**第一章 函数与极限**

1、函数的有界性在定义域内有f(x)≥K1则函数f(x)在定义域上有下界，K1为下界；如果有f(x)≤K2，则有上界，K2称为上界。函数f(x)在定义域内有界的充分必要条件是在定义域内既有上界又有下界。

2、数列的极限定理(极限的唯一性)数列{xn}不能同时收敛于两个不同的极限。

定理(收敛数列的有界性)如果数列{xn}收敛，那么数列{xn}一定有界。

如果数列{xn}无界，那么数列{xn}一定发散；但如果数列{xn}有界，却不能断定数列{xn}一定收敛，例如数列1，-1，1，-1，(-1)n+1…该数列有界但是发散，所以数列有界是数列收敛的必要条件而不是充分条件。

定理(收敛数列与其子数列的关系)如果数列{xn}收敛于a，那么它的任一子数列也收敛于a.如果数列{xn}有两个子数列收敛于不同的极限，那么数列{xn}是发散的，如数列1，-1，1，-1，(-1)n+1…中子数列{x2k-1}收敛于1，{xnk}收敛于-1，{xn}却是发散的；同时一个发散的数列的子数列也有可能是收敛的。

3、函数的极限函数极限的定义中0<|x-x0|表示x≠x0，所以x→x0时f(x)有没有极限与f(x)在点x0有没有定义无关。

定理(极限的局部保号性)如果lim(x→x0)时f(x)=A，而且A>0(或A<0)，就存在着点那么x0的某一去心邻域，当x在该邻域内时就有f(x)>0(或f(x)>0)，反之也成立。

函数f(x)当x→x0时极限存在的充分必要条件是左极限右极限各自存在并且相等，即f(x0-0)=f(x0+0)，若不相等则limf(x)不存在。

一般的说，如果lim(x→∞)f(x)=c，则直线y=c是函数y=f(x)的图形水平渐近线。如果lim(x→x0)f(x)=∞，则直线x=x0是函数y=f(x)图形的铅直渐近线。

4、极限运算法则定理有限个无穷小之和也是无穷小；有界函数与无穷小的乘积是无穷小；常数与无穷小的乘积是无穷小；有限个无穷小的乘积也是无穷小；定理如果F1(x)≥F2(x)，而limF1(x)=a，limF2(x)=b，那么a≥b.

5、极限存在准则两个重要极限lim(x→0)(sinx/x)=1；lim(x→∞)(1+1/x)x=1.夹逼准则如果数列{xn}、{yn}、{zn}满足下列条件：yn≤xn≤zn且limyn=a，limzn=a，那么limxn=a，对于函数该准则也成立。

单调有界数列必有极限。

6、函数的连续性设函数y=f(x)在点x0的某一邻域内有定义，如果函数f(x)当x→x0时的极限存在，且等于它在点x0处的函数值f(x0)，即lim(x→x0)f(x)=f(x0)，那么就称函数f(x)在点x0处连续。

不连续情形：1、在点x=x0没有定义；2、虽在x=x0有定义但lim(x→x0)f(x)不存在；3、虽在x=x0有定义且lim(x→x0)f(x)存在，但lim(x→x0)f(x)≠f(x0)时则称函数在x0处不连续或间断。

如果x0是函数f(x)的间断点，但左极限及右极限都存在，则称x0为函数f(x)的第一类间断点(左右极限相等者称可去间断点，不相等者称为跳跃间断点)。非第一类间断点的任何间断点都称为第二类间断点(无穷间断点和震荡间断点)。

定理有限个在某点连续的函数的和、积、商(分母不为0)是个在该点连续的函数。

定理如果函数f(x)在区间Ix上单调增加或减少且连续，那么它的反函数x=f(y)在对应的区间Iy={y|y=f(x)，x∈Ix}上单调增加或减少且连续。反三角函数在他们的定义域内都是连续的。

定理(最大值最小值定理)在闭区间上连续的函数在该区间上一定有最大值和最小值。如果函数在开区间内连续或函数在闭区间上有间断点，那么函数在该区间上就不一定有最大值和最小值。

定理(有界性定理)在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界，即m≤f(x)≤M.定理(零点定理)设函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，且f(a)与f(b)异号(即f(a)×f(b)<0)，那么在开区间(a，b)内至少有函数f(x)的一个零点，即至少有一点ξ(a<ξ<b）。

推论在闭区间上连续的函数必取得介于最大值M与最小值m之间的任何值。

**第二章 导数与微分**

1、导数存在的充分必要条件函数f(x)在点x0处可导的充分必要条件是在点x0处的左极限lim(h→-0)[f(x0+h)-f(x0)]/h及右极限lim(h→+0)[f(x0+h)-f(x0)]/h都存在且相等，即左导数f-′(x0)右导数f+′(x0)存在相等。

2、函数f(x)在点x0处可导=>函数在该点处连续；函数f(x)在点x0处连续≠>在该点可导。即函数在某点连续是函数在该点可导的必要条件而不是充分条件。

3、原函数可导则反函数也可导，且反函数的导数是原函数导数的倒数。

4、函数f(x)在点x0处可微=>函数在该点处可导；函数f(x)在点x0处可微的充分必要条件是函数在该点处可导。

**第三章 中值定理与导数的应用**

1、定理(罗尔定理)如果函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内可导，且在区间端点的函数值相等，即f(a)=f(b)，那么在开区间(a，b)内至少有一点ξ(a<ξ<b），使的函数f（x）在该点的导数等于零：f'（ξ）= 0.

2、定理(拉格朗日中值定理)如果函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内可导，那么在开区间(a，b)内至少有一点ξ(a<ξ<b），使的等式f（b）-f（a）= f'（ξ）（b-a）成立即f'（ξ）= [f（b）-f（a）]/（b-a）。

3、定理(柯西中值定理)如果函数f(x)及F(x)在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内可导，且F'(x)在(a，b)内的每一点处均不为零，那么在开区间(a，b)内至少有一点ξ，使的等式[f(b)-f(a)]/[F(b)-F(a)]=f'(ξ)/F'(ξ)成立。

4、洛必达法则应用条件只能用与未定型诸如0/0、∞/∞、0×∞、∞-∞、00、1∞、∞ 0等形式。

5、函数单调性的判定法设函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内可导，那么：(1)如果在(a，b)内f'(x)>0，那么函数f(x)在[a，b]上单调增加；(2)如果在(a，b)内f’(x)<0，那么函数f(x)在[a，b]上单调减少。

如果函数在定义区间上连续，除去有限个导数不存在的点外导数存在且连续，那么只要用方程f'(x)=0的根及f’(x)不存在的点来划分函数f(x)的定义区间，就能保证f'(x)在各个部分区间内保持固定符号，因而函数f(x)在每个部分区间上单调。

6、函数的极值如果函数f(x)在区间(a，b)内有定义，x0是(a，b)内的一个点，如果存在着点x0的一个去心邻域，对于这去心邻域内的任何点x，f(x)f(x0)均成立，就称f(x0)是函数f(x)的一个极小值。

在函数取得极值处，曲线上的切线是水平的，但曲线上有水平曲线的地方，函数不一定取得极值，即可导函数的极值点必定是它的驻点(导数为0的点)，但函数的驻点却不一定是极值点。

定理(函数取得极值的必要条件)设函数f(x)在x0处可导，且在x0处取得极值，那么函数在x0的导数为零，即f'(x0)=0.定理(函数取得极值的第一种充分条件)设函数f(x)在x0一个邻域内可导，且f’(x0)=0，那么：(1)如果当x取x0左侧临近的值时，f'(x)恒为正；当x去x0右侧临近的值时，f’(x)恒为负，那么函数f(x)在x0处取得极大值；(2)如果当x取x0左侧临近的值时，f'(x)恒为负；当x去x0右侧临近的值时，f’(x)恒为正，那么函数f(x)在x0处取得极小值；(3)如果当x取x0左右两侧临近的值时，f'(x)恒为正或恒为负，那么函数f(x)在x0处没有极值。

定理(函数取得极值的第二种充分条件)设函数f(x)在x0处具有二阶导数且f'(x0)=0，f''(x0)≠0那么：(1)当f''(x0)<0时，函数f(x)在x0处取得极大值；(2)当f''(x0)>0时，函数f(x)在x0处取得极小值；驻点有可能是极值点，不是驻点也有可能是极值点。

7、函数的凹凸性及其判定设f(x)在区间Ix上连续，如果对任意两点x1，x2恒有f[(x1+x2)/2]<[f(x1)+f(x1)]/2，那么称f(x)在区间Ix上图形是凹的；如果恒有f[(x1+x2)/2]>[f(x1)+f(x1)]/2，那么称f(x)在区间Ix上图形是凸的。

定理设函数f(x)在闭区间[a，b]上连续，在开区间(a，b)内具有一阶和二阶导数，那么(1)若在(a，b)内f'’(x)>0，则f(x)在闭区间[a，b]上的图形是凹的；(2)若在(a，b)内f'’(x)<0，则f(x)在闭区间[a，b]上的图形是凸的。

判断曲线拐点(凹凸分界点)的步骤(1)求出f'’(x)；(2)令f'’(x)=0，解出这方程在区间(a，b)内的实根；(3)对于(2)中解出的每一个实根x0，检查f'’(x)在x0左右两侧邻近的符号，如果f'’(x)在x0左右两侧邻近分别保持一定的符号，那么当两侧的符号相反时，点(x0，f(x0))是拐点，当两侧的符号相同时，点(x0，f(x0))不是拐点。

在做函数图形的时候，如果函数有间断点或导数不存在的点，这些点也要作为分点。

**第四章 不定积分**

1、原函数存在定理定理如果函数f(x)在区间I上连续，那么在区间I上存在可导函数F(x)，使对任一x∈I都有F'(x)=f(x)；简单的说连续函数一定有原函数。

分部积分发如果被积函数是幂函数和正余弦或幂函数和指数函数的乘积，就可以考虑用分部积分法，并设幂函数和指数函数为u，这样用一次分部积分法就可以使幂函数的幂降低一次。如果被积函数是幂函数和对数函数或幂函数和反三角函数的乘积，就可设对数和反三角函数为u.

2、对于初等函数来说，在其定义区间上，它的原函数一定存在，但原函数不一定都是初等函数。

**第五章 定积分**

1、定积分解决的典型问题(1)曲边梯形的面积(2)变速直线运动的路程

2、函数可积的充分条件定理设f(x)在区间[a，b]上连续，则f(x)在区间[a，b]上可积，即连续=>可积。

定理设f(x)在区间[a，b]上有界，且只有有限个间断点，则f(x)在区间[a，b]上可积。

3、定积分的若干重要性质性质如果在区间[a，b]上f(x)≥0则∫abf(x)dx≥0.推论如果在区间[a，b]上f(x)≤g(x)则∫abf(x)dx≤∫abg(x)dx.推论|∫abf(x)dx|≤∫ab|f(x)|dx.性质设M及m分别是函数f(x)在区间[a，b]上的最大值和最小值，则m(b-a)≤∫abf(x)dx≤M(b-a)，该性质说明由被积函数在积分区间上的最大值及最小值可以估计积分值的大致范围。

性质(定积分中值定理)如果函数f(x)在区间[a，b]上连续，则在积分区间[a，b]上至少存在一个点ξ，使下式成立：∫abf(x)dx=f(ξ)(b-a)。

4、关于广义积分设函数f(x)在区间[a，b]上除点c(a<c<b）外连续，而在点c的邻域内无界，如果两个广义积分∫acf（x）dx与∫cbf（x）dx都收敛，则定义∫abf（x）dx=∫acf（x）dx+∫cbf（x）dx，否则（只要其中一个发散）就称广义积分∫abf（x）dx发散。

**第六章 定积分的应用**

求平面图形的面积(曲线围成的面积)

直角坐标系下(含参数与不含参数)

极坐标系下(r，θ，x=rcosθ，y=rsinθ)(扇形面积公式S=R2θ/2)

旋转体体积(由连续曲线、直线及坐标轴所围成的面积绕坐标轴旋转而成)(且体积V=∫abπ[f(x)]2dx，其中f(x)指曲线的方程)

平行截面面积为已知的立体体积(V=∫abA(x)dx，其中A(x)为截面面积)

功、水压力、引力

函数的平均值(平均值y=1/(b-a)\*∫abf(x)dx)

**第七章 多元函数微分法及其应用**

1、多元函数极限存在的条件极限存在是指P(x，y)以任何方式趋于P0(x0，y0)时，函数都无限接近于A，如果P(x，y)以某一特殊方式，例如沿着一条定直线或定曲线趋于P0(x0，y0)时，即使函数无限接近某一确定值，我们还不能由此断定函数极限存在。反过来，如果当P(x，y)以不同方式趋于P0(x0，y0)时，函数趋于不同的值，那么就可以断定这函数的极限不存在。例如函数：f(x，y)={0(xy)/(x^2+y^2)x^2+y^2≠0

2、多元函数的连续性定义设函数f(x，y)在开区域(或闭区域)D内有定义，P0(x0，y0)是D的内点或边界点且P0∈D，如果lim(x→x0，y→y0)f(x，y)=f(x0，y0)则称f(x，y)在点P0(x0，y0)连续。

性质(最大值和最小值定理)在有界闭区域D上的多元连续函数，在D上一定有最大值和最小值。

性质(介值定理)在有界闭区域D上的多元连续函数，如果在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两个值之间的任何值至少一次。

3、多元函数的连续与可导如果一元函数在某点具有导数，则它在该点必定连续，但对于多元函数来说，即使各偏导数在某点都存在，也不能保证函数在该点连续。这是因为各偏导数存在只能保证点P沿着平行于坐标轴的方向趋于P0时，函数值f(P)趋于f(P0)，但不能保证点P按任何方式趋于P0时，函数值f(P)都趋于f(P0)。

4、多元函数可微的必要条件一元函数在某点的导数存在是微分存在的充分必要条件，但多元函数各偏导数存在只是全微分存在的必要条件而不是充分条件，即可微=>可偏导。

5、多元函数可微的充分条件定理(充分条件)如果函数z=f(x，y)的偏导数存在且在点(x，y)连续，则函数在该点可微分。

6.多元函数极值存在的必要、充分条件定理(必要条件)设函数z=f(x，y)在点(x0，y0)具有偏导数，且在点(x0，y0)处有极值，则它在该点的偏导数必为零。

定理(充分条件)设函数z=f(x，y)在点(x0，y0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又fx(x0，y0)=0，fy(x0，y0)=0，令fxx(x0，y0)=0=A，fxy(x0，y0)=B，fyy(x0，y0)=C，则f(x，y)在点(x0，y0)处是否取得极值的条件如下：(1)AC-B2>0时具有极值，且当A<0时有极大值，当A>0时有极小值；(2)AC-B2<0时没有极值；(3)AC-B2=0时可能有也可能没有。

7、多元函数极值存在的解法(1)解方程组fx(x，y)=0，fy(x，y)=0求的一切实数解，即可求得一切驻点。

(2)对于每一个驻点(x0，y0)，求出二阶偏导数的值A、B、C.(3)定出AC-B2的符号，按充分条件进行判定f(x0，y0)是否是极大值、极小值。

注意：在考虑函数的极值问题时，除了考虑函数的驻点外，如果有偏导数不存在的点，那么对这些点也应当考虑在内。

**第八章 二重积分**

1、二重积分的一些应用曲顶柱体的体积曲面的面积(A=∫∫√[1+f2x(x，y)+f2y(x，y)]dσ)

平面薄片的质量平面薄片的重心坐标(x=1/A∫∫xdσ，y=1/A∫∫ydσ；其中A=∫∫dσ为闭区域D的面积。

平面薄片的转动惯量(Ix=∫∫y2ρ(x，y)dσ，Iy=∫∫x2ρ(x，y)dσ；其中ρ(x，y)为在点(x，y)处的密度。

平面薄片对质点的引力(FxFyFz)

2、二重积分存在的条件当f(x，y)在闭区域D上连续时，极限存在，故函数f(x，y)在D上的二重积分必定存在。

3、二重积分的一些重要性质性质如果在D上，f(x，y)≤ψ(x，y)，则有不等式∫∫f(x，y)dxdy≤∫∫ψ(x，y)dxdy，特殊地由于-|f(x，y)|≤f(x，y)≤|f(x，y)|又有不等式|∫∫f(x，y)dxdy|≤∫∫|f(x，y)|dxdy.性质设M，m分别是f(x，y)在闭区域D上的最大值和最小值，σ是D的面积，则有mσ≤∫∫f(x，y)dσ≤Mσ。

性质(二重积分的中值定理)设函数f(x，y)在闭区域D上连续，σ是D的面积，则在D上至少存在一点(ξ，η)使得下式成立：∫∫f(x，y)dσ=f(ξ，η)\*σ4、二重积分中标量在直角与极坐标系中的转换把二重积分从直角坐标系换为极坐标系，只要把被积函数中的x，y分别换成ycosθ、rsinθ，并把直角坐标系中的面积元素dxd