吉 林 大 学

2013~2014 学年第一学期《高等数学 BI》试卷

2014 年 1 月 6 日

一	二	三	四	总　分

得 分

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{2x+3\sin x}{x-\cos x}$ 的水平渐近线是（ B ）

（A） $y=0$. （B） $y=2$. （C） $y=3$. （D） $y=4$.

2. 设 $y=x^2+\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 为函数的（ A ）

（A）跳跃间断点. （B） 可去间断点.

（C）无穷间断点. （D） 振荡间断点.

3. 函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的单调增加且为下凸的区间是（ C ）

（A）$(-\infty,-3)$. （B）$(-3,-2)$. （C）$(-2,0)$. （D） $(0,+\infty)$.

4. 设方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 确定 $y=y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$（ C ）

（A）1. （B）-1. （C）$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. （D）$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处（　D　）

（A）不可导.　　　　　　（B）可导且 $f'(a)\neq 0$.

（C）取得极小值.　　　　（D）取得极大值.

6. 下列反常积分发散的是（　A　）

（A）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.　　　　（B）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

（C）$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$.　　　　（D）$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{(\ln x)^3}}\mathrm{d}x$.

得 分

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^k}=\dfrac{1}{2}$，则 $k=$ <u>3</u>.

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $f'(0)=$ <u>1</u>.

3. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u$，则 $\mathrm{d}F(x)=$ <u>$2x\,\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x$</u>.

4. 由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成图形的面积是 <u>32/3</u>.

5. 曲线 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=5t+\ln(2+t)\end{cases}$ 在对应 $t=-1$ 处的切线方程是 <u>$y=2x-5$</u>.

6. 过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z=4$ 垂直的直线方程是 <u>$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z-4}{1}$</u>.

得 分

三、解答题（共 6 道小题，每小题 8 分，满分 48 分）.

1． $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ ……………………………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ ……………………………2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ ……………………………2 分

$=\frac{1}{2}$ ……………………………1 分

2．设 $y=x2^x+\ln(x+\sqrt{x^2+4})$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解： $\frac{dy}{dx}=2^x+x2^x\ln 2+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ ……………………4 分

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{3}{2}$ ……………………………4 分

3. 求曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4a^2, \\ x^2+y^2=2ax \end{cases}$关于$Oxy$面的投影柱面方程以及在$Oxy$面上的投影曲线方程.

解：曲线关于Oxy面的投影柱面方程是

$$x^2+y^2=2ax$$ .... 4 分

在Oxy面上的投影曲线方程是

$$\begin{cases} x^2+y^2=2ax, \\ z=0. \end{cases}$$ .... 4 分

4. $\int (\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}})\mathrm{d}x$.

$$=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$$

(令$t=\sqrt{1+e^x}$，则$x=\ln(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$)

$$=-\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-2\int\ln(t^2-1)\mathrm{d}t$$ .... 4 分

$$=-\sqrt{1-x^2}-2t\ln(t^2-1)+4\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2t\ln(t^2-1)+4t+2\ln\frac{t-1}{t+1}+C$$ .... 3 分

$$=-\sqrt{1-x^2}-2x\sqrt{1+e^x}+4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C$$ ... 1 分

5. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\ge 0, \\ \dfrac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 求 $\int_1^4 f(x-2)\,dx.$

解：令 $x-2=t$，则

$$\int_1^4 f(x-2)dx=\int_{-1}^2 f(t)dt=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}dt+\int_0^2 xe^{-x^2}dx$$ ....3 分

$$=\int_{-1}^0\sec^2\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}d(-x^2)$$ ....2 分

$$=\tan\frac{x}{2}\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^2$$ ....2 分

$$=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-e^{-4})$$ ....1 分

6. (1)过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线 L，求切线 L 的方程；

（2）计算由 x 轴，曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及切线 L 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

解：(1)设切点为 (x_0,y_0)，则过切点的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0),\qquad y_0=\sqrt{x_0-1}$$ ....2 分

令 $x=0,y=0$，得 $x_0=2,y_0=1$．故切线 L 方程为 $y=\dfrac{1}{2}x.$ ....2 分

则旋转体体积为

$$\begin{aligned}V_x&=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times2-\pi\int_1^2(x-1)dx\\&=\frac{2}{3}\pi-\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)_1^2=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$ ....4 分

得 分

四、按要求解答下列各题（共 2 道小题，每题 8 分，满分 16 分）.

1．设函数 $f(x)$ 的[2, 4]上连续，在(2, 4)内可导，且满足 $f(2)=\int_3^4 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x$，证明在(2, 4)内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

证：$f(x)$ 在[3, 4]上连续，在(3, 4)内至少存在一点 ξ_1，使

$$\int_3^4 (x-1)^2 f(x)\mathrm{d}x=(\xi_1-1)^2 f(\xi_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 4\text{ 分}$$

设 $F(x)=(x-1)^2 f(x)$，则 $F(x)$ 的[2, ξ_1]上连续，在(2, ξ_1)内可导，

$$F(2)=f(2)=F(\xi_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

由 Rolle 定理，在(2, ξ_1)内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即在(2, 4)内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)^2 f'(\xi)=2(1-\xi)f(\xi)$，即

$$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots 2\text{ 分}$$

2.（1）证明：对于任意正整数 n，不等式 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 成立；

（2）设数列 $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

证明：（1）设 $f(t)=\ln(1+t)$，对 $f(t)$ 在 $[0, x]$ 应用 Lagrange 中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

即有

$$\frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

由于 $0<\xi<x$，则有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

取 $x=\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则有

$$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$ ....4 分

（2）先证单调性：

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(1+\frac{1}{n}) < 0$$

故数列$\{x_n\}$单调减少.

再证有界性：

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n > \ln(1+\frac{1}{1}) + \ln(1+\frac{1}{2}) + ... + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n$$

$$= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + ... + \ln\frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(n+1) > 0$$

故数列$\{x_n\}$有下界. 由单调有界原理，此数列收敛. ....4 分