加窗傅立叶变换

刘海霞

数学与统计学院

2021 年 9 月 28 日

华中科技大学

一些定义

定义 (希尔伯特空间)

我们将带有内积的向量空间称为希尔伯特空间。例如,
$\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{C}$.
令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则 x 和 y 内积为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}.$$

华中科技大学

一些定义

定义 (希尔伯特空间)

我们将带有内积的向量空间称为希尔伯特空间。例如，
$\mathbb{R}^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{R}$, $\mathbb{C}^n = (x_1, x_2, \cdots, x_n) : x_j \in \mathbb{C}$.
令 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则 x 和 y 内积为

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}.$$

定义 (L^2 空间)

$$L^2[a, b] = \{f(t) : \int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty\},$$

其中内积定义为 $\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$, 称 $\int_a^b |f(t)|^2 dt$ 为 $f(t)$ 在 $[a, b]$ 上的能量。

傅立叶分析

引理

令 $f(t)$ 是周期为 T 的函数，那么 $g(t) = f(Tt)$ 为周期为 1 的函数。

华中科技大学

傅立叶分析

引理

令 $f(t)$ 是周期为 T 的函数，那么 $g(t) = f(Tt)$ 为周期为 *1* 的函数。

定理

令 $f(t)$ 为周期为 *1* 的函数，且 $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$, 那么

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} [a_n \cos(2\pi nt) + b_n \sin(2\pi nt)],$$

其中

$$\begin{cases} a_n = \int_0^1 f(t)\cos(2\pi nt)dt & n = 0, 1, \cdots \\ b_n = \int_0^1 f(t)\sin(2\pi nt)dt & n = 1, 2, \cdots \end{cases}.$$

华中科技大学

傅立叶分析

注意到

$$\begin{cases} \cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int}+e^{-2\pi int}}{2} \\ \sin(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int}-e^{-2\pi int}}{2i} \end{cases},$$

傅立叶分析

注意到

$$\begin{cases} \cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}}{2} \\ \sin(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int} - e^{-2\pi int}}{2i} \end{cases},$$

所以 $f(t)$ 也可以用 $e^{2\pi int}$ 和 $e^{-2\pi int}$ 来表示。

華中科技大学

傅立叶分析

注意到

$$\begin{cases} \cos(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int}+e^{-2\pi int}}{2} \\ \sin(2\pi nt) = \frac{e^{2\pi int}-e^{-2\pi int}}{2i} \end{cases},$$

所以 $f(t)$ 也可以用 $e^{2\pi int}$ 和 $e^{-2\pi int}$ 来表示。

定理 (傅立叶分析)

令 $f(t)$ 是周期为 1 的函数且 $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$, 那么

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi int},$$

其中 $c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi int} \triangleq \hat{f}(n)$.

华中科技大学

定理 (isometry)

$\int_0^1 |f(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2.$

证明:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 f(t)\overline{f(t)} dt \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n t} \right) \cdot \left(\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{\hat{f}(m) e^{-2\pi i m t}} \right) dt \\
&= \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(m)} e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i m t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(m)} \int_0^1 e^{2\pi i n t} e^{-2\pi i m t} dt \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{f}(n)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)|^2.
\end{aligned}$$

华中科技大学

例 (Gibbs Oscillation)

考虑周期为 1 的函数 $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$,

华中科技大学

例 (Gibbs Oscillation)

考虑周期为 1 的函数 $f(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,\frac{1}{2}) \\ -1, & t\in[\frac{1}{2},1) \end{cases}$，从而

$f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t),\ f(t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(t).$

华中科技大学

例 (Gibbs Oscillation)

考虑周期为 1 的函数 $f(t)=\begin{cases}1, & t\in[0,\frac{1}{2})\\ -1, & t\in[\frac{1}{2},1)\end{cases}$ ，从而 $f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t)$，$f(t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(t)$.

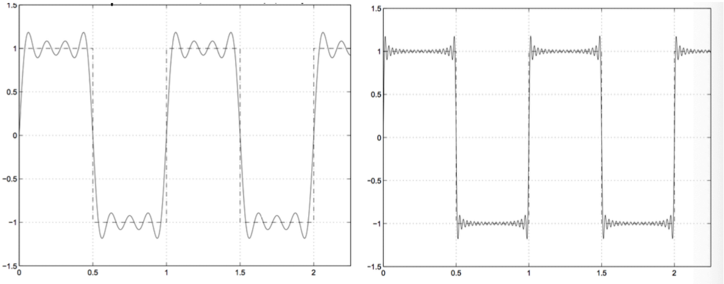


图: $f_9=\sum_{k=0}^{9}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t)$，$f_{39}=\sum_{k=0}^{39}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t)$

华中科技大学

例 (Gibbs Oscillation)

考虑周期为 1 的函数 $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, \frac{1}{2}) \\ -1, & t \in [\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$，从而
$f_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)t)$, $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

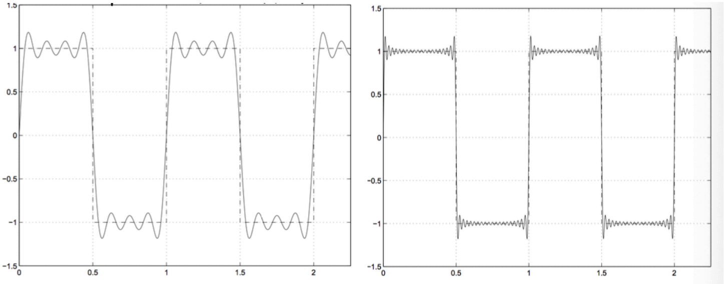


图: $f_9 = \sum_{k=0}^{9} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)t)$, $f_{39} = \sum_{k=0}^{39} \frac{4}{\pi(2k+1)} \sin(2\pi(2k+1)t)$

- f_9 和 f_{39} 在矩形波的转角处不能给出好的逼近,

例 (Gibbs Oscillation)

考虑周期为 1 的函数 $f(t)=\begin{cases} 1, & t\in[0,\frac{1}{2}) \\ -1, & t\in[\frac{1}{2},1) \end{cases}$ ，从而

$f_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t)$, $f(t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(t)$.

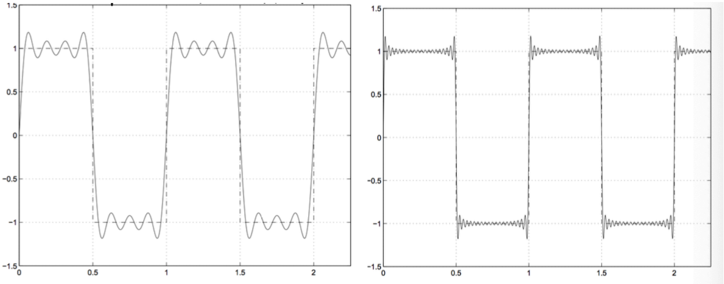


图: $f_9=\sum_{k=0}^{9}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t)$, $f_{39}=\sum_{k=0}^{39}\frac{4}{\pi(2k+1)}\sin(2\pi(2k+1)t)$

- f_9 和 f_{39} 在矩形波的转角处不能给出好的逼近，
- 因为连续函数的有限和是连续的，而矩形波有跳跃点。

华中科技大学

例

考虑周期为 1 的下列函数 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t, & t \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ \frac{1}{2} - t, & t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$,

华中科技大学

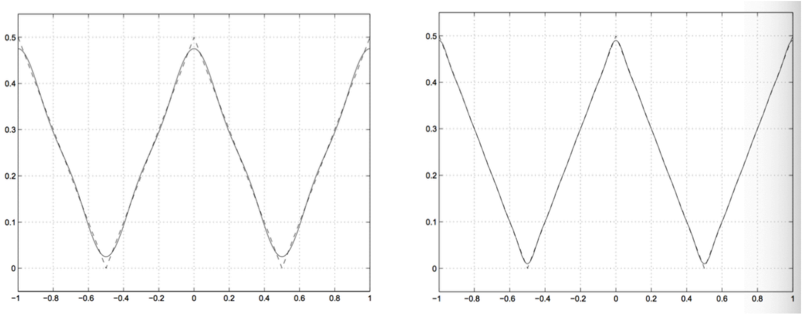
例

考虑周期为 1 的下列函数 $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}+t, & t\in[-\frac{1}{2},0]\\ \frac{1}{2}-t, & t\in[0,\frac{1}{2}]\end{cases}$ ，则 $f_n(t)=\frac{1}{4}+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2\pi(2k+1)t),\ f(t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(t).$

华中科技大学

例

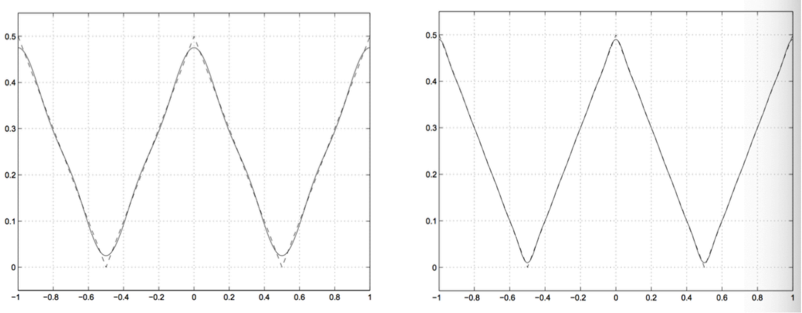
考虑周期为 1 的下列函数 $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} + t, & t \in [-\frac{1}{2}, 0] \\ \frac{1}{2} - t, & t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$，则 $f_n(t) = \frac{1}{4} + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\pi^2 (2k+1)^2} \cos(2\pi(2k+1)t)$, $f(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.



例

考虑周期为 1 的下列函数 $f(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}+t, & t\in[-\frac{1}{2},0]\\ \frac{1}{2}-t, & t\in[0,\frac{1}{2}]\end{cases}$，则

$f_n(t)=\frac{1}{4}+\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\pi^2(2k+1)^2}\cos(2\pi(2k+1)t),\ f(t)=\lim_{n\to+\infty}f_n(t).$



- 对非光滑函数的逼近效果不好。
- 寻求好的方法，比如，加窗的傅立叶变换或者小波。

傅立叶变换

- 傅立叶变换 $\mathcal{F}(f(t))(s) \triangleq \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ist}dt,$

华中科技大学

傅立叶变换

- 傅立叶变换 $\mathcal{F}(f(t))(s) \triangleq \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ist}dt,$
- 傅立叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}(g(s))(t) \triangleq \check{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\pi its}ds.$

华中科技大学

傅立叶变换

- 傅立叶变换 $\mathcal{F}(f(t))(s) \triangleq \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ist}dt$,
- 傅立叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}(g(s))(t) \triangleq \check{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\pi its}ds$.

定理 (傅立叶反演定理 (Fourier inversion theorem))

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t), \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g(s))) = f(s).$$

华中科技大学

傅立叶变换

- 傅立叶变换 $\mathcal{F}(f(t))(s) \triangleq \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ist}dt$,
- 傅立叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}(g(s))(t) \triangleq \check{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\pi its}ds$.

定理 (傅立叶反演定理 (Fourier inversion theorem))

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t), \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g(s))) = f(s).$$

傅立叶变换的基本性质

- linearity

$$\mathcal{F}(f_1(t) + f_2(t)) = \mathcal{F}(f_1(t)) + \mathcal{F}(f_2(t)),\ \mathcal{F}(af(t)) = a\mathcal{F}(f(t)).$$

华中科技大学

傅立叶变换

- 傅立叶变换 $\mathcal{F}(f(t))(s) \triangleq \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ist}dt$,
- 傅立叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}(g(s))(t) \triangleq \check{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\pi its}ds$.

定理 (傅立叶反演定理 (Fourier inversion theorem))

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t), \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g(s))) = f(s).$$

傅立叶变换的基本性质

- linearity

$$\mathcal{F}(f_1(t) + f_2(t)) = \mathcal{F}(f_1(t)) + \mathcal{F}(f_2(t)),\ \mathcal{F}(af(t)) = a\mathcal{F}(f(t)).$$

- $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt, \quad \check{g}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)ds.$

华中科技大学

傅立叶变换

- 傅立叶变换 $\mathcal{F}(f(t))(s) \triangleq \hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-2\pi ist}dt$,
- 傅立叶反变换 $\mathcal{F}^{-1}(g(s))(t) \triangleq \check{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)e^{2\pi its}ds$.

定理 (傅立叶反演定理 (Fourier inversion theorem))

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t), \quad \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(g(s))) = f(s).$$

傅立叶变换的基本性质

- linearity

$$\mathcal{F}(f_1(t) + f_2(t)) = \mathcal{F}(f_1(t)) + \mathcal{F}(f_2(t)),\ \mathcal{F}(af(t)) = a\mathcal{F}(f(t)).$$

- $\hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt, \quad \check{g}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s)ds.$
- Isometry

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(s)|^2 ds.$$

华中科技大学

傅立叶变换的基本性质

- 设 $f(t)$ 为实对称函数，即，$f(-t) = f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为实函数。

傅立叶变换的基本性质

- 设 $f(t)$ 为实对称函数，即，$f(-t)=f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为实函数。
- 设 $f(t)$ 为实反对称函数，即，$f(-t)=-f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为虚函数。

華中科技大學

傅立叶变换的基本性质

- 设 $f(t)$ 为实对称函数，即，$f(-t)=f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为实函数。
- 设 $f(t)$ 为实反对称函数，即，$f(-t)=-f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为虚函数。
- $\mathcal{F}(f(t+b))=e^{2\pi ibs}\mathcal{F}(f(t))(s)$.

華中科技大学

傅立叶变换的基本性质

- 设 $f(t)$ 为实对称函数，即，$f(-t) = f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为实函数。
- 设 $f(t)$ 为实反对称函数，即，$f(-t) = -f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为虚函数。
- $\mathcal{F}(f(t+b)) = e^{2\pi ibs}\mathcal{F}(f(t))(s)$.

  证明:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t+b)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+b)e^{-2\pi ist}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi is(u-b)}du \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi isu}e^{2\pi isb}du = e^{2\pi isb}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi isu}du \\
&= e^{2\pi isb}\hat{f}(s).
\end{aligned}
$$

華中科技大學

傅立叶变换的基本性质

- 设 $f(t)$ 为实对称函数，即，$f(-t)=f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为实函数。
- 设 $f(t)$ 为实反对称函数，即，$f(-t)=-f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为虚函数。
- $\mathcal{F}(f(t+b))=e^{2\pi ibs}\mathcal{F}(f(t))(s)$.

  证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t+b))=&\int_{-\infty}^{+\infty}f(t+b)e^{-2\pi ist}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-2\pi is(u-b)}du\\=&\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-2\pi isu}e^{2\pi isb}du=e^{2\pi isb}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{-2\pi isu}du\\=&e^{2\pi isb}\hat{f}(s).\end{aligned}$$

- $\mathcal{F}(f(at))=\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{s}{a})$.

华中科技大学

傅立叶变换的基本性质

- 设 $f(t)$ 为实对称函数，即，$f(-t)=f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为实函数。
- 设 $f(t)$ 为实反对称函数，即，$f(-t)=-f(t)$, 那么 $\mathcal{F}(f(t))$ 为虚函数。
- $\mathcal{F}(f(t+b))=e^{2\pi ibs}\mathcal{F}(f(t))(s)$.

  证明:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(t+b)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t+b)e^{-2\pi ist}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi is(u-b)}du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi isu}e^{2\pi isb}du = e^{2\pi isb}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-2\pi isu}du \\ &= e^{2\pi isb}\hat{f}(s).\end{aligned}$$

- $\mathcal{F}(f(at))=\frac{1}{a}\hat{f}(\frac{s}{a})$.
- $\mathcal{F}(f(at+b))=\frac{1}{a}e^{2\pi isb/a}\hat{f}(\frac{s}{a})$.

华中科技大学

窗函数

定义

设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|g\| = 1$. 定义函数 g 在时间和频率上的平移函数

$$g^{[x_1,x_2]}(t) = e^{2\pi i t x_2} g(t + x_1).$$

華中科技大學

窗函数

定义

设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|g\| = 1$. 定义函数 g 在时间和频率上的平移函数

$$g^{[x_1,x_2]}(t) = e^{2\pi i t x_2} g(t + x_1).$$

- $|g(t)|^2$ 为关于 t 的概率密度函数.

华中科技大学

窗函数

定义

设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|g\| = 1$. 定义函数 g 在时间和频率上的平移函数

$$g^{[x_1,x_2]}(t) = e^{2\pi i t x_2} g(t + x_1).$$

- $|g(t)|^2$ 为关于 t 的概率密度函数.设 $\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i w t} dt$, 则 $|\hat{g}(w)|^2$ 是关于 w 的概率密度函数。

華中科技大學

窗函数

定义

设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|g\| = 1$. 定义函数 g 在时间和频率上的平移函数

$$g^{[x_1,x_2]}(t) = e^{2\pi i t x_2} g(t + x_1).$$

- $|g(t)|^2$ 为关于 t 的概率密度函数.设 $\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi iwt}dt$, 则 $|\hat{g}(w)|^2$ 是关于 w 的概率密度函数。
- 设 g 在相位 (时间-频率) 空间的中心为 (t_0, w_0)，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|g(t)|^2 dt = t_0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w|\hat{g}(w)|^2 dw = w_0,$$

华中科技大学

窗函数

定义

设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|g\| = 1$. 定义函数 g 在时间和频率上的平移函数

$$g^{[x_1,x_2]}(t) = e^{2\pi i t x_2} g(t + x_1).$$

- $|g(t)|^2$ 为关于 t 的概率密度函数.设 $\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i w t}dt$, 则 $|\hat{g}(w)|^2$ 是关于 w 的概率密度函数。
- 设 g 在相位 (时间-频率) 空间的中心为 (t_0, w_0)，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|g(t)|^2 dt = t_0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w|\hat{g}(w)|^2 dw = w_0,$$

- $g^{[x_1,x_2]}$ 在相位空间的中心为 $(t_0 - x_1, w_0 + x_2)$.

華中科技大學

窗函数

定义

设 $g \in L^2(\mathbb{R})$ 且 $\|g\| = 1$. 定义函数 g 在时间和频率上的平移函数

$$g^{[x_1,x_2]}(t) = e^{2\pi i t x_2} g(t + x_1).$$

- $|g(t)|^2$ 为关于 t 的概率密度函数.设 $\hat{g}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-2\pi i w t}dt$, 则 $|\hat{g}(w)|^2$ 是关于 w 的概率密度函数。
- 设 g 在相位 (时间-频率) 空间的中心为 (t_0, w_0)，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|g(t)|^2 dt = t_0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w|\hat{g}(w)|^2 dw = w_0,$$

- $g^{[x_1,x_2]}$ 在相位空间的中心为 $(t_0 - x_1, w_0 + x_2)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t|g^{[x_1,x_2]}(t)|^2 dt = t_0 - x_1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} w|\widehat{g^{[x_1,x_2]}}(w)|^2 dw = w_0 + x_2.$$

华中科技大学

定义

对任意给定的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$，定义

$$F(x_1, x_2) = \langle f, g^{[x_1,x_2]} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g^{[x_1,x_2]}(t)}dt.$$

定义

对任意给定的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$，定义

$$F(x_1, x_2) = \langle f, g^{[x_1,x_2]} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g^{[x_1,x_2]}(t)}dt.$$

- $F(x_1, x_2)$ 采样了函数 f 在相位（时间-频率）空间中的点 $(t_0 - x_1, w_0 + x_2)$ 的临域内行为。

华中科技大学

定义

对任意给定的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$，定义

$$F(x_1, x_2) = \langle f, g^{[x_1,x_2]} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g^{[x_1,x_2]}(t)}dt.$$

- $F(x_1, x_2)$ 采样了函数 f 在相位（时间-频率）空间中的点 $(t_0 - x_1, w_0 + x_2)$ 的临域内行为。
- $$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t + x_1)}e^{-2\pi i t x_2}dt,$$

定义

对任意给定的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$，定义

$$F(x_1, x_2) = \langle f, g^{[x_1,x_2]} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g^{[x_1,x_2]}(t)}dt.$$

- $F(x_1, x_2)$ 采样了函数 f 在相位（时间-频率）空间中的点 $(t_0 - x_1, w_0 + x_2)$ 的临域内行为。
- $$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t+x_1)}e^{-2\pi i t x_2}dt,$$
  $$f(t)\overline{g(t+x_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, x_2)e^{2\pi i t x_2}dx_2.$$

华中科技大学

定义

对任意给定的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$，定义

$$F(x_1, x_2) = \langle f, g^{[x_1,x_2]} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g^{[x_1,x_2]}(t)}dt.$$

- $F(x_1, x_2)$ 采样了函数 f 在相位（时间-频率）空间中的点 $(t_0 - x_1, w_0 + x_2)$ 的临域内行为。
-

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t + x_1)}e^{-2\pi i t x_2}dt,$$

$$f(t)\overline{g(t + x_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, x_2)e^{2\pi i t x_2}dx_2.$$

$$\begin{aligned} f(t) =& \frac{1}{\|g\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, x_2)g(t + x_1)e^{2\pi i t x_2}dx_1dx_2 \\ =& \frac{1}{\|g\|^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1, x_2)g^{[x_1,x_2]}(t)dx_1dx_2. \end{aligned}$$

华中科技大学

Proper choice of the window g

- method is flexible, window function can be chosen as we wish.
- impossibility of localizing g and $\tilde{g}$ simultaneously in phase space with arbitrary accuracy.

華中科技大學

Proper choice of the window g

- method is flexible, window function can be chosen as we wish.
- impossibility of localizing g and $\tilde{g}$ simultaneously in phase space with arbitrary accuracy.
- Heisenberg inequality

$$\int_{-\infty}^{+\infty}(t-t_0)^2|g(t)|^2dt\int_{-\infty}^{+\infty}(w-w_0)^2|\hat{g}(w)|^2dw\geq\frac{1}{16\pi^2}.$$

华中科技大学

dense and overcomplete

定理

随着 $[x_1, x_2]$ 取遍 $\mathbb{R}^2$ 中所有的值，函数 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是稠密的。

dense and overcomplete

定理

随着 $[x_1, x_2]$ 取遍 $\mathbb{R}^2$ 中所有的值，函数 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是稠密的。

定理

函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 由内积 $\langle f, g^{[x_1,x_2]} \rangle, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 唯一确定。

证明：设 $\langle f_1, g^{[x_1,x_2]} \rangle = \langle f_2, g^{[x_1,x_2]} \rangle$ 对 $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 和所有的 x_1, x_2.

dense and overcomplete

定理

随着 $[x_1, x_2]$ 取遍 $\mathbb{R}^2$ 中所有的值，函数 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是稠密的。

定理

函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 由内积 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 唯一确定。

证明：设 $\langle f_1, g^{[x_1,x_2]}\rangle = \langle f_2, g^{[x_1,x_2]}\rangle$ 对 $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 和所有的 x_1, x_2.令 $f = f_1 - f_2$, 则 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle \equiv 0$. 因此 f 正交于所有的 $g^{[x_1,x_2]}$ 生成的子空间。

dense and overcomplete

定理

随着 $[x_1, x_2]$ 取遍 $\mathbb{R}^2$ 中所有的值，函数 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是稠密的。

定理

函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 由内积 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 唯一确定。

证明：设 $\langle f_1, g^{[x_1,x_2]}\rangle = \langle f_2, g^{[x_1,x_2]}\rangle$ 对 $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 和所有的 x_1, x_2.令 $f = f_1 - f_2$, 则 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle \equiv 0$. 因此 f 正交于所有的 $g^{[x_1,x_2]}$ 生成的子空间。根据 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上正交得，$f = 0$, $f_1 = f_2$.

华中科技大学

dense and overcomplete

定理

随着 $[x_1, x_2]$ 取遍 $\mathbb{R}^2$ 中所有的值，函数 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是稠密的。

定理

函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 由内积 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 唯一确定。

证明：设 $\langle f_1, g^{[x_1,x_2]}\rangle = \langle f_2, g^{[x_1,x_2]}\rangle$ 对 $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 和所有的 x_1, x_2.令 $f = f_1 - f_2$, 则 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle \equiv 0$. 因此 f 正交于所有的 $g^{[x_1,x_2]}$ 生成的子空间。根据 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上正交得，$f = 0$, $f_1 = f_2$.**问题**：
$g^{[x_1,x_2]}, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是过完备的。

华中科技大学

dense and overcomplete

定理

随着 $[x_1, x_2]$ 取遍 $\mathbb{R}^2$ 中所有的值，函数 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是稠密的。

定理

函数 $f \in L^2(\mathbb{R})$ 由内积 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 唯一确定。

证明：设 $\langle f_1, g^{[x_1,x_2]}\rangle = \langle f_2, g^{[x_1,x_2]}\rangle$ 对 $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ 和所有的 x_1, x_2.令 $f = f_1 - f_2$, 则 $\langle f, g^{[x_1,x_2]}\rangle \equiv 0$. 因此 f 正交于所有的 $g^{[x_1,x_2]}$ 生成的子空间。根据 $g^{[x_1,x_2]}$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上正交得，$f = 0$, $f_1 = f_2$.**问题**：
$g^{[x_1,x_2]}, -\infty < x_1, x_2 < \infty$ 在 $L^2(\mathbb{R})$ 上是过完备的。

- Sample F at the lattice points $(x_1, x_2) = (ma, nb)$, $a, b > 0 \in \mathbb{R}$ and $m, n \in \mathbb{Z}$.

Lattice Hilbert space

The lattice Hilbert space V' of complex-valued functions $\varphi(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfy

- periodicity condition

$$\varphi(a_1 + x_1, a_2 + x_2) = e^{-2\pi i a_1 x_2}\varphi(x_1, x_2),$$

  for $a_1, a_2 = 0, \pm 1, \cdots$

- square integrable over the unit square

$$\int_0^1 \int_0^1 |\varphi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty.$$

- The inner product is

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_1(x_1, x_2)\overline{\varphi_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2.$$

Lattice Hilbert space

The lattice Hilbert space V' of complex-valued functions $\varphi(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ satisfy

- periodicity condition

$$\varphi(a_1 + x_1, a_2 + x_2) = e^{-2\pi i a_1 x_2} \varphi(x_1, x_2),$$

  for $a_1, a_2 = 0, \pm 1, \cdots$

- square integrable over the unit square

$$\int_0^1 \int_0^1 |\varphi(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 < \infty.$$

- The inner product is

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \varphi_1(x_1, x_2) \overline{\varphi_2(x_1, x_2)} dx_1 dx_2.$$

$\varphi \in V'$ is determined by values in the square $\{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1, x_2 < 1\}$.

华中科技大学

periodizing operator (Weil–Brezin–Zak transform)

定义 (Weil–Brezin–Zak transform)

$$Pf(x_1, x_2) = P(f; (x_1, x_2)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x_2} f(n + x_1).$$

- P is well defined for $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ belonging to the Schwartz space,

periodizing operator (Weil–Brezin–Zak transform)

定义 (Weil–Brezin–Zak transform)

$$Pf(x_1, x_2) = P(f; (x_1, x_2)) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i n x_2} f(n + x_1).$$

- P is well defined for $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ belonging to the Schwartz space,
- Pf satisfies the periodicity condition and $Pf \in V'$.

periodizing operator (Weil–Brezin–Zak transform)

定义 (Weil–Brezin–Zak transform)

$$Pf(x_1,x_2)=P(f;(x_1,x_2))=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{2\pi inx_2}f(n+x_1).$$

- P is well defined for $\forall f\in L^2(\mathbb{R})$ belonging to the Schwartz space,
- Pf satisfies the periodicity condition and $Pf\in V'$.

$$Pf(a_1+x_1,a_2+x_2)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{2\pi in(a_2+x_2)}f(n+a_1+x_1)$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{2\pi inx_2}f(n+a_1+x_1)=e^{-2\pi ia_1x_2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{2\pi imx_2}f(m+x_1)$$

$$=e^{-2\pi ia_1x_2}Pf(x_1,x_2).$$

Isometry

$$
\begin{aligned}
&\langle Pf(\cdot,\cdot), Pf'(\cdot,\cdot)\rangle \\
&== \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(n-m)x_2} f(n+x_1)\overline{f'(m+x_1)} \\
&= \int_0^1 dx_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+x_1)\overline{f'(n+x_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f'(t)}dt = \langle f, f'\rangle.
\end{aligned}
$$

Isometry

$$
\begin{aligned}
&\langle Pf(\cdot,\cdot), Pf'(\cdot,\cdot)\rangle \\
&== \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(n-m)x_2} f(n+x_1)\overline{f'(m+x_1)} \\
&= \int_0^1 dx_1 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n+x_1)\overline{f'(n+x_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f'(t)}dt = \langle f, f'\rangle.
\end{aligned}
$$

- P can be extended to an inner product preserving mapping of $L^2(\mathbb{R})$ into V.

Inverse mapping

定义

Define the mapping $P^* : V' \to L^2(\mathbb{R})$ as

$$P^*\varphi(t) = \int_0^1 \varphi(t, y)dy, \quad \varphi \in V'.$$

Inverse mapping

定义

Define the mapping $P^* : V' \to L^2(\mathbb{R})$ as

$$P^*\varphi(t) = \int_0^1 \varphi(t,y)dy, \quad \varphi \in V'.$$

- Since $\varphi \in V'$, we have for an integer a

$$P^*\varphi(t+a) = \int_0^1 \varphi(t+a,y)dy = \int_0^1 \varphi(t,y)e^{-2\pi iay}dy = \hat{\varphi}_{-a}(t).$$

Inverse mapping

定义

Define the mapping $P^* : V' \to L^2(\mathbb{R})$ as

$$P^*\varphi(t) = \int_0^1 \varphi(t,y)dy, \quad \varphi \in V'.$$

- Since $\varphi \in V'$, we have for an integer a

$$P^*\varphi(t+a) = \int_0^1 \varphi(t+a,y)dy = \int_0^1 \varphi(t,y)e^{-2\pi i a y}dy = \hat{\varphi}_{-a}(t).$$

- By the Parseval formula

$$\int_0^1 |\varphi|^2 dy = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} |\hat{\varphi}_{-a}(t)|^2 = \sum_{a=-\infty}^{+\infty} |P^*\varphi(t+a)|^2.$$

Preserving mapping

- P^* is an inner product preserving mapping of V' into $L^2(\mathbb{R})$.

Preserving mapping

- P^* is an inner product preserving mapping of V' into $L^2(\mathbb{R})$.

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 \int_0^1 |\varphi(t,y)|^2 dtdy = \int_0^1 \sum_{a=-\infty}^{+\infty} |P^*\varphi(t+a)|^2 dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |P^*\varphi(t)|^2 dt = \langle P^*\varphi, P^*\varphi \rangle.$$

- P^* is the adjoint of P.

Preserving mapping

- P^* is an inner product preserving mapping of V' into $L^2(\mathbb{R})$.

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 \int_0^1 |\varphi(t,y)|^2 dt dy = \int_0^1 \sum_{a=-\infty}^{+\infty} |P^* \varphi(t+a)|^2 dt$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |P^* \varphi(t)|^2 dt = \langle P^* \varphi, P^* \varphi \rangle.$$

- P^* is the adjoint of P. That is, for $g \in L^2(\mathbb{R})$, $\varphi \in V'$, we have $\langle Pg, \varphi \rangle = \langle g, P^* \varphi \rangle$.

- Let $f \in L^2(\mathbb{R})$. Then

$$f_P(x_1, x_2) = Pf(x_1, x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} f(x_1 + k)$$

satisfies $f_P(k_1 + x_1, k_2 + x_2) = e^{-2\pi i k_1 x_2} f_P(x_1, x_2)$ for integers k_1, k_2.

- Let $f \in L^2(\mathbb{R})$. Then

$$f_P(x_1, x_2) = Pf(x_1, x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} f(x_1 + k)$$

satisfies $f_P(k_1 + x_1, k_2 + x_2) = e^{-2\pi i k_1 x_2} f_P(x_1, x_2)$ for integers k_1, k_2.

- Choose $f = g^{[m,n]}(t) = e^{2\pi i t n} g(t + m)$, we have

- Let $f \in L^2(\mathbb{R})$. Then

$$f_P(x_1, x_2) = Pf(x_1, x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} f(x_1 + k)$$

satisfies $f_P(k_1 + x_1, k_2 + x_2) = e^{-2\pi i k_1 x_2} f_P(x_1, x_2)$ for integers k_1, k_2.

- Choose $f = g^{[m,n]}(t) = e^{2\pi i t n} g(t + m)$, we have

$$g_P^{[m,n]}(x_1, x_2) = e^{2\pi i (n x_1 - m x_2)} g_P(x_1, x_2).$$

- Let $f \in L^2(\mathbb{R})$. Then

$$f_P(x_1, x_2) = Pf(x_1, x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} f(x_1 + k)$$

satisfies $f_P(k_1 + x_1, k_2 + x_2) = e^{-2\pi i k_1 x_2} f_P(x_1, x_2)$ for integers k_1, k_2.

- Choose $f = g^{[m,n]}(t) = e^{2\pi i t n} g(t + m)$, we have

$$g_P^{[m,n]}(x_1, x_2) = e^{2\pi i (n x_1 - m x_2)} g_P(x_1, x_2).$$

$$g_p^{[m,n]}(x_1, x_2) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} g^{[m,n]}(x_1 + k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} e^{2\pi i (x_1 + k) n} g(x_1 + k + m)$$

$$= e^{2\pi i n x_1} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i k x_2} g(x_1 + k + m) = e^{2\pi i (n x_1 - m x_2)} g_P(x_1, x_2).$$

ON (OrthoNormal)

- $E_{n,m}(x_1, x_2) = e^{2\pi i(nx_1 - mx_2)}$ form an ON basis for lattice Hilbert space:

ON (OrthoNormal)

- $E_{n,m}(x_1, x_2) = e^{2\pi i(nx_1 - mx_2)}$ form an ON basis for lattice Hilbert space:

$$\int_0^1 \int_0^1 E_{n_1,m_1}(x_1, x_2)\overline{E_{n_2,m_2}(x_1, x_2)}dx_1 dx_2 = \delta_{n_1,n_2}\delta_{m_1,m_2}.$$

ON (OrthoNormal)

- $E_{n,m}(x_1, x_2) = e^{2\pi i(nx_1 - mx_2)}$ form an ON basis for lattice Hilbert space:

$$\int_0^1 \int_0^1 E_{n_1,m_1}(x_1, x_2)\overline{E_{n_2,m_2}(x_1, x_2)}dx_1 dx_2 = \delta_{n_1,n_2}\delta_{m_1,m_2}.$$

定义

Let $f(t)$ be a function defined on the real line and let Ξ be the characteristic function of the set on which f vanishes:

$$\Xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{if } f(t) = 0 \\ 0, & \text{if } f(t) \neq 0 \end{cases}$$

we say f is nonzero almost everywhere (a.e.). If the L^2 norm of Ξ is 0, i.e., $||\Xi|| = 0$.

Theorem

定理

For $(a,b)=(1,1)$, $g\in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]}:m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1,x_2)=g_P(x_1,x_2)\neq 0$ *a.e..*

Theorem

定理

For $(a, b) = (1, 1)$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]} : m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1, x_2) = g_P(x_1, x_2) \neq 0$ *a.e..*

Proof: Let $\mathcal{M}$ be the closed linear subspace of $L^2(\mathbb{R})$ spanned by $\{g^{[m,n]}\}$.

Theorem

定理

For $(a, b) = (1, 1)$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]} : m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1, x_2) = g_P(x_1, x_2) \neq 0$ *a.e..*

Proof: Let $\mathcal{M}$ be the closed linear subspace of $L^2(\mathbb{R})$ spanned by $\{g^{[m,n]}\}$. Clearly $\mathcal{M} = L^2(\mathbb{R})$ iff the only solution of $\langle f, g^{[m,n]} \rangle = 0$ for all integers m and n is $f = 0$ a.e..

Theorem

定理

For $(a,b)=(1,1)$, $g\in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]}: m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1,x_2)=g_P(x_1,x_2)\neq 0$ *a.e..*

Proof: Let $\mathcal{M}$ be the closed linear subspace of $L^2(\mathbb{R})$ spanned by $\{g^{[m,n]}\}$. Clearly $\mathcal{M}=L^2(\mathbb{R})$ iff the only solution of $\langle f, g^{[m,n]}\rangle=0$ for all integers m and n is $f=0$ a.e..

Applying the Weyl-Brezin-Zak isomorphism P we have

$$\langle f, g^{[m,n]}\rangle=\langle Pf, Pg^{[m,n]}\rangle=\langle Pf, E_{n,m}Pg\rangle=\langle [Pf][\overline{Pg}], E_{n,m}\rangle=\langle f_P\overline{g_P}, E_{n,m}\rangle.$$

Theorem

定理

For $(a,b)=(1,1)$, $g\in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]}: m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1,x_2)=g_P(x_1,x_2)\neq 0$ *a.e..*

Proof: Let $\mathcal{M}$ be the closed linear subspace of $L^2(\mathbb{R})$ spanned by $\{g^{[m,n]}\}$. Clearly $\mathcal{M}=L^2(\mathbb{R})$ iff the only solution of $\langle f,g^{[m,n]}\rangle=0$ for all integers m and n is $f=0$ a.e..
Applying the Weyl-Brezin-Zak isomorphism P we have

$$\langle f,g^{[m,n]}\rangle=\langle Pf,Pg^{[m,n]}\rangle=\langle Pf,E_{n,m}Pg\rangle=\langle [Pf][\overline{Pg}],E_{n,m}\rangle=\langle f_P\overline{g_P},E_{n,m}\rangle.$$

Since $E_{n,m}$ form an ON basis for the lattice Hilbert space,

$$\langle f,g^{[m,n]}\rangle=0\Leftrightarrow f_P(x_1,x_2)g_P(x_1,x_2)=0 \text{ a.e..}$$

Theorem

定理

For $(a,b)=(1,1)$, $g \in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]} : m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1,x_2)=g_P(x_1,x_2)\neq 0$ *a.e..*

Proof: Let $\mathcal{M}$ be the closed linear subspace of $L^2(\mathbb{R})$ spanned by $\{g^{[m,n]}\}$. Clearly $\mathcal{M}=L^2(\mathbb{R})$ iff the only solution of $\langle f, g^{[m,n]}\rangle=0$ for all integers m and n is $f=0$ a.e..
Applying the Weyl-Brezin-Zak isomorphism P we have

$$\langle f, g^{[m,n]}\rangle = \langle Pf, Pg^{[m,n]}\rangle = \langle Pf, E_{n,m}Pg\rangle = \langle [Pf][\overline{Pg}], E_{n,m}\rangle = \langle f_P\overline{g_P}, E_{n,m}\rangle.$$

Since $E_{n,m}$ form an ON basis for the lattice Hilbert space,

$$\langle f, g^{[m,n]}\rangle = 0 \Leftrightarrow f_P(x_1,x_2)g_P(x_1,x_2)=0 \text{ a.e..}$$

If $g_P\neq 0$ a.e., then $f_P=0$ a.e. $\Rightarrow f\equiv 0$ a.e. $\Rightarrow \mathcal{M}=L^2(\mathbb{R})$.

Theorem

定理

For $(a,b)=(1,1)$, $g\in L^2(\mathbb{R})$. *The transforms* $\{g^{[m,n]}: m,n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ *span* $L^2(\mathbb{R})$ *iff* $Pg(x_1,x_2)=g_P(x_1,x_2)\neq 0$ *a.e.*.

Proof: Let $\mathcal{M}$ be the closed linear subspace of $L^2(\mathbb{R})$ spanned by $\{g^{[m,n]}\}$. Clearly $\mathcal{M}=L^2(\mathbb{R})$ iff the only solution of $\langle f,g^{[m,n]}\rangle=0$ for all integers m and n is $f=0$ a.e..
Applying the Weyl-Brezin-Zak isomorphism P we have

$$\langle f,g^{[m,n]}\rangle=\langle Pf,Pg^{[m,n]}\rangle=\langle Pf,E_{n,m}Pg\rangle=\langle [Pf][\overline{Pg}],E_{n,m}\rangle=\langle f_P\overline{g_P},E_{n,m}\rangle.$$

Since $E_{n,m}$ form an ON basis for the lattice Hilbert space,

$$\langle f,g^{[m,n]}\rangle=0\Leftrightarrow f_P(x_1,x_2)g_P(x_1,x_2)=0 \text{ a.e.}.$$

If $g_P\neq 0$ a.e., then $f_P=0$ a.e. $\Rightarrow f\equiv 0$ a.e. $\Rightarrow \mathcal{M}=L^2(\mathbb{R})$.
If $g_P=0$ on a set S of positive measure on unit square, set $Pf=f_P=\kappa_S$, then $f_Pg_P=0$ a.e., $\Rightarrow \langle f,g^{[m,n]}\rangle=0\Rightarrow \mathcal{M}\neq L^2(\mathbb{R})$.

ON basis

推论

For $(a,b)=(1,1)$ and $g\in L^2(\mathbb{R})$, the transforms $\{g^{[m,n]}: m,n=0\pm 1,\cdots\}$ form an ON basis for $L^2(\mathbb{R})$ iff $|g_P(x_1,x_2)|=1$, a.e..

Proof:By definition of ON basis, we have

$$\begin{aligned}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} =&\langle g^{[m,n]}, g^{[m',n']}\rangle = \langle E_{n,m}g_P, E_{n',m'}g_P\rangle \\ =&\langle |g_P|^2, E_{n'-n,m'-m}\rangle\end{aligned}$$

iff $|g_P|^2=1$ a.e..

Uniqueness

定理

For $(a,b) = (1,1)$ *and* $g \in L^2(\mathbb{R})$, *suppose there are constants* A, B *such that*

$$0 < A \leq |g_P(x_1, x_2)|^2 \leq B < \infty$$

a.e. in the square $0 \leq x_1, x_2 < 1$.

Uniqueness

定理

For $(a,b)=(1,1)$ *and* $g\in L^2(\mathbb{R})$*, suppose there are constants* A,B *such that*

$$0<A\le |g_P(x_1,x_2)|^2\le B<\infty$$

a.e. in the square $0\le x_1,x_2<1$*. Then* $\{g^{[m,n]}\}$ *is a basis for* $L^2(\mathbb{R})$*, i.e.,* $\forall f\in L^2(\mathbb{R})$ *can be expanded uniquely in the form* $f=\sum_{m,n}a_{mn}g^{[m,n]}$*. Indeed,*

$$a_{mn}=\left\langle f_P,\frac{g_P^{[m,n]}}{|g_P|^2}\right\rangle=\left\langle \frac{f_P}{g_P},E_{n,m}\right\rangle.$$

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$.

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$. Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$.
Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.
From the periodicity properties in the lattice Hilbert space,

$$\frac{f_P}{g_P}(x_1 + n, x_2 + m) = \frac{f_P}{g_P}(x_1, x_2).$$

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \le x_1, x_2 < 1$.
Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.
From the periodicity properties in the lattice Hilbert space,

$$\frac{f_P}{g_P}(x_1+n, x_2+m) = \frac{f_P}{g_P}(x_1, x_2).$$

It follows that

$$\frac{f_P}{g_P} = \sum a_{mn} E_{n,m}$$

where $a_{mn} = \langle f_P/g_P, E_{n,m}\rangle$.

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$.
Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.
From the periodicity properties in the lattice Hilbert space,

$$\frac{f_P}{g_P}(x_1+n, x_2+m) = \frac{f_P}{g_P}(x_1, x_2).$$

It follows that

$$\frac{f_P}{g_P} = \sum a_{mn} E_{n,m}$$

where $a_{mn} = \langle f_P/g_P, E_{n,m}\rangle$. $\Rightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P$

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$.
Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.
From the periodicity properties in the lattice Hilbert space,

$$\frac{f_P}{g_P}(x_1 + n, x_2 + m) = \frac{f_P}{g_P}(x_1, x_2).$$

It follows that

$$\frac{f_P}{g_P} = \sum a_{mn} E_{n,m}$$

where $a_{mn} = \langle f_P/g_P, E_{n,m} \rangle$. $\Rightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Rightarrow f = \sum a_{mn} g^{[m,n]}$.

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$.
Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.
From the periodicity properties in the lattice Hilbert space,

$$\frac{f_P}{g_P}(x_1+n, x_2+m) = \frac{f_P}{g_P}(x_1, x_2).$$

It follows that

$$\frac{f_P}{g_P} = \sum a_{mn} E_{n,m}$$

where $a_{mn} = \langle f_P/g_P, E_{n,m}\rangle$. $\Rightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Rightarrow f = \sum a_{mn} g^{[m,n]}$.
Conversely, given $f = \sum a_{mn} g^{[m,n]}$,

Proof

Since $|g_P|^{-1}$ is a bounded nonvanishing function a.e. on $0 \leq x_1, x_2 < 1$.
Hence f_P/g_P is square integrable on this domain.
From the periodicity properties in the lattice Hilbert space,

$$\frac{f_P}{g_P}(x_1+n, x_2+m) = \frac{f_P}{g_P}(x_1, x_2).$$

It follows that

$$\frac{f_P}{g_P} = \sum a_{mn} E_{n,m}$$

where $a_{mn} = \langle f_P/g_P, E_{n,m}\rangle$. $\Rightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Rightarrow f = \sum a_{mn} g^{[m,n]}$.
Conversely, given $f = \sum a_{mn} g^{[m,n]}$,

$$a_{mn} = \langle f_P/g_P, E_{n,m}\rangle.$$

$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]}$

華中科技大學

$$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]} \Leftrightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P$$

華中科技大學

$$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]} \Leftrightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Leftrightarrow f_P \bar{g}_P = \sum (a_{mn} E_{n,m}) |g_P|^2.$$

$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]} \Leftrightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Leftrightarrow f_P \overline{g}_P = \sum (a_{mn} E_{n,m}) |g_P|^2$.

- If g_P is bounded, then $f_P \overline{g}_P(x_1, x_2), |g_P|^2 \in V'$ are periodic functions in x_1 and x_2 with period 1.

华中科技大学

$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]} \Leftrightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Leftrightarrow f_P \overline{g}_P = \sum (a_{mn} E_{n,m}) |g_P|^2$.

- If g_P is bounded, then $f_P \overline{g}_P(x_1, x_2), |g_P|^2 \in V'$ are periodic functions in x_1 and x_2 with period 1.
-

$$f_P \overline{g}_P = \sum b_{mn} E_{n,m}, \ |g_P|^2 = \sum c_{mn} E_{n,m}$$

with

$$\begin{aligned} b_{mn} &= \langle f_P \overline{g}_P, E_{n,m} \rangle = \langle f_P, g_P E_{n,m} \rangle = \langle f, g^{\rangle}, \\ c_{mn} &= \langle g_P \overline{g}_P, E_{n,m} \rangle \langle g, g^{[m,n]} \rangle. \end{aligned}$$

$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]} \Leftrightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Leftrightarrow f_P \bar{g}_P = \sum (a_{mn} E_{n,m}) |g_P|^2$.

- If g_P is bounded, then $f_P \bar{g}_P(x_1, x_2), |g_P|^2 \in V'$ are periodic functions in x_1 and x_2 with period 1.
- $$f_P \bar{g}_P = \sum b_{mn} E_{n,m}, \ |g_P|^2 = \sum c_{mn} E_{n,m}$$

  with

  $$b_{mn} = \langle f_P \bar{g}_P, E_{n,m} \rangle = \langle f_P, g_P E_{n,m} \rangle = \langle f, g^{\rangle},$$
  $$c_{mn} = \langle g_P \bar{g}_P, E_{n,m} \rangle \langle g, g^{[m,n]} \rangle.$$

- $|g_P| \neq 0$. Set c'_{mn} to be the Fourier coefficients of $|g_p|^{-2}$, then $|g_p|^{-2} = \sum c'_{mn} E_{n,m}$.

  $$\frac{f_p \bar{g}_P}{|g_P|^2} = \sum a_{mn} E_{n,m} \Leftrightarrow \sum a_{mn} E_{n,m} = \sum b_{mn} E_{n,m} \sum c'_{mn} E_{n,m}.$$

$f = \sum a_{mn} g^{[m,n]} \Leftrightarrow f_P = \sum a_{mn} E_{n,m} g_P \Leftrightarrow f_P \bar{g}_P = \sum (a_{mn} E_{n,m}) |g_P|^2$.

- If g_P is bounded, then $f_P \bar{g}_P(x_1, x_2), |g_P|^2 \in V'$ are periodic functions in x_1 and x_2 with period 1.
-
$$f_P \bar{g}_P = \sum b_{mn} E_{n,m}, \quad |g_P|^2 = \sum c_{mn} E_{n,m}$$
with
$$b_{mn} = \langle f_P \bar{g}_P, E_{n,m} \rangle = \langle f_P, g_P E_{n,m} \rangle = \langle f, g \rangle,$$
$$c_{mn} = \langle g_P \bar{g}_P, E_{n,m} \rangle \langle g, g^{[m,n]} \rangle.$$

- $|g_P| \neq 0$. Set c'_{mn} to be the Fourier coefficients of $|g_p|^{-2}$, then $|g_p|^{-2} = \sum c'_{mn} E_{n,m}$.
$$\frac{f_p \bar{g}_P}{|g_P|^2} = \sum a_{mn} E_{n,m} \Leftrightarrow \sum a_{mn} E_{n,m} = \sum b_{mn} E_{n,m} \sum c'_{mn} E_{n,m}.$$
- $|g_P|^2 = 0$ at some point.
$$\sum a_{mn} E_{n,m} = \sum b_{mn} E_{n,m} \sum c'_{mn} E_{n,m} \Leftrightarrow b = a * c$$
$$\Leftrightarrow b_{mn} = \sum a_{kl} c_{k'l'}.$$

華中科技大學

作业

1. (This example is known as the *Gabor window*) Consider the case $g = \pi^{-1/4}e^{-t^2/2}$. Please verify the following:
   - Here g is essentially its own Fourier transform, centered about $(t_0, w_0) = (0, 0)$ in phase space.
   - $g^{[x_1,x_2]}(t) = \pi^{-1/4}e^{2\pi i t x_2}e^{-(t+x_1)^2/2}$ is centered about $(-x_1, x_2)$.
2. Show directly that $PP^* = I$ on V'.
3. Verify P^* is the adjoint of P.