2012—2013 学年第一学期《高等数学 AIII》试卷

2013.01.10

一	二	三	四	总　分

得 分

一、填空题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．球面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0)$，则 $\dfrac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dS=$____________。

2． L 为圆周 $x^2+y^2=a^2\ (\text{常数}a>0)$，逆时针方向，则 $\dfrac{1}{2\pi}\oint_L xdy-ydx=$__________。

3．已知 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 连续，Σ 为平面 $x-y+\sqrt{2}z=1$ 在第四卦限部分的下侧，则将 $I=\iint\limits_{\Sigma}2Pdydz+2Qdzdx+2Rdxdy$ 化为对面积的曲面积分为 $I=$____________________________。

4．幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n}{2^n}x^n$ 的收敛区间为________________________。

5．常微分方程 $x\ln xdy-ydx=0$ 的通解为_____________________。

得 分

二、选择题(共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1．已知 Σ 为半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\ (a>0, z\ge 0)$ 的上侧，则下列积分不为零的是

(　　)

(A) $\iint\limits_{\Sigma}y\,dydz$；　(B) $\iint\limits_{\Sigma}x^2y\,dzdx$；　(C) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\,dydz$；　(D) $\iint\limits_{\Sigma}z\,dzdx$。

2． $f(x)$ 为周期为 2π 的函数，其表达式为 $f(x)=\begin{cases}\pi, & x=0,\\ x, & 0<x\le\pi,\\ 2\pi, & \pi<x<2\pi\end{cases}$，

$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$，其中 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ \left(n=0,1,2,\cdots\right)$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,dx,\ \left(n=1,2,\cdots\right)$，则下列选项正确的是（　　）

（A） $f(0)\neq g(0)$；　　（B） $f(\pi)=g(\pi)$ ；

（C） $f(\pi)=g(0)$；　　（D） $f(0)=g(\pi)$ 。

3．下列选项正确的是（　　）

(A) 数值项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{n}$ 收敛；

(B) 数值项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ 皆收敛且 $a_n<b_n<c_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；

(C) 数值项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n-1}-a_{2n}\right)$ 收敛；

(D) 数值项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+|a_n|}{2}$ 收敛。

4．已知 Ω 为空间区域，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\in C^{(2)}(\Omega)$，$\vec{A}=\{P,Q,R\}$，$u=u(x,y,z)\in C^{(2)}(\Omega)$，下列选项中运算有意义的是（　　）

(A) $\mathrm{rot}(\vec{A})\times\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}(\vec{A})\right)$；　　(B) $\mathrm{div}(\vec{A})\times\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}(\vec{A})\right)$；

(C) $\mathrm{div}(\vec{A})\bullet\mathrm{rot}\left(\mathrm{grad}(u)\right)$；　　(D) $\mathrm{div}(u)\bullet\mathrm{grad}\left(\mathrm{div}(\vec{A})\right)$。

5．常微分方程 $y''-4y'+13y=x2^x\sin 3x+1$ 的特解形式可设为（　　）

(A) $y^*=2^x\left[\left(ax^2+bx\right)\cos 3x+\left(cx^2+dx\right)\sin 3x\right]+e$；

(B) $y^*=2^x\left(ax\cos 3x+bx\sin 3x\right)+cx+d$ ；

(C) $y^*=2^x\left[\left(ax^2+bx\right)\sin 3x\right]+cx^2+dx+e$；

(D) $y^*=2^x\left[(ax+b)\cos 3x+(cx+d)\sin 3x\right]+e$ 。

得 分

三、计算题(共 4 小题，每小题 9 分，共 36 分)

1. 计算曲线积分 $\int_L zdx + xdy + ydz$，其中 L 为曲线: $x = t$，$y = t^2$，$z = t\ (0 \le t \le 1)$ 上由 $t = 0$ 到 $t = 1$ 对应的一段弧。

2．判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n (n+1)}$ 的敛散性.

3．求常微分方程 $y'+y=e^x$ 的通解。

4．将函数 $f(x)=x^2\sin x^2$ 展为 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}$ 的和。

得 分

四、计算题(共 4 小题，第 1、2、3 题各 9 分， 4 题 7 分，共 34 分)

1． 求常微分方程 $y''-4y'+4y=2e^{2x}$ 的通解。

2．计算 $\oint_{\Gamma}(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$ ，其中 Γ 是柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $x+z=a\,(a>0)$ 的交线，从 z 轴的正向看为顺时针方向。

3．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz+y^3dzdx+\left(z^3-\frac{1}{5}\right)dxdy$，其中 Σ 是半球面 $x^2+y^2+z^2=1\left(z\ge 0\right)$ 的上侧。

4. 计算曲线积分 $\oint_{\Gamma}\frac{x\cos\varphi+y\cos\psi}{4x^2+y^2}ds$，其中不过原点的平面闭曲线 Γ 分段光滑无重点，$\overrightarrow{n^0}=\left(\cos\varphi,\cos\psi\right)$ 为 Γ 的外法线方向。