吉 林 大 学

2013~2014 学年第一学期《高等数学 CI》试卷

2014 年 1 月 6 日

一	二	三	四	总　分

得 分

一、单项选择题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）

1．曲线 $y=\dfrac{2x+3\sin x}{x-\cos x}$ 的水平渐近线是（　B　）

（A）$y=0$.　　（B）$y=2$.　　（C）$y=3$.　　（D）$y=4$.

2. 设 $y=3x^2+\arctan\dfrac{1}{x}$，则 $x=0$ 为函数的（　A　）

（A）跳跃间断点.　　（B）可去间断点.

（C）无穷间断点.　　（D）振荡间断点.

3. 函数 $y=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 单调增加且为下凸的区间是（　C　）

（A）$(-\infty,-3)$.　　（B）$(-3,-2)$.　　（C）$(-2,0)$.　　（D）$(0,+\infty)$.

4．设方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 确定 $y=y(x)$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}=$（　C　）

（A）1.　　（B）-1.　　（C）$-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.　　（D）$\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处

（　D　）

（A）不可导.　　　　　　　　（B）可导且 $f'(a)\neq 0$.

（C）取得极小值.　　　　　　（D）取得极大值.

6. 下列反常积分发散的是（　A　）

（A）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.　　　　　　（B）$\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

（C）$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^3}}\mathrm{d}x$.　　　　　（D）$\int_{2}^{+\infty}\dfrac{1}{x\sqrt{(\ln x)^3}}\mathrm{d}x$.

得 分

二、填空题（共 6 道小题，每小题 3 分，满分 18 分）.

1. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^k}=\dfrac{1}{2}$，则 $k=$ ____3____.

2. 设函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，则 $f'(0)=$ ____1____.

3. 设 $F(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$，则 $\mathrm{d}F(x)=$ $\underline{2x\,\mathrm{e}^{-x^4}\,\mathrm{d}x}$.

4. 由曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=2x+3$ 围成图形的面积是____32/3____.

5. 曲线 $\begin{cases}x=1+t^3\\ y=5t+\ln(2+t)\end{cases}$ 在对应 $t=-1$ 处的切线方程是 $\underline{y=2x-5}$.

6. $\int_{-2}^{2}\dfrac{x^2\arcsin x}{1+x^4}\mathrm{d}x=$ ____0____.

得 分

三、解答题（共 6 道小题，每小题 8 分，满分 48 分）.

1．求 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$.

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}$ ………………………………3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}$ ………………………………2 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$ ………………………………2 分

$=\frac{1}{2}$ ………………………………1 分

2．设 $y=x2^x+\ln(x+\sqrt{x^2+4})$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

解：$\frac{dy}{dx}=2^x+x2^x\ln 2+\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ …………………4 分

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{3}{2}$ ………………………………4 分

3. 设某种商品的需求函数为$Q=12-\frac{P}{2}$，其中P为销售价格，Q为需求量.

（1）求需求弹性函数;

（2）问P为何值时总收益最大？并求出最大收益.

解：（1）需求对价格的弹性为

$$\eta=-\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}$$

需求弹性函数

$$\eta(P)=-\frac{dQ}{dP}\frac{P}{Q}=\frac{P}{24-P}$$ ……………………4 分

（2）总收益函数

$$\mathrm{R}(P)=PQ=12P-\frac{P^2}{2}$$

$$\mathrm{R}'(P)=12-P$$

令$\mathrm{R}'(P)=0$，得驻点 P=12.

则当 P=12 时总收益最大，为 72. ……………………4 分

4. 求$\int (\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}})\mathrm{d}x$.

$$=\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x-\int\frac{xe^x}{\sqrt{1+e^x}}\mathrm{d}x$$

(令$t=\sqrt{1+e^x}$，则$x=\ln(t^2-1)$，$\mathrm{d}x=\frac{2t}{t^2-1}\mathrm{d}t$)

$$=-\int \frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}}-2\int\ln(t^2-1)\mathrm{d}t \quad \text{........................ 4 分}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2t\ln(t^2-1)+4\int\frac{t^2}{t^2-1}\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2t\ln(t^2-1)+4t+2\ln\frac{t-1}{t+1}+C \quad \text{.......... 3 分}$$

$$=-\sqrt{1-x^2}-2x\sqrt{1+e^x}+4\sqrt{1+e^x}+2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C \quad \text{... 1 分}$$

5. 设 $f(x)=\begin{cases} xe^{-x^2}, & x\geq 0, \\ \frac{1}{1+\cos x}, & -1<x<0, \end{cases}$ 求$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解：令$x-2=t$，则

$$\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_{-1}^2 f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\frac{1}{1+\cos t}\mathrm{d}t+\int_0^2 xe^{-x^2}\mathrm{d}x \quad \text{........... 3 分}$$

$$=\int_{-1}^0\sec^2\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_0^2 e^{-x^2}\mathrm{d}(-x^2) \quad \text{........... 2 分}$$

$$=\tan\frac{x}{2}\Big|_{-1}^0-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^2 \quad \text{........... 2 分}$$

$$=\tan\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-e^{-4}) \quad \text{........... 1 分}$$

6.（1）过原点作曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 的切线 L，求切线 L 的方程；

（2）计算由 x 轴，曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 及切线 L 围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所生成的旋转体体积.

解：(1)设切点为 (x_0, y_0)，则过切点的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2\sqrt{x_0-1}}(x-x_0),\quad y_0=\sqrt{x_0-1}$$ . . . . 2 分

令 $x=0, y=0$，得 $x_0=2, y_0=1$．故切线 L 方程为 $y=\frac{1}{2}x.$ . . . . 2 分

则旋转体体积为

$$\begin{aligned}V_x&=\frac{1}{3}\pi\times1^2\times2-\pi\int_1^2(x-1)\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{3}\pi-\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)_1^2=\frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$ . . . . 4 分

得 分

四、按要求解答下列各题（共 2 道小题，每题 8 分，满分 16 分）.

1．设函数 $f(x)$ 的[2, 4]上连续，在(2, 4)内可导，且满足 $f(2)=\int_3^4(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x$，

证明在(2, 4)内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$.

证：$f(x)$ 在[3, 4]上连续，在(3, 4)内至少存在一点 ξ_1，使

$$\int_3^4(x-1)^2f(x)\mathrm{d}x=(\xi_1-1)^2f(\xi_1)$$ . . . . 4 分

设 $F(x)=(x-1)^2f(x)$，则 $F(x)$ 的[2, ξ_1]上连续，在(2, ξ_1)内可导，

$$F(2)=f(2)=F(\xi_1)$$ . . . . 2 分

由 Rolle 定理，在(2, ξ_1)内至少存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即在(2, 4)内至少存在一点 ξ，使 $(1-\xi)^2f'(\xi)=2(1-\xi)f(\xi)$，即

$$(1-\xi)f'(\xi)=2f(\xi)$$ . . . . 2 分

2.（1）证明：对于任意正整数n，不等式 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立；

（2）设数列$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n \quad (n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

证明：（1）设 $f(t)=\ln(1+t)$，对 $f(t)$ 在$[0,x]$应用 Lagrange 中值定理

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

即有

$$\frac{1}{1+\xi}=\frac{\ln(1+x)}{x}$$

由于$0<\xi<x$，则有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

取 $x=\frac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则有

$$\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$$ ....4 分

（2）先证单调性：

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n})<0$$

故数列$\{x_n\}$单调减少.

再证有界性：

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+\frac{1}{1})+\ln(1+\frac{1}{2})+...+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$$

$$=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+...+\ln\frac{n+1}{n}-\ln n=\ln(n+1)>0$$

故数列$\{x_n\}$有下界. 由单调有界原理，此数列收敛. ....4 分