TABLE 1. The cubic families and values $a \in \mathbb{Z}$ for which the Galois group becomes smaller, and $\mathbb{Q}[X]/(f_a(X))$ is not totally real.

$f_a(X)$	Gal	smaller Galois group	not totally real
$X^3 + aX^2 + (-a-3)X + 1$	A_3		
$X^3 + aX^2 + (-a-1)X + 1$	S_3	$-4(A_3), 3(A_3)$	$-3 \leqslant a \leqslant 2$
$X^3 + aX^2 + (-a-1)X - 1$	S_3	$-6(A_3), 1(A_3)$	$-5 \leqslant a \leqslant 0$
$X^3 + aX^2 + (-a+1)X - 1$	S_3	$-5(A_3), 2(A_3)$	$-4 \leqslant a \leqslant 1$

TABLE 2. The quartic families and values $a \in \mathbb{Z}$ for which the polynomial becomes reducible, the Galois group becomes smaller, and $\mathbb{Q}[X]/(f_a(X))$ is not totally real.

$f_a(X)$	Gal	reducible	smaller Galois group	not totally real
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a+1)X + 1$	S_4		$-2(D_4), 3(D_4)$	$-1 \leqslant a \leqslant 2$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a-1)X + 1$	S_4		$-3(D_4), 2(D_4)$	$-2 \leqslant a \leqslant 1$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a+2)X + 1$	S_4		$1(D_4)$	$-2 \leqslant a \leqslant 4$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a-2)X + 1$	S_4		$-1(D_4)$	$-4 \leqslant a \leqslant 2$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a+4)X + 1$	S_4		$-3(D_4), 2(D_4), 7(D_4)$	$-2 \leqslant a \leqslant 6$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a-4)X + 1$	S_4		$-7(D_4), -2(D_4), 3(D_4)$	$-6 \leqslant a \leqslant 2$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a+8)X + 1$	S_4		$-4(C_4), 4(D_4), 12(C_4)$	$-3 \leqslant a \leqslant 11$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a-8)X + 1$	S_4		$-12(C_4), -4(D_4), 4(C_4)$	$-11 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a+16)X + 1$	S_4		$-12(D_4), 0(D_4), 8(D_4), 16(D_4), 28(D_4)$	$-4 \leqslant a \leqslant 20$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 + (-a-16)X + 1$	S_4		$-28(D_4), -16(D_4), -8(D_4), 0(D_4), 12(D_4)$	$-20 \leqslant a \leqslant 4$
$X^4 + aX^3 - X^2 - aX + 1$	D_4	$-2, 2$	$-3(C_4), 0(C_2 \times C_2), 3(C_4)$	$-1 \leqslant a \leqslant 1$
$X^4 + aX^3 - 3X^2 - aX + 1$	D_4	0	$-6(C_2 \times C_2), 6(C_2 \times C_2)$	
$X^4 + aX^3 - aX + 1$	D_4	$-3, 3$	$0(C_2 \times C_2)$	$-2 \leqslant a \leqslant 2$
$X^4 + aX^3 - 4X^2 - aX + 1$	D_4	$-1, 1$	$-4(C_2 \times C_2), 0(C_2 \times C_2), 4(C_2 \times C_2)$	
$X^4 + aX^3 + 2X^2 - aX + 1$	$C_2 \times C_2$	$-5, -4, 0, 4, 5$		$-3 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 - 6X^2 - aX + 1$	C_4	$-3, 0, 3$		
$X^4 + aX^3 + 6X^2 - aX + 1$	D_4	$-9, -6, 6, 9$	$0(C_2 \times C_2)$	$-5 \leqslant a \leqslant 5$
$X^4 + aX^3 - 10X^2 - aX + 1$	D_4	$-7, -2, 2, 7$	$-8(C_2 \times C_2), 0(C_2 \times C_2), 8(C_2 \times C_2)$	
$X^4 + aX^3 + 14X^2 - aX + 1$	D_4	$-17, -10, -8, 8, 10, 17$	$-12(C_4), 0(C_2 \times C_2), 12(C_4)$	$-7 \leqslant a \leqslant 7$
$X^4 + aX^3 - 18X^2 - aX + 1$	D_4	$-15, -6, 0, 6, 15$	$-24(C_2 \times C_2), 24(C_2 \times C_2)$	
$X^4 + aX^3 + (-a+1)X - 1$	S_4		$-3(D_4), -1(D_4), 2(D_4), 4(D_4)$	$-2 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 + (-a-1)X - 1$	S_4		$-4(D_4), -2(D_4), 1(D_4), 3(D_4)$	$-3 \leqslant a \leqslant 2$
$X^4 + aX^3 + (-a+2)X - 1$	S_4	1		$-3 \leqslant a \leqslant 5$
$X^4 + aX^3 + (-a-2)X - 1$	S_4	-1		$-5 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 + (-a+4)X - 1$	D_4	2	$-7(C_2 \times C_2), -4(C_2 \times C_2), 8(C_2 \times C_2), 11(C_2 \times C_2)$	$-3 \leqslant a \leqslant 7$
$X^4 + aX^3 + (-a-4)X - 1$	D_4	-2	$-11(C_2 \times C_2), -8(C_2 \times C_2), 4(C_2 \times C_2), 7(C_2 \times C_2)$	$-7 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 + (-a+8)X - 1$	S_4	4		$-4 \leqslant a \leqslant 12$
$X^4 + aX^3 + (-a-8)X - 1$	S_4	-4		$-12 \leqslant a \leqslant 4$
$X^4 + aX^3 + (-a+16)X - 1$	S_4	8	$-6(D_4), 2(D_4), 14(D_4), 22(D_4)$	$-5 \leqslant a \leqslant 21$
$X^4 + aX^3 + (-a-16)X - 1$	S_4	-8	$-22(D_4), -14(D_4), -2(D_4), 6(D_4)$	$-21 \leqslant a \leqslant 5$
$X^4 + aX^3 + X^2 - aX - 1$	S_4		$-5(D_4), -2(D_4), 0(D_4), 2(D_4), 5(D_4)$	$-3 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 - X^2 - aX - 1$	S_4		$-5(D_4), -2(D_4), 0(D_4), 2(D_4), 5(D_4)$	$-3 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 + 2X^2 - aX - 1$	S_4		$-4(C_4), 0(D_4), 4(C_4)$	$-3 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 - 2X^2 - aX - 1$	S_4		$-4(C_4), 0(D_4), 4(C_4)$	$-3 \leqslant a \leqslant 3$
$X^4 + aX^3 + 4X^2 - aX - 1$	S_4		$-5(D_4), 0(D_4), 5(D_4)$	$-4 \leqslant a \leqslant 4$
$X^4 + aX^3 - 4X^2 - aX - 1$	S_4		$-5(D_4), 0(D_4), 5(D_4)$	$-4 \leqslant a \leqslant 4$
$X^4 + aX^3 + 8X^2 - aX - 1$	S_4		$0(D_4)$	$-6 \leqslant a \leqslant 6$
$X^4 + aX^3 - 8X^2 - aX - 1$	S_4		$0(D_4)$	$-6 \leqslant a \leqslant 6$
$X^4 + aX^3 + 16X^2 - aX - 1$	S_4		$-10(D_4), 0(D_4), 10(D_4)$	$-8 \leqslant a \leqslant 8$
$X^4 + aX^3 - 16X^2 - aX - 1$	S_4		$-10(D_4), 0(D_4), 10(D_4)$	$-8 \leqslant a \leqslant 8$