

## 第2章 基于近似流形概率路线图的 机器人受约束轨迹规划

在自动化学实验室中，机器人通常需要保持特定的末端执行器位姿，这可以是等式或不等式约束，操作密集摆放的化学仪器。这本质上是一种在复杂环境中执行受约束的轨迹规划任务。但化学实验特别是高通量实验对于效率的要求较高，因此需要在规划时间尽可能短的同时得到足够高质量的轨迹以缩短操作时间，而现有的轨迹规划方法难以同时满足上述两种要求。为此，本章设计了一种基于近似流形的概率路线图方法，用于解决这种复杂场景中受等式或不等式约束的轨迹规划问题。首先，使用无向图对约束流形进行近似表示，称为近似图，并根据设定的约束条件离线构造该近似图。之后，在近似图的基础上根据具体场景使用渐进最优轨迹规划方法得到路线图。最后，使用路线图进行在线轨迹规划。此外，在仿真与实际的化学仪器操作任务中，将本章提出的方法与一些其他基于采样的轨迹规划方法进行了实验对比，结果表明所提出的方法具有更短的规划时间，并且能够提高轨迹质量，保证多次规划所得到轨迹的一致性。

### 2.1 约束流形及其近似表示方法

本节将对约束流形的近似图进行定义，并阐述如何根据任务约束离线构造该近似图，以及在构造近似图时不同参数的含义和影响。

#### 2.1.1 约束流形及其近似图的定义

考虑  $n$  维位形空间  $A$ ，以及由一系列等式约束  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$  定义的  $k$  维位形空间  $X \subset A$ ：

$$X = \{x \in A | F(x) = 0\}, \quad (2.1)$$

其中， $n > k > 0$ ， $X$  是位形空间  $A$  的一个约束流形。在约束流形上的某一点  $x$  处的切空间的一组正交基  $\Phi_x$  可以表示为：

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} J(x) \\ \Phi^T \end{bmatrix}, \Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

其中， $J(x)$  是约束函数  $F$  在  $x$  处的雅克比矩阵， $I$  是  $k \times k$  的单位阵。

令  $O$  是流形  $X$  中的障碍区域，则可行区域  $C$  表示为：

$$C = X \setminus O. \quad (2.3)$$

轨迹规划任务首先就是在可行区域  $C$  中找到一条连接起始位形  $x_s$  和目标位形  $x_g$  的随时间变化的路径  $\gamma(t) : [0, 1] \rightarrow [x_s, x_g]$ 。然而，对约束流形  $X$  进行显示表达是非常困难的，因此我们使用无向图的形式对约束流形进行近似表示，称之为近似图。

如图2.1所示，给定约束  $F$  后，我们利用无向图  $G$  对整个约束流形  $X$  进行近似表示，称之为近似图，定义如下：

$$G = (V, E), \quad (2.4)$$

其中， $V$  是近似图中顶点的集合，该集合中的每一个顶点都对应于一个满足约束  $F$  的位形。 $E$  是近似图中边的集合，边是用于连接不同顶点的可行路径，跨越任意一条边都不会离开约束流形。在本章所提出的方法中，约束流形的近似图需要进行离线构造和在线规划两个阶段，前者将为后者提供基础。

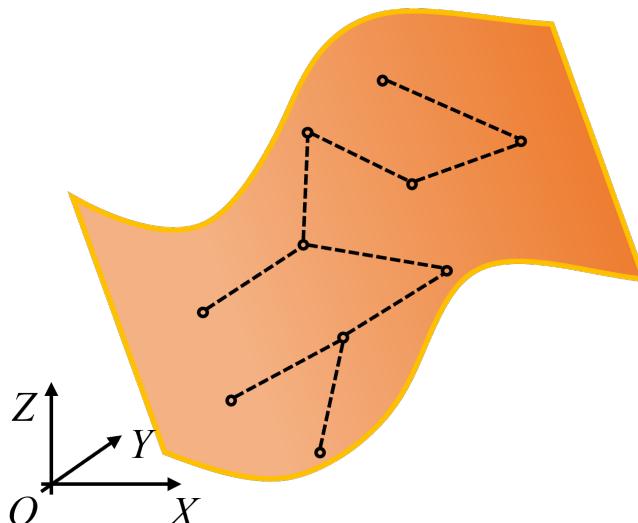


图 2.1 利用无向图对约束流形进行近似表示

### 2.1.2 近似图的离线构造

近似图的离线构造主要分为两个部分，第一部分是根据给定的任务约束得到足够数量的位形，即点集  $V$ ，另一部分则是在得到点集  $V$  后对内部的点进行连接得到边集  $E$ 。

点集的构造需要在约束流形  $X$  上得到足够数量的位形，并且这些位形的分布需要足够均匀，以保证能够较好的覆盖整个约束流形。构造过程主要包含位形投影和差异性验证两个步骤。

**位形投影：**为得到满足约束的位形，首先需要在整个位形空间  $A$  中进行随机均匀采样得到初始位形  $x_0$ ，之后利用 Newton-Raphson 方法将位形  $x_0$  投影到

约束流形  $X$  上，该投影方法可以表示为：

$$x_{i+1} = x_i - J(x_i)^+ F(x_i), i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

其中， $x_i$  是第  $i$  次迭代后得到的位形， $J(x_i)^+$  是约束方程  $F$  在  $x_i$  处的雅克比矩阵伪逆。当  $\|F(x_i)\|$  小于一个小量时，则可以认为当前位形  $x_i$  位于约束流形  $X$  上。

差异性验证：得到满足约束的位形  $x_i$  后，需要将其和点集  $V$  中的位形  $x_j$  进行差异性验证，以保证  $x_i$  对于点集  $V$  是有效的。若  $x_i$  和  $x_j$  之间的差异过小则认为二者太过接近，需要舍弃当前位形  $x_i$  并重新进行上述的位形投影步骤；反之则认为位形  $x_i$  有效，可以将其加入到点集  $V$  中。本章中的差异性指标如图2.2所示，具体表示为：

$$\|x_j - x_i - \Phi_i u_j^i\| > \epsilon, \quad (2.6)$$

$$\|\Phi_i^T \Phi_j\| < \cos(\alpha), \quad (2.7)$$

$$\|u_j^i\| > \rho, \quad (2.8)$$

其中， $\Phi_i$  和  $\Phi_j$  分别是约束流形在  $x_i$  处的切空间  $T_x M_i$  和在  $x_j$  处切空间  $T_x M_j$  的一组满足式(2.2)的基， $u_j^i \in R^k$  则可以通过切空间  $T_x M_i$  处的对数映射得到：

$$u_j^i = \Phi_i^T (x_j - x_i). \quad (2.9)$$

具体地，不等式(2.6)通过计算  $x_j$  到切空间  $T_x M_i$  的距离，对位形  $x_i$  和  $x_j$  之间的距离做出了限制，如果距离小于等于  $\epsilon$  则认为  $x_i$  和  $x_j$  不存在明显差异。不等式(2.7)则对切空间  $T_x M_i$  和  $T_x M_j$  的相似度做出了限制，如果二者的基的内积大于等于  $\cos(\alpha)$ ，则同样认为  $x_i$  为无效位形。不等式(2.8)则要求  $x_j$  处于切空间  $T_x M_i$  的最大半径  $\rho$  的外部。只有同时满足不等式(2.6)-(2.8)，才会将  $x_i$  加入到点集  $V$  中。

重复上述步骤，直至点集  $V$  中的位形达到指定数量，就完成了点集  $V$  的构造。

在得到点集  $V$  后，就可以尝试对其中的位形进行连接以生成边集  $E$ ，其构造过程主要包含最近邻查找和连接验证两个步骤。

最近邻查找：在流形上应该使用测地线长度作为两个位形之间的距离度量，但是测地线长度的计算十分困难，因此我们使用欧氏距离进行代替。实际上，如图2.3所示，当点集  $V$  中的位形能够对流形进行较好的覆盖时，欧氏距离是测地线距离的一个较好近似。因此，我们使用欧氏距离来查找位形  $x_k$  的最近邻位形  $x_n$ 。此外如图2.4所示，任意两个位形  $x_i$  和  $x_j$  之间的距离计算方法表示为：

$$D_{ij} = \sum_{k=i}^{j-1} d_{k,k+1}, \quad (2.10)$$

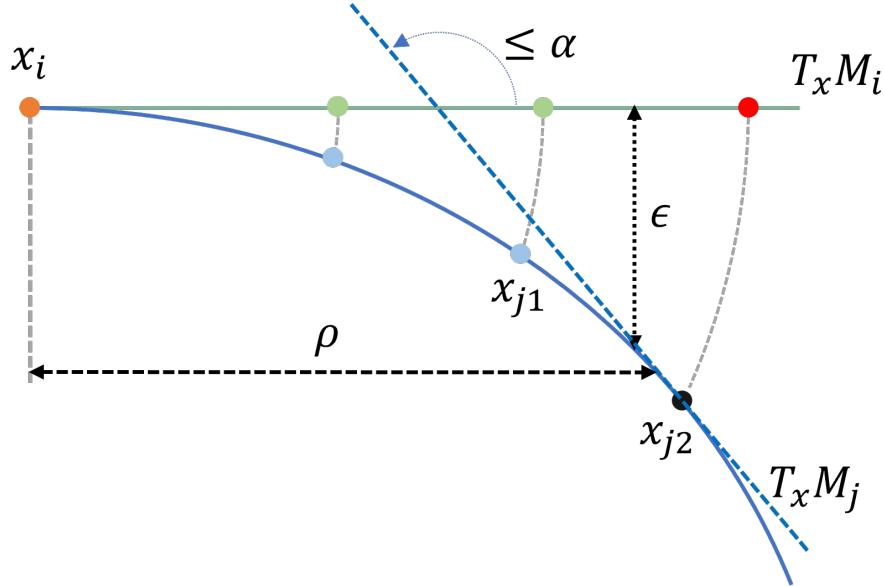


图 2.2 约束流形上的位形  $x_i$  和  $x_j$  的差异度指标，可以看出  $x_i$  对于  $x_{j1}$  为无效位形，对于  $x_{j2}$  则为有效位形

其中， $d_{k,k+1}$  表示位形  $x_k$  和其最近邻位形  $x_{k+1}$  的欧氏距离。

连接验证：得到最近邻位形  $x_n$  后，我们使用直线将位形  $x_k$  和其最近邻位形  $x_n$  进行连接，记为  $e(x_k, x_n)$ ，并判断该连接  $e(x_k, x_n)$  是否离开约束流形  $X$ 。判断方法如图2.5所示，首先对直线进行等距采样，得到若干个构形  $l = 1, 2, \dots, N, N \in R$  并进行如下判断：

$$\|F(x_l)\| \leq \zeta, \quad (2.11)$$

其中， $\zeta$  为一个小量。只有当所有采样位形  $x_l$  都满足式(2.11)时，才认为位形  $x_k$  和  $x_n$  之间的连接  $e(x_k, x_n)$  有效，将其加入到边集  $E$  中。

重复上述步骤，直至位形  $x_k$  的连接达到指定数量或点集  $V$  中的所有位形都已尝试进行过连接。对于  $V$  中的每一个位形都进行该操作，得到边集  $E$ 。

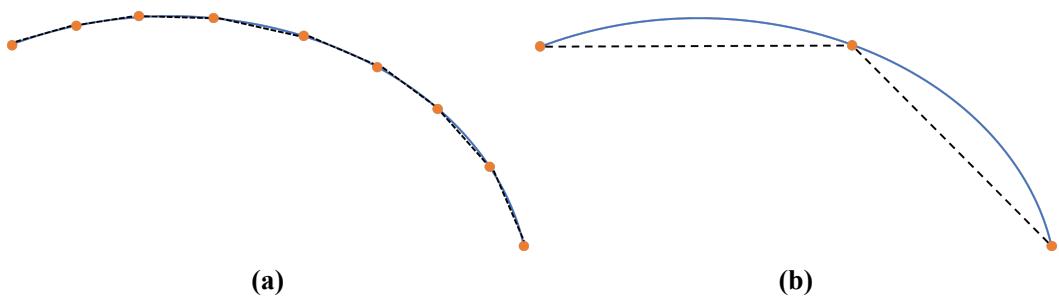
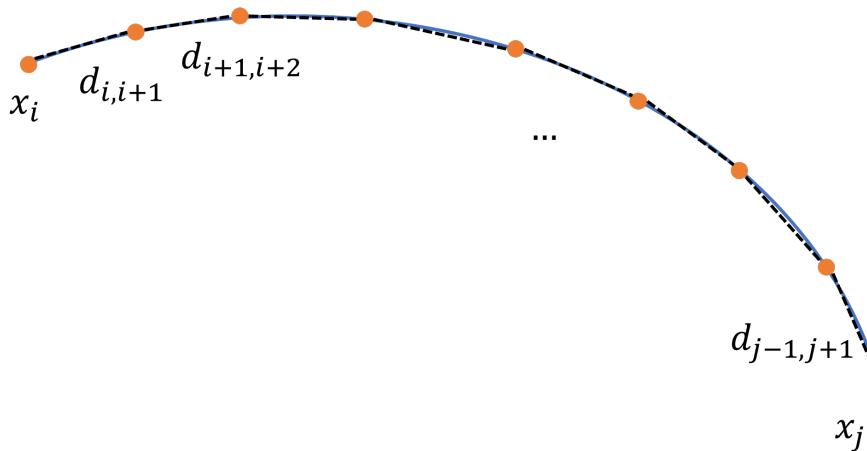
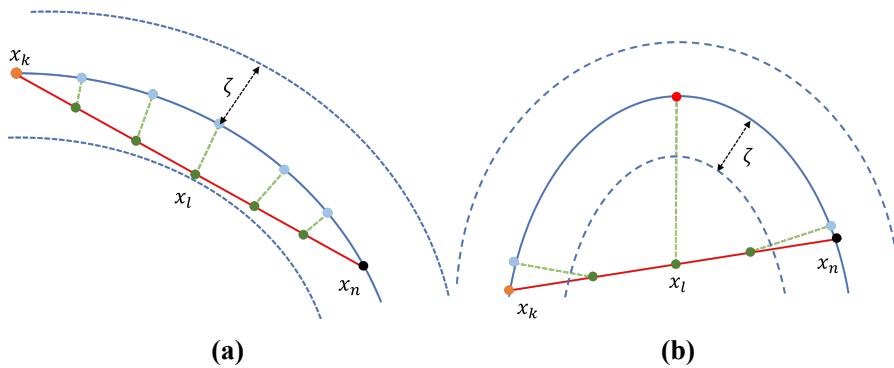


图 2.3 不同情况下欧氏距离与测地线距离的近似程度 (a) 点集  $V$  能够对流形进行较好覆盖，欧氏距离和测地线距离较为接近 (b) 点集  $V$  无法对流形进行较好覆盖，欧氏距离和测地线距离差异很大

图 2.4 位形  $x_i$  和  $x_j$  之间的距离度量方式图 2.5 连接  $e(x_k, x_n)$  是否位于约束流形上的判断指标 (a) 采样位形  $x_l$  都位于约束流形上, 连接有效 (b) 存在部分采样位形  $x_l$  不在约束流形上, 连接无效

### 2.1.3 近似图的采样方法

大部分基于采样的轨迹规划方法均使用均匀随机采样和近邻随机采样两种方法。下面将对如何在近似图上实现这两种采样方法进行说明。

均匀随机采样需要在位形空间中等概率地采样到任意一个位形，对应到约束流形的近似图中，则需要在近似图的点集中进行采样。由于点集中的位形数量为  $n_c$ ，因此可以用均匀随机采样一个整数  $i \in [0, n_c - 1]$  的方法来实现均匀随机采样，采样得到的位形即为近似图中第  $i$  个索引位置处的位形。相比于在约束流形  $V$  上采样得到一个满足约束的位形，该方法只需要生成一个随机数，因此速度更快。

近邻随机采样需要在给定位形  $x$  的距离  $d$  内进行采样。根据位形  $x$  是否属于点集  $V$ ，分为以下两种情况。

当  $x \in V$  并且  $V_n \neq \emptyset$  时，可采样位形的集合  $V_n$  表示如下：

$$V_n = \{x_n | x_n \in V, e(x, x_n) \in E, \|x_n - x\| \leq d\}, \quad (2.12)$$

其中， $e(x, x_n) \in E$  表示给定位形  $x$  和位形  $x_n$  存在有效连接， $V_n$  是与给定位形  $x$  所连接并且距离小于等于  $d$  的位形  $x_n$  的集合。

当  $x \notin V$  或  $V_n = \emptyset$  时，则会在以位形  $x$  为圆心， $d$  为半径的球内进行均匀随机采样，并将采样得到的位形利用式(2.5)得到满足约束的位形作为采样位形。

#### 2.1.4 近似图的参数

近似图的参数会对其构造和使用产生较大的影响，因此需要根据约束的严格程度，约束的类型和具体的操作场景来调整参数的数值，以得到最佳的效果。这里将对一些参数进行分析。

**位形数量  $n_c$ ：**该参数决定了点集  $V$  的位形数量，对近似图的离线构造和在线规划有很大的影响。数值越小，则对约束流形的近似越粗糙，近似图的构造速度会较快，占用内存也较小，但可能会导致在线规划时无法采样到无碰撞的满足任务约束的位形或相邻位形之间距离过大导致局部规划时产生碰撞，从而增加在线规划所需的时间，甚至导致规划失败；反之，则表示对约束流形的近似越精细，能够提高在线轨迹规划的成功率，但过大会显著增加近似图的构造时间和其占用的内存。该数值的取值高度依赖于约束类型，约束的严格程度和具体的规划场景。一般来说，对于越严格的约束和越复杂的规划场景，位形数量  $n_c$  的取值应该越大。

**每个位形所连接的边的数量  $n_e$ ：**该参数决定了每个位形可以和最多几个其他位形相连接，将该数值设为 0 则不会进行连接。对于规划场景中的狭窄区域或者较为粗糙的近似图中，对不同位形进行提前连接是非常有用的，可以避免大量失败的局部规划。然而，在位形之间添加边会增加近似图的构建时间以及额外的内存占用。

直接使用近似图在复杂场景中进行轨迹规划，仍需要大量时间进行碰撞检测和处理。因此，我们在近似流形的基础上使用概率路线图方法以减少碰撞检测和处理的次数从而实现高效地避障轨迹规划。

## 2.2 基于近似流形的概率路线图

本节将对基于近似流形的概率路线图方法进行说明，该方法能够在满足约束条件的同时减少轨迹规划时碰撞检测的次数，从而提升轨迹规划的成功率和速度，并保证每次规划得到的轨迹基本一致。

### 2.2.1 总体框架

所提出的基于近似流形的概率路线图方法总体框架如图2.6所示，包括约束流形近似，最优路线图生成和在线轨迹规划三个阶段。首先需要根据操作任务的要求设定约束，并使用无向图对约束流形进行近似表示，记为近似图，从而避免轨迹规划时进行位形投影；之后在重建的场景和生成的近似图中使用渐进最优轨迹规划方法生成包含最优轨迹的路线图，降低后续在线规划时碰撞检测的代价；最后，根据路线图和重建场景进行在线轨迹规划得到满足约束的无碰撞轨迹，计算速度和加速度后将轨迹发送至操作臂对化学仪器进行操作。

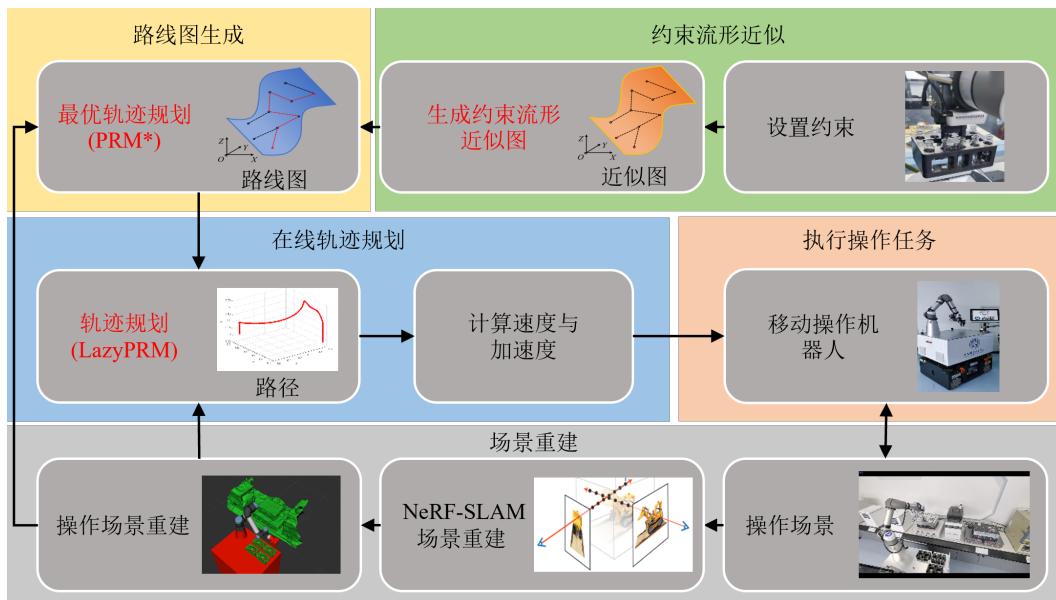


图 2.6 基于近似流形的概率路线图方法的总体框架

### 2.2.2 近似图的离线生成

给定任务约束  $F$ ，位形数量  $n_c$  和每个位形所能够连接的边的数量  $n_e$  后，使用2.1.2节的方法对近似图进行构造。

点集  $V$  的构造方法如算法2.1所示，首先在整个位形空间  $A$  中进行采样，若采样位形不满足给定的任务约束则利用式(2.5)将其投影到约束流形上，之后利用式

边集  $E$  的构造方法如算法2.2所示，首先找到当前位形  $v$  的最近邻位形  $v_n$  并进行连接，之后利用式(2.11)对连接进行判断，若连接有效则将其加入到边集  $E$  中。(2.6)-(2.8)对位形进行差异性验证，若位形有效则将其加入到点集  $V$  中。

**算法 2.1 生成点集**


---

```

1 输入:  $F$ : 任务约束;  $n_c$ : 位形数量 输出:  $V$ : 近似图中的点集
2 # 初始化
3  $V \leftarrow EmptyVertexSet();$ 
4 # 构造点集
5 while  $n_c > VerticesCount(V)$  do
6   # 进行位形采样
7    $v \leftarrow Sample();$ 
8   # 将位形  $v$  投影到流形  $X$  上
9    $v \leftarrow ProjectSample(v, F);$ 
10  # 将位形  $v$  加入点集  $V$  中
11   $AddVertex(v, V);$ 
12 end
13 return  $V$ ;

```

---

**算法 2.2 生成边集**


---

```

1 输入:  $F$ : 任务约束;  $V$ : 点集;  $n_e$ : 位形数量 输出:  $E$ : 近似图中的点集
2 # 初始化
3  $E \leftarrow EmptyEdgeSet();$ 
4 # 构造边集
5 forall  $v \in V$  do
6   while  $n_e > EdgesCount(v)$  do
7     # 采样得到最近邻位形
8      $v_n \leftarrow GetNearestNeighbor(v, V);$ 
9     # 如果连接有效, 则加入到边集  $E$  中
10    if  $ValidEdge(v, v_n)$  then
11       $AddEdge(v, v_n);$ 
12    end
13  end
14 end
15 return  $E$ ;

```

---

### 2.2.3 场景重建

在路线图的离线生成和在线轨迹规划阶段中, 第一步涉及到操作场景的重建。移动操作机器人通过安装在机械臂末端的深度相机, 收集周围环境的 RGB-D 流以及相应的摄像头内外参数。随后, 利用基于神经辐射场 (NeRF) 的同时定位与建图 (SLAM) 方法对周围操作环境进行重建。

在离线阶段, PRM\* 根据重建的场景和近似图进行轨迹规划。其中, 重建的场景用于进行碰撞检测, 而近似图提供满足约束的构形。在在线阶段, 每次移动到化学仪器附近后, 移动操作机器人都会使用上述方法对当前环境进行重建以进行碰撞检测。一旦获取到重建的场景, LazyPRM 就会利用路线图进行规划并获得可行轨迹。

### 2.2.4 路线图的离线生成

为了能够在复杂场景中获得一条高质量的轨迹, 并在后续的在线规划过程中保证该轨迹基本一致, 我们在近似图的基础上使用 PRM\*<sup>[94]</sup>方法, 根据重建

出的实际操作场景构造出包含最优轨迹的路线图。PRM\* 在近似图上的算法流程如算法2.3所示。首先，根据前述的均匀采样方法，在近似图  $G$  中随机得到构型  $v$ 。若该构型是无碰撞的，则在路线图  $M$  中找到  $k$  个最近邻，其中， $k = 2e \log(n)$ ， $e$  为自然常数， $n$  为迭代次数。之后尝试对  $v$  和最近邻进行连接并加入到路线图  $M$  中。直到规划时间达到上限或轨迹代价得到收敛，返回生成的路线图。

然而，PRM\* 获得一条高质量的轨迹往往需要花费较长的时间。因此，我们给予 PRM\* 足够时间来离线生成包含高质量轨迹的路线图，为后续在线轨迹规划提供基础。值得注意的是，路线图的离线生成只需要进行一次。只要操作环境的不发生变化或变化较小，这正是无人自动化学实验室中的特点，就不需要重新生成路线图。

---

### 算法 2.3 生成路线图

---

```

1 输入:  $G$ : 近似图;  $T$ : 终止条件 输出:  $M$ : 路线图
2 # 初始化
3  $k_{PRM^*} \leftarrow 2e;$ 
4  $n \leftarrow 0;$ 
5  $M \leftarrow EmptyRoadmap();$ 
6 # 生成路线图
7 while  $T$  is not satisfied do
8    $n \leftarrow n + 1;$ 
9   # 在  $G$  中采样得到构形
10   $v \leftarrow GetVertex(G, randn(0, n_c));$ 
11  if CollisionFree( $v$ ) then
12    # 在  $M$  中找到  $v$  的  $k$  个最近邻
13     $U \leftarrow kNearest(M, v, \sup(k_{PRM^*} \log(n)));$ 
14    forall  $u \in U$  do
15      if ValidEdge( $v, u$ ) then
16        # 将有效边添加到  $M$  中
17        AddEdge( $v, u, M$ );
18      end
19    end
20  end
21 end
22 return  $M$ ;

```

---

## 2.2.5 在线轨迹规划

在化学实验的等复杂场景中，考虑到人为干扰或机器人的移动定位误差等因素，使用 PRM\* 离线生成路线图时的场景与在线规划所处的场景存在一定差异，由于经典 PRM 方法在查询阶段认为路线图中的所有位形与位形之间的连接都是无碰撞的，故直接使用该方法所得到的轨迹可能会与场景发生碰撞，这是无法接受的。但 LazyPRM<sup>[95]</sup> 方法的延迟碰撞检测策略会在找到轨迹后再进行碰撞检测，并且仅会针对轨迹中发生碰撞的部分重新进行规划，这样不仅避免了上述问题，还加快了轨迹规划的速度，保证了每次规划得到的轨迹基本一致。因此，

本章使用 LazyPRM 方法进行在线规划。得到路径后，我们在 Moveit!<sup>[96]</sup> 中使用迭代抛物线时间参数化算法，该算法通过迭代调整路径点之间的时间间隔，以确保速度和加速度都符合机械臂的运动学约束，同时尽可能保持轨迹的平滑性，用于后处理路径以计算速度和加速度。

### 2.2.6 分辨率完备性

大部分基于采样的算法，如 PRM 类和 RRT 类算法都是概率完备的，因此只需证明近似图能够完全覆盖整个约束流形，就可以保证所提出的算法是分辨率完备的。

我们使用 RRT 算法实现流形的近似。令  $X_A$  是  $X$  中的已经被当前近似图  $G$  覆盖的部分，即  $G$  中的所有节点所代表的局部区域  $V_n$  在  $X$  上的投影。 $V_n$  的有效区域  $P_n$  通过不等式(2.6)-(2.8)定义。该区域内的任意一点都可以通过式(2.5)投影到流形  $X$  上。此外，我们通过随机生成一个  $u_r^n \in \mathbb{R}^k$ ，满足  $\|u_r^n\| = \rho_s > \rho$ ，来生成一个新样本  $x_r$  以用于扩展  $x_n \in X_A$  的 RRT 分支。

$$x_r = x_n + \Phi_n u_r^n, \quad (2.13)$$

其中  $\Phi_n$  是约束流形在  $x_n$  处的切空间  $T_{x_n} M_n$  的正交基。该样本处于半径为  $\rho_s$  的  $k$  维球  $B^k(\rho_s)$  的表面。由于不等式(2.6)-(2.8)的限制， $V_n$  的有效体积  $P_n \leq B^k(\rho) < B^k(\rho_s)$ ，即  $x_r$  位于  $X_A$  外部。

RRT 分支想要连接到  $x_r$  必须要穿过  $X_A$  的边界。此时，我们可以使用二分法调整  $u_r^n$  从而将  $x_r$  移动到  $X_A$  的边界上，并将其加入到点集  $V$  中。由于  $x_r$  位于  $X_A$  的边界，因此该点所代表的局部区域  $V_r$  将覆盖  $X_A$  中以前没有的区域并且在  $x_n$  与  $x_r$  之间不会存在空隙。虽然  $V_r$  与  $V_n$  之间存在重叠，但  $X_A$  仍然会随着点的增加而单调增加，最终会覆盖整个流形。

为了减少不必要的重叠，在  $x_r$  移动到  $X_A$  的边界上后，如果  $x_r$  处于  $x_n$  的相邻点所代表的局部区域内，这可以通过不等式(2.6)-(2.8)验证，说明  $x_r$  所处的区域已经被其他点覆盖，抛弃之。该方法可以降低点的数量，加快近似图的生成速度并降低内存占用。

### 2.2.7 渐进近似最优性

首先给出渐进近似最优的定义：

如果一个算法是渐进近似最优的，那么对于任意一个存在解且最优代价为  $c^*$  的路径规划问题，该算法找到一个代价为  $c \leq tc^*, t \geq 1$  的路径的概率随着迭代次数的增加将收敛到 1。

假设在近似图上存在一条连接起点  $x_s$  和目标点  $x_g$  的代价为  $c^*$  的最优路径

为

$$\gamma : [0, c^*] \mapsto X. \quad (2.14)$$

由于近似图能够将流形完全覆盖，因此总是可以在路径  $\gamma$  上找到一系列点  $x_0^* = a, x_1^*, \dots, x_m^* = b, m \in \mathbb{R}$ ，使得每一个点都处于近似图中的点集  $V$  中的无碰撞的点  $x_k$  所代表的局部区域  $V_k$  内，即

$$x_k^* \in V_k. \quad (2.15)$$

如果  $x_k^*$  所处的所有局部区域都是碰撞的，则可以通过加强不等式(2.6) - (2.8)的约束从而提升近似图的分辨率以找到一个无碰撞区域。

令路径上相邻两点之间的代价为  $c(x_k^*, x_{k+1}^*)$ ，满足

$$c(x_k^*, x_{k+1}^*) \geq c_A^*, \quad (2.16)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} c(x_k^*, x_{k+1}^*) = c^*. \quad (2.17)$$

由于  $x_k^*$  处于  $V_k$  内，且  $V_k$  受到不等式(2.8)的限制，故有

$$c(x_k, x_k^*) \leq \rho. \quad (2.18)$$

考虑到局部区域  $V_k$  是线性空间，因此近似图上存在一条由点  $x_k \in V_k, k = 0, \dots, m$  构成的路径，其代价为

$$c = \sum_{k=0}^{m-1} c(x_k, x_{k+1}) \leq \sum_{k=0}^{m-1} [c(x_k, x_k^*) + c(x_k^*, x_{k+1}^*) + c(x_{k+1}, x_{k+1}^*)]. \quad (2.19)$$

综合考虑式(2.17)-(2.19)，可以得到

$$c \leq \sum_{k=0}^{m-1} (\rho + c(x_k^*, x_{k+1}^*) + \rho) = c^* + 2m\rho, \quad (2.20)$$

由于最优路径的代价为  $c^*$ ，且每一段的代价至少为  $c_A^*$ ， $m$  至多为  $\frac{c^*}{c_A^*}$ ，故整条轨迹的代价为

$$c \leq \left(1 + \frac{2\rho}{c_A^*}\right) c^*. \quad (2.21)$$

由于 PRM\* 是渐进最优的，因此在近似图上进行规划时，至少能够找到一条代价小于等于  $c$  的路径。

综上，PRM\* 在近似图上是渐进近似最优的。

### 2.3 机器人的受约束轨迹规划实验

为了验证所提基于近似流形的概率路线图方法的有效性，我们在实际化学实验中完成了化学机器人操作不同化学仪器的实验，并和一些基于采样的轨迹规划方法进行了对比。

化学机器人如图2.7所示，采用全向移动底盘，UR5e机械臂。机械臂末端装配有Intel® RealSense™ D435i相机以及DH-Robotics® PGI140平行二指夹持器。PC配置为主频为3.7GHz的Intel® Core™ i7-10900K CPU和32GB RAM。其最高移动速度为0.5 m/s，操作定位精度0.1 mm，夹持力控制精度为0.08N。机械臂末端受到的姿态约束表示为( $r_x^2 = 0, r_y^2 = 0$ )。其中， $r_x$ 和 $r_y$ 分别表示绕X轴和绕Y轴旋转的角度。该等式约束表示机械臂末端在运动过程中不允许绕X轴或绕Y轴旋转，否则可能会导致试剂发生倾洒。考虑到在化学实验中并不会将试剂瓶装满，并为了提高规划成功率，对上述等式约束进行松弛，因此在实验中使用的是不等式约束，表示为( $r_x^2 \leq 0.01, r_y^2 \leq 0.01$ )。在仿真与实际实验中，我们与多种先进方法进行了对比，包括LazyPRM, PRM\*, LazyPRM\*[<sup>[94]</sup>], RRT\*[<sup>[94]</sup>], BiTRRT(bidirection transition-based RRT)<sup>[97]</sup>, BIT\*(Batch Informed Trees)<sup>[98]</sup>, ABIT\*(Advanced Batch Informed Trees)<sup>[99]</sup>。规划时间和轨迹长度上限分别设定为10s和250cm。渐进最优算法的终止条件为当前最优的5条轨迹与上一次最优的5条轨迹的平均代价差异小于10%或到达规划时间上限。在LazyPRM和PRM算法中，单个节点的近邻最大数量设置为10。每一种规划方法重复进行20次实验。

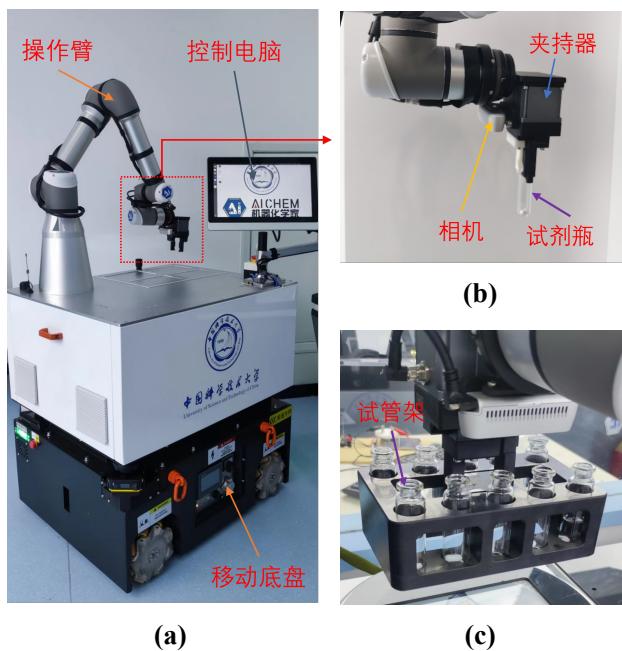


图2.7 用于进行化学实验的移动操作机器人平台 (a) 移动操作机器人与控制PC (b) 夹持有试剂瓶的机械臂末端 (c) 夹持有试管架的机械臂末端

表2.1 不同参数情况下近似图的构造时间和内存占用空间

$n_c/n_e$	构造时间 (s)	内存占用空间 (MB)
$10^3/0$	30.76	0.07
$10^3/1$	30.96	0.15
$10^4/0$	328.25	0.72
$10^4/5$	348.51	7.31
$10^5/0$	3287.00	7.22
$10^5/30$	5750.66	454.36

表2.1展示了近似图位形数量  $n_c$  和每个位形所连接的边的数量  $n_e$  对近似图构建时间和占用空间的影响。可以看出近似图的构建时间和占用空间都随着位形数量线性增加，边的构建时间和占用空间随着位形数量指数增加，这些结果是在预料之中的。

### 2.3.1 仿真实验

我们设置了两个仿真实验场景，分别记为仿真场景1和仿真场景2，如图2.8所示。仿真场景1包含粉末进样器，该仪器用于向试剂瓶内添加一定质量的固体粉末；液体进样器，该仪器用于向试剂瓶内添加一定质量的溶液；紫外光谱检测器，该仪器用于测量试剂瓶内气体的紫外光谱图。机械臂需要夹取放置在试管架中的试剂瓶，在保持试剂瓶竖直的条件下，将其放置到液体进样器的试管放置处（一个圆形凹槽）。仿真场景2则包含液体进样器和液体抽取器，液体抽取器用于抽取试剂瓶中的液体。机械臂需要在保持试管架竖直的条件下，夹取试管架将其放置到液体抽取器的平台上。在仿真实验中，每次规划前会对仪器的位姿添加范围为0-5的均匀分布的误差。此外，还会偶尔在仿真环境中增加试管架和试剂瓶等物体。

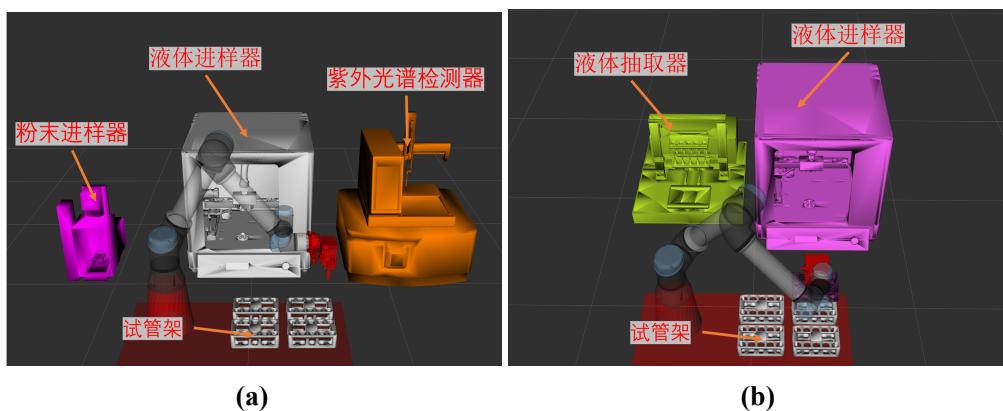


图2.8 所设置的两个仿真场景 (a) 仿真场景1 (b) 仿真场景2

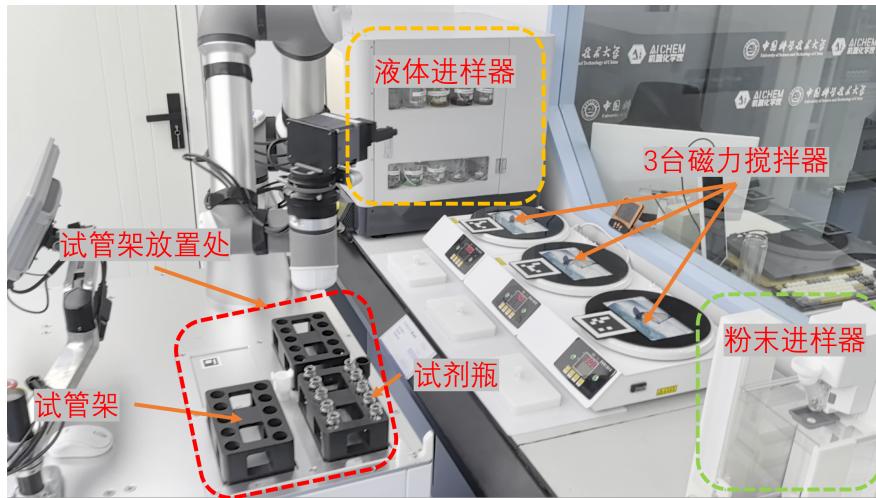


图 2.9 磁力搅拌器操作场景



图 2.10 光催化反应器操作场景

### 2.3.2 实验

实际操作实验所涉及的化学仪器包括磁力搅拌器和光催化反应器。磁力搅拌器是通过产生交变磁场使试剂瓶内的磁子发生运动进而对内部溶剂进行搅拌的仪器，其操作场景如图2.9所示。在化学实验室中并排放置了三台磁力搅拌站，每一台的正中有一个浅凹槽用于放置试管架。化学机器人操作磁力搅拌器的步骤为：在保持试管架竖直的情况下，夹起机器人平台上的试管架并放置到磁力搅拌站的浅凹槽中。光催化反应器是利用不同波长的光照射试剂瓶从而使内部溶液发生反应的仪器，有多个可以将试剂瓶完全插入的孔，其操作场景如图2.10所示。化学机器人操作光催化反应器的步骤为：在保持试剂瓶竖直的情况下，夹起机器人平台上的试剂瓶并插入到光催化反应器的孔中。在自动化化学实验室中，80% 的操作都是对试管架和试剂瓶的操作，因此和两种操作十分典型和重要。上

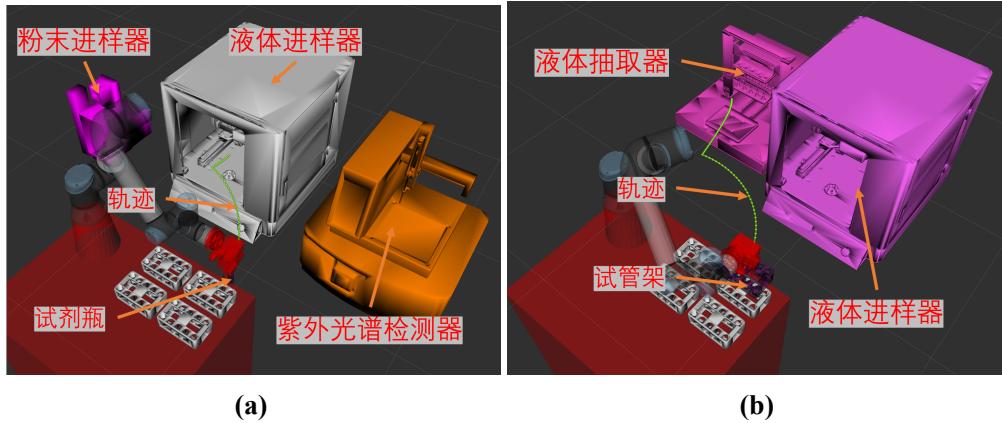


图 2.11 两个仿真场景中得到的轨迹 (a) 仿真场景 1 (b) 仿真场景 2

表 2.2 不同规划方法在仿真场景 1 中的规划成功率, 规划时间, 轨迹长度和轨迹执行时间

规划方法	成功率	规划时间 (ms)	无近似图		成功率	规划时间 (ms)	有近似图	
			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)
PRM			失败		0.8	627±1771	155±59	12.2±4.5
LazyPRM	0.25	8085±4541	64±17	5.3±1.6	0.85	286±244	66±4	5.5±0.8
RRT-Connect	0.85	3232±3014	33±4	4.6±0.1	0.85	128±331	89±152	6.6±5.9
BiTRRT	0.6	2741±2983	67±4	4.3±1.0	1.0	47±22	68±6	5.3±1.8
PRM*	0.25	6425±1493	41±5	5.1±0.7	0.75	5525±209	75±5	4.6±0.4
LazyPRM*	0.7	5632±331	36±8	4.6±0.5	0.95	5468±307	71±5	4.6±0.1
RRT*	0.55	8402±2566	40±14	4.7±0.9	0.7	9035±2673	70±10	4.4±1.2
BIT*	0.7	10351±4691	101±64	6.7±3.3	0.65	8865±3006	79±26	5.5±2.6
ABIT*	0.6	9636±5036	83±41	5.7±2.3	0.75	8107±3716	81±45	6.1±2.9
ours		-			1.0	67±19	65±4	4.0±0.6

述两种仪器的操作一方面需要保证试剂瓶或试管架竖直以避免化学试剂发生倾洒, 因此对末端姿态提出了约束。另一方面需要在多种仪器密集摆放的环境中避免发生碰撞, 并由于底盘定位误差和人为因素导致场景存在轻微变化。因此, 十分适用于我们所提出的轨迹规划方法。

实际实验的具体步骤为:

- (1) 机器人从初始位置移动到仪器附近;
- (2) 利用相机对仪器周围场景进行重建;
- (3) 在 Moveit! 中载入重建的场景和构建的路线图, 进行轨迹规划和操作任务;
- (4) 机器人返回初始位置。

在每次实验操作前, 机器人需要从初始位置移动到仪器附近, 操作完成后需要返回初始位置, 这样做是为了模拟机器人进行实际化学实验的操作时由于移动底盘的定位误差导致场景发生轻微变化的情况。在实际实验中的移动定位误差( $d_x, d_y, d_{rz}$ )的平均值为(3.23cm, 2.73cm, 3.12°)。其中  $d_x$ ,  $d_y$  和  $d_{rz}$  分别是 X 方向, Y 方向的平移误差和绕 Z 轴的旋转误差。

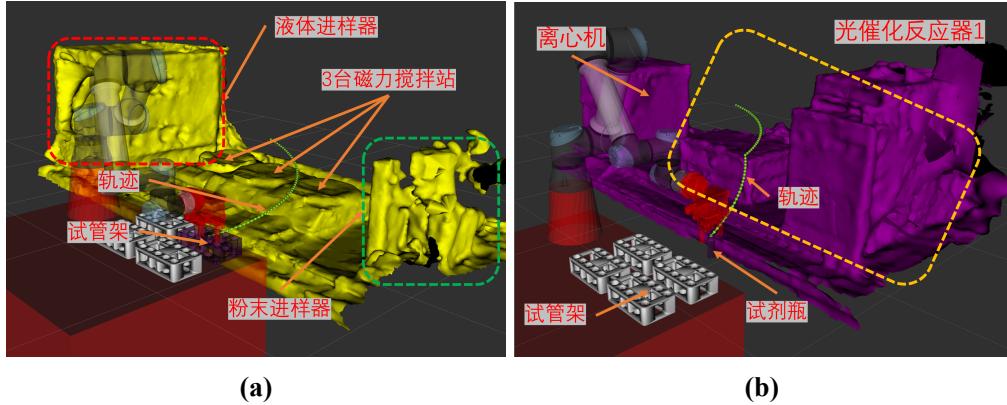


图 2.12 两种化学仪器的重建场景和所得到的轨迹 (a) 磁力搅拌站 (b) 光催化反应器

表 2.3 不同规划方法在仿真场景 2 中的规划成功率，规划时间，轨迹长度和轨迹执行时间

规划方法	成功率	规划时间 (ms)	无近似图		成功率	规划时间 (ms)	有近似图	
			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)
PRM	1.0	289±361	172±5	11.6±0.8	0.9	1129±2402	187±25	12.7±3.1
LazyPRM	0.95	621±1196	146±17	9.9±0.9	0.9	144±158	160±24	12.4±1.2
RRT-Connect	0.6	6491±3364	151±49	9.6±2.5	1.0	132±65	179±95	8.1±1.7
BiTRRT	0.9	3912±3029	113±23	7.7±0.9	1.0	97±17	148±70	6.7±1.2
PRM*	0.85	5897±309	198±77	12.2±3.6	1.0	5481±311	103±22	10.4±2.6
LazyPRM*	0.95	5874±645	112±16	8.9±0.9	1.0	5646±333	104±27	7.5±0.9
RRT*	0.05	10027	113	11.3	0.9	4967±4381	110±19	9.3±1.9
BIT*	0.9	8283±4571	117±29	8.5±1.9	0.95	7079±2987	106±19	7.7±1.1
ABIT*	0.95	10214±2585	142±76	8.7±1.6	1.0	9809±766	135±28	8.9±1.4
ours		-			1.0	115±16	123±30	8.3±0.8

表 2.4 不同规划方法在磁力搅拌站操作实验中的规划成功率，规划时间，轨迹长度和轨迹执行时间

规划方法	成功率	规划时间 (ms)	无近似图		成功率	规划时间 (ms)	有近似图	
			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)
PRM	1.0	561±1861	172±15	8.1±0.9	1.0	494±1491	142±16	6.8±0.9
LazyPRM	0.65	4308±3857	239±93	13.8±3.1	0.8	115±237	133±12	9.6±1.2
RRT-Connect	0.65	3349±2573	183±86	9.0±3.0	1.0	51±20	177±51	8.7±1.8
BiTRRT	0.8	4407±3010	147±26	7.2±1.2	1.0	53±56	148±22	7.3±1.6
PRM*	0.95	5935±482	192±56	8.1±1.3	1.0	5432±337	128±4	6.0±0.5
LazyPRM*	0.95	5610±461	156±39	8.4±1.8	1.0	5529±317	136±13	6.6±0.6
RRT*	0.05	10041	144	6.9	0.85	5294±4034	135±11	6.9±1.4
BIT*	0.95	8860±2321	157±49	7.6±1.6	0.95	8935±1662	149±41	7.1±1.6
ABIT*	0.75	9302±2098	266±370	13.6±16.9	0.7	9825±544	155±68	9.0±3.6
ours		-			1.0	80±29	116±9	6.4±0.8

表 2.5 不同规划方法在光催化反应器操作实验中的规划成功率，规划时间，轨迹长度和轨迹执行时间

规划方法	成功率	规划时间 (ms)	无近似图		成功率	规划时间 (ms)	有近似图	
			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)			轨迹长度 (cm)	轨迹执行时间 (s)
PRM	0.5	1898±1317	186±27	10.4±0.7	0.8	1297±1303	185±24	10.5±0.6
LazyPRM	1.0	472±1062	161±13	9.4±0.8	1.0	143±186	156±53	9.4±0.9
RRT-Connect	0.25	5604±2956	194±69	12.3±4.2	1.0	228±121	215±75	11.5±2.8
BiTRRT	0.65	5455±3095	189±76	11.1±2.5	1.0	97±15	142±15	8.8±1.3
PRM*	0.7	6000±619	149±6	8.8±2.4	1.0	5538±328	134±4	7.8±0.4
LazyPRM*	0.85	5880±520	151±42	12.7±3.2	0.5	5425±333	153±21	9.1±1.0
RRT*		失败			0.95	4864±3252	135±18	10.1±1.6
BIT*	1.0	9366±2515	156±37	9.4±1.2	1.0	8585±2602	182±86	10.4±2.2
ABIT*	1.0	9477±1579	183±61	10.2±2.1	1.0	9641±1217	161±44	10.3±1.6
ours		-			1.0	117±52	135±8	7.9±0.5

### 2.3.3 实验结果

图2.11和图2.12分别展示了仿真场景和实际实验中下所提出方法得到的轨迹，所得到的轨迹均使用浅绿色曲线表示。

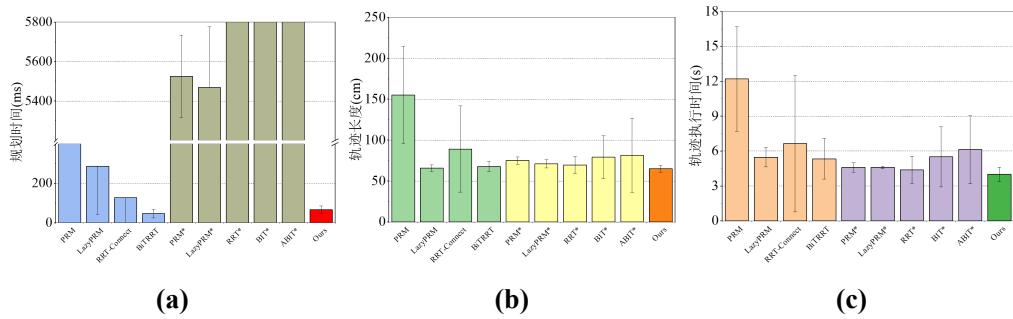


图 2.13 仿真场景 1 中不同规划方法在近似图上的规划时间，轨迹长度和执行时间 (a) 规划时间 (b) 轨迹长度 (c) 轨迹执行时间

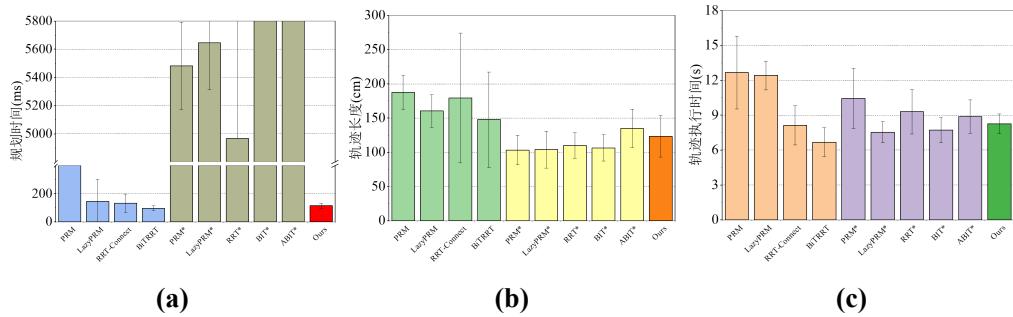


图 2.14 仿真场景 2 中不同规划方法在近似图上的规划时间，轨迹长度和执行时间 (a) 规划时间 (b) 轨迹长度 (c) 轨迹执行时间

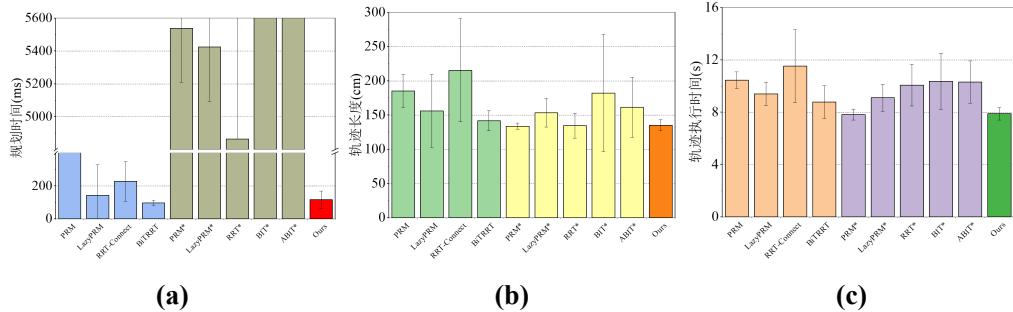


图 2.15 磁力搅拌站操作实验中不同规划方法在近似图上的规划时间，轨迹长度和执行时间 (a) 规划时间 (b) 轨迹长度 (c) 轨迹执行时间

表2.2-2.5展示了不同规划方法分别在有近似图和无近似图时的规划成功率，规划时间，轨迹长度和轨迹执行时间。图2.13-2.16展示了不同规划方法在近似图上获得的轨迹的长度和执行时间的对比情况。在表2.2-2.5和图2.13-2.16中，均使用平均值±标准偏差进行表示，并且‘-’表示无数据。

从表2.2-2.5和图2.13-2.16中可以看出，在没有近似图的情况下，非渐近最优算法的规划时间为2-6秒且成功率低于80%。然而，当利用近似图时，这些

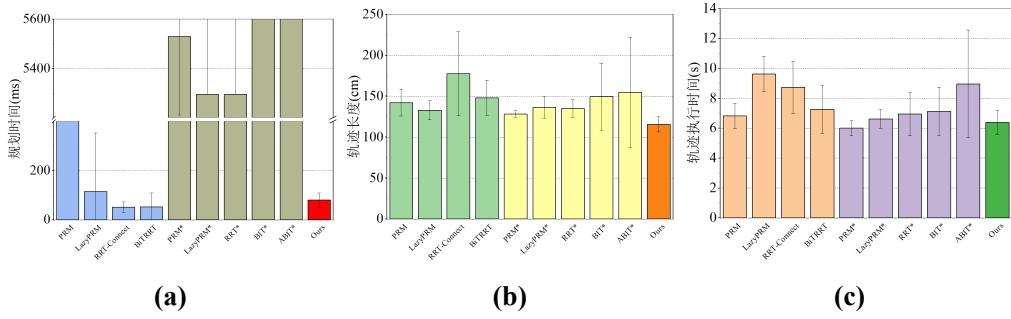


图 2.16 光催化反应器操作实验中不同规划方法在近似图上的规划时间，轨迹长度和执行时间 (a) 规划时间 (b) 轨迹长度 (c) 轨迹执行时间

算法的规划时间显著降低到 300 毫秒以下，成功率通常超过 90%。此外，在所有方法都使用近似图的情况下，本章所提出的方法确保了 100% 的成功率，并加快了规划速度（仅略慢于 BiTRRT）。并且相比非渐进最优算法具有更高和更稳定的轨迹质量，和渐进最优类算法的轨迹质量和稳定性基本相同。

## 2.4 本章小结

本章对约束流形的近似图进行了定义，设计了近似图的离线构建和在线采样方法，并利用 PRM\* 进行路线图的构造，LazyPRM 进行在线轨迹规划。实验表明基于约束流形近似图的 PRM 方法能够很好地在复杂且相对固定场景中进行受约束的轨迹规划。与现有的一些基于采样的轨迹规划方法对比，所提出的方法能够获得更快的轨迹规划速度，保证轨迹的质量和多次规划所得到轨迹的一致性。