曲面有限元及其应用

刘江刚　龚欣

September 21, 2018

预备知识

连续的曲面 S

设 S 是一个闭曲面, 所以 $\partial S=\varnothing$, 所以 S 把 $\mathbb{R}^3$ 分成三个不同的集合: 曲面内部的点、曲面上的点和曲面外部的点, 分别表示为 Ω_-、Ω_0 和 Ω_+. 对于任意的 $x\in\mathbb{R}^3$, 记 $\operatorname{dist}(x,S)=\min\limits_{y\in S}|x-y|$ 为 x 和 S 之间的距离,其中 $|\cdot|$ 为标准的欧氏距离. 我们可以定义一个带状区域:$U:=\left\{x\in\mathbb{R}^3|\operatorname{dist}(x,S)<\delta\right\}$, 其中 $\delta>0$ 且要足够小, 使得可以定义一个唯一的符号距离函数 $d:U\to\mathbb{R}$, 满足如下性质:

$$\begin{cases} d\in C^3(U),\\ |d(x)|=\operatorname{dist}(x,S), \quad \forall x\in U,\\ d(x)<0, \quad \forall x\in\Omega_-\cap U,\\ d(x)=0, \quad \forall x\in\Omega_0\cap U,\\ d(x)>0, \quad \forall x\in\Omega_+\cap U, \end{cases} \tag{1}$$

对于任意的 $x\in U$, 可视 S 为符号距离函数的零水平集.

记 ∇ 为 $\mathbb{R}^3$ 中通常意义下的梯度算子,$\nabla d(x)\in\mathbb{R}^3$ 为 $d(x)$ 的梯度,$\boldsymbol{H}(x):=\nabla^2 d(x)\in\mathbb{R}^{3\times3}$ 为 $d(x)$ 的 Hessian 矩阵. 对于任意的 $x\in U$, 记 y 为 S 上离 x 最近的点, 也即 $|d(x)|=|x-y|$. 因为 $d(x)$ 是符号距离函数, 且 S 是它的零水平集, 易知 $\nabla d(x)$ 是 S 在 y 处的单位外法向向量, 即 $|\nabla d(x)|=1$. 对于任意的 $x\in U$, 记 $\boldsymbol{n}(x)=\nabla d(x)$, 我们可以定义如下唯一的投影 $\mathcal{P}_0:U\to S$:

$$\mathcal{P}_0(x):=x-d(x)\boldsymbol{n}(x) \quad (1)$$

对于 $v\in C^1(S)$, 因为 S 是 C^3 的, 我们可以把 v 扩展到 $C^1(U)$, 且仍记为 v. 定义 v 在 S 上的切向梯度为

$$\nabla_S v=\nabla v-(\nabla v\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}=(I-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^t)\nabla v=\boldsymbol{P}\nabla v\in\mathbb{R}^3$$

其中 $\boldsymbol{P}(x)=(I-\boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^t)(x)$ 是到点 $x\in S$ 切平面上的投影算子, 因此有 $\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$. 注意到这里我们用 v 的扩展来定义曲面梯度. 然而, 可以证明 $\nabla_S v$ 的定义只依赖 v 的 S 上的值而不是 v 的扩展, 也即 ∇_S 是一个内蕴算子.

类似地, 对于一个向量场 $\boldsymbol{v} \in (C^1(S))^3$, 我们也可以把它扩展到 $(C^1(U))^3$ 上去, 并定义 $\boldsymbol{v}$ 在 S 上的切向散度为

$$\nabla_S \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v} - \boldsymbol{n}^t \nabla \boldsymbol{v} \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$$

曲面 S 上的 Laplace-Beltrami 算子定义如下:

$$\Delta_S v = \nabla_S \cdot (\nabla_S v) = \Delta v - (\nabla v \cdot \boldsymbol{n})(\nabla \cdot \boldsymbol{n}) - \boldsymbol{n}^t \nabla^2 v \boldsymbol{n} \in \mathbb{R}$$

其中 $v \in C^2(S)$,$\nabla^2 v$ 是 v 的 Hessian 矩阵 (扩展为 $C^2(U)$ 函数)

离散的曲面 S_h 和网格 $\mathcal{T}_h$

记 $S_h \subset U$ 是由三角形单元 τ_h 组成的多面体面, 即 S_h 逼近曲面 S, 我们假设 S_h 的这些三角形单元是正则的, 单元尺寸是拟一致的, 且它们的顶点都在曲面 S 上. 其中 $\mathcal{N}_h = \{x_i\}$ 为 S_h 所有顶点的集合,$\mathcal{T}_h = \{\tau_h\}$ 为所有三角形单元的集合,$\mathcal{E}_h = \{E\}$ 为所有边的集合. 对于任意的 $\tau_h \in \mathcal{T}_h$, 记 $\boldsymbol{n}_h$ 为 S_h 在 τ_h 上的单位外法向向量. 对于 $v_h \in C(S_h)$ 和 $v_h|_{\tau_h}$, 我们有

$$\nabla_{S_h} v_h|_{\tau_h} := \nabla v_h - (\nabla v_h \cdot \boldsymbol{n}_h)\boldsymbol{n}_h = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_h \boldsymbol{n}_h^t)\nabla v_h = \boldsymbol{P}_h \nabla v_h \in \mathbb{R}^3$$

其中 $\boldsymbol{P}_h = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{n}_h \boldsymbol{n}_h^t \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. 显然 $\nabla_{S_h} v_h \in (L^2(S_h))^3$

如果限制投影 $\mathcal{P}_0 : U \to S$ 到 S_h 上, 就得到一个从 S_h 到 S 的连续可微的双射, 仍记为 $\mathcal{P}_0$. 对于任意的 $\tau_h \in \mathcal{T}_h$, 我们可以得到一个曲面三角形 $\tau := \mathcal{P}_0(\tau_h)$, 并记所有的曲面三角形集合为 $\mathcal{T}_S$.

下面我们建立定义在 S 和 S_h 函数之间的关系. 借助双射投影 $\mathcal{P}_0$, 可以由函数 $v : S \to \mathbb{R}$ 唯一地引入另一个函数 $\bar{v} : S_h \to \mathbb{R}$. 对于所有的 $x \in S_h$, 有 $\bar{v}(x) = v(\mathcal{P}_0(x))$. 对于任意的 $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ 和函数 $v \in C^1(\mathcal{P}_0(\tau_h))$, 我们有

$$\nabla_{S_h} \bar{v}(x) = (\boldsymbol{P}_h(\boldsymbol{I} - d\boldsymbol{H})\boldsymbol{P})(x) \nabla_S v(\mathcal{P}_0(x)) \quad \forall x \in \tau_h.$$

反过来, 一个函数 $v_h : S_h \to \mathbb{R}$ 也可以唯一的引入一个函数 $\tilde{v}_h : S \to \mathbb{R}$, 对于所有的 $x \in S$, 有 $\tilde{v}_h(x) = v_h(\mathcal{P}_0^{-1}(x))$. 对于任意的 $\tau_h \in \mathcal{T}_h$ 和函数 $v_h \in C^1(\tau_h)$ 让 $\tau = \mathcal{P}_0(\tau_h)$, 可得

$$\nabla_S \tilde{v}_h(x) = (\boldsymbol{I} - d\boldsymbol{H})^{-1} \left(\boldsymbol{I} - \frac{\boldsymbol{n}_h \boldsymbol{n}^t}{\boldsymbol{n}^t \boldsymbol{n}_h} \right) \nabla_{S_h} v_h(\mathcal{P}_0^{-1}(x)) \quad \forall x \in \tau.$$

曲面线性有限元

对于三角形 $\tau_h \in \mathcal{T}_h$, 记 $\{\lambda_i\}$ 为 τ_h 的重心坐标. 记 $\mathcal{V}_h$ 为 S_h 上的连续分片线性有限元空间, 也即对于任意的 $v_h \in \mathcal{V}_h$ 和 $\tau_h \in \mathcal{T}_h$, v_h 在 S_h 上连续, 且有 $v_h|_{\tau_h} \in \mathrm{span}\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$. 我们可定义 S 上的提升空间

$$\tilde{V}_h \;=\; \{\tilde{v}_h \,|\, \tilde{v}_h := v_h \circ \mathcal{P}_0^{-1}, \text{其中} v_h \in \mathcal{V}_h\},$$

其中 $\mathcal{P}_0 : S_h \to S$ 为定义在 (1) 中的双射. 对于 $f \in L^2(S)$, 记

$$f_h(x) = \bar{f}(x) - \frac{1}{|S_h|} \int_{S_h} \bar{f} \,\mathrm{d}\sigma_h, \tag{2}$$

其中 $|S_h|$ 为 S_h 的总面积. 那么有 $\int_{S_h} f_h(x) \,\mathrm{d}\sigma_h = 0$, 且下列方程存在唯一的有限元解 $u_h \in \mathcal{V}_h$, 满足 $\int_{S_h} u_h \,\mathrm{d}\sigma_h = 0$

$$\int_{S_h} \nabla_{S_h} u_h \cdot \nabla_{S_h} v_h \mathrm{d}\sigma_h = \int_{S_h} f_h v_h \mathrm{d}\sigma_h \quad \forall v_h \in \mathcal{V}_h$$

曲面高次元

符号说明

S	$\mathbb{R}^3$ 空间中的曲面
$K \subset \mathbb{R}^2$	二维空间中的标准单元
$\mathbf{u} = (u, v)^T$	二维空间中的坐标系
$\tau_h \subset R^3$	三维空间中的尺寸为 h 的平面三角形
$\mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \tau_h$	τ_h 上的一个点
$\mathcal{P}_0$	S 邻近区域到 S 的投影
$\mathbf{x}_i, i = 1, \cdots, n_{dof}$	τ_h 上 p 次 Lagrangian 基函数对应的自由度坐标点
$\tau_p \subset \mathbb{R}^3$	定义在 τ_h 上的 p 次多项式曲面三角形
$\mathbf{x}_p = (x_p, y_p, z_p)^T \in \tau_p$	τ_p 上一个点的三维坐标
$\tau_S \subset \mathbb{R}^3$	把 τ_h 投影到曲面 S 上的曲面三角形
$\mathbf{x}_S = (x_S, y_S, z_S)^T \in \tau_S$	τ_S 上一个点的三维坐标
$\varphi_i(\mathbf{x})$	定义在 τ_h 上第 i 个 Lagrangian 基函数

τ_h τ_p 和 τ_s 之间关系

对于 τ_p 上的任意一点 $\mathbf{x}_p$, 存在一点 $\mathbf{x} \in \tau_h$,使得

$$\mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{x}_i \varphi_i(\mathbf{x})$$

进一步,存在标准参考单元 K 中存在一点 $\mathbf{u} = (u, v)$,可得

$$\mathbf{x}(u, v) = \lambda_0 \mathbf{x}_0 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$$

其中 $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 为 τ_h 的三个顶点,

$$\lambda_0 = 1 - u - v, \quad \lambda_1 = u, \quad \lambda_2 = v$$

对于 τ_S 上的任意一点 $\mathbf{x}_S$, 存在 τ_p 上的一点 $\mathbf{x}_p$,使得

$$\mathbf{x}_S = \mathcal{P}_0(\mathbf{x}_p)$$

$\mathbf{x}$ 关于 (u, v) 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}} = [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0]$$

$\mathbf{x}_p$ 关于 $\mathbf{x}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \begin{bmatrix} x_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ y_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ z_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \end{bmatrix}$$

则 $\mathbf{x}_p$ 关于 $\mathbf{u}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} = [\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}] = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \begin{bmatrix} x_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ y_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \\ z_i \nabla_{\mathbf{x}} \varphi_i(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0] \tag{2}$$

记

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_p = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} \mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u} \mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v} \mathrm{d}v,$$

其中 $\mathrm{d}\mathbf{u} = [\mathrm{d}u, \mathrm{d}v]^T$. 进一步可得曲面三角形 τ_p 上的第一基本形式

$$I =< \mathrm{d}\mathbf{x}_p, \mathrm{d}\mathbf{x}_p >= \mathrm{d}\mathbf{u}^T \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathbf{u}$$

其中

$$g_{11} =< \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u} >, g_{12} =< \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v} >, g_{22} =< \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v} >,$$

定义 τ_p 上的基函数如下

$$\varphi_{p,i}(\mathbf{x}_p) = \varphi_i(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x}_p = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{x}_i \varphi_i(\mathbf{x})$$

则 $\varphi_{p,i}(\mathbf{x}_p)$ 在 τ_p 上的切向导数定义如下:

$$\nabla_{S_p}\varphi_{p,i} = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^T \nabla_{S_h}\varphi_i(\mathbf{x})$$

S 上曲面三角形的面积计算公式

$$\mathcal{P}_0(\mathbf{x}) := \mathbf{x} - d(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x})$$

对于 $\mathbf{x}_p \in \tau_p$, 存在 $\mathbf{x}_S \in S$, 有

$$\mathbf{x}_S = \mathcal{P}_0(\mathbf{x}_p) = \mathbf{x}_p - d(\mathbf{x}_p)\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p} = I - d(\mathbf{x}_p)H(\mathbf{x}_p) - \mathbf{n}(\mathbf{x}_p)\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)^T$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}$$

S 上的导数计算

考虑 τ_S 和 τ_p 的关系

则 $\mathbf{x}_S$ 关于 $\mathbf{u}$ 的 Jacobi 矩阵为

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p} = I - d(\mathbf{x}_p)H(\mathbf{x}_p) - \mathbf{n}(\mathbf{x}_p)\mathbf{n}(\mathbf{x}_p)^T$$

由于

$$\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} = [\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}] = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \begin{bmatrix} x_i \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i(\mathbf{x})^T \\ y_i \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i(\mathbf{x})^T \\ z_i \nabla_{\mathbf{x}}\varphi_i(\mathbf{x})^T \end{bmatrix} [\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0]$$

即，很容易计算

$$\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}$$

进一步可得到曲面 τ_S 上的第一基本形式记

$$\mathrm{d}\mathbf{x}_S = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v}\mathrm{d}v,$$

其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\mathbf{x}_S &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{u} \\
&= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}}\mathrm{d}\mathbf{u} \\
&= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u} &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial u} \\
\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v} &= \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{x}_p}\frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial v}
\end{aligned}$$

$$I = < \mathrm{d}\mathbf{x}_S, \mathrm{d}\mathbf{x}_S > = \mathrm{d}\mathbf{u}^T \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{12} & g'_{22} \end{bmatrix} \mathrm{d}\mathbf{u}$$

其中

$$g'_{11} = < \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u} >, g'_{12} = < \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial u}, \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v} >, g'_{22} = < \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v}, \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial v} >,$$

定义 τ_S 上的基函数如下

$$\varphi_{S,i}(\mathbf{x}_S) = \varphi_i(\mathbf{x})$$

其中

$$\mathbf{x}_S = \sum_{i=1}^{n_{dof}} \mathbf{x}_i \varphi_i(\mathbf{x})$$

则 $\varphi_{S,i}(\mathbf{x}_S)$ 在 τ_S 上的导数定义如下：

$$\nabla_{S_S}\varphi_{S,i} = \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}} \begin{bmatrix} g'_{11} & g'_{12} \\ g'_{12} & g'_{22} \end{bmatrix}^{-1} (\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}})^T \nabla_{S_h}\varphi_i(\mathbf{x})$$

设 $w(\mathbf{x}_S)$ 是定义在 S 上的函数,利用投影可以定义 S_p 上函数

$$\hat{w}(\mathbf{x}_p) = w(\mathcal{P}_0(x_p))$$

下面讨论如何计算 $\nabla_{S_p} w$.

$$\nabla_{S_p} \hat{w}(\mathbf{x}_p) = \frac{\partial \mathbf{x}_p}{\partial \mathbf{u}} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{w}_u \\ \hat{w}_v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{w}_u \\ \hat{w}_v \end{pmatrix} = (\frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \mathbf{u}})^T \nabla_{\mathbf{x}_S} w(x_S)$$