第一章 Weierstrass 定理与线性算子逼近

刘海霞

数学与统计学院

2021 年 9 月 14 日

目录

逼近的目的

- 用简单函数来逼近复杂函数。

逼近的目的

- 用简单函数来逼近复杂函数。
- 本章讲述用多项式序列逼近有界闭区间上的连续函数的可行性。

逼近的目的

- 用简单函数来逼近复杂函数。
- 本章讲述用多项式序列逼近有界闭区间上的连续函数的可行性。

设
$C[a,b]$ 是定义在某一闭区间 $[a,b]$ 上的一切连续函数所成的集合
$C_{2\pi}$ 是定义在整个实轴 $(-\infty,\infty)$ 上的以 2π 为周期的连续函数全体所成的整体。

定义

定义

设 f 是 $[0,1]$ 上的函数，$n\in\mathbb{N}$. 称 $[0,1]$ 上的多项式函数

$$B_n^f(x)=B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k$$

为 f 的第 n 个 Bernstein 多项式。

華中科技大學

定义

定义

设 f 是 $[0,1]$ 上的函数，$n \in \mathbb{N}$. 称 $[0,1]$ 上的多项式函数

$$B_n^f(x) = B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k$$

为 f 的第 n 个 Bernstein 多项式。

注意：B_n 为一个映射，它将 $[0,1]$ 上的函数映射为 $[0,1]$ 上的多项式函数。称 B_n 为第 n 个 Bernstein 算子。

引理

若 f,g 为 $[0,1]$ 上的函数，α,β 为常数，I 为 $[0,1]$ 上的恒等映射，则

(1) $B_n(f;x)$ 的次数 $\leq n$;

(2) $B_n(\alpha f+\beta g;x)=\alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x)$;（线性性质）

(3) $B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha I+\beta$.

华中科技大学

引理

若 f,g 为 $[0,1]$ 上的函数，α,β 为常数，I 为 $[0,1]$ 上的恒等映射，则

(1) $B_n(f;x)$ 的次数 $\leq n$;

(2) $B_n(\alpha f+\beta g;x)=\alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x)$;（线性性质）

(3) $B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha I+\beta$.

证明：下证第三个。根据第二条知，$B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha B_n(I;x)+\beta B_n(1;x)$.

华中科技大学

引理

若 f, g 为 $[0,1]$ 上的函数，α, β 为常数，I 为 $[0,1]$ 上的恒等映射，则

(1) $B_n(f;x)$ 的次数 $\leq n$;

(2) $B_n(\alpha f+\beta g;x)=\alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x)$;（线性性质）

(3) $B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha I+\beta$.

证明：下证第三个。根据第二条知，$B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha B_n(I;x)+\beta B_n(1;x)$.

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k=[(1-x)+x]^n=1,\text{这说明}B_n(1)=1.$$

華中科技大學

引理

若 f, g 为 $[0,1]$ 上的函数，α, β 为常数，I 为 $[0,1]$ 上的恒等映射，则

(1) $B_n(f;x)$ 的次数 $\leq n$;

(2) $B_n(\alpha f+\beta g;x)=\alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x)$;（线性性质）

(3) $B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha I+\beta$.

证明：下证第三个。根据第二条知，$B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha B_n(I;x)+\beta B_n(1;x)$.

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k=[(1-x)+x]^n=1,\text{这说明}B_n(1)=1.$$

$$\begin{aligned}B_n(I;x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}x^{k-1}x\\&=x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(1-x)^{n-1-j}x^j=x,\text{这说明}B_n(I)=I.\end{aligned}$$

華中科技大學

引理

若 f,g 为 $[0,1]$ 上的函数，α,β 为常数，I 为 $[0,1]$ 上的恒等映射，则

(1) $B_n(f;x)$ 的次数 $\leq n$;

(2) $B_n(\alpha f+\beta g;x)=\alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x)$;（线性性质）

(3) $B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha I+\beta$.

证明：下证第三个。根据第二条知，$B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha B_n(I;x)+\beta B_n(1;x)$.

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k=[(1-x)+x]^n=1, \text{这说明} B_n(1)=1.$$

$$B_n(I;x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k}{n}\binom{n}{k}(1-x)^{n-k}x^k=\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}(1-x)^{n-1-(k-1)}x^{k-1}x$$

$$=x\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(1-x)^{n-1-j}x^j=x, \text{这说明} B_n(I)=I.$$

从而，$B_n(\alpha I+\beta;x)=\alpha B_n(I;x)+\beta B_n(1;x)=\alpha I+\beta$.

华中科技大学

Weierstrass 第一定理

定理 (Weierstrass)

设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

華中科技大學

Weierstrass 第一定理

定理 (Weierstrass)

设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Weierstrass 第一定理实际上正好解决了如何利用多项式做成的函数项级数来表示连续函数的问题。

华中科技大学

Weierstrass 第一定理

定理 (Weierstrass)

设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Weierstrass 第一定理实际上正好解决了如何利用多项式做成的函数项级数来表示连续函数的问题。
因此任意取定一共单调下降于 0 的数列 δ_n, 则对每个 δ_n 都可以找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x) - f(x)| < \delta_n$.

華中科技大學

Weierstrass 第一定理

定理 (Weierstrass)

设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Weierstrass 第一定理实际上正好解决了如何利用多项式做成的函数项级数来表示连续函数的问题。
因此任意取定一共单调下降于 0 的数列 δ_n, 则对每个 δ_n 都可以找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x) - f(x)| < \delta_n$.
令

$$Q_1(x) = P_1(x),\ Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x),\ n > 1,$$

知级数的前 n 项之和恰好与 $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(x)$ 结合，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$.

华中科技大学

Weierstrass 第一定理

定理 (Weierstrass)

设 $f(x) \in C[a,b]$, 那么对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在这样的多项式 $P(x)$, 使得

$$\max_{a \le x \le b} |P(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Weierstrass 第一定理实际上正好解决了如何利用多项式做成的函数项级数来表示连续函数的问题。

因此任意取定一共单调下降于 0 的数列 δ_n, 则对每个 δ_n 都可以找到一个多项式 $P_n(x)$ 使得 $|P_n(x) - f(x)| < \delta_n$.

令

$$Q_1(x) = P_1(x),\ Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x),\ n > 1,$$

知级数的前 n 项之和恰好与 $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} Q_k(x)$ 结合，因而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$ 一致收敛于 $f(x)$. Bernstein 多项式就是这样的一些多项式。

Bernstein 证法

关于这个著名的定理，现在已有好多个不同的证法，下面介绍 Bernstein 的构造证法。

Bernstein 证法

关于这个著名的定理，现在已有好多个不同的证法，下面介绍 Bernstein 的构造证法。

Bernstein 证法:

- 不妨假定函数的定义区域是 $[a,b]\equiv[0,1]$. 事实上，通过如下的线性代换:

$$t=(b-a)x+a,$$

  就能将 x 的区间 $0\le x\le b$ 变换成 t 的区间 $a\le t\le b$. 同时，显而易见，x 的多项式讲变成 t 的多项式，x 的连续函数将变成 t 的连续函数。

華中科技大學

Bernstein 证法

关于这个著名的定理，现在已有好多个不同的证法，下面介绍 Bernstein 的构造证法。

Bernstein 证法:

- 不妨假定函数的定义区域是 $[a, b] = [0, 1]$. 事实上，通过如下的线性代换:

$$t = (b - a)x + a,$$

  就能将 x 的区间 $0 \leq x \leq b$ 变换成 t 的区间 $a \leq t \leq b$. 同时，显而易见，x 的多项式讲变成 t 的多项式，x 的连续函数将变成 t 的连续函数。
- 因此只需就连续函数类 $C[0, 1]$ 来证明 Weierstrass 定理就行了。

华中科技大学

Bernstein 证法

关于这个著名的定理，现在已有好多个不同的证法，下面介绍 Bernstein 的构造证法。

Bernstein 证法:

- 不妨假定函数的定义区域是 $[a,b]\equiv[0,1]$. 事实上，通过如下的线性代换:

$$t=(b-a)x+a,$$

  就能将 x 的区间 $0\le x\le b$ 变换成 t 的区间 $a\le t\le b$. 同时，显而易见，x 的多项式讲变成 t 的多项式，x 的连续函数将变成 t 的连续函数。
- 因此只需就连续函数类 $C[0,1]$ 来证明 Weierstrass 定理就行了。
- Weierstrass 定理中提及的 $P_n(x)$, 只要取 $B_n^f(x)$ (其中 $n\ge N$) 就可以了。
- 下面我们证明极限关系式

$$\lim_{n\to\infty}B_n^f(x)=f(x).$$

continue...

令 $\lambda_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$f(x) - B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}.$$

continue...

令 $\lambda_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$

$$f(x) - B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}.$$

令

$$\epsilon_n(x) = \max_k \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right|,$$

根据 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的一致连续性，当 k 取所有合乎条件

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \left(\frac{1}{n}\right)^{1/4},$$

必存在一序列 $\epsilon_n > 0$, 使得

$$\epsilon_n(x) < \epsilon_n \downarrow 0 \quad (n \to \infty).$$

华中科技大学

Cont...

注意到

$$f(x)-B_n^f(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}$$

$$=\sum_{|k-nx|<n^{\frac{3}{4}}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}+\sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}.$$

Cont...

注意到

$$f(x) - B_n^f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}$$

$$= \sum_{|k-nx|<n^{\frac{3}{4}}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k} + \sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}} \left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] \lambda_{n,k}.$$

令 $M = \max |f(x)|$, 则

华中科技大学

Cont...

注意到

$$
\begin{aligned}
f(x)-B_n^f(x) &= \sum_{k=0}^{n}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k} \\
&= \sum_{|k-nx|<n^{\frac{3}{4}}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k} + \sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}}\left[f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\lambda_{n,k}.
\end{aligned}
$$

令 $M=\max|f(x)|$, 则

$$
\begin{aligned}
|f(x)-B_n^f(x)| &< \sum_{|k-nx|<n^{\frac{3}{4}}}\epsilon_n\lambda_{n,k}(x)+2M\sum_{|k-nx|\geq n^{3/4}}^{n}\lambda_{n,k} \\
&< \epsilon_n + 2M\sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}}\lambda_{n,k},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Cont...

根据后边引理知，

$$n^{\frac{3}{2}} \sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}} \lambda_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\lambda_{n,k}(x) = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}. \qquad (2)$$

Cont...

根据后边引理知，

$$n^{\frac{3}{2}} \sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}} \lambda_{n,k}(x) \leq \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \lambda_{n,k}(x) = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}. \qquad (2)$$

根据(2)得，

$$\sum_{|k-nx|\geq n^{\frac{3}{4}}} \lambda_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2},$$

从而

$$|f(x) - B_n^f(x)| < \epsilon_n + \frac{M}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{1/2}.$$

上述不等式的右端与 x 无关，而且随着 x 的无限增大而趋近于 0. 这就证明了多项式序列 $B_n^f(x)$ 对于 $f(x)$ 是一致收敛的。

引理

引理

令 $\lambda_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$, 则

$$\sum_{k=0}^{n} (nx-k)^2 \lambda_{n,k} = nx(1-x). \tag{3}$$

证明：这个恒等式是容易验证的。由于

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_{n,k} \equiv [x+(1-x)]^n \equiv 1, \sum_{k=0}^{n} k\lambda_{n,k} = nx,$$

可知

華中科技大學

Cont...

$$
\begin{aligned}
\text{左端} =& \sum_{k=0}^{n} \left(n^2x^2 + k^2 - 2nkx\right) \lambda_{n,k} \\
=& n^2x^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \lambda_{n,k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} k\lambda_{n,k} \\
=& n^2x^2 + \sum_{k=0}^{n} k(k-1)x^k(1-x)^{n-k} + (1-2nx) \sum_{k=0}^{n} k\lambda_{n,k} \\
=& n^2x^2 + n(n-1)x^2 \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} x^{k-2}(1-x)^{n-k} + (1-2nx)nx \\
=& n^2x^2 + n(n-1)x^2 + (1-2nx)nx = \text{右端}.
\end{aligned}
$$

构造性证明

在 Bernstein 的证明中，不仅证明了近似多项式序列 $P_n(x)$ 的存在性，而且还给出了构造 $P_n(x)$ 的一个具体方法。

事实上，$B_n^f(x), n = 1, 2, 3, \cdots$ 构成了连续函数 $f(x), 0 \leq x \leq 1$ 的一个近似多项式序列。

这样的证明通常称之为构造性的证明方法，它要比一般数学上的纯粹存在性的证明方法更具有价值。

Weierstrass 第二定理

周期连续函数（不妨假设周期为 2π）的最简单逼近工具为如下三角多项式。

定义

设

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

如果其中的系数 $a_k, b_k, k \geq 1$ 不全为 0，则称 $T(x)$ 为 n 阶三角多项式。

华中科技大学

Weierstrass 第二定理

周期连续函数（不妨假设周期为 2π）的最简单逼近工具为如下三角多项式。

定义

设

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

如果其中的系数 $a_k, b_k, k \geq 1$ 不全为 0，则称 $T(x)$ 为 n 阶三角多项式。

定理 (Weierstrass 第二定理)

设 $f(x) \in C_{2\pi}$, 则对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在三角多项式 $T(x)$, 使得

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - T(x)| < \epsilon.$$

華中科技大學

第二定理的证明

我们应用 Vallee-Poussin 算子

$$V_n[f;x] = \frac{1}{2\pi}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}dt,$$

其中 $(2n)!! = 2n\cdot(2n-1)\cdots 4\cdot 2$, $(2n-1)!! = (2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1$. 注意到

$$\begin{aligned} I_n =& \int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t-x}{2}dt = 2\int_0^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}dt \\ =&2\int_0^1 (1-v)^n\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}dv = 2\int_0^1 v^{-1/2}(1-v)^{n-1/2}dv \\ =&\frac{2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} = \frac{2\pi(2n-1)!!}{(2n)!!}. \end{aligned}$$

华中科技大学

Cont...

因此

$$f(x)-V_n[f;x]=\frac{1}{I_n}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-f(t)]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}dt.$$

因为 $f(x)\in C_{2\pi}$, 所以 $f(x)$ 一致连续。即，对任意给定的 $\epsilon>0$，存在 $\delta>0$, 使得当 $|x'-x''|<\delta$ 时，

$$|f(x')-f(x'')|<\frac{\epsilon}{2}.$$

记 $M=\max_{-\pi\le x\le\pi}|f(x)|, q=\cos\frac{\delta}{2}<1$, 则

$$\begin{aligned}f(x)-V_n[f;x]=&\frac{1}{I_n}\int_{|t-x|<\delta}[f(x)-f(t)]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}dt\\&+\frac{1}{I_n}\int_{|t-x|\ge\delta}[f(x)-f(t)]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}dt\\\le&\frac{\epsilon}{2}+2M\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}q^{2n}\le\frac{\epsilon}{2}+4M\cdot n\cdot q^{2n}.\end{aligned}$$

因此，存在自然数 N, 当 $n>N$ 时，有 Weierstrass 第二定理成立。

华中科技大学

卷积的定义

设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的两个函数，则他们的卷积定义为:

$$(f * g)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

华中科技大学

卷积的定义

设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的两个函数，则他们的卷积定义为:

$$(f * g)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

例

证明

$$f * g = g * f,\ (f * g) * h = f * (g * h).$$

华中科技大学

卷积的定义

设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的两个函数，则他们的卷积定义为：

$$(f * g)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

例

证明

$$f * g = g * f,\ (f * g) * h = f * (g * h).$$

引理

设 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$，则 $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ 中，且 $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

华中科技大学

卷积的定义

设 f 和 g 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的两个函数，则他们的卷积定义为:

$$(f*g)(x) \triangleq \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy.$$

例

证明

$$f*g=g*f,\ (f*g)*h=f*(g*h).$$

引理

设 $f,g\in L^1(\mathbb{R})$，则 $f*g\in L^1(\mathbb{R})$ 中，且 $\|f*g\|_1\leq\|f\|_1\|g\|_1$.

我们要做的事情: 我们构造一个函数序列 $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 使得当 $n\to\infty$ 时，K_n*f 连续的紧集上一致收敛于 f.

华中科技大学

Dirac 序列（或者称为“好核”）

定义

我们称函数序列 $K_1, K_2, \cdots$ 是一个 **Dirac 序列**, 如果以下条件满足:

(1) (非负性) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $K_n \geq 0$;

华中科技大学

Dirac 序列（或者称为“好核”）

定义

我们称函数序列 $K_1, K_2, \cdots$ 是一个 **Dirac 序列**，如果以下条件满足：

(1) (非负性) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $K_n \geq 0$;

(2) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1.$$

华中科技大学

Dirac 序列（或者称为“好核”）

定义

我们称函数序列 $K_1, K_2, \cdots$ 是一个 **Dirac 序列**, 如果以下条件满足:

(1) (非负性) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$, $K_n \geq 0$;

(2) 对所有的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1.$$

(3) (能量集中性) 对任意的 $\epsilon > 0$ 和 $r > 0$, 存在一个正整数 n_0, 使得对所有的 $n \geq n_0$, 我们有

$$\int_{|x|\geq r} K_n(x)dx < \epsilon.$$

华中科技大学

卷积逼近定理

定理

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界且分段连续函数，$\{K_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ 是一个 *Dirac* 序列。那么序列 $\{K_n * f\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在每一个 f 连续的紧集上一致收敛于 f.

证明：为证明这一定理，我们考虑所有的紧集 S，且 f 在其上连续.

卷积逼近定理

定理

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界且分段连续函数，$\{K_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ 是一个 *Dirac* 序列。那么序列 $\{K_n * f\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在每一个 f 连续的紧集上一致收敛于 f.

证明：为证明这一定理，我们考虑所有的紧集 S，且 f 在其上连续.从而 f 在 S 上一致连续，而且对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在一个 $r > 0$，使得对所有的 $x_1, x_2 \in S$ 及 $|x_1 - x_2| \leq r$，我们有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

华中科技大学

卷积逼近定理

定理

设 f 是 $\mathbb{R}$ 上有界且分段连续函数，$\{K_n\}_{n\in\mathbb{R}}$ 是一个 *Dirac* 序列。那么序列 $\{K_n * f\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在每一个 f 连续的紧集上一致收敛于 f.

证明：为证明这一定理，我们考虑所有的紧集 S，且 f 在其上连续.从而 f 在 S 上一致连续，而且对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在一个 $r > 0$，使得对所有的 $x_1, x_2 \in S$ 及 $|x_1 - x_2| \leq r$，我们有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

对于 $x \in S$，我们计算

$$|K_n * f(x) - f(x)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} K_n(t)(f(x-t) - f(x))dt\right|$$

$$= \int_{|t|\leq r} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt + \int_{|t|\geq r} K_n(t)|f(x-t) - f(x)|dt$$

华中科技大学

逼近定理

根据一致连续性得，

$$\int_{|t|\le r} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \le \int_{\mathbb{R}} K_n(t)\epsilon dt = \epsilon.$$

设 $M \in \mathbb{R}$ 为函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个上界。根据 Dirac 序列的能量集中性知道，

$$\int_{|t|\ge r} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \le 2M\epsilon.$$

华中科技大学

逼近定理

根据一致连续性得，

$$\int_{|t|\le r} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \le \int_{\mathbb{R}} K_n(t)\epsilon dt = \epsilon.$$

设 $M\in\mathbb{R}$ 为函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个上界。根据 Dirac 序列的能量集中性知道，

$$\int_{|t|\ge r} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \le 2M\epsilon.$$

从而，

$$|K_n * f(x) - f(x)| \le \epsilon + 2M\epsilon = (1+2M)\epsilon.$$

华中科技大学

逼近定理

根据一致连续性得，

$$\int_{|t|\le r} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \le \int_{\mathbb{R}} K_n(t)\epsilon dt = \epsilon.$$

设 $M \in \mathbb{R}$ 为函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上的一个上界。根据 Dirac 序列的能量集中性知道，

$$\int_{|t|\ge r} K_n(t)|f(x-t)-f(x)|dt \le 2M\epsilon.$$

从而，

$$|K_n * f(x) - f(x)| \le \epsilon + 2M\epsilon = (1+2M)\epsilon.$$

用卷积逼近来证明 Weierstrass 第一定理。取 Laudau 序列：

$$K_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_n}(1-x^2)^n, & -1 \le x \le 1, \\ 0, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

此处我们可以挑选适合的 c_n 使得 $\int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1.$

线性正算子

设 $\psi(x,t)$ 对集合 E 中每一个 x, 在区间 $a \le t \le b$ 上关于 t 都是连续的，则积分

$$L(f;x) = L(f(x);x) = \int_a^b \psi(x,t) f(t) dt = g(x)$$

对于每个在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 都确定了一个函数 $g(x) = L(f;x)$.

华中科技大学

线性正算子

设 $\psi(x,t)$ 对集合 E 中每一个 x, 在区间 $a \le t \le b$ 上关于 t 都是连续的，则积分

$$L(f;x) = L(f(x);x) = \int_a^b \psi(x,t)f(t)dt = g(x)$$

对于每个在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 都确定了一个函数 $g(x) = L(f;x)$.

定义

设已知函数集 F，如果对于任意的函数 $f(t) \in F$, 存在一个函数 $\psi(x) = H(f;x)$ 与之对应，则称函数集 F 上定义了算子 $H(f;x) = H(f(t);x)$.

华中科技大学

线性正算子

设 $\psi(x,t)$ 对集合 E 中每一个 x, 在区间 $a \le t \le b$ 上关于 t 都是连续的，则积分

$$L(f;x) = L(f(x);x) = \int_a^b \psi(x,t)f(t)dt = g(x)$$

对于每个在区间 $[a,b]$ 上连续的函数 $f(x)$ 都确定了一个函数 $g(x) = L(f;x)$.

定义

设已知函数集 F，如果对于任意的函数 $f(t) \in F$, 存在一个函数 $\psi(x) = H(f;x)$ 与之对应，则称函数集 F 上定义了算子 $H(f;x) = H(f(t);x)$.

定义

称算子 $H(f;x)$ 是线性的，如果随着 $f(t)$ 与 $g(t)$ 属于它的存在域，对任意的实数 a,b, 有 $af(t)+bg(t)$ 也属于它的存在域且如下等式成立：

$$H(af+bg;x) = aH(f;x) + bH(g;x).$$

线性正算子

定义

如果对于每一个正函数 $f(t)$ 和 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 满足 $L(f;x) \geq 0$, 则称 $L(f;x)$ 为集合 E 上的线性正算子。

華中科技大学

线性正算子

定义

如果对于每一个正函数 $f(t)$ 和 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 满足 $L(f;x) \geq 0$, 则称 $L(f;x)$ 为集合 E 上的线性正算子。

显然，对于每一固定的 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 为线性泛函数。

线性正算子

定义

如果对于每一个正函数 $f(t)$ 和 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 满足 $L(f;x) \geq 0$, 则称 $L(f;x)$ 为集合 E 上的线性正算子。

显然，对于每一固定的 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 为线性泛函数。因此，如果对于 $\forall x \in E$, $L(f;x) > 0$，则 $L(f;x)$ 为集合 E 上的正线性算子。

华中科技大学

线性正算子

定义

如果对于每一个正函数 $f(t)$ 和 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 满足 $L(f;x) \geq 0$, 则称 $L(f;x)$ 为集合 E 上的线性正算子。

显然，对于每一固定的 $x \in E$, 线性算子 $L(f;x)$ 为线性泛函数。因此，如果对于 $\forall x \in E$, $L(f;x) > 0$，则 $L(f;x)$ 为集合 E 上的正线性算子。

例

设 $f(t)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的正函数。对于任意的 $x \in E$, $\psi(x;t)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的连续正函数，则算子

$$L(f;x) = \int_a^b \psi(x,t)f(t)dt$$

在集合 E 上是正的，所以，$L(f;x)$ 为 E 上的线性正算子。

线性正算子

- 在线性算子 $L(f;x)$ 中，$L(f;x) = L(f(t);x)$，函数 f 的变量与 x 不同。

华中科技大学

线性正算子

- 在线性算子 $L(f;x)$ 中，$L(f;x)=L(f(t);x)$，函数 f 的变量与 x 不同。在计算算子 $L(f;x)$ 的值时，我们将 x 当作 E 中的常数，因此

$$L(f(x);x)=f(x)L(1;x).$$

线性正算子

- 在线性算子 $L(f;x)$ 中，$L(f;x) = L(f(t);x)$，函数 f 的变量与 x 不同。在计算算子 $L(f;x)$ 的值时，我们将 x 当作 E 中的常数，因此

$$L(f(x);x) = f(x)L(1;x).$$

- 下边我们来研究线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一致收敛于函数 $f(x)$ 的条件。
  - 条件：$f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数，并且在整个实轴上有界。
  - 结论：序列 $L_n(t^k;x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f_k(x) = x^k, k = 0,1,2$ 蕴含序列 $L_n(f;x)$ 一致收敛于 $f(x)$.
  - 下面将以闭区间上的连续函数必一致收敛这个事实为基础引进这一论断的一种证法。

華中科技大學

一致收敛性

引理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 为右连续，在点 a 为左连续，则对 $\forall\delta>0$，有 $\delta>0$，使得当 $|y-x|<\delta, x\in[a,b]$, 有

$$|f(y)-f(x)|<\epsilon.$$

证明：令 $\epsilon'=\frac{\epsilon}{2}>0$. 根据函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一致连续性，存在 $\delta_1>0$，使得当 $x\in[a,b]$ 且 $|y-x|<\delta_1$ 时，有

$$|f(y)-f(x)|<\epsilon'.$$

一致收敛性

引理

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 为右连续，在点 a 为左连续，则对 $\forall\delta>0$，有 $\delta>0$，使得当 $|y-x|<\delta, x\in[a,b]$, 有

$$|f(y)-f(x)|<\epsilon.$$

证明：令 $\epsilon'=\frac{\epsilon}{2}>0$. 根据函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一致连续性，存在 $\delta_1>0$，使得当 $x\in[a,b]$ 且 $|y-x|<\delta_1$ 时，有

$$|f(y)-f(x)|<\epsilon'.$$

由于函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 连续且在 a 点左连续，所以对上述的 $\epsilon'>0$ 存在 $\delta_2>0$, 当 $|y-a|<\delta_2$ 时，有

$$|f(y)-f(a)|<\epsilon'.$$

华中科技大学

Cont...

同理，存在 $\delta_3 > 0$，当 $|y-b| < \delta_3$ 时，有

$$|f(y) - f(b)| < \epsilon'.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$. 当 $x \in [a, b]$ 且 $|y-x| < \delta$ 时，有

$$|f(y) - f(x)| < 2\epsilon' = \epsilon.$$

华中科技大学

线性正算子序列收敛性定理

定理 (Korovkin)

设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足条件:

(1) $L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$.

(2) $L_n(t;x) = x + \beta_n(x)$.

(3) $L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$.

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 设函数 $f(t)$ 有界且在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 右连续，在点 a 左连续。则在区间 $[a,b]$ 上，序列 $L_n(f;x)$ 一致收敛于函数 $f(x)$.

线性正算子序列收敛性定理

定理 (Korovkin)

设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足条件：

(1) $L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$.

(2) $L_n(t;x) = x + \beta_n(x)$.

(3) $L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$.

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 设函数 $f(t)$ 有界且在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 右连续，在点 a 左连续。则在区间 $[a,b]$ 上，序列 $L_n(f;x)$ 一致收敛于函数 $f(x)$.

证明：根据引理 1，对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 当 $x \in [a,b]$ 且 $|t-x| < \delta$ 时，有

$$-\epsilon < f(t) - f(x) < \epsilon. \tag{4}$$

线性正算子序列收敛性定理

定理 (Korovkin)

设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足条件：

(1) $L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$.

(2) $L_n(t;x) = x + \beta_n(x)$.

(3) $L_n(t^2;x) = x^2 + \gamma_n(x)$.

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 设函数 $f(t)$ 有界且在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 右连续，在点 a 左连续。则在区间 $[a,b]$ 上，序列 $L_n(f;x)$ 一致收敛于函数 $f(x)$.

证明：根据引理 1，对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 当 $x \in [a,b]$ 且 $|t-x| < \delta$ 时，有

$$-\epsilon < f(t) - f(x) < \epsilon. \tag{4}$$

下面我们估计对于 $|t-x| \geq \delta$(x 为区间 $[a,b]$ 上的任意一点，且一旦取定就固定好了) 成立时，$f(t) - f(x)$ 的上下界。

Cont...

由于 $f(t)$ 有界，不妨假设 $-M < f(t) < M$. 对所有的 x 和 t 有以下不等式成立：

$$-2M < f(t) - f(x) < 2M. \tag{5}$$

Cont...

由于 $f(t)$ 有界，不妨假设 $-M < f(t) < M$. 对所有的 x 和 t 有以下不等式成立：

$$-2M < f(t) - f(x) < 2M. \tag{5}$$

令 $\Psi(t) = (t-x)^2$，我们有 $\frac{\Psi(t)}{\delta^2} \geq 1$. 根据(4)和(5)得

$$-\epsilon - \frac{2M}{\delta^2}\Psi(t) < f(t) - f(x) < \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}\Psi(t).$$

華中科技大學

Cont...

由于 $f(t)$ 有界，不妨假设 $-M < f(t) < M$. 对所有的 x 和 t 有以下不等式成立：

$$-2M < f(t) - f(x) < 2M. \tag{5}$$

令 $\Psi(t) = (t-x)^2$，我们有 $\frac{\Psi(t)}{\delta^2} \geq 1$. 根据(4)和(5)得

$$-\epsilon - \frac{2M}{\delta^2}\Psi(t) < f(t) - f(x) < \epsilon + \frac{2M}{\delta^2}\Psi(t).$$

根据线性正算子的单调性，

$$L\left(-\epsilon - \frac{2M}{\delta^2}\Psi(t); x\right) < L\left(f(t) - f(x); x\right) < L\left(\epsilon + \frac{2M}{\delta^2}\Psi(t); x\right).$$

再由线性正算子的线性性知，

$$\begin{aligned} &-\epsilon L_n(1;x) - \frac{2M}{\delta^2}L_n(\Psi;x) \leq L_n(f;x) - L_n(f(x);x) \\ =&L_n(f;x) - f(x)L_n(1;x) \leq \epsilon L_n(1;x) + \frac{2M}{\delta^2}L_n(\Psi;x). \end{aligned} \tag{6}$$

華中科技大學

Cont...

注意到

$$
\begin{aligned}
&L_n(\Psi;x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2;x) \\
=&L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) \\
=&x^2 + \gamma_n(x) - 2x(x + \beta_n(x)) + x^2(1 + \alpha_n(x)) \\
=&\gamma_n(x) - 2x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x) = \delta_n(x).
\end{aligned}
$$

華中科技大学

Cont...

注意到

$$
\begin{aligned}
&L_n(\Psi;x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2;x) \\
=&L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) \\
=&x^2 + \gamma_n(x) - 2x(x + \beta_n(x)) + x^2(1 + \alpha_n(x)) \\
=&\gamma_n(x) - 2x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x) = \delta_n(x).
\end{aligned}
$$

根据已知条件知道，$\delta_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 从而 $L_n(\Psi;x)$ 在区间 $[a,b]$ 一致收敛于 0.

華中科技大學

Cont...

注意到

$$
\begin{aligned}
& L_n(\Psi;x) = L_n(t^2 - 2tx + x^2; x) \\
=& L_n(t^2;x) - 2xL_n(t;x) + x^2L_n(1;x) \\
=& x^2 + \gamma_n(x) - 2x(x+\beta_n(x)) + x^2(1+\alpha_n(x)) \\
=& \gamma_n(x) - 2x\beta_n(x) + x^2\alpha_n(x) = \delta_n(x).
\end{aligned}
$$

根据已知条件知道，$\delta_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 从而 $L_n(\Psi;x)$ 在区间 $[a,b]$ 一致收敛于 0.那么，不等式(6)的左端收敛到 $-\epsilon$, 右两端都收敛于 ϵ. 再由 ϵ 的任意性和夹逼准则知，序列

$$
\{L_n(f;x) - f(x)L_n(1;x)\}
$$

在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0。再由定理中的第一个条件可以断言 $L_n(f;x)$ 再区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

华中科技大学

连续周期函数的 Korovkin 定理

定理 (Korovkin)

设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足以下条件：

(1) $L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$.

(2) $L_n(\cos t;x) = \cos x + \beta_n(x)$.

(3) $L_n(\sin t;x) = \sin x + \gamma_n(x)$.

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 又设 $f(t)$ 为周期为 2π 的有界函数，且在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 右连续，在点 a 左连续。则序列 $\{L_n(f;x)\}_n$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

华中科技大学

连续周期函数的 Korovkin 定理

定理 (Korovkin)

设线性正算子序列 $L_n(f;x)$ 满足以下条件：

(1) $L_n(1;x) = 1 + \alpha_n(x)$.

(2) $L_n(\cos t;x) = \cos x + \beta_n(x)$.

(3) $L_n(\sin t;x) = \sin x + \gamma_n(x)$.

其中 $\alpha_n(x), \beta_n(x), \gamma_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0. 又设 $f(t)$ 为周期为 2π 的有界函数，且在区间 $[a,b]$ 上连续，在点 b 右连续，在点 a 左连续。则序列 $\{L_n(f;x)\}_n$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证明：由于 $f(t)$ 有界，不妨假设 $-M < f(t) < M$. 对所有的 x 和 t 有以下不等式成立：

$$-2M < f(t) - f(x) < 2M. \tag{7}$$

根据引理 1，对于任意给定的 $\epsilon > 0$, 当 $\forall x \in [a,b]$ 且 $|t-x| < \delta$ 时，有

$$-\epsilon < f(t) - f(x) < \epsilon. \tag{8}$$

令 $\Psi(x)=\sin^2\frac{t-x}{2}, x\in[a,b], t\in(-\infty,\infty)$。类似于上一个定理的证明，对固定的 $x\in[a,b]$, 有

$$-\epsilon-\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Psi(t)<f(t)-f(x)<\epsilon+\frac{2M}{\sin^2\frac{\delta}{2}}\Psi(t).$$

令 $\lambda_n(x)=L_n(f;x)-f(x)L_n(1;x)$ 从而

$$-\epsilon L_n(1;x)-\frac{2M}{\sin\frac{\delta}{2}}L_n(\Psi;x)\leq\lambda_n(x)\leq\epsilon L_n(1;x)+\frac{2M}{\sin\frac{\delta}{2}}L_n(\Psi;x).$$

注意到 $\Psi(t)=\frac{1}{2}(1-\cos x\cos t-\sin x\sin t)$. 我们有

$$\begin{aligned}
L_n(\Psi;x)=&\frac{1}{2}\{L_n(1;x)-\cos xL_n(\cos t;x)-\sin xL_n(\sin t;x)\}\\
=&\frac{1}{2}\{1+\alpha_n(x)-\cos^2x-\cos x\beta_n(x)-\sin^2x-\sin x\gamma_n^3(x)\}\\
=&\frac{1}{2}\{\alpha_n(x)-\beta_n(x)\cos x-\gamma_n^2(x)\sin x\}\triangleq\delta_n(x).
\end{aligned}$$

根据题意知，$\delta_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 0，从而 $L_n(\Psi;x)$ 在区间 $[a,b]$ 上也一致收敛于 0. 由 ϵ 的任意性知，$\lambda_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 0. 因为

$$L_n(f;x)-f(x)=\lambda_n(x)+f(x)(L_n(1;x)-1)=\lambda_n(x)+f(x)\alpha_n(x),$$

而且根据题意知，$\alpha_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛到 0，从而序列 $L_n(\Psi;x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

注记：如果序列 $L_n(1;x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 1，而序列 $L_n(\Psi;x)$(其中 $\Psi(t)=(t-x)^2$ 或者 $\Psi(t)=\sin^2\frac{t-x}{2}$) 在这个区间上一致收敛于 0，那么这些定理是正确的。

谢谢！