2012—2013 学年第一学期《高等数学 AIII》试卷答案

一、填空题 1. $\underline{a^3}$， 2. $\underline{a^2}$， 3. $\iint\limits_{\Sigma}\left(-P+Q-\sqrt{2}R\right)dS$， 4. $\underline{(-2,2)}$， 5. $y=C\ln x$。

二、选择题 1. B， 2. C， 3. B， 4. A， 5. D。

三、**计算题 1.** $\int\limits_L zdx+xdy+ydz=\int_0^1 tdt+tdt^2+t^2dt$ --------------------------------------7 分

$=\int_0^1\left(t+3t^2\right)dt=\dfrac{3}{2}$ --9 分

2. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n\left(n+1\right)}$ 的敛散性.

$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\dfrac{1}{3}<1$，或 $\dfrac{n}{3^n\left(n+1\right)}<\dfrac{1}{3^n}$ 或 $\lim\limits_{x\to\infty}a_{n+1}/a_n=\dfrac{1}{3}<1$ --------------------------9 分

3. 求常微分方程 $y'+y=e^x$ 的通解。

法一: $y'+y=0, Y=ce^{-x}$ ——————————————————————5 分

$y^*=\dfrac{1}{2}e^x, y=Y+y^*=\dfrac{1}{2}e^x+ce^{-x}$ ——————————————————9 分

法二: $y'+y=0, Y=ce^{-x}$ ——————————————————5 分

$y^*=C\left(x\right)e^x,\text{代入原方程得}y^*=\dfrac{1}{2}e^x, y=Y+y^*=\dfrac{1}{2}e^x+ce^{-x}$ —————9 分

4. 将函数 $f(x)=x^2\sin x^2$ 展为 x 的幂级数, 并求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}$ 的和。

$f(x)=\sin x^2=x^2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}\left(x^2\right)^{2n+1}$ ———————————————7 分

$=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{4n+4} \quad x\in\mathbb{R}$ ————————————————————8 分

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\dfrac{1}{(2n+1)!}=f(1)=\sin 1$ ————————————————————9 分

四、计算题(共 4 小题，第 1、2、3 题各 9 分， 4 题 7 分，共 34 分)

1．求常微分方程 $y''-4y'+4y=2e^{2x}$ 的通解。

$y''-4y'+4y=0 \quad Y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$ ---5 分

$y^*=Cx^2e^{2x}=x^2e^{2x} \qquad y=Y+y^*=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}+x^2e^{2x}$ -------------------------9 分

2．计算 $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $x+z=a\ (a>0)$ 的交线，从 z 轴的正向看为顺时针方向。

法一:

$$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}dS$$ ———————6 分

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}dS=4\pi a^2$$ ---3 分

法二:

$$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=-\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y-z & z-x & x-y\end{vmatrix}$$ —————————6 分

$$=2\iint_{\Sigma}dydz+dzdx+dxdy=2\iint_{D}dydz+dxdy=2\left(\pi a^2+\pi a^2\right)=4\pi a^2$$ ----------9 分

法三 :

曲线 Γ 的参数式方程为: $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=a-a\cos t\ \ (a>0)$

$$\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz=$$

$$\int_{2\pi}^{0}\left(a\sin t-(a-a\cos t)\right)da\cos t+(a-2a\cos t)da\sin t+(a\cos t-a\sin t)d\left(a-a\cos t\right)$$ ---7 分

$$=\int_{2\pi}^{0}\left(-a^2\sin^2 t\right)dt+\left(-2a^2\cos^2 t\right)dt+\left(-a^2\sin^2 t\right)dt=-2a^2\int_{2\pi}^{0}dt=4\pi a^2$$ ------------9 分

3. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+\left(z^3-\frac{1}{5}\right)dxdy$，其中 Σ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=1\left(z\geq 0\right)$ 的上侧。

法一:

$$\oiint\limits_{\Sigma\cup\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_1^-}=\iiint\limits_{\Omega}3\left(x^2+y^2+z^2\right)dV+\iint\limits_{\Sigma_1^-}-\frac{1}{5}dxdy$$ -----------------------------------6 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1 3r^4\sin\varphi dr-\frac{1}{5}\iint\limits_{D}dxdy=\frac{6}{5}\pi-\frac{1}{5}\pi=\pi$$ ------------------------------9 分

法二:

$$\overrightarrow{n^0}=\left(2x,2y,2z\right),\quad I=\iint\limits_{D}\left\{x^3\left(\frac{2x}{2z}\right)+y^3\left(\frac{2y}{2z}\right)+\left(z^3-\frac{1}{5}\right)\right\}dxdy$$ ———————————————6 分

$$=\iint\limits_{D}\left\{\frac{\left(x^2+y^2\right)^2-2x^2y^2+\left(1-x^2-y^2\right)^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-\frac{1}{5}\right\}dxdy$$

--------------------------9 分

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r^4-2r^4\cos^2\theta\sin^2\theta+\left(1-r^2\right)^2}{\sqrt{1-r^2}}rdr-\iint\limits_{D}\frac{1}{5}dxdy=\pi$$

法三:分面投影

$$\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz=\iint\limits_{D}{x_1}^3dydz+\iint\limits_{D}\left(-x_1\right)^3(-1)dydz=2\iint\limits_{D}{x_1}^3dydz$$

$$=2\iint\limits_{D}\left(\sqrt{1-y^2-z^2}\right)^3dydz=2\int_0^{\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}rdr=\frac{2\pi}{5}$$

$$\iint\limits_{\Sigma}y^3dzdx=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz=\frac{2\pi}{5}$$ ——————————————————————————6 分

$$\iint\limits_{\Sigma}\left(z^3-\frac{1}{5}\right)dxdy=\iint\limits_{D}z^3dxdy-\iint\limits_{D}\frac{1}{5}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}rdr=\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$$

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x^3dydz+y^3dzdx+\left(z^3-\frac{1}{5}\right)dxdy=\frac{2\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}+\frac{\pi}{5}=\pi$$ ---9 分

4．计算 $\oint_\Gamma \frac{x\cos\varphi + y\cos\psi}{4x^2+y^2}ds$，其中平面闭曲线 Γ 不过原点且分段光滑无重点，$\overrightarrow{n^0}=(\cos\varphi,\cos\psi)$ 为 Γ 的外法线方向。

法一： 不妨设 Γ 方向为逆时针，

$$\cos\varphi ds=\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)ds=\cos\beta ds=dy \quad \cos\psi ds=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)ds=-\cos\alpha ds=-dx$$

$$\oint_\Gamma \frac{x\cos\varphi+y\cos\psi}{4x^2+y^2}ds=\oint_\Gamma \frac{x\cos\beta-y\cos\alpha}{4x^2+y^2}ds=\oint_\Gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

法二： 不妨设 Γ 方向为逆时针，

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} (t_1\le t\le t_2),\ \overrightarrow{n^0}=(\cos\varphi,\cos\psi)=\frac{1}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}(y'(t),-x'(t))$$

$$\oint_\Gamma \frac{x\cos\varphi+y\cos\psi}{4x^2+y^2}ds$$

$$=\int_{t_1}^{t_2}\frac{x\frac{y'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}+y\frac{-x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}}{4x^2+y^2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$$

$$=\oint_\Gamma \frac{-y}{4x^2+y^2}dx+\frac{x}{4x^2+y^2}dy$$

--3 分

$$P=\frac{-y}{4x^2+y^2},\ Q=\frac{x}{4x^2+y^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-4x^2+y^2}{(4x^2+y^2)^2}$$

$$(1)\ (0,0)\notin\Gamma(D),\ \oint_\Gamma \frac{x\cos\varphi+y\cos\psi}{4x^2+y^2}ds=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$$

---5 分

$$(2)(0,0)\in\Gamma(D),\ L^+:4x^2+y^2=\varepsilon^2 \text{对应顺时针定向}$$

$$\oint_\Gamma \frac{x\cos\varphi+y\cos\psi}{4x^2+y^2}ds=\oint_{\Gamma\cup L}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}+\int_{L^-}\frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$$

$$=0+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L^-}xdy-ydx=\frac{1}{\varepsilon^2}2\left(\pi\frac{\varepsilon}{2}\varepsilon\right)=\pi$$

---7 分

（注：或设 Γ 方向为顺时针，$\overrightarrow{s^0}=(\cos\varphi,\cos\psi)=(-\cos\beta,\cos\alpha)$ ……）