使用散度定理求解多边形的面积

散度定理:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}}\, \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s.$$

二维多边形准备工作:

- 多边形的被积函数为 1
- $\vec{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} = 2$
- p_i 是多边形的节点，$\vec{n}$ 是外法向量, e_i 代表第i 条边.

？？ 这里的 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 是边界上的点

因此，多边形的面积为:

$$\begin{aligned}
\int_p 1\, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_p \nabla \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\partial p} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \sum \int_{e_i} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \sum \int_{e_i} [[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - p_i] + p_i] \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \sum \int_{e_i} [\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - p_i] \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s + \frac{1}{2} \sum \int_{e_i} p_i \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2} \sum \int_{e_i} p_i \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

例子: 用散度定理求解三角形的面积

三角形的三个顶点分别是 $(0,0),(2,0),(0,1)$,三个边对应的外法向量分别为 $(0，-1)，(2,1),(-1,0)$.

因此，三角形的面积为:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \sum \int_{e_i} p_i \cdot \vec{n}\, \mathrm{d} \\
&= \frac{1}{2}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}) \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

In [ ]:

```
1
```