+xyz)\mathrm{d}S=$ $\underline{\quad A \quad}$。

2．幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+3^n}x^n$ 的收敛半径为 $\underline{\quad 3 \quad}$。

3．常微分方程$\begin{cases} xy'-y=0 \\ y(1)=1 \end{cases}$的解为$y=$ $\underline{\quad x \quad}$。

4．向量场$\vec{A}(x,y,z)=\frac{1}{6}\left(x^2\,\vec{i}+y^2\vec{j}+z^2\,\vec{k}\right)$在点$M\left(1,1,1\right)$处的散度$\mathrm{div}\vec{A}\left(x,y,z\right)=$ $\underline{\quad 1 \quad}$。

5．设Σ是球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dxdy=$ $\underline{\quad 2\pi \quad}$。

二、选择题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．　Σ的方程为$y^2+z^2=x^2\ \left(0\le x\le 1\right)$, Σ_1为Σ在第一卦限内对应的部分, 则下列选项正确的是(　D　)。

(A) $\iint\limits_{\Sigma}zdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$；(B) $\iint\limits_{\Sigma}ydS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$；(C) $\iint\limits_{\Sigma}xyzdS\ne 4\iint\limits_{\Sigma_1}xyzdS$；(D) $\iint\limits_{\Sigma}xdS=4\iint\limits_{\Sigma_1}xdS$；

2．平面曲线L：$|x|+|y|=1$，则$\oint_L(|x|+|y|)\mathrm{d}s=$(　A　)。　（A）$4\sqrt{2}$；（B）π；（C）0；（D）以上都不对；

3．设$u_n\ne 0\,(n=1,2,3,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$　(　B　)。

（A）　发散；　　（B）　条件收敛；　（C）绝对收敛；　（D）　收敛性根据条件不能确定；

4．下列微分方程中, 以　$y=C_1e^{2x}+C_2\cos x+C_3\sin x+x$　(C_1,C_2,C_3为任意常数　)为通解的是　(　C　)。

(A)　$y'''+y''+4y'+4y=x$；　　(B)；$y'''+y''+4y'+4y=-x^2+x$；

(C)；$y'''-2y''+y'-2y=-2x+1$；　　(D)　$y'''-2y''+y'-2y=-2x^2-x$；

5．下列选项错误的是(　D　)。

(A) 方程$\left(x^3+1\right)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=xe^{3x}$为非齐次二阶线性微分方程；

(B) 微分方程$x^2y''+4xy'+2y=0$的通解为$Y=C_1\frac{1}{x}+C_2\frac{1}{x^2}$；

(C) 微分方程$y''+y=x+\cos x$的特解形式可设为$y^*=ax^2+bx+c+Ax\sin x+\left(Bx+C\right)\cos x$；

(D) 设y_1,y_2,y_3是$y''+p(x)y'+q(x)y=0$的三个不同的解，则该方程的通解为$Y=C_1\left(y_1-y_2\right)+C_2\left(y_2-y_3\right)$；

三、计算题(每小题 10 分，共 40 分)

1．判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$的敛散性.　　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$　--------------------------10 分

2．计算$\int_L \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=x^3$ 上从点 $A(-1,-1)$ 到 $B(1,1)$ 对应的一段曲线。

$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases}x=x\\ y=x^3\end{cases}$ $x:-1\to-1$ $\int_L \frac{3}{2}x^2\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^2dx+x^3\mathrm{d}x^3=\int_{-1}^{1}\frac{3}{2}x^2dx+3x^5\mathrm{d}x=1$ ----------------10 分

3．求微分方程 $y'-2xy=2xe^{x^2}$ 的通解。

$y'-2xy=0$，$Y=Ce^{x^2}$ -------6 分 $y=C(x)e^{x^2}$ $C(x)=x^2+C$ $y=\left(x^2+C\right)e^{x^2}$ -----10 分

4．将 $f(x)=\frac{3x}{x^2-x-2}$ 展为 x 的幂级数。或求 $f(x)=\frac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$ 的和函数。

解 $\frac{3x}{(x-2)(x+1)}==x\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{-x}{2}\right)+1}-\frac{1}{1+x}\right)=x\left(-\frac{1}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^n-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(......)x^{n+1}$ --8 分

$|x|<1$且$\left|\frac{-x}{2}\right|<1$而 $x=\pm1$ 时原式发散，故原式的收敛域为$|x|<1$……………………10 分

四、计算题(每小题 10 分，共 30 分)

1．求常微分方程 $y'''-4y''+4y'=xe^x$ 的通解。

解：$r^3-4r^2+4r=r(r-2)^2=0, Y=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}$ -------6 分

设 $y^*=(ax+b)e^x$ 得 $(ax+b-a)e^x=xe^x$， 解得 $a=1,\ b=1$ ， 则 $y^*=(x+1)e^x$

$y=Y+y^*=C_1+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}+(x+1)e^x$ ------------10 分

2．计算$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^2z^2}{x^2+y^2}dydz+y^2\sqrt{\frac{z^2}{x^2+y^2}}dzdx+\frac{z^3}{x^2+y^2}dxdy$，其中$\Sigma$为曲面 $z^2=x^2+y^2$ $(|z|\le1)$的外侧。

解 ： $I=\oiint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1\cup\Sigma_2}-\iint\limits_{\Sigma_{1上}}-\iint\limits_{\Sigma_{2下}}=\iiint\limits_{\Omega}(2x+2y+1)dV-\iint\limits_{D_1}1dxdy+\iint\limits_{D_2}(-1)dxdy$ 高 斯 公 式 --------7 分

$=\iiint\limits_{\Omega}1dV-2\iint\limits_{D_1}1dxdy=\cdots$ 计算---------------------10 分

3．求 1）已知$\vec{A}=\left(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\right)$，计算$div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)$。解：$div\left(rot\left(\vec{A}\right)\right)=\cdots=0$ ---4 分

2）证明空间的格林第二公式$\iiint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz=\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}dS$，其中$\vec{n}$为曲面$\Sigma$ 的外法线，$u=u(x,y,z)$，$v=v(x,y,z)$二阶偏导连续。

证：$\iint\limits_{D}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}dS=\iint\limits_{D}\left(\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\cos\alpha+\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\cos\alpha+\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\cos\alpha\right)dS=\iiint\limits_{\Omega}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}dxdydz$ ---6 分