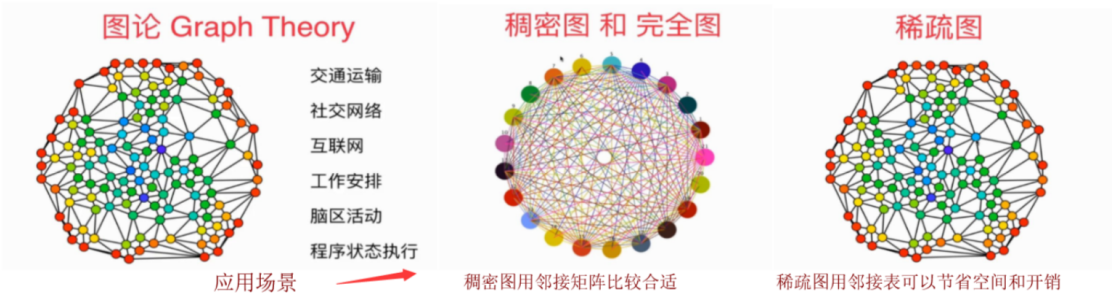
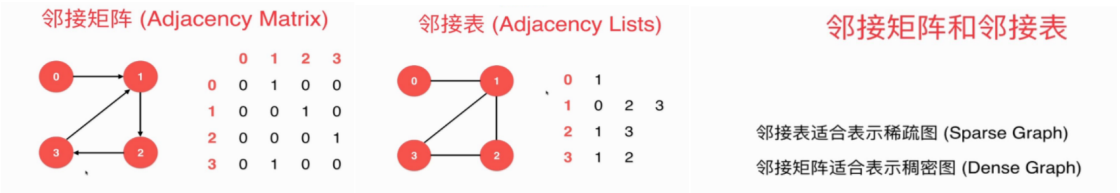
数据结构与算法 16- 图论相关

笔记本: 我的笔记
创建时间: 2020/10/11 11:24 **更新时间:** 2020/10/11 12:32
作者: liuhouer
标签: 算法, 图算法

1.>图论和基础实现





稠密图 - 邻接矩阵

```
import java.util.Vector;


// 稠密图 - 邻接矩阵
public class DenseGraph implements Graph{


    private int n;  // 节点数
    private int m;  // 边数
    private boolean directed;   // 是否为有向图
    private boolean[][] g;      // 图的具体数据


    // 构造函数
    public DenseGraph( int n , boolean directed ){
        assert n >= 0;
        this.n = n;
        this.m = 0;    // 初始化没有任何边
        this.directed = directed;
        // g初始化为n*n的布尔矩阵, 每一个g[i][j]均为false, 表示没有任和边
        // false为boolean型变量的默认值
        g = new boolean[n][n];
    }


    public int V(){ return n;} // 返回节点个数
    public int E(){ return m;} // 返回边的个数


    // 向图中添加一个边
```

```
    public void addEdge( int v , int w ){


        assert v >= 0 && v < n ;
        assert w >= 0 && w < n ;


        if( hasEdge( v , w ) )
            return;


        g[v][w] = true;
        if( !directed )
            g[w][v] = true;


        m ++;
    }


    // 验证图中是否有从v到w的边
    public boolean hasEdge( int v , int w ){
        assert v >= 0 && v < n ;
        assert w >= 0 && w < n ;
        return g[v][w];
    }


    // 显示图的信息
    public void show(){


        for( int i = 0 ; i < n ; i ++ ){
            for( int j = 0 ; j < n ; j ++ )
                System.out.print(g[i][j]+"\t");
            System.out.println();
        }
    }


    // 返回图中一个顶点的所有邻边
    // 由于java使用引用机制，返回一个Vector不会带来额外开销,
    public Iterable<Integer> adj(int v) {
        assert v >= 0 && v < n;
        Vector<Integer> adjV = new Vector<Integer>();
        for(int i = 0 ; i < n ; i ++ )
            if( g[v][i] )
                adjV.add(i);
        return adjV;
    }
}
```

图的接口

```
// 图的接口
public interface Graph {


    public int V();
    public int E();
    public void addEdge( int v , int w );
    boolean hasEdge( int v , int w );
    void show();
    public Iterable<Integer> adj(int v);
}
```

稀疏图 - 邻接表

```
import java.util.Vector;
```

```
// 稀疏图 - 邻接表
public class SparseGraph implements Graph {


    private int n;  // 节点数
    private int m;  // 边数
    private boolean directed;   // 是否为有向图
    private Vector<Integer>[] g; // 图的具体数据


    // 构造函数
    public SparseGraph( int n , boolean directed ){
        assert n >= 0;
        this.n = n;
        this.m = 0;    // 初始化没有任何边
        this.directed = directed;
        // g初始化为n个空的vector, 表示每一个g[i]都为空, 即没有任和边
        g = new Vector[n];
        for(int i = 0 ; i < n ; i ++)
            g[i] = new Vector<Integer>();
    }


    public int V(){ return n;} // 返回节点个数
    public int E(){ return m;} // 返回边的个数


    // 向图中添加一个边
    public void addEdge( int v, int w ){


        assert v >= 0 && v < n ;
        assert w >= 0 && w < n ;


        g[v].add(w);
        if( v != w && !directed )
            g[w].add(v);


        m ++;
    }


    // 验证图中是否有从v到w的边
    public boolean hasEdge( int v , int w ){


        assert v >= 0 && v < n ;
        assert w >= 0 && w < n ;


        for( int i = 0 ; i < g[v].size() ; i ++ )
            if( g[v].elementAt(i) == w )
                return true;
        return false;
    }


    // 显示图的信息
    public void show(){


        for( int i = 0 ; i < n ; i ++ ){
            System.out.print("vertex " + i + ":\t");
            for( int j = 0 ; j < g[i].size() ; j ++ )
                System.out.print(g[i].elementAt(j) + "\t");
            System.out.println();
```

```
        }
    }


    // 返回图中一个顶点的所有邻边
    // 由于java使用引用机制，返回一个Vector不会带来额外开销，
    public Iterable<Integer> adj(int v) {
        assert v >= 0 && v < n;
        return g[v];
    }
}
```

Path

```
import java.util.Vector;
import java.util.Stack;


public class Path {


    private Graph G;   // 图的引用
    private int s;     // 起始点
    private boolean[] visited;  // 记录dfs的过程中节点是否被访问
    private int[] from;         // 记录路径，from[i]表示查找的路径上i的上一个节点


    // 图的深度优先遍历
    private void dfs( int v ){
        visited[v] = true;
        for( int i : G.adj(v) )
            if( !visited[i] ){
                from[i] = v;
                dfs(i);
            }
    }


    // 构造函数，寻路算法，寻找图graph从s点到其他点的路径
    public Path(Graph graph, int s){


        // 算法初始化
        G = graph;
        assert s >= 0 && s < G.V();


        visited = new boolean[G.V()];
        from = new int[G.V()];
        for( int i = 0 ; i < G.V() ; i ++ ){
            visited[i] = false;
            from[i] = -1;
        }
        this.s = s;


        // 寻路算法
        dfs(s);
    }


    // 查询从s点到w点是否有路径
    boolean hasPath(int w){
        assert w >= 0 && w < G.V();
        return visited[w];
    }


    // 查询从s点到w点的路径，存放在vec中
    Vector<Integer> path(int w){
```

```
        assert hasPath(w) ;

        Stack<Integer> s = new Stack<Integer>();
        // 通过from数组逆向查找到从s到w的路径, 存放到栈中
        int p = w;
        while( p != -1 ){
            s.push(p);
            p = from[p];
        }

        // 从栈中依次取出元素, 获得顺序的从s到w的路径
        Vector<Integer> res = new Vector<Integer>();
        while( !s.empty() )
            res.add( s.pop() );

        return res;
    }

    // 打印出从s点到w点的路径
    void showPath(int w){

        assert hasPath(w) ;

        Vector<Integer> vec = path(w);
        for( int i = 0 ; i < vec.size() ; i ++ ){
            System.out.print(vec.elementAt(i));
            if( i == vec.size() - 1 )
                System.out.println();
            else
                System.out.print(" -> ");
        }
    }
}
```

ReadGraph

```
import java.io.BufferedInputStream;
import java.io.File;
import java.io.FileInputStream;
import java.io.IOException;
import java.util.Scanner;
import java.util.Locale;
import java.util.InputMismatchException;
import java.util.NoSuchElementException;


public class ReadGraph {


    private Scanner scanner;


    public ReadGraph(Graph graph, String filename){


        readFile(filename);


        try {
            int V = scanner.nextInt();
            if (V < 0)
```

```
                throw new IllegalArgumentException("number of vertices in a Graph
must be nonnegative");
            assert V == graph.V();


            int E = scanner.nextInt();
            if (E < 0)
                throw new IllegalArgumentException("number of edges in a Graph
must be nonnegative");


            for (int i = 0; i < E; i++) {
                int v = scanner.nextInt();
                int w = scanner.nextInt();
                assert v >= 0 && v < V;
                assert w >= 0 && w < V;
                graph.addEdge(v, w);
            }
        }
        catch (InputMismatchException e) {
            String token = scanner.next();
            throw new InputMismatchException("attempts to read an 'int' value
from input stream, but the next token is \"" + token + "\"");
        }
        catch (NoSuchElementException e) {
            throw new NoSuchElementException("attemps to read an 'int' value from
input stream, but there are no more tokens available");
        }
    }


    private void readFile(String filename){
        assert filename != null;
        try {
            File file = new File(filename);
            if (file.exists()) {
                FileInputStream fis = new FileInputStream(file);
                scanner = new Scanner(new BufferedInputStream(fis), "UTF-8");
                scanner.useLocale(Locale.ENGLISH);
            }
            else
                throw new IllegalArgumentException(filename + " doesn't exist.");
        }
        catch (IOException ioe) {
            throw new IllegalArgumentException("Could not open " + filename,
ioe);
        }
    }
}
```

ShortestPath [广度优先遍历实现最短路径]

```
import java.util.Vector;
import java.util.Stack;
import java.util.LinkedList;
import java.util.Queue;


public class ShortestPath {


    private Graph G;   // 图的引用
    private int s;     // 起始点
    private boolean[] visited;  // 记录dfs的过程中节点是否被访问
    private int[] from;         // 记录路径, from[i]表示查找的路径上i的上一个节点
    private int[] ord;          // 记录路径中节点的次序。ord[i]表示i节点在路径中的次
序。
```

```
// 构造函数，寻路算法，寻找图graph从s点到其他点的路径
public ShortestPath(Graph graph, int s){

    // 算法初始化
    G = graph;
    assert s >= 0 && s < G.V();

    visited = new boolean[G.V()];
    from = new int[G.V()];
    ord = new int[G.V()];
    for( int i = 0 ; i < G.V() ; i ++ ){
        visited[i] = false;
        from[i] = -1;
        ord[i] = -1;
    }
    this.s = s;

    // 无向图最短路径算法，从s开始广度优先遍历整张图
    Queue<Integer> q = new LinkedList<Integer>();

    q.add(s);
    visited[s] = true;
    ord[s] = 0;
    while( !q.isEmpty() ){
        int v = q.remove();
        for( int i : G.adj(v) )
            if( !visited[i] ){
                q.add(i);
                visited[i] = true;
                from[i] = v;
                ord[i] = ord[v] + 1;
            }
    }
}

// 查询从s点到w点是否有路径
public boolean hasPath(int w){
    assert w >= 0 && w < G.V();
    return visited[w];
}

// 查询从s点到w点的路径，存放在vec中
public Vector<Integer> path(int w){

    assert hasPath(w) ;

    Stack<Integer> s = new Stack<Integer>();
    // 通过from数组逆向查找到从s到w的路径，存放到栈中
    int p = w;
    while( p != -1 ){
        s.push(p);
        p = from[p];
    }

    // 从栈中依次取出元素，获得顺序的从s到w的路径
    Vector<Integer> res = new Vector<Integer>();
    while( !s.empty() )
        res.add( s.pop() );
```

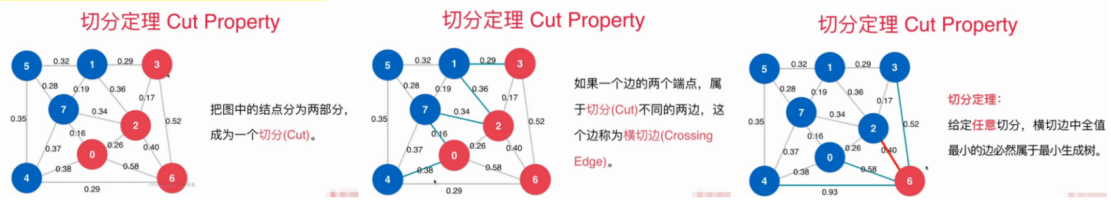
```
        return res;
    }


    // 打印出从s点到w点的路径
    public void showPath(int w){


        assert hasPath(w) ;


        Vector<Integer> vec = path(w);
        for( int i = 0 ; i < vec.size() ; i ++ ){
            System.out.print(vec.elementAt(i));
            if( i == vec.size() - 1 )
                System.out.println();
            else
                System.out.print(" -> ");
        }
    }


    // 查看从s点到w点的最短路径长度
    // 若从s到w不可达，返回-1
    public int length(int w){
        assert w >= 0 && w < G.V();
        return ord[w];
    }
}
```

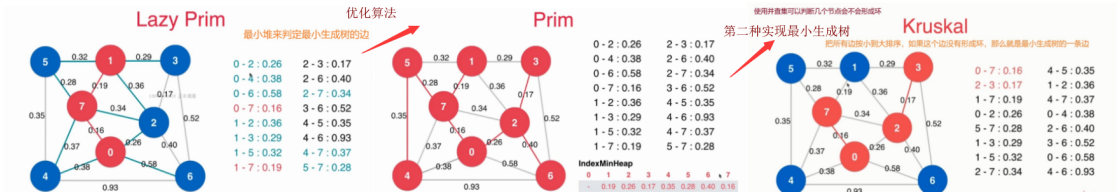
测试无权图最短路径算法

```
public class Main {


    // 测试无权图最短路径算法
    public static void main(String[] args) {


        String filename = "testG.txt";
        SparseGraph g = new SparseGraph(7, false);
        ReadGraph readGraph = new ReadGraph(g, filename);
        g.show();


        // 比较使用深度优先遍历和广度优先遍历获得路径的不同
        // 广度优先遍历获得的是无权图的最短路径
        Path dfs = new Path(g,0);
        System.out.print("DFS : ");
        dfs.showPath(6);


        ShortestPath bfs = new ShortestPath(g,0);
        System.out.print("BFS : ");
        bfs.showPath(6);


        System.out.println();


        filename = "testG1.txt";
        SparseGraph g2 = new SparseGraph(13, false);
        ReadGraph readGraph2 = new ReadGraph(g2, filename);
        g2.show();


        // 比较使用深度优先遍历和广度优先遍历获得路径的不同
        // 广度优先遍历获得的是无权图的最短路径
```

```
        Path dfs2 = new Path(g2,0);
        System.out.print("DFS : ");
        dfs2.showPath(3);


        ShortestPath bfs2 = new ShortestPath(g,0);
        System.out.print("BFS : ");
        bfs.showPath(3);
    }
}
```

2.>最小生成树问题





使用Lazy Prim算法求图的最小生成树

```
import sun.jvm.hotspot.asm.Arithmetic;


import java.util.Vector;


// 使用Prim算法求图的最小生成树
public class LazyPrimMST<Weight extends Number & Comparable> {


    private WeightedGraph<Weight> G;    // 图的引用
    private MinHeap<Edge<Weight>> pq;   // 最小堆，算法辅助数据结构
    private boolean[] marked;           // 标记数组，在算法运行过程中标记节点i是否被
访问
    private Vector<Edge<Weight>> mst;   // 最小生成树所包含的所有边
    private Number mstWeight;           // 最小生成树的权值


    // 构造函数，使用Prim算法求图的最小生成树
    public LazyPrimMST(WeightedGraph<Weight> graph){


        // 算法初始化
        G = graph;
        pq = new MinHeap<Edge<Weight>>(G.E());
        marked = new boolean[G.V()];
        mst = new Vector<Edge<Weight>>();


        // Lazy Prim
        visit(0);
        while( !pq.isEmpty() ){
            // 使用最小堆找出已经访问的边中权值最小的边
            Edge<Weight> e = pq.extractMin();
            // 如果这条边的两端都已经访问过了，则扔掉这条边
            if( marked[e.v()] == marked[e.w()] )
                continue;
```

```
            // 否则，这条边则应该存在在最小生成树中
            mst.add( e );


            // 访问和这条边连接的还没有被访问过的节点
            if( !marked[e.v()] )
                visit( e.v() );
            else
                visit( e.w() );
        }


        // 计算最小生成树的权值


        mstWeight = mst.elementAt(0).wt();
        for( int i = 1 ; i < mst.size() ; i ++ )
            mstWeight = mstWeight.doubleValue() +
mst.elementAt(i).wt().doubleValue();
    }


    // 访问节点v
    private void visit(int v){


        assert !marked[v];
        marked[v] = true;


        // 将和节点v相连接的所有未访问的边放入最小堆中
        for( Edge<Weight> e : G.adj(v) )
            if( !marked[e.other(v)] )
                pq.insert(e);
    }


    // 返回最小生成树的所有边
    Vector<Edge<Weight>> mstEdges(){
        return mst;
    };


    // 返回最小生成树的权值
    Number result(){
        return mstWeight;
    };
}
```

Edge

```
// 边
public class Edge<Weight extends Number & Comparable> implements
Comparable<Edge<Weight>>{


    private int a, b;    // 边的两个端点
    private Weight weight;  // 边的权值


    public Edge(int a, int b, Weight weight)
    {
        this.a = a;
        this.b = b;
        this.weight = weight;
    }


    public Edge(Edge<Weight> e)
```

```
    {
        this.a = e.a;
        this.b = e.b;
        this.weight = e.weight;
    }


    public int v(){ return a;} // 返回第一个顶点
    public int w(){ return b;} // 返回第二个顶点
    public Weight wt(){ return weight;}    // 返回权值


    // 给定一个顶点，返回另一个顶点
    public int other(int x){
        assert x == a || x == b;
        return x == a ? b : a;
    }


    // 输出边的信息
    public String toString(){
        return "" + a + "-" + b + ": " + weight;
    }


    // 边之间的比较
    public int compareTo(Edge<Weight> that)
    {
        if( weight.compareTo(that.wt()) < 0 )
            return -1;
        else if ( weight.compareTo(that.wt()) > 0 )
            return +1;
        else
            return  0;
    }
}
```

最小堆MinHeap

```
import java.util.*;
import java.lang.*;


// 在堆的有关操作中，需要比较堆中元素的大小，所以Item需要extends Comparable
public class MinHeap<Item extends Comparable> {


    protected Item[] data;
    protected int count;
    protected int capacity;


    // 构造函数，构造一个空堆，可容纳capacity个元素
    public MinHeap(int capacity){
        data = (Item[])new Comparable[capacity+1];
        count = 0;
        this.capacity = capacity;
    }


    // 构造函数，通过一个给定数组创建一个最小堆
    // 该构造堆的过程，时间复杂度为O(n)
    public MinHeap(Item arr[]){


        int n = arr.length;


        data = (Item[])new Comparable[n+1];
```

```
        capacity = n;


        for( int i = 0 ; i < n ; i ++ )
            data[i+1] = arr[i];
        count = n;


        for( int i = count/2 ; i >= 1 ; i -- )
            shiftDown(i);
    }


    // 返回堆中的元素个数
    public int size(){
        return count;
    }


    // 返回一个布尔值, 表示堆中是否为空
    public boolean isEmpty(){
        return count == 0;
    }


    // 向最小堆中插入一个新的元素 item
    public void insert(Item item){


        assert count + 1 <= capacity;
        data[count+1] = item;
        count ++;
        shiftUp(count);
    }


    // 从最小堆中取出堆顶元素, 即堆中所存储的最小数据
    public Item extractMin(){
        assert count > 0;
        Item ret = data[1];


        swap( 1 , count );
        count --;
        shiftDown(1);


        return ret;
    }


    // 获取最小堆中的堆顶元素
    public Item getMin(){
        assert( count > 0 );
        return data[1];
    }




    // 交换堆中索引为i和j的两个元素
    private void swap(int i, int j){
        Item t = data[i];
        data[i] = data[j];
        data[j] = t;
    }


    //********************
    //* 最小堆核心辅助函数
```

```
    //********************
    private void shiftUp(int k){

        while( k > 1 && data[k/2].compareTo(data[k]) > 0 ){
            swap(k, k/2);
            k /= 2;
        }
    }

    private void shiftDown(int k){

        while( 2*k <= count ){
            int j = 2*k; // 在此轮循环中,data[k]和data[j]交换位置
            if( j+1 <= count && data[j+1].compareTo(data[j]) < 0 )
                j ++;
            // data[j] 是 data[2*k]和data[2*k+1]中的最小值

            if( data[k].compareTo(data[j]) <= 0 ) break;
            swap(k, j);
            k = j;
        }
    }

    // 测试 MinHeap
    public static void main(String[] args) {

        MinHeap<Integer> minHeap = new MinHeap<Integer>(100);
        int N = 100; // 堆中元素个数
        int M = 100; // 堆中元素取值范围[0, M)
        for( int i = 0 ; i < N ; i ++ )
            minHeap.insert( new Integer((int)(Math.random() * M)) );

        Integer[] arr = new Integer[N];
        // 将minheap中的数据逐渐使用extractMin取出来
        // 取出来的顺序应该是按照从小到大的顺序取出来的
        for( int i = 0 ; i < N ; i ++ ){
            arr[i] = minHeap.extractMin();
            System.out.print(arr[i] + " ");
        }
        System.out.println();

        // 确保arr数组是从小到大排列的
        for( int i = 1 ; i < N ; i ++ )
            assert arr[i-1] <= arr[i];
    }
}
```

通过文件读取有全图的信息

```
import java.io.BufferedInputStream;
import java.io.File;
import java.io.FileInputStream;
import java.io.IOException;
import java.util.Scanner;
import java.util.Locale;
import java.util.InputMismatchException;
import java.util.NoSuchElementException;

// 通过文件读取有全图的信息
public class ReadWeightedGraph {
```

```
    private Scanner scanner;


    // 由于文件格式的限制，我们的文件读取类只能读取权值为Double类型的图
    public ReadWeightedGraph(WeightedGraph<Double> graph, String filename){


        readFile(filename);


        try {
            int V = scanner.nextInt();
            if (V < 0)
                throw new IllegalArgumentException("number of vertices in a Graph
must be nonnegative");
            assert V == graph.V();


            int E = scanner.nextInt();
            if (E < 0)
                throw new IllegalArgumentException("number of edges in a Graph
must be nonnegative");


            for (int i = 0; i < E; i++) {
                int v = scanner.nextInt();
                int w = scanner.nextInt();
                Double weight = scanner.nextDouble();
                assert v >= 0 && v < V;
                assert w >= 0 && w < V;
                graph.addEdge(new Edge<Double>(v, w, weight));
            }
        }
        catch (InputMismatchException e) {
            String token = scanner.next();
            throw new InputMismatchException("attempts to read an 'int' value
from input stream, but the next token is \"" + token + "\"");
        }
        catch (NoSuchElementException e) {
            throw new NoSuchElementException("attemps to read an 'int' value from
input stream, but there are no more tokens available");
        }
    }


    private void readFile(String filename){
        assert filename != null;
        try {
            File file = new File(filename);
            if (file.exists()) {
                FileInputStream fis = new FileInputStream(file);
                scanner = new Scanner(new BufferedInputStream(fis), "UTF-8");
                scanner.useLocale(Locale.ENGLISH);
            }
            else
                throw new IllegalArgumentException(filename + " doesn't exist.");
        }
        catch (IOException ioe) {
            throw new IllegalArgumentException("Could not open " + filename,
ioe);
        }
    }


}
```

带权图接口

```
interface WeightedGraph<Weight extends Number & Comparable> {
    public int V();
    public int E();
    public void addEdge(Edge<Weight> e);
    boolean hasEdge( int v , int w );
    void show();
    public Iterable<Edge<Weight>> adj(int v);
}
```

稀疏图 - 邻接表

```
import java.util.Vector;


// 稀疏图 - 邻接表
public class SparseWeightedGraph<Weight extends Number & Comparable>
        implements WeightedGraph {


    private int n;  // 节点数
    private int m;  // 边数
    private boolean directed;   // 是否为有向图
    private Vector<Edge<Weight>>[] g;   // 图的具体数据


    // 构造函数
    public SparseWeightedGraph( int n , boolean directed ){
        assert n >= 0;
        this.n = n;
        this.m = 0;    // 初始化没有任何边
        this.directed = directed;
        // g初始化为n个空的vector, 表示每一个g[i]都为空, 即没有任和边
        g = new Vector[n];
        for(int i = 0 ; i < n ; i ++)
            g[i] = new Vector<Edge<Weight>>();
    }


    public int V(){ return n;} // 返回节点个数
    public int E(){ return m;} // 返回边的个数


    // 向图中添加一个边, 权值为weight
    public void addEdge(Edge e){


        assert e.v() >= 0 && e.v() < n ;
        assert e.w() >= 0 && e.w() < n ;


        // 注意, 由于在邻接表的情况, 查找是否有重边需要遍历整个链表
        // 我们的程序允许重边的出现


        g[e.v()].add(new Edge(e));
        if( e.v() != e.w() && !directed )
            g[e.w()].add(new Edge(e.w(), e.v(), e.wt()));


        m ++;
    }


    // 验证图中是否有从v到w的边
    public boolean hasEdge( int v , int w ){


        assert v >= 0 && v < n ;
        assert w >= 0 && w < n ;
```

```
        for( int i = 0 ; i < g[v].size() ; i ++ )
            if( g[v].elementAt(i).other(v) == w )
                return true;
        return false;
    }


    // 显示图的信息
    public void show(){


        for( int i = 0 ; i < n ; i ++ ){
            System.out.print("vertex " + i + ":\t");
            for( int j = 0 ; j < g[i].size() ; j ++ ){
                Edge e = g[i].elementAt(j);
                System.out.print( "( to:" + e.other(i) + ",wt:" + e.wt() +
")\t");
            }
            System.out.println();
        }
    }


    // 返回图中一个顶点的所有邻边
    // 由于java使用引用机制，返回一个Vector不会带来额外开销,
    public Iterable<Edge<Weight>> adj(int v) {
        assert v >= 0 && v < n;
        return g[v];
    }
}
```

稠密图 - 邻接矩阵

```
import java.util.Vector;


// 稠密图 - 邻接矩阵
public class DenseWeightedGraph<Weight extends Number & Comparable>
        implements WeightedGraph{


    private int n;  // 节点数
    private int m;  // 边数
    private boolean directed;   // 是否为有向图
    private Edge<Weight>[][] g;         // 图的具体数据


    // 构造函数
    public DenseWeightedGraph( int n , boolean directed ){
        assert n >= 0;
        this.n = n;
        this.m = 0;    // 初始化没有任何边
        this.directed = directed;
        // g初始化为n*n的布尔矩阵，每一个g[i][j]均为null，表示没有任和边
        // false为boolean型变量的默认值
        g = new Edge[n][n];
        for(int i = 0 ; i < n ; i ++)
            for(int j = 0 ; j < n ; j ++)
                g[i][j] = null;
    }


    public int V(){ return n;} // 返回节点个数
    public int E(){ return m;} // 返回边的个数


    // 向图中添加一个边
```

```
    public void addEdge(Edge e){

        assert e.v() >= 0 && e.v() < n ;
        assert e.w() >= 0 && e.w() < n ;

        if( hasEdge( e.v() , e.w() ) )
            return;

        g[e.v()][e.w()] = new Edge(e);
        if( e.v() != e.w() && !directed )
            g[e.w()][e.v()] = new Edge(e.w(), e.v(), e.wt());

        m ++;
    }

    // 验证图中是否有从v到w的边
    public boolean hasEdge( int v , int w ){
        assert v >= 0 && v < n ;
        assert w >= 0 && w < n ;
        return g[v][w] != null;
    }

    // 显示图的信息
    public void show(){

        for( int i = 0 ; i < n ; i ++ ){
            for( int j = 0 ; j < n ; j ++ )
                if( g[i][j] != null )
                    System.out.print(g[i][j].wt()+"\t");
                else
                    System.out.print("NULL\t");
            System.out.println();
        }
    }

    // 返回图中一个顶点的所有邻边
    // 由于java使用引用机制，返回一个Vector不会带来额外开销,
    public Iterable<Edge<Weight>> adj(int v) {
        assert v >= 0 && v < n;
        Vector<Edge<Weight>> adjV = new Vector<Edge<Weight>>();
        for(int i = 0 ; i < n ; i ++ )
            if( g[v][i] != null )
                adjV.add( g[v][i] );
        return adjV;
    }
}
```

测试代码

```
import java.sql.SQLSyntaxErrorException;
import java.util.Vector;

public class Main {

    public static void main(String[] args) {

        String filename = "testG1.txt";
        int V = 8;
```

```
        SparseWeightedGraph<Double> g = new SparseWeightedGraph<Double>(V,
false);
        ReadWeightedGraph readGraph = new ReadWeightedGraph(g, filename);


        // Test Lazy Prim MST
        System.out.println("Test Lazy Prim MST:");
        LazyPrimMST<Double> lazyPrimMST = new LazyPrimMST<Double>(g);
        Vector<Edge<Double>> mst = lazyPrimMST.mstEdges();
        for( int i = 0 ; i < mst.size() ; i ++ )
            System.out.println(mst.elementAt(i));
        System.out.println("The MST weight is: " + lazyPrimMST.result());


        System.out.println();
    }
}
```

2----利用最小索引堆优化lazy prim 之prim实现

```
import java.lang.reflect.Array;
import java.util.*;
import java.lang.*;


// 最小索引堆
public class IndexMinHeap<Item extends Comparable> {


    protected Item[] data;      // 最小索引堆中的数据
    protected int[] indexes;    // 最小索引堆中的索引, indexes[x] = i 表示索引i在x的
位置
    protected int[] reverse;    // 最小索引堆中的反向索引, reverse[i] = x 表示索引i
在x的位置
    protected int count;
    protected int capacity;


    // 构造函数, 构造一个空堆, 可容纳capacity个元素
    public IndexMinHeap(int capacity){
        data = (Item[])new Comparable[capacity+1];
        indexes = new int[capacity+1];
        reverse = new int[capacity+1];
        for( int i = 0 ; i <= capacity ; i ++ )
            reverse[i] = 0;


        count = 0;
        this.capacity = capacity;
    }


    // 返回索引堆中的元素个数
    public int size(){
        return count;
    }


    // 返回一个布尔值, 表示索引堆中是否为空
    public boolean isEmpty(){
        return count == 0;
    }


    // 向最小索引堆中插入一个新的元素, 新元素的索引为i, 元素为item
    // 传入的i对用户而言,是从0索引的
    public void insert(int i, Item item){
```

```
        assert count + 1 <= capacity;
        assert i + 1 >= 1 && i + 1 <= capacity;


        // 再插入一个新元素前,还需要保证索引i所在的位置是没有元素的。
        assert !contain(i);


        i += 1;
        data[i] = item;
        indexes[count+1] = i;
        reverse[i] = count + 1;
        count ++;


        shiftUp(count);
    }


    // 从最小索引堆中取出堆顶元素, 即索引堆中所存储的最小数据
    public Item extractMin(){
        assert count > 0;


        Item ret = data[indexes[1]];
        swapIndexes( 1 , count );
        reverse[indexes[count]] = 0;
        count --;
        shiftDown(1);


        return ret;
    }


    // 从最小索引堆中取出堆顶元素的索引
    public int extractMinIndex(){
        assert count > 0;


        int ret = indexes[1] - 1;
        swapIndexes( 1 , count );
        reverse[indexes[count]] = 0;
        count --;
        shiftDown(1);


        return ret;
    }


    // 获取最小索引堆中的堆顶元素
    public Item getMin(){
        assert count > 0;
        return data[indexes[1]];
    }


    // 获取最小索引堆中的堆顶元素的索引
    public int getMinIndex(){
        assert count > 0;
        return indexes[1]-1;
    }


    // 看索引i所在的位置是否存在元素
    boolean contain( int i ){
        assert  i + 1 >= 1 && i + 1 <= capacity;
```

```
        return reverse[i+1] != 0;
    }


    // 获取最小索引堆中索引为i的元素
    public Item getItem( int i ){
        assert contain(i);
        return data[i+1];
    }


    // 将最小索引堆中索引为i的元素修改为newItem
    public void change( int i , Item newItem ){


        assert contain(i);


        i += 1;
        data[i] = newItem;


        // 有了 reverse 之后,
        // 我们可以非常简单的通过reverse直接定位索引i在indexes中的位置
        shiftUp( reverse[i] );
        shiftDown( reverse[i] );
    }


    // 交换索引堆中的索引i和j
    // 由于有了反向索引reverse数组,
    // indexes数组发生改变以后， 相应的就需要维护reverse数组
    private void swapIndexes(int i, int j){
        int t = indexes[i];
        indexes[i] = indexes[j];
        indexes[j] = t;


        reverse[indexes[i]] = i;
        reverse[indexes[j]] = j;
    }


    //********************
    //* 最小索引堆核心辅助函数
    //********************


    // 索引堆中, 数据之间的比较根据data的大小进行比较, 但实际操作的是索引
    private void shiftUp(int k){


        while( k > 1 && data[indexes[k/2]].compareTo(data[indexes[k]]) > 0 ){
            swapIndexes(k, k/2);
            k /= 2;
        }
    }


    // 索引堆中, 数据之间的比较根据data的大小进行比较, 但实际操作的是索引
    private void shiftDown(int k){


        while( 2*k <= count ){
            int j = 2*k;
            if( j+1 <= count && data[indexes[j+1]].compareTo(data[indexes[j]]) <
0 )
                j ++;
```

```
            if( data[indexes[k]].compareTo(data[indexes[j]]) <= 0 )
                break;

            swapIndexes(k, j);
            k = j;
        }
    }

    // 测试 IndexMinHeap
    public static void main(String[] args) {

        int N = 1000000;
        IndexMinHeap<Integer> indexMinHeap = new IndexMinHeap<Integer>(N);
        for( int i = 0 ; i < N ; i ++ )
            indexMinHeap.insert( i , (int)(Math.random()*N) );

    }
}
```

使用优化的Prim算法求图的最小生成树

```
import java.util.Vector;

// 使用优化的Prim算法求图的最小生成树
public class PrimMST<Weight extends Number & Comparable> {

    private WeightedGraph G;               // 图的引用
    private IndexMinHeap<Weight> ipq;      // 最小索引堆, 算法辅助数据结构
    private Edge<Weight>[] edgeTo;         // 访问的点所对应的边, 算法辅助数据结构
    private boolean[] marked;              // 标记数组, 在算法运行过程中标记节点i是否被访问
    private Vector<Edge<Weight>> mst;      // 最小生成树所包含的所有边
    private Number mstWeight;              // 最小生成树的权值

    // 构造函数, 使用Prim算法求图的最小生成树
    public PrimMST(WeightedGraph graph){

        G = graph;
        assert( graph.E() >= 1 );
        ipq = new IndexMinHeap<Weight>(graph.V());

        // 算法初始化
        marked = new boolean[G.V()];
        edgeTo = new Edge[G.V()];
        for( int i = 0 ; i < G.V() ; i ++ ){
            marked[i] = false;
            edgeTo[i] = null;
        }
        mst = new Vector<Edge<Weight>>();

        // Prim
        visit(0);
        while( !ipq.isEmpty() ){
            // 使用最小索引堆找出已经访问的边中权值最小的边
            // 最小索引堆中存储的是点的索引, 通过点的索引找到相对应的边
            int v = ipq.extractMinIndex();
            assert( edgeTo[v] != null );
            mst.add( edgeTo[v] );
            visit( v );
```

```
        }


        // 计算最小生成树的权值
        mstWeight = mst.elementAt(0).wt();
        for( int i = 1 ; i < mst.size() ; i ++ )
            mstWeight = mstWeight.doubleValue() +
mst.elementAt(i).wt().doubleValue();
    }


    // 访问节点v
    void visit(int v){


        assert !marked[v];
        marked[v] = true;


        // 将和节点v相连接的未访问的另一端点，和与之相连接的边，放入最小堆中
        for( Object item : G.adj(v) ){
            Edge<Weight> e = (Edge<Weight>)item;
            int w = e.other(v);
            // 如果边的另一端点未被访问
            if( !marked[w] ){
                // 如果从没有考虑过这个端点，直接将这个端点和与之相连接的边加入索引堆
                if( edgeTo[w] == null ){
                    edgeTo[w] = e;
                    ipq.insert(w, e.wt());
                }
                // 如果曾经考虑这个端点，但现在的边比之前考虑的边更短，则进行替换
                else if( e.wt().compareTo(edgeTo[w].wt()) < 0 ){
                    edgeTo[w] = e;
                    ipq.change(w, e.wt());
                }
            }
        }


    }


    // 返回最小生成树的所有边
    Vector<Edge<Weight>> mstEdges(){
        return mst;
    }


    // 返回最小生成树的权值
    Number result(){
        return mstWeight;
    }




    // 测试 Prim
    public static void main(String[] args) {


        String filename = "testG1.txt";
        int V = 8;


        SparseWeightedGraph<Double> g = new SparseWeightedGraph<Double>(V,
false);
        ReadWeightedGraph readGraph = new ReadWeightedGraph(g, filename);


        // Test Prim MST
```

```
        System.out.println("Test Prim MST:");
        PrimMST<Double> primMST = new PrimMST<Double>(g);
        Vector<Edge<Double>> mst = primMST.mstEdges();
        for( int i = 0 ; i < mst.size() ; i ++ )
            System.out.println(mst.elementAt(i));
        System.out.println("The MST weight is: " + primMST.result());


        System.out.println();
    }
}
```

3--Kruskal算法求最小生成树

```
import java.util.Vector;


// Kruskal算法求最小生成树
public class KruskalMST<Weight extends Number & Comparable> {


    private Vector<Edge<Weight>> mst;   // 最小生成树所包含的所有边
    private Number mstWeight;           // 最小生成树的权值


    // 构造函数, 使用Kruskal算法计算graph的最小生成树
    public KruskalMST(WeightedGraph graph){


        mst = new Vector<Edge<Weight>>();


        // 将图中的所有边存放到一个最小堆中
        MinHeap<Edge<Weight>> pq = new MinHeap<Edge<Weight>>( graph.E() );
        for( int i = 0 ; i < graph.V() ; i ++ )
            for( Object item : graph.adj(i) ){
                Edge<Weight> e = (Edge<Weight>)item;
                if( e.v() <= e.w() )
                    pq.insert(e);
            }


        // 创建一个并查集, 来查看已经访问的节点的联通情况
        UnionFind uf = new UnionFind(graph.V());
        while( !pq.isEmpty() && mst.size() < graph.V() - 1 ){


            // 从最小堆中依次从小到大取出所有的边
            Edge<Weight> e = pq.extractMin();
            // 如果该边的两个端点是联通的, 说明加入这条边将产生环, 扔掉这条边
            if( uf.isConnected( e.v() , e.w() ) )
                continue;


            // 否则, 将这条边添加进最小生成树, 同时标记边的两个端点联通
            mst.add( e );
            uf.unionElements( e.v() , e.w() );
        }


        // 计算最小生成树的权值
        mstWeight = mst.elementAt(0).wt();
        for( int i = 1 ; i < mst.size() ; i ++ )
            mstWeight = mstWeight.doubleValue() +
mst.elementAt(i).wt().doubleValue();
    }


    // 返回最小生成树的所有边
```

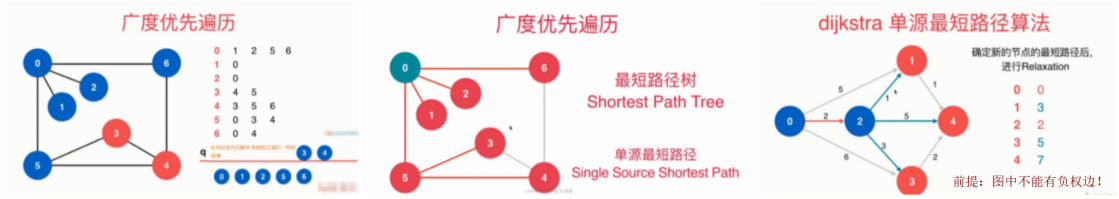
```
    Vector<Edge<Weight>> mstEdges(){
        return mst;
    }


    // 返回最小生成树的权值
    Number result(){
        return mstWeight;
    }




    // 测试 Kruskal
    public static void main(String[] args) {


        String filename = "testG1.txt";
        int V = 8;


        SparseWeightedGraph<Double> g = new SparseWeightedGraph<Double>(V,
false);
        ReadWeightedGraph readGraph = new ReadWeightedGraph(g, filename);


        // Test Kruskal
        System.out.println("Test Kruskal:");
        KruskalMST<Double> kruskalMST = new KruskalMST<Double>(g);
        Vector<Edge<Double>> mst = kruskalMST.mstEdges();
        for( int i = 0 ; i < mst.size() ; i ++ )
            System.out.println(mst.elementAt(i));
        System.out.println("The MST weight is: " + kruskalMST.result());


        System.out.println();
    }
}
```

3--并查集

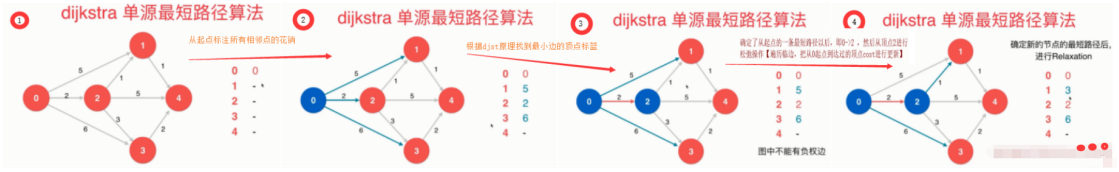
```
// Union-Find
public class UnionFind {


    // rank[i]表示以i为根的集合所表示的树的层数
    // 在后续的代码中，我们并不会维护rank的语意，也就是rank的值在路径压缩的过程中，有可
能不在是树的层数值
    // 这也是我们的rank不叫height或者depth的原因，他只是作为比较的一个标准
    // 关于这个问题，可以参考问答区：
http://coding.imooc.com/learn/questiondetail/7287.html
    private int[] rank;
    private int[] parent; // parent[i]表示第i个元素所指向的父节点
    private int count;    // 数据个数


    // 构造函数
    public UnionFind(int count){
        rank = new int[count];
        parent = new int[count];
        this.count = count;
        // 初始化，每一个parent[i]指向自己，表示每一个元素自己自成一个集合
        for( int i = 0 ; i < count ; i ++ ){
            parent[i] = i;
            rank[i] = 1;
        }
    }
```

```
    // 查找过程, 查找元素p所对应的集合编号
    // O(h)复杂度, h为树的高度
    int find(int p){
        assert( p >= 0 && p < count );


        // path compression 1
        while( p != parent[p] ){
            parent[p] = parent[parent[p]];
            p = parent[p];
        }
        return p;
    }


    // 查看元素p和元素q是否所属一个集合
    // O(h)复杂度, h为树的高度
    boolean isConnected( int p , int q ){
        return find(p) == find(q);
    }


    // 合并元素p和元素q所属的集合
    // O(h)复杂度, h为树的高度
    void unionElements(int p, int q){


        int pRoot = find(p);
        int qRoot = find(q);


        if( pRoot == qRoot )
            return;


        // 根据两个元素所在树的元素个数不同判断合并方向
        // 将元素个数少的集合合并到元素个数多的集合上
        if( rank[pRoot] < rank[qRoot] ){
            parent[pRoot] = qRoot;
        }
        else if( rank[qRoot] < rank[pRoot]){
            parent[qRoot] = pRoot;
        }
        else{ // rank[pRoot] == rank[qRoot]
            parent[pRoot] = qRoot;
            rank[qRoot] += 1;   // 此时, 我维护rank的值
        }
    }
}
```

3>最短路径问题



dijkstra算法剖析



实现Dijkstra算法求最短路径

```
import java.util.Vector;
import java.util.Stack;


// Dijkstra算法求最短路径
public class Dijkstra<Weight extends Number & Comparable> {


    private WeightedGraph G;            // 图的引用
    private int s;                      // 起始点
    private Number[] distTo;            // distTo[i]存储从起始点s到i的最短路径长度
    private boolean[] marked;           // 标记数组，在算法运行过程中标记节点i是否被访
问
    private Edge<Weight>[] from;        // from[i]记录最短路径中，到达i点的边是哪一条
                                        // 可以用来恢复整个最短路径


    // 构造函数，使用Dijkstra算法求最短路径
    public Dijkstra(WeightedGraph graph, int s){


        // 算法初始化
        G = graph;
        assert s >= 0 && s < G.V();
        this.s = s;
        distTo = new Number[G.V()];
        marked = new boolean[G.V()];
        from = new Edge[G.V()];
        for( int i = 0 ; i < G.V() ; i ++ ){
            distTo[i] = 0.0;
            marked[i] = false;
            from[i] = null;
        }


        // 使用索引堆记录当前找到的到达每个顶点的最短距离
        IndexMinHeap<Weight> ipq = new IndexMinHeap<Weight>(G.V());


        // 对于其实点s进行初始化
        distTo[s] = 0.0;
        from[s] = new Edge<Weight>(s, s, (Weight)(Number)(0.0));
```

```
        ipq.insert(s, (Weight)distTo[s] );
        marked[s] = true;
        while( !ipq.isEmpty() ){
            int v = ipq.extractMinIndex();


            // distTo[v]就是s到v的最短距离
            marked[v] = true;


            // 对v的所有相邻节点进行更新
            for( Object item : G.adj(v) ){
                Edge<Weight> e = (Edge<Weight>)item;
                int w = e.other(v);
                // 如果从s点到w点的最短路径还没有找到
                if( !marked[w] ){
                    // 如果w点以前没有访问过,
                    // 或者访问过, 但是通过当前的v点到w点距离更短, 则进行更新
                    if( from[w] == null || distTo[v].doubleValue() +
e.wt().doubleValue() < distTo[w].doubleValue() ){
                        distTo[w] = distTo[v].doubleValue() +
e.wt().doubleValue();
                        from[w] = e;
                        if( ipq.contain(w) )
                            ipq.change(w, (Weight)distTo[w] );
                        else
                            ipq.insert(w, (Weight)distTo[w] );
                    }
                }
            }
        }
    }


    // 返回从s点到w点的最短路径长度
    Number shortestPathTo( int w ){
        assert w >= 0 && w < G.V();
        assert hasPathTo(w);
        return distTo[w];
    }


    // 判断从s点到w点是否联通
    boolean hasPathTo( int w ){
        assert w >= 0 && w < G.V() ;
        return marked[w];
    }


    // 寻找从s到w的最短路径, 将整个路径经过的边存放在vec中
    Vector<Edge<Weight>> shortestPath( int w){


        assert w >= 0 && w < G.V();
        assert hasPathTo(w);


        // 通过from数组逆向查找到从s到w的路径, 存放到栈中
        Stack<Edge<Weight>> s = new Stack<Edge<Weight>>();
        Edge<Weight> e = from[w];
        while( e.v() != this.s ){
            s.push(e);
            e = from[e.v()];
        }
        s.push(e);


        // 从栈中依次取出元素, 获得顺序的从s到w的路径
        Vector<Edge<Weight>> res = new Vector<Edge<Weight>>();
        while( !s.empty() ){
```

```
            e = s.pop();
            res.add( e );
        }


        return res;
    }


    // 打印出从s点到w点的路径
    void showPath(int w){


        assert w >= 0 && w < G.V();
        assert hasPathTo(w);


        Vector<Edge<Weight>> path =  shortestPath(w);
        for( int i = 0 ; i < path.size() ; i ++ ){
            System.out.print( path.elementAt(i).v() + " -> ");
            if( i == path.size()-1 )
                System.out.println(path.elementAt(i).w());
        }
    }
}
```