吉 林 大 学

2015~2016 学年第二学期《高等数学 BII》试卷

2016 年 6 月 28 日

一	二	三	四	总 分

得 分

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.）

1. 函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ 在点(0,0)处的偏导数（　　　）.

（A） $f_x'(0,0)$ 存在， $f_y'(0,0)$ 不存在　　（B） $f_x'(0,0)$ 不存在， $f_y'(0,0)$ 存在

（C） $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 都存在　　（D） $f_x'(0,0)$， $f_y'(0,0)$ 都不存在

2. 设方程 $xyz+\mathrm{e}^z=1$ 确定 z 是 x，y 的函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$（　　）.

（A） $-\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z}$　　（B） $\dfrac{yz}{\mathrm{e}^z}$　　（C） $-\dfrac{yz}{xy+\mathrm{e}^z}$　　（D） $\dfrac{yz}{xy+\mathrm{e}^z}$

3. 空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\}$ 的体积是（　）.

（A） $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$　　（B） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$

（C） $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$　　（D） $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r$

4. 设空间区域 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 2, z\ge\sqrt{x^2+y^2}\}$， $f(x,y,z)$ 为连续函数，则三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}V=$（　　　　）.

（A） $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

（B）$4\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$

（C）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}r\int_r^{2-r^2} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z$

（D）$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$

5. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=9$ 的外侧，则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$（　　　　）.

（A）0　　（B）3π　　（C）9π　　（D）36π

6. 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$ $(p>0)$ 绝对收敛，则常数 p 的取值范围是（　　　　）.

（A）$p>1$　　（B）$0<p<1$　　（C）$p\geq 1$　　（D）$0<p\leq 1$

得 分

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分，请将答案写在题后的横线上.）

1. 极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to\pi}}\dfrac{\sin(xy)}{x}=$ ________________.

2. 函数 $u=x^2-xy+2yz$ 在点 $(1,1,1)$ 处的方向导数的最大值为________.

3. 设曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t\end{cases}$ $(0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2})$，则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$ ________________.

4. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leq x<\dfrac{1}{2},\\ x, & \dfrac{1}{2}\leq x<1,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$ ，其中

$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x$，$n=0,1,2,\cdots$，则 $S(-\dfrac{1}{2})=$ ______________________.

5. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数为_______________________.

6. 微分方程 $xy'+y=x\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(1)=0$ 的特解为___________.

得 分

三、按要求解答下列各题（共 4 道小题，每小题 8 分，满分 32 分）.

1．设 f 为 $C^{(2)}$ 类函数，且 $z=f(x+y,x-y)$，求 $\mathrm{d}z$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2．在曲面 $z=xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线方程.

3．设平面区域$D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$，计算二重积分$\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

4. 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$的收敛域与和函数.

得 分

四、按要求解答下列各题（共 4 道小题，满分 32 分）.

1. **（本小题 9 分）**设 $x>0, y>0, z>0$，用 Lagrange 乘数法求函数 $u=x^3y^2z$ 在约束条件 $x+y+z=12$ 下的最大值.

2. **（本小题 9 分）**求微分方程 $y''+4y=2x^2$ 满足 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的特解.

3. **（本小题 9 分）**计算曲线积分 $\int_L \sin 2x\mathrm{d}x + 2(x^2-1)y\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段弧.

4. **（本小题 5 分）** 设曲面 Σ 为 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 位于平面 $2z-y=0$ 上方的部分，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\mathrm{d}S.$$